Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Конспект лекций

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 8

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ КАК ОТОБРАЖЕНИЯ

Метрика и окрестности в $\mathbb{R}^n$. Открытые, замкнутые, ограниченные и связные множества в $\mathbb{R}^n$. Граница множества. Понятие области в $\mathbb{R}^n$. Скалярная функция нескольких переменных (ФНП) как отображение $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Линии и поверхности уровня. Предел ФНП. Бесконечно малые и бесконечно большие ФНП. Непрерывность ФНП в точке, на множестве. Свойства ФНП, непрерывных на множестве (без док-ва).

8.1. Открытые и замкнутые множества

Множество упорядоченных наборов $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ (*кортежей*) из n действительных чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ есть n-я декартова степень $\mathbb{R}^n$ множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. Такие наборы уже использовались как элементы линейного арифметического пространства, которое также принято обозначать через $\mathbb{R}^n$. В этой книге упорядоченные наборы действительных чисел будут активно использоваться, но в несколько ином контексте. В рамках линейной алгебры элементы множества $\mathbb{R}^n$ часто называют ***арифметическими векторами*** и используют в *линейных операциях.* Мы не только будем рассматривать их как объекты линейных операций, но и оценивать степень их близости, характеризуя ее ***расстоянием в*** $\mathbb{R}^n$. В таком контексте элементы $\mathbb{R}^n$ удобнее называть не векторами, а точками. Это соответствует традиции, согласно которой числа, т.е. элементы числовой оси, также называют точками. В этой книге элементы линейного пространства $\mathbb{R}^n$ мы в зависимости от ситуации называем или арифметическими векторами, или точками: первый термин связан с операциями линейного пространства, второй — с топологическими аспектами в $\mathbb{R}^n$. Как и в случае одного переменного, элементы $\mathbb{R}^n$ будем обозначать малыми буквами латинского алфавита: x, y, a, b, ... От этого соглашения мы в некоторых случаях будем отступать и обозначать точки «в стиле аналитической геометрии» как P, Q, ..., отражая тем самым связь с точками пространства или плоскости.

Для элемента $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ будем называть ***координатами точки x в*** $\mathbb{R}^n$. Это соглашение отражает аналогию с двумерным и трехмерным случаями: элемент $(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3$ можно рассматривать как набор декартовых (аффинных) координат точки в пространстве, если в нем зафиксирована некоторая декартова (аффинная) система координат. Расстоянием $\rho(x,y)$ между точками $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и $y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ назовем число

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}. \tag{8.1}$$

Вспомним, что $\mathbb{R}^n$ — это евклидово арифметическое пространство со скалярным произведением

$$(x,\ y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

где $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $y = (y_1,\ \ldots,\ y_n)$. В евклидовом пространстве можно ввести *евклидову норму*

$$|x| = \sqrt{(x,\ x)}$$

и в соответствии с этой нормой расстояние

$$\rho(x,y) = |x-y|,$$

которое совпадает с расстоянием, введенным согласно формуле (8.1).

Обозначим через a произвольную точку из $\mathbb{R}^n$, и пусть ε — положительное число.

Определение 8.1. Множество $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ тех точек из $\mathbb{R}^n$, расстояние от которых до точки $a \in \mathbb{R}^n$ меньше ε, $\varepsilon > 0$, т.е. множество

$$\mathrm{U}(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \rho(x,a) < \varepsilon\},$$

называют ***ε-окрестностью точки*** a, а множество

$$\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\varepsilon) = \mathrm{U}(a,\varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ 0 < \rho(x,a) < \varepsilon\} \quad —$$

проколотой ε-окрестностью точки a.

Проколотая ε-окрестность точки a состоит из всех точек ее ε-окрестности, кроме самой точки a.

В случае $n = 1$ ε-окрестность $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ точки $a \in \mathbb{R}$ представляет собой интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ с серединой в точке a, имеющий длину 2ε (рис. 8.1, *а*). Если $n = 2$, то ε-окрестность $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ точки $a \in \mathbb{R}^2$ состоит из точек плоскости, которые лежат внутри окружности радиуса ε с центром в точке a (рис. 8.1, *б*). Если же $n = 3$, то ε-окрестность $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ точки a состоит из точек, которые расположены внутри сферы радиуса ε с центром в точке a (рис. 8.1, *в*). В общем случае множество точек $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, для которых $\rho(x,a) = \varepsilon$, называют ***n-мерной сферой*** радиуса ε с центром в точке a, так что можно сказать так: ε-окрестность точки $a \in \mathbb{R}^n$ — это ***открытый n-мерный шар*** радиуса ε с центром в точке a, т.е. множество точек, лежащих внутри $(n-1)$-мерной сферы радиуса ε с центром в точке a.

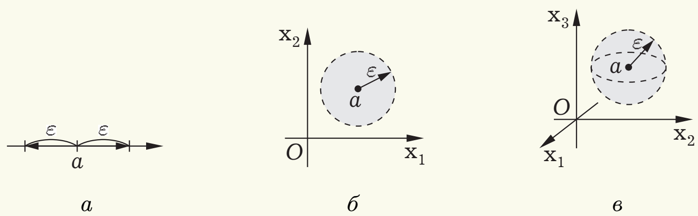

Рис. 8.1

Отметим свойство вложенности ε-окрестностей одной и той же точки.

Теорема 8.1. Для любой точки $a \in \mathbb{R}^n$ при $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ ее ε_1-окрестность содержится в ее ε_2-окрестности.

◄ Пусть x — произвольная точка из ε_1-окрестности $\mathrm{U}(a,\varepsilon_1)$ точки a. Согласно определению 8.1, расстояние между точками x и a удовлетворяет неравенству $\rho(x,a) < \varepsilon_1$. Так как $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$, то и $\rho(x,a) < \varepsilon_2$. Значит, согласно определению ε_2-окрестности, точка x принадлежит ε_2-окрестности $\mathrm{U}(a,\varepsilon_2)$ точки a. Итак, доказано, что при $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ любая точка ε_1-окрестности точки a принадлежит ε_2-окрестности точки a: $\mathrm{U}(a,\varepsilon_1) \subset \mathrm{U}(a,\varepsilon_2)$. ►

Определение 8.2. Точку a множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называют ***внутренней точкой этого множества***, если существует ε-окрестность $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ точки a, целиком содержащаяся в A: $\mathrm{U}(a,\varepsilon) \subset A$. Множество всех внутренних точек A называют ***внутренностью множества*** A и обозначают $\operatorname{Int} A$. Если каждая точка множества A является его внутренней точкой, то само множество A называют ***открытым множеством***.

Замечание 8.1. Пустое множество по определению считают открытым.

На рис. 8.2 множество A на плоскости ограничено сплошной и штриховой линиями. Подразумевается, что точки сплошной линии принадлежат множеству A, а штриховой — нет. Точка P является внутренней точкой множества A, а точки лежащие на сплошной линии, например точка C, — нет. Это значит, что множество A не является открытым, так как содержит точки, не являющиеся для A внутренними.

