

Программа для подготовки к рубежному контролю № 1
по линейной алгебре

Теоретические вопросы
(как они сформулированы в билетах рубежного контроля)

Часть А

1. Дать определение линейного (векторного) пространства.
2. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
3. Дать определение базиса и размерности линейного пространства.
4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому.
5. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.
6. Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов.
7. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.
8. Записать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
9. Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства.
10. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов.
11. Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора.
12. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
13. Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора.
14. Сформулировать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.
15. Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе.
16. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора.

17. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям.
18. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.
19. Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы.
20. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.
21. Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.
22. Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределенной квадратичной формы.
23. Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм.
24. Сформулировать закон инерции квадратичных форм.

Часть Б

1. Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.
2. Доказать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
3. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
4. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.
5. Доказать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.
6. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Примеры задач

Часть А

1. Найти какой-нибудь базис и размерность линейной оболочки системы векторов $\mathbf{a}_1 = (7, -6, 3)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, -9, 3)^T$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 2)^T$, $\mathbf{a}_4 = (1, 10, 5)^T$ пространства \mathbb{R}^3 .

2. Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 0, 1)^T$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 0)^T$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 (скалярное произведение стандартное).

3. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ пространства \mathbb{R}^2 квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$. Найти выражение $Q(y_1, y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\mathbf{e}'_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = 5\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2$.

4. Базис $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ получается из правого ортонормированного базиса $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ пространства V_3 поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора \mathbf{k} . Базис $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}''\}$ получается из базиса \mathcal{B}' поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора \mathbf{j}' . Найти матрицу перехода от базиса \mathcal{B} к базису \mathcal{B}'' .

5. Линейный оператор A , действующий на некотором двумерном пространстве, в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.

6. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 12 & -22 \\ 11 & -21 \end{pmatrix}$.

7. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $9x^2 + 24xy + 16y^2$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределенной.

8. Привести квадратичную форму $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределенной.

Часть Б

1. В линейном пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B} = \{1, t - 1, (t - 1)^2, (t - 1)^3\}$ к базису $\mathcal{B}' = \{1, t + 1, (t + 1)^2, (t + 1)^3\}$.

2. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $3x^2 - 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат.

Примерный вариант билета рубежного контроля

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач; оценка 21 балл

Теория

1. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.

2. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.

Задачи

3. Вектор $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты $(1, -2)^T$ в базисе $\mathbf{a}_1 = (3, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1)^T$. Найти его координаты в базисе $\mathbf{b}_1 = (3, 2)^T$, $\mathbf{b}_2 = (5, 4)^T$.

4. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ пространства \mathbb{R}^2 квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$. Найти выражение $Q(y_1, y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$.

5. Найти матрицу линейного оператора $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, если A переводит векторы $\mathbf{a}_1 = (8, -5)^T$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 2)^T$ в векторы $\mathbf{b}_1 = (-5, 4)^T$, $\mathbf{b}_2 = (7, -3)^T$ соответственно.

6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма $-2x_1^2 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_4^2$ положительно определённой, отрицательно определённой, неопределенной.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;

необходимо решить задачу; оценка 5–14 баллов

Теория

7. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.

Задача

8. Привести кривую $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y = 0$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.