Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Конспект лекций

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 9

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные ФНП, геометрическая интерпретация для $n = 2$. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования. Матрица Гессе. Дифференцируемость ФНП. Необходимые условия и достаточное условие дифференцируемости.

9.1. Частные производные

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой *окрестности точки* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда в некоторой окрестности точки $a_1 \in \mathbb{R}$ определена *функция одного переменного* $\varphi_1(x_1) = f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$, которая получается из функции $f(x)$ при фиксированных значениях всех аргументов, кроме первого. Производную $\varphi'(a_1)$ функции $\varphi(x_1)$ в точке $a_1 \in \mathbb{R}$ называют ***частной производной функции нескольких переменных f в точке*** a по переменному x_1. Аналогично можно определить частные производные функции f и по другим переменным.

Частную производную функции f в точке a по переменному x_i обозначают следующим образом:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \qquad \text{или} \qquad f'_{x_i}(a).$$

Вычисление частных производных функции нескольких переменных сводится к дифференцированию функции одного действительного переменного, когда все переменные функции, кроме одного, «замораживаются».

Пример 9.1. Функция двух переменных $f(x, y) = x^2 + 6xy - y^3$ имеет две частные производные: $f'_x(x, y) = 2x + 6y$, $f'_y(x, y) = 6x - 3y^2$. Аналогично для функции $g(x, y) = x^y$, $x > 0$, находим $g'_x(x, y) = yx^{y-1}$, $g'_y(x, y) = x^y \ln x$. #

Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в δ-окрестности $\mathrm{U}(a, \delta)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через Δx_i такое приращение независимого переменного x_i в точке a, при котором точка $a = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i{+}\Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ принадлежит $\mathrm{U}(a, \delta)$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|\Delta x_i| < \delta$. Тогда определена разность значений функции f, соответствующая приращению Δx_i:

$$\Delta_i f(a, \Delta x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n).$$

Эту разность называют ***частным приращением функции нескольких переменных*** f в точке a по независимому переменному x_i. Частное приращение обозначают также через $\Delta_i f(a)$ или $\Delta_{x_i} f(a)$.

В соответствии с определением частная производная функции f в точке a по переменному x_i есть предел

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(a)}{\Delta x_i} \tag{9.1}$$

отношения частного приращения функции по переменному x_i к приращению Δx_i этого же переменного при $\Delta x_i \to 0$. Существование этого предела означает существование частной производной, т.е. он приводит ко второй формулировке определения частной производной.

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $a = (a_1,\ a_2) \in \mathbb{R}^2$. *Графиком* этой *функции* в пространстве является поверхность, которая в прямоугольной системе координат $Oxyz$ описывается уравнением $z = f(x,y)$. Обозначим линию пересечения этой поверхности с плоскостью $y = a_2$ через γ. Выберем на этой кривой точки $P(a_1,\ a_2,\ f(a_1,a_2))$ и $Q(a_1+\Delta x,\ a_2,\ f(a_1+\Delta x,a_2))$, а затем через эти точки проведем прямую L.

Пусть при стремлении точки Q по кривой γ к точке P прямая займет некоторое предельное положение. Соответствующую этому положению прямую называют касательной к кривой γ в точке P (рис. 9.1).

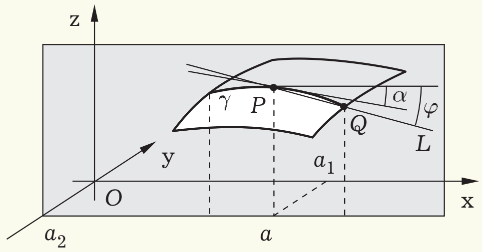

Рис. 9.1

Докажем, что касательная к кривой γ в точке P существует, если функция f имеет в точке $(a_1,\ a_2)$ частную производную по переменному x, причем угол α между касательной и положительным направлением оси Ox определяется формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = f'_x(a_1,a_2).$$

Действительно, угол φ, который прямая L, проходящая через точки P и Q, образует с положительным направлением оси Ox, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta_x f(a_1,a_2)}{\Delta x}.$$

Если существует частная производная функции f в точке $(a_1,\ a_2)$ по переменному x, то существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(a_1,a_2)}{\Delta x} = \frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial x}.$$

Поскольку функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна в области определения, то существует и предел

$$\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \operatorname{arctg}\Bigl(\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi\Bigr).$$

Следовательно, прямая L имеет предельное положение при $\Delta x \to 0$, причем тангенс соответствующего угла α равен частной производной $f'_x(a_1,a_2)$.