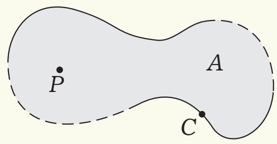

Рис. 8.2

Пример 8.1. Простейшими открытыми множествами в $\mathbb{R}^n$ являются ε-окрестности точек. Действительно, рассмотрим произвольную точку $a \in \mathbb{R}^n$ и ее ε-окрестность $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$. Если $x \in \mathrm{U}(a,\varepsilon)$, то по определению 8.1 имеем $\rho(x,a) < \varepsilon$. Выберем положительное число $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x,a)$. Если точка y принадлежит ε_1-окрестности $\mathrm{U}(x,\varepsilon_1)$ точки x, то $\rho(y,x) < \varepsilon_1$. Согласно *неравенству треугольника*,

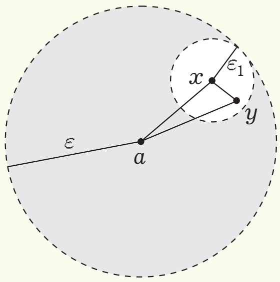

Рис. 8.3

$$\rho(y,a) \leqslant \rho(y,x) + \rho(x,a) < \varepsilon_1 + \rho(x,a) = \varepsilon.$$

Значит, точка y принадлежит ε-окрестности $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ точки a. Поскольку точка $y \in \mathrm{U}(x,\varepsilon_1)$ может быть выбрана произвольно, заключаем, что $\mathrm{U}(x,\varepsilon_1) \subset \mathrm{U}(a,\varepsilon)$.

Итак, любая точка $x \in \mathrm{U}(a,\varepsilon)$ имеет ε_1-окрестность $\mathrm{U}(x,\varepsilon_1)$, целиком попадающую в $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$. Это означает, что точка x внутренняя для множества $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$, которое, следовательно, является открытым (именно поэтому ε-окрестности точек в $\mathbb{R}^n$ называют открытыми n-мерными шарами). На рис. 8.3 приведена геометрическая иллюстрация доказательства при $n = 2$.

Пример 8.2. Интервал $(x_1,\, x_2)$ числовой прямой можно рассматривать как ε-окрестность точки $a = (x_1 + x_2)/2 \in \mathbb{R}$, являющейся серединой этого интервала, при этом $\varepsilon = (x_2 - x_1)/2$. В соответствии с примером 8.1 интервал — открытое множество. #

Свойство множеств быть открытыми может сохраняться при их объединении и пересечении.

Теорема 8.2. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество. Объединение любого числа открытых множеств — открытое множество.

◄ Докажем первое утверждение. Пусть множества U_i, $i = \overline{1,\, n}$, открыты и

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i.$$

Если множество U пустое, то оно открыто по определению. Для непустого множества U рассмотрим произвольную точку $a \in U$. Согласно определению пересечения множеств, она принадлежит каждому из множеств U_i, $i = \overline{1,\, n}$. Так как эти множества открыты, то по определению 8.2 для каждого множества U_i существует такое число $\varepsilon_i > 0$, что ε_i-окрестность точки a содержится в U_i. Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Тогда при всех $i = \overline{1,\, n}$ выполнены неравенства $\varepsilon \leqslant \varepsilon_i$. Согласно свойству вложенности ε-окрестностей (см. теорему 8.1), имеем $\mathrm{U}(a,\varepsilon) \subset \mathrm{U}(a,\varepsilon_i) \subset U_i$, $i = \overline{1,\, n}$. Поэтому ε-окрестность $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ содержится и в пересечении всех множеств U_i, т.е. в множестве U, а это по определению 8.2 означает, что a — внутренняя точка для множества U. Поскольку в качестве точки a может быть выбрана любая точка множества U, это множество открытое.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим множество

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i,$$

где множества $V_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, открытые, а I — некоторое множество индексов. В случае пустого множества V утверждение очевидно, и мы будем считать, что V не пусто. Если точка a

принадлежит множеству V, то по определению операции объединения множеств точка a принадлежит множеству V_i хотя бы для одного значения индекса $i = k$. Так как V_k — открытое множество, то существует ε-окрестность $\mathrm{U}(a, \varepsilon)$ точки a, содержащаяся в V_k. Следовательно, эта окрестность содержится и в V. Но это значит, что a — внутренняя точка V, а так как она может быть выбрана в V произвольно, множество V открытое. ▶

Определение 8.3. ***Окрестностью точки*** $a \in \mathbb{R}^n$ называют любое открытое множество U в $\mathbb{R}^n$, включающее в себя эту точку. При этом множество $U \setminus \{a\}$ (т.е. окрестность точки, из которой удалена сама точка) называют ***проколотой окрестностью*** точки a.

Как следует из примера 8.1, ε-окрестность точки является ее окрестностью. Таким образом, понятие окрестности, введенное определением 8.3, обобщает понятие ε-окрестности. С этой точки зрения ε-окрестность есть окрестность стандартного (или канонического) вида. Определение 8.3 фактически означает, что открытое множество является окрестностью каждой своей точки.

Определение 8.4. Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют ***граничной точкой*** множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если любая ε-окрестность точки a содержит как точки, принадлежащие множеству A, так и точки, не принадлежащие этому множеству. Множество всех граничных точек множества A называют его ***границей*** и обозначают ∂A (или $\mathrm{Fr}\, A$).

Пример 8.3. На числовой оси $\mathbb{R}$ полуинтервал $A = [x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ имеет границу ∂A из двух точек x_1 и x_2. Заметим, что точка x_1 принадлежит A, а точка x_2 — нет. На плоскости границей замкнутого круга

$$\bigl\{(x_1,\ x_2)\colon\ (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leqslant \varepsilon^2\bigr\}$$

радиуса ε с центром в точке $a = (a_1,\ a_2)$ является окружность

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \varepsilon^2.$$

В пространстве границей замкнутого шара

$$\bigl\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\colon\ (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leqslant \varepsilon^2\bigr\}$$

радиуса ε с центром в точке $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ является сфера

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = \varepsilon^2.$$

В $\mathbb{R}^n$ границей ***замкнутого n-мерного шара***

$$\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \rho(x, a) \leqslant \varepsilon\}$$

является множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \rho(x, a) = \varepsilon\},$$

т.е. $(n-1)$-мерная сфера.

Определение 8.5. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называют ***ограниченным множеством***, если существует такое положительное число r, что r-окрестность точки $0 = (0,\ \ldots,\ 0)$ содержит множество A.

Поскольку r-окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^n$ описывается неравенством $\rho(x, 0) = |x| < r$, условие ограниченности множества A равносильно выполнению неравенства $|x| < r$, которое при некотором $r > 0$ верно для всех $x \in A$. Отметим, что это неравенство можно заменить нестрогим неравенством $|x| \leqslant r$, так как из этого нестрогого неравенства следует, что $|x| < 2r = r'$.

Определение 8.6. Множество, которое содержит все свои граничные точки (свою границу), называют ***замкнутым множеством***. Замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ называют ***компактным множеством***, или ***компактом***.

Замкнутый круг и окружность на плоскости, замкнутый шар и сфера в пространстве являются замкнутыми и даже компактными множествами. Множество A, изображенное на рис. 8.2, не является ни открытым, ни замкнутым, так как его граница, обозначенная сплошной и штриховой линиями, содержится в A лишь частично.

Замечание 8.2. Пустое множество считают по определению замкнутым. Таким образом, пустое множество одновременно и открыто, и замкнуто. #

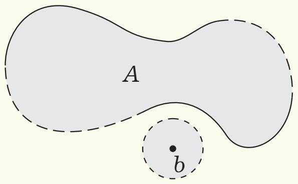

Рис. 8.4

Точку $b \in \mathbb{R}^n$ называют ***внешней точкой множества*** $A \subset \subset \mathbb{R}^n$, если существует такая ε-окрестность этой точки, которая не пересекается с множеством A (рис. 8.4). Множество всех внешних точек множества A называют ***внешностью множества*** A.

