Репников Д.О. ИУ1-21. Билет 13.

Часть А.

Теория.

1. Открытая окрестность для точки или множества, это открытое множество, содержащее данную точку или данное множество.

Открытое множество - это множество, каждый элемент которого входит в него вместе с некоторой окрестностью.

2. Если функция $F(x,y,z)$ дифференцируема по переменным x, y, z в некоторой области D и $F'_z(x,y,z) \neq 0$, то ур-ие $F(x,y,z)=0$ определяет однозначную неявную функцию $z(x,y)$, также дифференцируемую

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

3. Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ и имеет экстремум в этой точке, то ее дифференциал равен нулю:

$$df(x_0;y_0)=0; \quad \begin{cases} f'_x(x_0;y_0)=0 \\ f'_y(x_0;y_0)=0. \end{cases}$$

4. $x^3+y^3+z^3=5xyz$; $A(2;1;1)$.

$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-5xyz$

$F'_x=3x^2-5yz$; $F'_x|_A=3\cdot 2^2-5\cdot 1\cdot 1=7$

$F'_y=3y^2-5xz$; $F'_y|_A=3-10=-7$

$F'_z=3z^2-5xy$; $F'_z|_A=3-10=-7$

Ур-ие плоскости:

$7(x-2)-7(y-1)-7(z-1)=0$

$x-y-z=0$

Ур-ие нормали

$$\frac{x-2}{7}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-1}{-7}$$

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{+1}=\frac{z-1}{+1}$$

5. $z=4y^3+2xy+x^2+3$

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=(4y^3+2xy+x^2+3)'_x=2y+2x=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x+12y^2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y+2x=0\\ 2x+12y^2=0\end{cases}$$

$12y^2-2y=0$

$2y(6y-1)=0$

$$\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=\frac{1}{6}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{1}{6}\\ y=\frac{1}{6}\end{cases}\end{array}\right.$$

Две точки: $M_1(0;0)$, $M_2\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2y+2x)'_x=2$

$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(12y^2+2x)'_y=24y$

$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(2y+2x)'_y=2.$

$M_1(0;0)$: $A=2$; $B=2$; $C=0$

$AC-B^2=-4<0$, не явл. точкой экстремума.

$M_2\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$: $A=2$; $B=2$; $C=4$

$AC-B^2=4\cdot 2-4=4>0$, $A>0$ $\Rightarrow$

точка $M_2\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$ является точкой минимума. Ответ.

6. $\begin{cases} z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4} \end{cases}$

$F(x;y;\lambda)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{\lambda}{x^2}+\frac{\lambda}{y^2}-\frac{\lambda}{4}$

$F'_x=-\frac{1}{x^2}-\frac{2\lambda}{x^3}=0$

$F'_y=-\frac{1}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=-2\lambda \\ \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=\frac{1}{4};\ \lambda=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

$F'_\lambda=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4}=0$

$\lambda = \sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $\lambda = -\sqrt{2}$

$\begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$ $\qquad\qquad$ $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$

$P_1(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$; $P_2(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ – стац. точки.

$F''_{xx} = \frac{2}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4}$

$F''_{xy} = 0$

$F''_{yy} = \frac{2}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4}$

$\lambda = \sqrt{2}$; $P_1(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$: $\begin{cases} F''_{xx} = \frac{2}{-2\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}} + \frac{6\cdot\sqrt{2}}{16\cdot 4} = \\ F''_{xy} = 0 \\ F''_{yy} = \frac{2}{-2\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}} + \frac{6\cdot\sqrt{2}}{16\cdot 4} \end{cases}$

$\begin{cases} F''_{xx} = \frac{3}{16\sqrt{2}} - \frac{2}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \\ F''_{xy} = 0 \\ F''_{yy} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$

$d^2F = \frac{\sqrt{2}}{32}dx^2 + \frac{\sqrt{2}}{32}dy^2 = \frac{\sqrt{2}}{32}(dx^2 + dy^2) > 0$

$\Rightarrow$ в т. $P_1(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$ условный минимум; $z_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$P_2(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$: $\lambda = -\sqrt{2}$ $\quad \begin{cases} F''_{xx} = -\frac{3}{16\sqrt{2}} + \frac{2}{16\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{32} \\ F''_{xy} = 0 \\ F''_{yy} = -\frac{\sqrt{2}}{32} \end{cases}$ $\qquad z_{max} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$

$d^2F = -\frac{\sqrt{2}}{32}(dx^2 + dy^2) < 0 \Rightarrow$ в т. $P_2(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ условный максимум.

Ответ: $z_{min}(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$z_{max}(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$