Замечание 9.1. Можно также показать, что если определена касательная к кривой γ в точке P, причем $\alpha \neq \pm\pi/2$, то в точке $(a_1,\ a_2)$ существует частная производная функции f по переменному x. Если же $\alpha = \pm\pi/2$, т.е. касательная занимает вертикальное положение, то величина $\operatorname{tg}\varphi$ стремится к $\pm\infty$ при $\Delta x \to 0$, а функция одного переменного $\varphi_1(x) = f(x,a_2)$ имеет в точке $x = a_1$ *бесконечную производную*. В этом случае говорят о ***бесконечной частной производной***, расширяя понятие частной производной, и пишут $f'_x(a_1,a_2) = \pm\infty$. Если необходимо исключить это расширение, то говорят о ***конечной частной производной***.

Аналогично, если существует частная производная $f'_y(a_1,a_2)$, то в точке P существует касательная к линии пересечения поверхности $z = f(x,y)$ с плоскостью $x = a_1$, причем значение частной производной $f'_y(a_1,a_2)$ равно тангенсу угла, который эта касательная образует с положительным направлением оси Oy.

Приведенная геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных аналогична соответствующей интерпретации производной действительной функции одного действительного переменного.

9.2. Дифференцируемость функций нескольких переменных

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой *окрестности точки* $x \in \mathbb{R}^n$ и $\Delta x = (\Delta x_1 \ \ldots \ \Delta x_n)^{\mathrm{T}}$ — такой вектор приращений независимых переменных, что точка $x + \Delta x$ тоже принадлежит этой окрестности. В этом случае определено ***полное приращение функции*** f

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

соответствующее приращению Δx переменных в точке x. Напомним, что

$$|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}.$$

Определение 9.1. Функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенную в некоторой окрестности точки x, называют ***дифференцируемой в точке*** x, если ее полное приращение в окрестности этой точки можно представить в виде

$$\Delta f(x) = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \ldots + a_n\Delta x_n + \alpha(\Delta x)|\Delta x|, \tag{9.2}$$

где коэффициенты a_1, a_2, $\ldots$, a_n не зависят от приращений Δx, а функция $\alpha(\Delta x)$ является *бесконечно малой* при $\Delta x \to 0$.

Функцию f называют ***дифференцируемой в области*** $X \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Теорема 9.1 (*необходимое условие дифференцируемости*). Если функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то у этой функции в точке x существуют все (*конечные*) *частные производные* $f'_{x_i}(x)$, $i = \overline{1, n}$, причем коэффициенты a_i в представлении (9.2) равны значениям соответствующих частных производных в точке x:

$$a_i = f'_{x_i}(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

◀ Для дифференцируемой в точке x функции f представление (9.2) верно для любого приращения Δx. В частности, это представление верно, если приращение Δx имеет вид

$$\Delta x = (0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \ \Delta x_i \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \Delta x_i \neq 0,$$

где номер i выбран произвольным образом и зафиксирован. В этом случае $|\Delta x| = |\Delta x_i|$, соответствующее *полное приращение* $\Delta f(x)$ *функции* $f(x)$ сводится к ее i-му *частному приращению* $\Delta_i f(x)$, а равенство (9.2) принимает вид

$$\Delta f(x) = \Delta_i f(x) = a_i\Delta x_i + \alpha(\Delta x)|\Delta x_i|.$$

Разделив последнее равенство на Δx_i и перейдя к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i} = a_i + \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(\alpha(\Delta x) \frac{|\Delta x_i|}{\Delta x_i} \right) = a_i,$$

поскольку *функция* $\alpha(\Delta x)$ *бесконечно малая* при $\Delta x_i \to 0$, а отношение $\dfrac{|\Delta x_i|}{\Delta x_i} = \pm 1$ ограничено, так что последний предел равен нулю (см. **8.3**, свойство 9 предела функции нескольких переменных). Следовательно, производная $f'_{x_i}(x)$ в точке x существует и равна a_i. ▶

Следствие 9.1. Если функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то в этой точке ее полное приращение $\Delta f(x)$ можно представить в виде

$$\Delta f(x) = f'_{x_1}(x)\Delta x_1 + \ldots + f'_{x_n}(x)\Delta x_n + \alpha(\Delta x)|\Delta x|, \tag{9.3}$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Как и в случае действительных функций одного действительного переменного, есть еще одно необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных, связанное с ее непрерывностью.