Если точка $b \in \mathbb{R}^n$ не принадлежит множеству $A \subset \mathbb{R}^n$, то существуют две возможности: а) любая ε-окрестность точки b содержит точки множества A и, следовательно, точка b является граничной точкой множества A; б) некоторая ε-окрестность точки b не пересекается с A и, следовательно, точка b является внешней точкой множества A.

Любое отображение $\varphi\colon T \to \mathbb{R}^n$ промежутка T числовой оси $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$ можно записать в виде

$$\varphi(t) = \bigl(\varphi_1(t)\ \ \varphi_2(t)\ \ \ldots\ \ \varphi_n(t)\bigr)^{\mathrm{T}},$$

где $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,\, n}$, — функции одного действительного переменного t, определенные на промежутке T. Если все эти функции непрерывны на T, то отображение φ будем называть ***путем*** в $\mathbb{R}^n$, а образ $\varphi(T)$ этого отображения — ***непрерывной кривой в*** $\mathbb{R}^n$. Если $T = [a,\, b]$ — отрезок, то точку $\varphi(a)$ будем называть ***началом пути*** φ, а точку $\varphi(b)$ — ***концом пути*** φ.

В трехмерном случае ($n = 3$) отображение $\varphi(t)$ можно интерпретировать как закон движения материальной точки, если аргумент t рассматривать в качестве времени. Это объясняет термин «путь», данный отображению φ.

Пример 8.4. Отображение $\varphi\colon (-\infty,\, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ вида

$$x = \varphi_1(t) = \cos t, \quad y = \varphi_2(t) = \sin t, \quad z = \varphi_3(t) = t$$

задает непрерывную кривую в $\mathbb{R}^3$, представляющую собой *винтовую линию* (рис. 8.5).

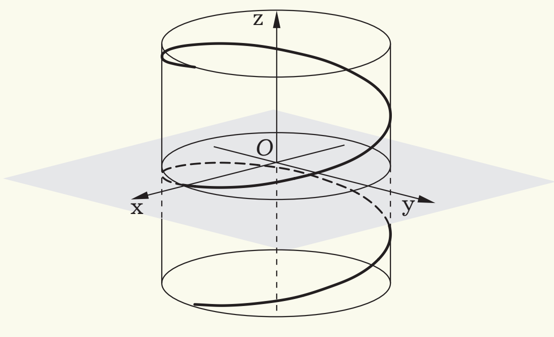

Рис. 8.5

Определение 8.7. Множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве, называют ***линейно связным***. Открытое линейно связное множество называют ***областью***.

Следующие множества являются областями:

– любая ε-окрестность $\mathrm{U}(a, \varepsilon)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$;

– проколотая ε-окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \varepsilon)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$;

– (открытое) кольцо в $\mathbb{R}^2$ с центром в точке $(a_1,\ a_2)$ и радиусами r и R, которое можно описать неравенствами

$$r^2 < (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < R^2, \quad (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2;$$

– множество

$$\left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon r < |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < R\right\},$$

где $(a_1,\ a_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < r < R$.

Рассмотрим *последовательность* $\{a_k\}$ *элементов множества* $\mathbb{R}^n$ (или просто ***последовательность в*** $\mathbb{R}^n$). Пусть существует такая точка $a \in \mathbb{R}^n$, что для любой ее ε-окрестности $\mathrm{U}(a, \varepsilon)$ можно указать такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для любого $k > N$ верно соотношение $a_k \in \mathrm{U}(a, \varepsilon)$. Тогда $\{a_k\}$ называют ***сходящейся последовательностью в*** $\mathbb{R}^n$, а точку a — ***пределом последовательности*** $\{a_k\}$ ***в*** $\mathbb{R}^n$. Если указанной точки a не существует, то последовательность $\{a_k\}$ называют ***расходящейся последовательностью в*** $\mathbb{R}^n$.

Для предела последовательности в $\mathbb{R}^n$ сохраняются основные свойства числовых последовательностей, которые можно рассматривать как частный случай последовательностей в $\mathbb{R}^n$ при $n = 1$. Например, можно показать (по-существу, повторив доказательство для одномерного случая) единственность предела последовательности в $\mathbb{R}^n$. Так как $\mathbb{R}^n$ есть линейное пространство, элементы последовательностей в $\mathbb{R}^n$, а значит, и сами последовательности, можно складывать, вычитать и умножать на действительные числа. Как и в одномерном случае, для сходящихся последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ можно утверждать, что

$$\lim_{k\to\infty} (a_k \pm b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k \pm \lim_{k\to\infty} b_k,$$

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha a_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} a_k,$$

причем существование пределов в равенствах слева вытекает из существования пределов справа.

Для последовательностей в $\mathbb{R}^n$ верен ***критерий Коши***. Согласно этому критерию, последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является *фундаментальной последовательностью*. В данном случае последовательность $\{a_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ называют фундаментальной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для любых $k > N$ и $m > N$ выполняется неравенство $|a_k - a_m| < \varepsilon$. Нетрудно увидеть, что данное определение дословно повторяет определение фундаментальной числовой последовательности.

8.2. Функции нескольких переменных

Отображение, которое упорядоченному набору из n чисел ставит в соответствие число, т.е. отображение вида $f\colon A \to \mathbb{R}$, где $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, называют ***функцией нескольких переменных***.

Данное определение согласуется с определением *функции действительного переменного*, которое соответствует общему определению функции нескольких переменных в случае $n = 1$. Таким образом, понятие функции нескольких переменных можно рассматривать как обобщение понятия функции действительного переменного.

Упрощая изложение, в дальнейшем функции нескольких переменных часто будем называть просто функциями. Будем также использовать и упрощенные обозначения таких функций. Вместо $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, будем писать так: $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В тех же случаях, когда существенным является не множество A, а лишь размерность линейного арифметического пространства, будем записывать функцию нескольких переменных следующим образом: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Эта запись может иметь и другой смысл, обозначая функцию, для которой $A = \mathbb{R}^n$, но этот случай будет оговариваться особо.

Множество $D(f) = A$ точек из $\mathbb{R}^n$, в которых определена функция $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, называют ***областью определения (существования) функции*** f, а множество $R(f) = \{y \in \mathbb{R}\colon y = f(x),\ x \in D(f)\}$ — ***областью значений (изменения) функции*** f. Подчеркнем, что термины «область определения» и «область значений» никак не связаны с термином «область». Область определения функции и область ее значений могут и не быть областями в смысле определения 8.7.

Пример 8.5. Пусть в пространстве расположено некоторое тело. Плотность ρ этого тела зависит, вообще говоря, от положения точки. Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Тогда плотность тела можно рассматривать как функцию трех переменных x, y и z, а именно $\rho = \rho(x, y, z)$, где $(x,\ y,\ z)$ — точка рассматриваемого тела. Обозначив множество точек, принадлежащих телу, через V, можем записать $\rho\colon V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Аналогично температура T этого же тела есть функция точки $(x,\ y,\ z)$, или функция $T(x, y, z)$ трех переменных, которую мы можем записать в виде $T\colon V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. #

На множестве $F(A, \mathbb{R})$ всех функций вида $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно ввести операции сложения функций и умножения функций на действительные числа. ***Суммой функций нескольких переменных*** $f,\ g \in F(A, \mathbb{R})$ называют такую функцию $f + g \in F(A, \mathbb{R})$, что для любого $x \in A$ верно равенство $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Аналогично ***произведением функции нескольких переменных*** $f \in F(A, \mathbb{R})$ ***на действительное число*** λ называют такую функцию $(\lambda f) \in F(A, \mathbb{R})$, что для любого $x \in A$ верно равенство $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Пример 8.6. Пусть заданы функции двух переменных $f_1(x, y) = x + 2y$ и $f_2(x, y) = y^2 + 3x^2$. Умножая первую функцию на число 2 и складывая результат со второй функцией, получим линейную комбинацию $f = 2f_1 + f_2$ двух функций:

$$f(x, y) = 2f_1(x, y) + f_2(x, y) = 2x + 4y + y^2 + 3x^2. \quad \#$$

Также определяются операции умножения и деления функций. ***Произведением функций нескольких переменных*** $f,\ g \in F(A, \mathbb{R})$, $A \subset \mathbb{R}^n$, называют функцию fg, значение которой в точке $x \in A$ вычисляется по формуле $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Аналогично ***частным функций нескольких переменных*** $f,\ g \in F(A, \mathbb{R})$ называют функцию f/g, для которой выполнено равенство $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $x \in A$. Областью определения произведения fg является множество A, а областью определения частного f/g — множество A за вычетом всех точек x, в которых $g(x) = 0$, т.е. $D(f/g) = A \setminus \{x \in A\colon g(x) = 0\}$.

