

Подготовка к РК №1 по ЛА

Часть А

- 1) Найдите какой-нибудь базис и размерность линейной оболочки системы векторов

$$a_1 = (7, -6, 3)^T$$

$$a_2 = (1, -9, 3)^T$$

$$a_3 = (2, 1, 2)^T$$

$$a_4 = (1, 10, 5)^T$$

пространства $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 1 \\ -6 & -9 & 1 & 10 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -57 & 19 & 76 \\ 0 & -18 & -8 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & 4 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$$Rg = 3 \Rightarrow \text{базис} - \{a_1, a_2, a_3\}, \dim L(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3.$$

- 2) Найдите ортогональный базис линейной оболочки системы векторов $a_1 = (1, 0, 0, 0)^T$

$$a_2 = (1, 0, 0, 1)^T$$

$$a_3 = (1, 1, 1, 0)^T$$

евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ (скалярное произведение стандартное)

Процесс ортогонализации Грам-Шмидта

$$g_1 = a_1 = (1, 0, 0, 0)^T$$

$$g_2 = a_2 - \frac{(a_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 = \left\{ \begin{array}{l} (a_2, g_1) = (a_2, a_1) = 1 \\ (g_1, g_1) = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= (1, 0, 0, 1)^T - (1, 0, 0, 0)^T = (0, 0, 0, 1)^T$$

$$g_3 = a_3 - \frac{(a_3, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 - \frac{(a_3, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2 = \left\{ \begin{array}{l} (a_3, g_1) = (a_3, a_1) = 1 \\ \quad \quad \quad = 1 \\ (a_3, g_2) = 0 \\ (g_2, g_2) = 1 \end{array} \right\}$$

$$= (1, 1, 1, 0)^T - (1, 0, 0, 0)^T - 0 \cdot (0, 0, 0, 1)^T = (0, 1, 1, 0)^T$$

$$g_1 \perp g_2 \perp g_3 \Rightarrow (g_1, g_2) = (g_1, g_3) = (g_2, g_3) = 0$$

■

③! В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ пр-ва $\mathbb{R}^2$ кв. ф Q записывается как $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$. Найти выражение $Q(y_1, y_2)$ этой квадратичной формы в базисе

$$\vec{e}_1' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2' = 5\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ - матрица кв. ф.}$$

$$T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1' \quad \vec{e}_2'$

Так как кв. форма в матричной форме записи имеет вид $Q(x_1, x_2) = x^T A x$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Тогда при переходе к новому базису $x \rightarrow T_{B \rightarrow B'} x$ матрица кв. формы преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= (T_{B \rightarrow B'} x)^T A (T_{B \rightarrow B'} x) = \\ &= x^T T_{B \rightarrow B'}^T A T_{B \rightarrow B'} x = \\ &= x^T A' x, \text{ где} \end{aligned}$$

$$A' = T_{B \rightarrow B'}^T A T_{B \rightarrow B'}$$

$$T_{B \rightarrow B'}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-4 & -5+24 \\ 4+1 & -20-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 19 \\ 5 & -26 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+5 & -19-26 \\ -15-30 & 5 \cdot 19 + 6 \cdot 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -45 \\ -45 & 131 \end{pmatrix}$$

$$Q(y_1, y_2) = 8y_1^2 - 45 \cdot 2 \cdot y_1 y_2 + 131y_2^2$$

4. Базис $B' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ получается из правого ортонормированного базиса $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ пространства V_3 поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\vec{k}$. Базис $B'' = \{\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}''\}$ получается из базиса B' поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\vec{j}'$. Найдите матрицу перехода от базиса B к базису B'' .

1 : $B \rightarrow B'$ поворот $\curvearrowleft$ на $\varphi = 90^\circ$ вокруг $\vec{k}$

$$T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B' \rightarrow B''$ поворот $\curvearrowleft$ на $\psi = 90^\circ$ вокруг $\vec{j}'$

$$T_{B' \rightarrow B''} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{B \rightarrow B''} = T_{B \rightarrow B'} \cdot T_{B' \rightarrow B''} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Линейный оператор A , действующий на некотором двумерном пространстве, в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A$.

Найдите матрицу этого линейного оператора в базисе $\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases}$

$$T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = (T_{B \rightarrow B'})^{-1} A T_{B \rightarrow B'}$$

$$\det T_{B \rightarrow B'} = -1 - 1 = -2$$

$$\begin{matrix} A_{11} = -1 & A_{21} = -1 \\ A_{12} = -1 & A_{22} = 1 \end{matrix} \Rightarrow (T_{B \rightarrow B'})^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(T_{B \rightarrow B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \blacksquare$$

6) Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 12 & -22 \\ 11 & -21 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -22 \\ 11 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & -22 \\ 11 & -21-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(12-\lambda)(-21-\lambda) + 22 \cdot 11 = 0$$

$$\lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 10) = 0$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -10$. с.з. матрицы лям. оператора

$$\underline{\lambda_1 = 1}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 11x_1 - 22x_2 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2x_2$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rg} = 1 \Rightarrow \begin{array}{ll} 1 \text{ баз. пер.} & x_1 - \text{баз.} \\ 1 \text{ своб. пер.} & x_2 - \text{св. пер.} \end{array} \quad \begin{aligned} x_2 &= C_1 \\ x_1 &= 2C_1 \end{aligned}$$

$$X_1^{\lambda=1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{E^{\lambda=1}}$$

$$\underline{\lambda_2 = -10}$$

$$\begin{pmatrix} 22 & -22 \\ 11 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 22x_1 - 22x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_2$$

$$\begin{pmatrix} 22 & -22 \\ 11 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rg} = 1 \Rightarrow \begin{array}{ll} 1 \text{ баз. пер.} & x_1 - \text{баз. пер.} \\ 1 \text{ своб. пер.} & x_2 - \text{св. пер.} \end{array} \quad \begin{aligned} x_1 &= C_2 \\ x_2 &= C_2 \end{aligned}$$

$$X_2^{\lambda_2=-10} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{E^{\lambda=-10}}$$

$$X^{\lambda} = C_1 E_1^{\lambda_1} + C_2 E_2^{\lambda_2} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1^{\lambda_1} + X_2^{\lambda_2}$$

7. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $f(x, y) = 9x^2 + 24xy + 16y^2$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить ав-ся ли эта форма положительно, отрицательно, отрицательно-определённой или неопределённой.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(9-\lambda)(16-\lambda) - 144 = 0$$

$$9 \cdot 16 - 9\lambda - 16\lambda + \lambda^2 - 144 = 0$$

$$\lambda^2 - 25\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 25) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25 \text{ с.з.} \Rightarrow f(x, y) = 25 \cdot y'^2 \text{ — кан. вид кв. ф.}$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 9x + 12y = 0, \\ 12x + 16y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ Rg} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x - \text{св. пер.} \\ y - \text{ав. пер.} \end{matrix}$$

$$3x + 4y = 0$$

$$3x = -4y$$

$$x = -\frac{4}{3}y$$

$$y = c$$

$$x = -\frac{4}{3}c$$

$$X_1^{\lambda_1=0} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = 3; \quad E_1^{\lambda_1=0} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

нормируем $\bar{e}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = 25$$

$$\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} -16x + 12y = 0 \\ 12x - 9y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rg} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x \text{ с. пер.} \\ y \text{ св. пер.} \end{matrix}$$

$$-4x + 3y = 0$$

$$y = c$$

$$4x = 3y$$

$$x = \frac{3}{4}c$$

$$x = \frac{3}{4}y$$

$$X_2^{\lambda_2=25} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = 4; \quad E_2^{\lambda_2=25} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

нормируем $\bar{e}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ортонормальная матрица

$$V = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ортонормальное преобразование

$$X = V X'$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} (-4x' + 3y') \\ y = \frac{1}{5} (4x' + 3y') \end{cases}$$

Критерий Sylvester и его следствие

~~$$\Delta = 9A$$~~

$$\Delta_{\text{det}} = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{vmatrix} = 9 \cdot 16 - 144 = 144 - 144 = 0$$

Кв. форма вырождена.

~~Условий Sylvester четного порядка равно-
нулю $\Rightarrow$ по следствию 2 кв. ф. знако-
переменна $\Rightarrow$ ав-ся знак ~~неопред.~~~~

8

Привести кв. ф. $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить ав-ся ли эта форма положительно определенной, отрицательно определенной или неопределенной.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2x_3 = \\ &= \left\{ (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + \right. \\ &\quad \left. + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (2x_1)^2 + (2x_2)^2 + (2x_3)^2 + 2 \cdot 2x_1 \cdot 2x_2 + 2 \cdot 2x_1 \cdot 2x_3 + \\ &+ 2 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3 - 2 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3 + 9x_2x_3 = \end{aligned}$$

$$= (2x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + x_2 x_3 = \left\{ \begin{array}{l} x_1' = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 = x_2' + x_3' \\ x_3 = x_2' - x_3' \end{array} \right\} =$$

$$= x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - \text{кан. вид. кв. формы.}$$

$$2x_1 = x_1' - 2x_2 - 2x_3 = x_1' - 2x_2' - 2x_3' - 2x_2' + 2x_3' =$$

$$= x_1' - 4x_2'$$

$$x_1 = \frac{1}{2} x_1' - 2x_2'$$

Итак :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} x_1' - 2x_2' \\ x_2 = x_2' + x_3' \\ x_3 = x_2' - x_3' \end{array} \right.$$

линейное
преобразование.

Критерий Сильвестра и его следствие.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

$$\det A = \cancel{4^3} + 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 -$$

$$-\cancel{4^3} - 4 \cdot 3^2 - 4^2 \cdot 3 =$$

$$= 16 \cdot 6 - 4(9 + 16) =$$

$$= 96 - 4 \cdot 25 = -4 \neq 0.$$

главный минор четного
порядка равен нулю
 $\Rightarrow$ по следствию 2
кв. форма неопределена