

Термашин С.С. №81-21 билет 15

Зад 1). Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окр-сти точки $M_0(x_0, y_0)$; кроме, быть может, самой этой точки. Если A называется пределом функции $z = f(x, y)$ или $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$ или, что то же самое, при $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовл. неравенства $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ влечется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Записывают:

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \text{ или } A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$$

Функция $z = f(x, y)$ (или $f(M)$) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она: - определена в этой точке и некоторой окр-ности;

- имеет предел $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$;

- этот предел равен значению функции

$z \in \mathbb{C}$ то. то $M_0, \bar{z}$.

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) \text{ или } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

§ 2

Задача. Ур-ни на:

- Уравнения касательной и-ти:

$$F'_x|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (x - x_0) + F'_y|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (y - y_0) + F'_z|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (z - z_0) = 0$$

- Ур-на нормали

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_{(x_0, y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{F'_y|_{(x_0, y_0, z_0)}} = \frac{z - z_0}{F'_z|_{(x_0, y_0, z_0)}}$$

§ 3

Если в стационарной точке $d^2 F > 0$, то функция

$z = f(x, y)$ имеет в данной точке условие

минимума; если же $d^2 F < 0$, то условие максимума;

если же $d^2 F = F''_{xx} dx^2 + 2F''_{xy} dx dy + F''_{yy} dy^2$

~~то~~ из ур-ния связи получаем:

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0, \quad dy = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} dx, \text{ поэтому в}$$

можно это же условие.

$\Sigma \equiv 4$

$$z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0 \quad \text{в точке } (1, 0, 1)$$

Найдем частные производные:

$$F(x, y, z) = z^3 + yz - xy^2 - x^3$$

$$F'_x = -y^2 - 3x^2 \quad F'_x|_M = -0^2 - 3 \cdot 1^2 = -3$$

$$F'_y = z - 2xy \quad F'_y|_M = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 1$$

$$F'_z = 3z^2 + y \quad F'_z|_M = 3 \cdot 1^2 + 0 = 3$$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (x - x_0) + F'_y|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (y - y_0) + F'_z|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (z - z_0) = 0$$

$$-3 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) + 3 \cdot (z - 1) = 0$$

$$-3x + y + 3z = 0$$

Уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_{(x_0, y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{F'_y|_{(x_0, y_0, z_0)}} = \frac{z - z_0}{F'_z|_{(x_0, y_0, z_0)}}$$

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 1}{3}$$

№5

$$z = 3 \ln v + 4 \ln y - xy - x - y.$$

Найти частные производные и воспользоваться необходимыми условиями экстр.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = (3 \ln v + 4 \ln y - xy - x - y)'_x = \frac{3}{x} - y - 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = (3 \ln v + 4 \ln y - xy - x - y)'_y = \frac{4}{y} - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} - y - 1 = 0 \\ \frac{4}{y} - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим систему.

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - y - 1 = 0 \\ \frac{4}{y} - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3-x}{x} \\ \frac{4}{\frac{3-x}{x}} - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 2 \\ x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \cdot \frac{4y}{3-x} - x - 1 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \text{ при } x \neq 3$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 1$$

$$M_1(1; 2) \text{ и } M_2(-3; -2)$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3}{x^2}; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{4}{y^2}$$

56

Задана функция $x^2 + y^2 = 6$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 6)$$

Найдем точки экстремума; миним. и макс.
Найдем точки экстремума на границе.

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ y_1 = -\sqrt{3} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\sqrt{3} \\ y_2 = \sqrt{3} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases} \begin{cases} x_3 = \sqrt{3} \\ y_3 = -\sqrt{3} \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x_4 = \sqrt{3} \\ y_4 = \sqrt{3} \\ \lambda_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Получим 4 точки

Найдем значения функции.

$$\begin{cases} L''_{xx} = 2\lambda \\ L''_{xy} = 0 \\ L''_{\lambda\lambda} = 2\lambda \end{cases}$$