Пример 8.7. Функция

$$f(x, y) = \frac{\ln(xy + y) + y^2}{\sqrt{x}}$$

есть частное двух функций $f_1(x, y) = \ln(xy+y)+y^2$ и $f_2(x, y) = \sqrt{x}$. Отметим, что область определения частного двух функций есть пересечение областей определения делимого и делителя, из которого удалены точки, в которых делитель обращается в нуль. В данном случае область определения функции f_1 описывается неравенством $xy + y > 0$, область определения функции f_2 — неравенством $x \geqslant 0$, пересечение областей есть множество $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\colon x \geqslant 0,\ y > 0\}$, а область определения частного — множество $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\colon x > 0,\ y > 0\}$.

Определение 8.8. ***Графиком функции*** нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют подмножество $\Gamma(f)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, которое задается следующим образом:

$$\Gamma(f) = \big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon x \in D(f),\ y = f(x)\big\}.$$

Здесь $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)$, а $(x,\ y)$ — сокращенное обозначение арифметического вектора $(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ y)$.

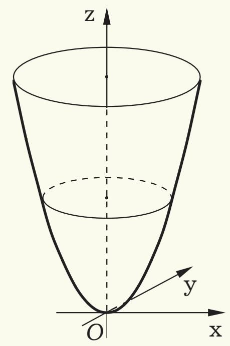

Рис. 8.6

Это определение согласуется с определением графика произвольного отображения $f\colon X \to Y$ как множества упорядоченных пар $(x,\ y)$ элементов $x \in X$ и $y \in Y$, связанных соотношением $y = f(x)$. В случае $n = 1$ определение 8.8 приводит к понятию графика действительной функции действительного переменного, имеющего наглядное геометрическое представление в виде некоторой кривой на плоскости. Столь же наглядно можно представить график функции при $n = 2$. Например, графиком функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ является поверхность, которая описывается уравнением $z = x^2 + y^2$. Указанная поверхность представляет собой *параболоид вращения* (рис. 8.6).

Для графического представления функций нескольких переменных в случае небольших размерностей области определения и области значений могут использоваться и другие приемы. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть задана функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Множество $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}$ фиксированное, называют ***поверхностью уровня***, соответствующей значению c.

Поверхность уровня функции нескольких переменных f — это множество всех точек из области определения функции, в которых она принимает данное значение c, т.е. *прообраз* $f^{-1}(c)$ *элемента* $c \in \mathbb{R}^m$ *при отображении* f.

Слово «поверхность» здесь лучше было бы заменить словом «множество». Во-первых, прообраз элемента при произвольном отображении может и не быть поверхностью в обычном ее понимании. Во-вторых, в случае $n = 2$ это множество представляет собой множество решений уравнения с двумя неизвестными и его, скорее, следовало бы назвать кривой, а не поверхностью. Отдавая дань традиции, мы будем называть множество $f^{-1}(c)$ ***линией уровня*** при $n = 2$ и поверхностью уровня во всех остальных случаях.

Пример 8.8. Для функции трех переменных $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ уравнения поверхностей уровня имеют вид $x^2+y^2+z^2 = c$. Легко увидеть, что они могут быть или пустыми множествами ($c < 0$), или точкой (точка $(0,\ 0,\ 0)$ при $c = 0$), или сферой радиуса $\sqrt{c}$ с центром в начале системы координат ($c > 0$). #

Связь между графиком функции нескольких переменных и ее поверхностями уровня наиболее наглядно просматривается в случае функции двух переменных $z = f(x,y)$: линия уровня $f(x,y) = c$ совпадает с проекцией на координатную плоскость xOy сечения графика этой функции, т.е. поверхности $z = f(x,y)$, плоскостью $z = c$. Именно на этом основан *метод сечений*, применяемый при исследовании вида поверхности в пространстве по ее уравнению.

Пример 8.9. Опишем все линии уровня функции двух переменных $f(x,y) = x^2+y^2$. Уравнение линии уровня $x^2 + y^2 = c$ при $c < 0$ задает пустое множество, поскольку это равенство, рассматриваемое как уравнение относительно переменных x и y, не имеет решений. Геометрически это означает, что при $c < 0$ плоскость $z = c$ не пересекается с графиком функции f. В случае $c = 0$ имеем равенство $x^2 + y^2 = 0$, которому удовлетворяют координаты единственной точки $(0,\ 0)$. Следовательно, при $c = 0$ линия уровня, являющаяся пересечением плоскости $z = 0$ с параболоидом вращения $z = x^2+y^2$, содержит единственную точку $(0,\ 0)$. Если $c > 0$, то линия уровня описывается уравнением $x^2+y^2 = c = r^2$ и представляет собой окружность радиуса r с центром в начале координат. Эта окружность есть проекция на координатную плоскость xOy пересечения плоскости $z = r^2$ с параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ (рис. 8.7). #

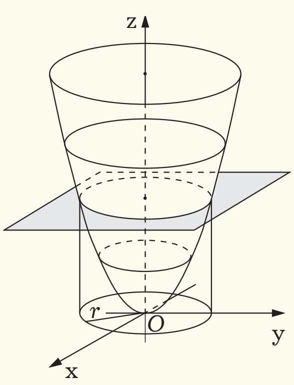

Рис. 8.7

8.3. Предел функции нескольких переменных

Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют ***предельной точкой множества*** $A \subset \mathbb{R}^n$, если в любой ее *проколотой окрестности* есть точки из множества A. Предельная точка множества может либо принадлежать этому множеству, либо не принадлежать ему. Отметим, что если точка a является предельной для множества A, то в любой *окрестности* $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ этой *точки* содержится бесконечно много точек множества A.

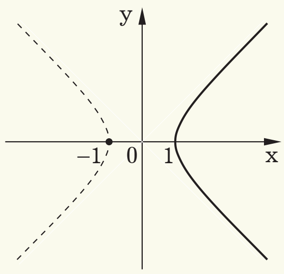

Рис. 8.8

Точку a называют ***изолированной точкой множества*** A, если $a \in A$ и существует такая ее проколотая окрестность, которая не содержит точек из множества A. Отметим, что любая точка $a \in A$ является либо предельной точкой A, либо изолированной точкой A.

Пример 8.10. а. Все *внутренние точки* любого *множества* $A \subset \mathbb{R}^n$ являются предельными точками этого множества.

б. Множество на плоскости, заданное соотношениями $x^2 - y^2 = 1$, $x \geqslant -1$, имеет изолированную точку $(-1,\ 0)$. Все остальные точки этого множества, лежащие на правой ветви гиперболы, являются его предельными точками (рис. 8.8).

