Билет 13.

Часть А. Теория

1 Линейное пространство L – множество, над элементами которого заданы операции сложения $(\vec{x}+\vec{y})$, где $\vec{x}, \vec{y}, (\vec{x}+\vec{y}) \in L$ и умножение на число $(\lambda\vec{x})$, где $\vec{x}, (\lambda\vec{x}) \in L$, $\lambda \in R$, причем выполняются аксиомы линейного пространства.

2. Собственные векторы линейного ~~пространства~~ оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Задачи.

3. $a_1=(1,-2,1)^T$; $a_2=(-2;-1;4)^T$, $a_3=(-3;-4;9)^T$, $a_4=(0;-5;6)^T$; R^3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \end{array}$$

$Rg=3 \Rightarrow$ базис $\{a_1; a_2; a_3\}$

$\dim L(a_1; a_2; a_3; a_4) = 3.$

4. $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\} = B$; R^2

$Q(x_1; x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$

$Q(y_1; y_2)$ в B' $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$Q(x_1; x_2) = x^T A x$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$Q(x_1; x_2) = (T_{B\to B'} x)^T A (T_{B\to B'} x) =$$
$$= x^T T_{B\to B'}^T A T_{B\to B'} x = x^T A' x$$

$A' = T_{B\to B'}^T A T_{B\to B'}$; $T_{B\to B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$Q(y_1, y_2) = 8y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_1y_2$.

5. $A: R^2 \to R^2$; $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

$A: \vec{a}_1 = (3; 11)^T; \vec{a}_2 = (1; 4)^T \to \vec{b}_1 = (0; 1)^T; \vec{b}_2 = (1; 0)$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$; $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A = B' \cdot B^{-1}$

$$B^{-1}: \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)_{4 \cdot \frac{11}{3}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & 3 \end{array}\right); \quad B^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

6. $\cancel{A}$ $3x^2+6y^2-4xy-f(x,y)$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \det(A-\lambda E)=0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=18-9\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-9\lambda+14=$$

$$=(\lambda-7)(\lambda-2)=0$$

$\lambda_1=2, \lambda_2=7 \Rightarrow f(x,y)=2(x')^2+7(y')^2$

$\lambda_1=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x-2y=0 \\ x=2y \end{matrix} \quad \vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2=7$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y=2x \quad \vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X=T\cdot X' \quad \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt5}(2x'+y') \\ y=\frac{1}{\sqrt5}(x'+2y') \end{cases}$$

$$2(x')^2 + 7(y')^2 = 0 \quad ; \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 4 = 14 > 0$$

положительно определена.