Определение 8.9. Пусть заданы функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, множество $A \subset D(f)$, включенное в область определения $D(f)$ функции f, и предельная точка a множества A. Точку $b \in \mathbb{R}$ называют ***пределом функции f в точке a по множеству*** A, если для любой ε-окрестности $\mathrm{U}(b,\varepsilon)$ точки b существует такая проколотая δ-окрестность $\mathring{\mathrm{U}}(a,\delta)$ точки a, что $f(x) \in \mathrm{U}(b,\varepsilon)$ при $x \in \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta) \cap A$, т.е.

$$\forall\, \mathrm{U}(b,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \ \ \exists\, \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta) \subset \mathbb{R}^n \ \ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta) \cap A: \quad f(x) \in \mathrm{U}(b,\varepsilon). \tag{8.2}$$

В этом случае записывают $b = \lim\limits_{x \underset{A}{\to} a} f(x)$, или $f(x) \to b$ при $x \underset{A}{\to} a$ (запись $x \underset{A}{\to} a$ читают так: «x стремится к a по множеству A»).

Замечание 8.3. Условие, что точка $a \in \mathbb{R}^n$, в которой рассматривается предел функции по множеству $A \subset \mathbb{R}^n$, является предельной точкой A, существенно. Действительно, если точка a не является предельной точкой A, то в достаточно малой проколотой окрестности этой точки нет точек множества A и условие определения 8.9, хотя формально и остается корректным, теряет содержательный смысл. В дальнейшем, говоря о пределе функции f в точке a по множеству A, будем всегда предполагать, что точка a является предельной для A.

Если зафиксировать некоторую δ_0-окрестность точки a, то точки множества A, не попавшие в эту окрестность, не будут влиять на существование предела в точке a и его значение, так как в этом случае мы можем считать, что число δ в определении 8.9 не превышает δ_0. Действительно, если для заданного $\varepsilon > 0$ выбрано некоторое δ так, что при $x \in A \cap \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta)$ выполняется соотношение $f(x) \in \mathrm{U}(b,\varepsilon)$, то, положив $\delta' = \min\{\delta,\ \delta_0\}$, заключаем, что $\mathring{\mathrm{U}}(a,\delta') \subset \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta)$ и, следовательно,

$$(A \cap \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta')) \subset (A \cap \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta)).$$

Поэтому соотношение $f(x) \in \mathrm{U}(b,\varepsilon)$ будет выполнено для любой точки $x \in A \cap \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta')$.

Множество A в определении 8.9 играет роль ограничителя: учитываются значения функции только в точках этого множества. Если a является внутренней точкой множества A, или по крайней мере множества $A \cup \{a\}$, то A перестает играть ограничивающую роль. В этом случае можно выбрать проколотую δ_0-окрестность точки a, целиком попадающую в A. Выбирая в определении 8.9 число $\delta \leqslant \delta_0$, будем иметь $A \cap \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta) = \mathring{\mathrm{U}}(a,\delta)$.

Таким образом, если некоторая проколотая окрестность точки a содержится в множестве A (в частности, если точка a внутренняя для A), мы можем считать, что $A = \mathbb{R}^n$. В этом случае мы будем говорить просто о ***пределе функции в точке*** a и обозначать его, опуская упоминание множества A:

$$b = \lim_{x \to a} f(x).$$

При этом определение предела упрощается: точка b есть предел функции в точке a, если для любой ε-окрестности $\mathrm{U}(b, \varepsilon)$ точки b существует такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ точки a, что из условия $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ следует $f(x) \in \mathrm{U}(b, \varepsilon)$.

Пример 8.11. Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0, \end{cases} \tag{8.3}$$

и исследуем ее на существование предела в точке $a = (0,\ 0)$ в зависимости от множества A.

Пусть множество A есть прямая $y = kx$. Воспользуемся тем, что в точках этой прямой функцию f можно рассматривать как функцию одного действительного переменного $g(x) \equiv$ $\equiv f(x, kx)$, которая при $x \neq 0$ принимает постоянное значение:

$$g(x) = f(x, kx) = \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Поэтому при $(x,\ y) \to (0,\ 0)$ по множеству A существует предел, равный этому постоянному значению:

$$\lim_{(x,\ y) \underset{A}{\to} (0,\ 0)} f(x, y) = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Прямую $x = 0$ (ось ординат) нельзя описать уравнением с угловым коэффициентом. Этот случай необходимо рассмотреть отдельно. Так как $f(0, y) \equiv 0$, приходим к выводу, что по множеству $x = 0$ также существует предел, равный нулю. #

Связь между пределами по различным множествам и, в частности, между пределом и пределом по множеству аналогична тому, как для действительных функций действительного переменного связаны понятия предела функции в точке и *одностороннего предела функции в точке*. Например, правосторонний предел функции в точке $a \in \mathbb{R}$ можно рассматривать как предел этой функции по множеству $\{x \in \mathbb{R}\colon x > a\}$.

Теорема 8.3. Пусть a — предельная точка множеств A, $B \subset \mathbb{R}^n$ и $A \subset B$. Если существует предел функции f в точке a по множеству B, равный b, то существует и предел этой функции в точке a по множеству A, который также равен b.

◄ Пусть существует предел функции f при $x \underset{B}{\to} a$, равный b. Это значит, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ точки a, что $f(x) \in \mathrm{U}(b, \varepsilon)$ при $x \in B \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$. Так как $A \subset B$, то и $(A \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)) \subset (B \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta))$. Значит, соотношение $f(x) \in \mathrm{U}(b, \varepsilon)$ верно для любой точки $x \in A \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$. Тем самым мы показали, что, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такое число $\delta > 0$, для которого $f(x) \in \mathrm{U}(b, \varepsilon)$ при $x \in A \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$. Это, согласно определению 8.9, и означает, что функция f имеет предел b в точке a по множеству A. ►

Следствие 8.1. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой проколотой δ_0-окрестности $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta_0)$ точки a и существует ее предел в этой точке, равный b, то для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, для которого точка a предельная, существует предел функции f при $x \underset{A}{\to} a$, равный b.

◄ Доказательство следует из теоремы 8.3 при $B = \mathbb{R}^n$. ►

Следствие 8.1 удобно использовать для доказательства того, что функция не имеет предела в заданной точке. Идея его использования сводится к следующему. Подбирают два множества

A_1 и A_2 так, чтобы пределы функции в точке a по этим множествам были различны. Тогда на основании следствия можно утверждать, что функция не имеет предела в точке a. Действительно, если функция f имеет предел в точке a, равный b, то тот же предел она имеет в точке a и по каждому из множеств A_1 и A_2, а это противоречит условию.

Пример 8.12. Функция $f(x, y)$ из примера 8.11 не имеет предела в точке $(0,\ 0)$, так как эта функция имеет разные пределы по множествам $A_k = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y = kx\}$. #

Функцию нескольких переменных $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют ***бесконечно малой*** при $x \xrightarrow[A]{} a$ (a — предельная точка множества A), если $\lim\limits_{x \xrightarrow[A]{} a} f(x) = 0$.

Для функций нескольких переменных остается в силе ***теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой***.

Теорема 8.4. Для того чтобы существовал предел функции $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ при $x \xrightarrow[A]{} a$, равный b, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела представление $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha\colon A \to \mathbb{R}^m$ — бесконечно малая при $x \xrightarrow[A]{} a$.

◀ Необходимость. Предположим, что существует предел $\lim\limits_{x \xrightarrow[A]{} a} f(x) = b$. Обозначим $\alpha(x) = f(x) - b$ и выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно определению 8.9, для выбранного ε существует такое число $\delta > 0$, что при $x \in A \cap \mathring{\mathrm{U}}(a, \delta)$ верно включение $f(x) \in \mathrm{U}(b, \varepsilon)$, что равносильно неравенству $|f(x) - b| < \varepsilon$, или $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Но это означает, что существует предел $\lim\limits_{x \xrightarrow[A]{} a} \alpha(x) = 0$. Следовательно, функция нескольких переменных $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \xrightarrow[A]{} a$.

Достаточность. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, $x \in A$, и функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \xrightarrow[A]{} a$, т.е. существует предел $\lim\limits_{x \xrightarrow[A]{} a} \alpha(x) = 0$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. В соответствиии с определением 8.9, для выбранного числа ε можно указать такое число $\delta > 0$, что при $x \in A \cap \mathring{\mathrm{U}}(a, \delta)$ верно неравенство $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$, или $|f(x) - b| < \varepsilon$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{x \xrightarrow[A]{} a} f(x) = b$. ▶

Понятие *бесконечного предела*, активно используемое для функций одного переменного, можно перенести на функции нескольких переменных.

Определение 8.10. Пусть задана функция нескольких переменных $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка множества A. Если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $x \in A \cap \mathring{\mathrm{U}}(a, \delta)$ выполняется неравенство $f(x) > M$ $(f(x) < -M$ или $|f(x)| > M)$, то говорят, что функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ (соответственно $-\infty$ или ∞) при $x \xrightarrow[A]{} a$, и пишут

$$\lim_{x \xrightarrow[A]{} a} f(x) = +\infty \quad \Big(\lim_{x \xrightarrow[A]{} a} f(x) = -\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \xrightarrow[A]{} a} f(x) = \infty \Big).$$

Во всех трех случаях функцию $f(x)$ называют ***бесконечно большой*** при $x \xrightarrow[A]{} a$.

Пример 8.13. Функция $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ является бесконечно большой при $(x,\ y) \to (0,\ 0)$. Функция $g(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ стремится к $+\infty$ при $(x,\ y) \xrightarrow[A]{} (0,\ 0)$, если A — сектор, заключенный между прямыми $y = x$ и $y = -x$ и расположенный в правой полуплоскости $x > 0$. В самом деле, в этом секторе $|y| < |x|$ и поэтому

$$\frac{x}{x^2 + y^2} > \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}.$$

Функция $g(x, y)$ стремится к $-\infty$ при $(x,\ y) \xrightarrow[A]{} (0,\ 0)$, если A — сектор, заключенный между прямыми $y = x$ и $y = -x$ и расположенный в левой полуплоскости $x < 0$, поскольку в этом секторе $x < 0$, $|y| < |x|$ и

$$\frac{x}{x^2 + y^2} < \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}.$$

Если $A = \{(x,\ y)\colon x = 0,\ y \in \mathbb{R}\}$ — ось ординат, то $g(x,y) \equiv 0$ на A и функция $g(x,y)$ является бесконечно малой при $(x,\ y)\underset{A}{\to}(0,\ 0)$. #

Введем еще одно понятие. ***Функция нескольких переменных $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ограничена на множестве*** A, если множество $f(A) = \{y \in \mathbb{R}\colon y = f(x),\ x \in A\}$ ограничено. Эта ***функция ограничена при*** $x\underset{A}{\to}a$ (***локально ограничена в точке a***), если существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ точки a, что функция ограничена на множестве $A \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$.

Определение предела функции нескольких переменных и по форме, и по содержанию аналогично определению предела действительной функции действительного переменного. Поэтому пределы, бесконечно малые и бесконечно большие функции имеют те же свойства, что и в случае функций одного переменного (т.е. при $n = 1$). Соответствующие формулировки и доказательства переносятся на функции нескольких переменных «почти без изменений». Последние слова заключены в кавычки, так как в этих доказательствах, не изменяющихся по форме, изменяется смысл обозначения $|a|$: для числа a — это абсолютная величина, а для точки $a \in \mathbb{R}^n$ — это *евклидова норма* элемента a в евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. **8.1**). По этой причине следующую теорему, устанавливающую связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями нескольких переменных, а также свойства пределов функций нескольких переменных далее приводим без доказательства.

Теорема 8.5. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ бесконечно большая при $x\underset{A}{\to}a$, то функция $1/f(x)$ бесконечно малая при $x\underset{A}{\to}a$. Если функция $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ бесконечно малая при $x\underset{A}{\to}a$ и отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a, то функция $1/\alpha(x)$ бесконечно большая при $x\underset{A}{\to}a$. #

Сформулируем основные свойства предела функции нескольких переменных.

1°. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет предел в точке $a \in \mathbb{R}^n$ по множеству A, то этот предел единственный.

2°. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет (конечный) предел в точке a по множеству A, то она ограничена при $x\underset{A}{\to}a$.

3°. Если у функций f, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют пределы

$$\lim_{x\underset{A}{\to}a} f(x) = b, \qquad \lim_{x\underset{A}{\to}a} g(x) = d,$$

то существуют и пределы

$$\lim_{x\underset{A}{\to}a} \bigl(f(x) + g(x)\bigr) = b + d, \qquad \lim_{x\underset{A}{\to}a} \bigl(\lambda f(x)\bigr) = \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4°. Если у функций f, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют пределы

$$\lim_{x\underset{A}{\to}a} f(x) = b, \qquad \lim_{x\underset{A}{\to}a} g(x) = d,$$

то существуют и пределы

$$\lim_{x\underset{A}{\to}a} \bigl(f(x)\, g(x)\bigr) = bd, \quad \lim_{x\underset{A}{\to}a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{d} \quad (d \ne 0).$$

5°. Если функция $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет предел при $x\underset{A}{\to}a$, равный b, и $b > 0$ ($b < 0$), то существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ точки a, что в точках множества $A \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ функция f положительна (отрицательна).

6°. Если у функций f, g: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют пределы

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = b, \qquad \lim_{x \underset{A}{\to} a} g(x) = d, \tag{8.4}$$

причем $b < d$, то существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ точки a, что при $x \in A \cap \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.

7°. Если у функций f, g: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют пределы (8.4), причем существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ точки a, что при $x \in A \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant \leqslant g(x)$, то $b \leqslant d$.

8°. Если функции f, g, h: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в некоторой проколотой окрестности точки a удовлетворяют неравенствам $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, $x \in A$, и существуют пределы

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = \lim_{x \underset{A}{\to} a} g(x) = b,$$

то существует и предел $\lim\limits_{x \underset{A}{\to} a} h(x) = b$.

9°. Произведение функции, бесконечно малой при $x \underset{A}{\to} a$, на функцию, ограниченную при $x \underset{A}{\to} a$, есть функция, бесконечно малая при $x \underset{A}{\to} a$.

Свойства предела позволяют вычислять пределы функций нескольких переменных, если они существуют. Методы вычисления пределов повторяют те методы, которые использовались в случае функций одного действительного переменного.

Пример 8.14. Рассмотрим предел

$$\lim_{(x,\ y) \to (0,\ 0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

Представим функцию $f(x,y)$ под знаком предела как произведение двух функций

$$\frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = g(x,y)\,\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2},$$

где

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3}, & x + y \neq 0; \\ 1, & x + y = 0. \end{cases}$$

Покажем, что функция $g(x,y)$ имеет предел в точке $(0,\ 0)$, равный единице. Во-первых, она имеет предел 1 по множеству $A_1 = \{(x,\ y)\colon x + y = 0\}$, поскольку на этом множестве принимает постоянное значение 1. Во-вторых, она имеет тот же предел и по множеству $A_2 = = \{(x,\ y)\colon x + y \neq 0\}$. Действительно, согласно *первому замечательному пределу*, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\left|\dfrac{\sin\tau}{\tau} - 1\right| < \varepsilon$ при $0 < \tau < \delta$. Полагая $\tau = x^3 + y^3$, можем выбрать такую окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(O,\delta_1)$ точки $O = (0,\ 0)$, что при $(x,\ y) \in A_2 \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(O,\delta_1)$ будем иметь $0 < |\tau| = |x^3 + y^3| < \delta$. Но тогда $|g(x,y) - 1| < \varepsilon$ при $(x,\ y) \in A_2 \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}(O,\delta_1)$. Это означает, что функция $g(x,y)$ имеет предел в точке O по множеству A_2, равный 1. Поскольку функция $g(x,y)$ имеет в точке O предел 1 и по множеству A_1, и по множеству A_2, то она имеет тот же предел и по объединению этих множеств.

Второй сомножитель в представлении функции $f(x,y)$ запишем в виде

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = x\,\frac{x^2}{x^2 + y^2} + y\,\frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Каждое слагаемое представляет собой функцию, бесконечно малую при $(x,\ y) \to (0,\ 0)$. Например, первое слагаемое есть произведение бесконечно малой в точке $(0,\ 0)$ функции $\varphi(x,y) = x$ и ограниченной функции $\psi(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ (ее значения заключены между нулем и единицей).

Итак, функция $f(x,y)$ представлена в виде произведения двух функций, каждая из которых имеет предел при $(x,\ y) \to (0,\ 0)$. Значит, существует предел функции $f(x,y)$ в этой точке, равный произведению пределов сомножителей, т.е.

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0.$$

8.4. Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть задана *функция нескольких переменных* $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Каждая точка $a \in A$ является либо *предельной точкой множества* A, либо его *изолированной точкой*. В первом случае функция f может иметь в этой точке *предел по множеству* A, что приводит к следующему определению.

Определение 8.11. Функцию нескольких переменных $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют ***непрерывной в точке*** $a \in A$, предельной для множества A, если существует предел функции f при $x \underset{A}{\to} a$, равный значению функции в этой точке, т.е. если

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = f(a). \tag{8.5}$$

Как оговорено в определении, точка a не только принадлежит множеству A, но и является его предельной точкой, поскольку рассматривается предел функции в точке a по множеству A. Функцию $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ считают непрерывной в каждой точке $a \in A$, которая является изолированной точкой множества A.

Используя определение 8.9 предела функции, можно переформулировать определение непрерывности функции в точке следующим образом. Функция $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in A$, если для любой *ε-окрестности* $\mathrm{U}(f(a), \varepsilon)$ точки $f(a) \in \mathbb{R}$ существует такая δ-окрестность $\mathrm{U}(a, \delta)$ точки a, что при $x \in A \cap \mathrm{U}(a, \delta)$ верно соотношение $f(x) \in \mathrm{U}(f(a), \varepsilon)$. Наконец, можно ввести понятие непрерывности, не используя ни понятие предела, ни понятие *окрестности*. Функция $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при всех $x \in A$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Другими словами, бесконечно малому приращению аргумента в данной точке соответствует бесконечно малое приращение функции. Отметим, что эти формулировки включают в себя и случай изолированной точки множества A.

Функцию $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, непрерывную во всех точках множества A, называют ***непрерывной на*** этом ***множестве***.

Следующие так называемые локальные свойства непрерывных функций нескольких переменных вытекают из свойств 2–6 предела функции нескольких переменных (см. **8.3**).

1°. Если функции $f_i\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,\ k}$, непрерывны в некоторой точке $a \in A$, то любая их линейная комбинация непрерывна в этой точке.

2°. Если функции f, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны в некоторой точке $a \in A$, то их произведение fg, а при $g(a) \neq 0$ и частное f/g непрерывны в этой точке.

3°. Если функция $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in A$, то она ограничена в пересечении множества A с некоторой окрестностью точки a.

4°. Если функция $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$, то существует окрестность точки a, в которой функция f в точках множества A положительна (отрицательна).

5°. Если функции f, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $a \in A$ и $f(a) < g(a)$, то существует окрестность этой точки, в которой в точках множества A выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.

Отметим, что в сформулированных свойствах упоминание о множестве A можно опустить, если точка a является *внутренней точкой множества* A.

Для функций нескольких переменных, как и для функций одного переменного, верна следующая теорема о непрерывности *сложной функции*.

Теорема 8.6. Если функции $g_i\colon A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны в точке $a \in A$, $(g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_n(x)) \in B \subset \mathbb{R}^n$ при $x \in A$ и функция $f\colon B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $b = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$, где $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$, то сложная функция $F(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$, $x \in A$, непрерывна в точке a.

◄ Обозначим точку $f(b)$ через c и фиксируем любую ε-окрестность $\mathrm{U}(c, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ этой точки. Из непрерывности функции f в точке b следует, что существует такая δ-окрестность $\mathrm{U}(b, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ точки b, что $f(u) \in \mathrm{U}(c, \varepsilon)$ при $u \in B \cap \mathrm{U}(b, \delta)$. Для каждого $i = \overline{1, n}$ из непрерывности функции g_i в точке a следует, что для числа $\varepsilon_1 = \dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$ существует такая δ_i-окрестность $\mathrm{U}(a, \delta_i) \subset \mathbb{R}^m$ точки a, что $g_i(x) \in \mathrm{U}(b_i, \varepsilon_1)$ при $x \in A \cap \mathrm{U}(a, \delta_i)$. Положим $\delta_0 = \min\{\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_n\}$ и выберем произвольную точку $x \in A \cap \mathrm{U}(a, \delta_0)$. Тогда $g_i(x) \in \mathrm{U}(b_i, \varepsilon_1)$, что равносильно выполнению неравенства $|g_i(x) - b_i| < \varepsilon_1$. Обозначив $u = (g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_n(x))$, заключаем, что

$$|u - b| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |g_i(x) - b_i|^2} < \sqrt{\varepsilon_1^2 n} = \sqrt{\frac{\delta^2}{n} \cdot n} = \delta,$$

т.е. $u \in \mathrm{U}(b, \delta)$. Включение $u \in B$ выполняется в силу условий теоремы. Следовательно, $u \in B \cap \mathrm{U}(b, \delta)$ и $F(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big) = f(u) \in \mathrm{U}(c, \varepsilon)$. Тем самым доказано, что для произвольной окрестности $\mathrm{U}(c, \varepsilon)$ точки c существует такая окрестность $\mathrm{U}(a, \delta_0)$ точки a, что $F(x) \in \mathrm{U}(c, \varepsilon)$ при $x \in A \cap \mathrm{U}(a, \delta_0)$. Согласно определению непрерывности функции в точке, это означает, что сложная функция F непрерывна в точке a. ►

Пример 8.15. Функция $f(x, y) = e^{-y^2/x^2}$ определена всюду в $\mathbb{R}^2$, кроме точек прямой $x = 0$. В своей *области определения* эта функция непрерывна как *композиция* непрерывных *функций* e^{-t} и $t = y^2/x^2$ (см. теорему 8.6). Функция $t = y^2/x^2$ является непрерывной в области $x \neq 0$ как частное двух непрерывных функций (см. свойство 2 непрерывных функций).

В точках прямой $x = 0$ функция $f(x, y)$ не определена, но, может быть, ее можно доопределить в этих точках так, что она будет непрерывной в $\mathbb{R}^2$? Чтобы ответить на вопрос, возможно ли такое доопределение, надо рассмотреть предел функции в точках прямой $x = 0$ по множеству $A = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\colon x \neq 0\}$. Существование предела функции в некоторой точке $(x_0,\ y_0)$ необходимо, чтобы в этой точке было возможно ***доопределение функции по непрерывности***, т.е. такое доопределение, при котором функция будет непрерывной в точке $(x_0,\ y_0)$.

Если $y_0 \neq 0$, то функция y^2/x^2 является бесконечно большой в точке $(0,\ y_0)$, а функция e^{-y^2/x^2} имеет предел в этой точке по множеству A, равный нулю. Но в точке $(0,\ 0)$ предел этой функции по множеству A не существует. Действительно, рассмотрим множества $A_k = \{(x,\ y)\colon y = kx,\ x \neq 0\}$. Нетрудно увидеть, что $y^2/x^2 = k^2$ при $(x,\ y) \in A_k$. Следовательно,

$$\lim_{(x,\ y) \xrightarrow[A_k]{} (0,\ 0)} f(x, y) = e^{-k^2}.$$

Предел функции $f(x, y)$ в точке $(0,\ 0)$ по множеству A_k зависит от выбора множества A_k. Значит, в силу следствия 8.1 функция $f(x, y)$ не имеет предела в точке $(0,\ 0)$ (см. также пример 8.12).

Итак, функцию $f(x, y)$ нельзя доопределить так, чтобы она было непрерывной в точке $(0,\ 0)$. Но подобное доопределение возможно в отношении других точек прямой $x = 0$, поскольку функция

$$\widetilde{f}(x, y) = \begin{cases} e^{-y^2/x^2}, & x \neq 0; \\ \quad 0, & x = 0, \end{cases}$$

определена в $\mathbb{R}^2$ и непрерывна всюду в $\mathbb{R}^2$, кроме точки $(0,\ 0)$.

Точки, в которых *функция нескольких переменных* $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена, но не является *непрерывной*, называют ***точками разрыва*** этой ***функции***. Напомним, что точки, в которых функция исследуется на непрерывность, относятся к *области определения* этой *функции*. Точка разрыва функции $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ должна быть точкой множества A, являющейся для A предельной, так как в изолированных точках множества A функция f непрерывна всегда (см. **8.4**). К точкам разрыва функции f часто относят и точки, которые являются предельными точками A, но самому множеству не принадлежат.

Точки разрыва могут образовывать подмножества в $\mathbb{R}^n$, которые в зависимости от их вида называют ***линиями*** или ***поверхностями разрыва функции***.

Мы не будем определять различные типы точек разрыва, как это делают в случае действительных функций действительного переменного, а ограничимся разбором типичных ситуаций на примерах.

Пример 8.16. **а.** Исследуем на непрерывность функцию двух переменных $f(x,y) = 1/(1-xy)$. Эта функция представляет собой частное двух непрерывных в $\mathbb{R}^2$ функций двух переменных (числитель — постоянная функция, а знаменатель — функция $z(x,y) = 1-xy$). Поэтому, согласно свойству 2 непрерывных функций (см. **8.4**), она непрерывна во всех точках, в которых знаменатель отличен от нуля, т.е. при $1-xy \neq 0$. Множество точек в $\mathbb{R}^2$, которое описывается уравнением $1-xy=0$, является линией разрыва этой функции. В точках этой линии, являющейся *равнобочной гиперболой*, функция не определена.

б. Функция $f(x,y) = \operatorname{sgn}(xy)$ определена всюду в $\mathbb{R}^2$, причем принимает всего лишь три значения: значение 1 в точках первого и третьего квадрантов плоскости, значение 0 на осях координат и значение -1 в точках второго и четвертого квадрантов. Точками разрыва этой функции являются точки на осях координат, а оси координат в данном случае являются линиями разрыва функции.

в. Функция трех переменных

$$u = \frac{1}{1-x^2-y^2-z^2}$$

определена вне единичной сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и в точках области определения эта функция непрерывна как частное двух непрерывных функций. О единичной сфере в этом случае говорят как о поверхности разрыва функции u.

г. У функции трех переменных

$$v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

область определения описывается неравенством $x^2+y^2+z^2 < 1$. В этой области функция непрерывна как частное двух непрерывных функций. В точках единичной сферы и вне ее функция v не определена. Точек разрыва нет.

д. Функция двух переменных

$$u = \ln xy$$

определена в области $xy > 0$, т.е. в первой и третьей четвертях без осей координат.

Пример 8.17. Исследуем на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$$

При $x^2+y^2 \neq 0$ функция $f(x,y)$ является непрерывной как частное двух непрерывных функций. В точке $(0,\ 0)$ и ее окрестности функция определена, но не является непрерывной в этой точке, так как она в ней не имеет предела (см. пример 8.11). #

Предположим, что *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой *окрестности точки* $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Если функция

$$g(x_1) = f(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n),$$

которая представляет собой функцию одного действительного переменного x_1, непрерывна в точке $x_1 = a_1$, то функцию f называют ***непрерывной по переменному x_1 в точке*** a.

Непрерывность функции $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменному x_1 в точке a по определению означает, что существует предел

$$\lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

который можно рассматривать как предел в точке a по множеству

$$A_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n\}.$$

Аналогично вводят понятие непрерывности функции $f(x)$ в точке a по остальным переменным: по x_2, по x_3 и т.д., а также по произвольному набору ее аргументов. Например, если функция двух переменных

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n)$$

непрерывна в точке $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, то функцию $f(x)$ n переменных называют ***непрерывной в точке a по части переменных*** (***по совокупности переменных***) x_1, x_2. Непрерывность по части переменных можно рассматривать как существование предела функции в точке a по соответствующему множеству. Например, непрерывность функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по совокупности переменных x_1, x_2 означает существование предела

$$\lim_{x \xrightarrow[A_{12}]{} a} f(x) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где

$$A_{12} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_3 = a_3, \ldots, x_n = a_n\}.$$

Отметим, что из непрерывности функции нескольких переменных в точке a следует ее непрерывность в этой точке по любому набору переменных, поскольку если выполнено равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то, согласно следствию 8.1, для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, для которого *точка a предельная*,

$$\lim_{x \xrightarrow[A]{} a} f(x) = f(a).$$

В то же время, даже если функция непрерывна в точке a по любому неполному набору переменных, это вовсе не значит, что функция непрерывна в этой точке. Так, функция $f(x, y)$ из примера 8.11 не является непрерывной в начале координат, но она непрерывна в этой точке по каждому из переменных, т.е. по x и по y, поскольку $f(0, y) \equiv f(x, 0) \equiv 0$.

Если функция нескольких переменных непрерывна по части своих переменных во всех точках некоторой области, то ее называют ***непрерывной в области по*** (этой) ***части переменных*** (***совокупности переменных***).

Приведем без доказательства свойства *функций нескольких переменных, непрерывных* на *компактах.*

Теорема 8.7. Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте K. Тогда:

1) *функция* f *ограничена* на K, т.е. существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$, $x \in K$;

2) функция f достигает на компакте K своих наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют такие точки x_*, $x^* \in K$, что $f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$, $x \in K$;

3) если компакт K — *линейно связное множество*, то для любого числа μ из отрезка $[f(x_*), f(x^*)]$ существует точка $x_\mu \in K$, для которой $f(x_\mu) = \mu$. #

ОГЛАВЛЕНИЕ