Теорема 9.2. Если *функция нескольких переменных* дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

◀ Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке a. Тогда ее полное приращение в точке a можно записать в виде

$$\Delta f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}\Delta x_k + \alpha(\Delta x)|\Delta x|,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Из этого представления следует, что существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x_k + \lim_{\Delta x\to 0}\bigl(\alpha(\Delta x)|\Delta x|\bigr) = 0,$$

означающий, что функция $f(x)$ непрерывны в точке a. Действительно, полагая $\Delta x = x - a$, заключаем, что $f(x) = f(a) + \Delta f(a)$. При $x \to a$ имеем $\Delta x \to 0$ и, следовательно, $\Delta f(a) \to 0$. По теореме 8.4 имеем $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$, что и означает непрерывность функции $f_i(x)$ в точке a. ▶

Следствие 9.2. Если функция нескольких переменных дифференцируема в некоторой области, то она непрерывна в этой области.

Следующие два примера показывают, что необходимые условия дифференцируемости, о которых говорится в теоремах 9.1 и 9.2, не являются достаточными условиями дифференцируемости, т.е. обращения соответствующих теорем неверны.

Пример 9.2. Функция двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$$

в начале координат имеет частные производные. При этом $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$, так как $f(x,0) \equiv 0$ и $f(0,y) \equiv 0$. Если бы эта функция была дифференцируемой в точке $(0,\ 0)$, то по теореме 9.2 она была бы непрерывной в этой точке $(0,\ 0)$. Однако это не так (см. пример 8.17). Следовательно, функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,\ 0)$, хотя и имеет частные производные в этой точке.

Пример 9.3. Функция двух переменных $f(x,y) = |x| + |y|$ непрерывна в точке $(0,\ 0)$, но в этой точке не существуют ее частные производные $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$. Поэтому данная функция не может быть дифференцируемой в точке $(0,\ 0)$. #

Одновременное выполнение обоих необходимых условий (непрерывности в точке и существования частных производных) также не гарантируют дифференцируемость функции в точке.

Пример 9.4. Функция двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$$

непрерывна при $x^2+y^2 \neq 0$ как отношение двух непрерывных функций. Эта функция непрерывна и в точке $(0,\ 0)$, поскольку из двойного неравенства

$$0 \leqslant \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|\,|y|}{|x|^2+|y|^2}|x| \leqslant \frac{1}{2}|x|$$

и свойства 8 предела функции нескольких переменных (см. **8.3**) следует существование предела

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Следовательно, функция $f(x,y)$ непрерывна в $\mathbb{R}^2$.

Рассматриваемая функция имеет частные производные всюду в $\mathbb{R}^2$. Действительно, при $x^2+y^2\neq 0$

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f'_y(x,y) = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

В точке $(0,\ 0)$ частные производные тоже существуют, причем $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$ (см. пример 9.2). Отметим, что частные производные не являются непрерывными в точке $(0,\ 0)$, так как, например, $f'_x(x,y)\to 1/2\neq 0$ при $(x,\ y)\to(0,\ 0)$ по множеству $y=x$.

Докажем, что функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,\ 0)$. Полное приращение функции $f(x,y)$ в точке $(0,\ 0)$, соответствующее приращениям Δx и Δy переменных, имеет вид

$$\Delta f(0,0) = f(0{+}\Delta x,\ 0{+}\Delta y) - f(0,0) = \frac{(\Delta x)^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Если бы функция была дифференцируемой в точке $(0,\ 0)$, то, учитывая значение частных производных, мы имели бы равенство вида (9.3):

$$\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \alpha(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

где $\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0$ при $(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)$. Но последнее равенство при $\Delta y=\Delta x$ принимает вид

$$\frac{1}{2}\Delta x = \sqrt{2}|\Delta x|\alpha(\Delta x,\Delta x),$$

откуда при $\Delta x\neq 0$ имеем $|\alpha(\Delta x,\Delta x)| = \sqrt{2}/4$, а это противоречит тому, что $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ является бесконечно малой при $(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)$.

В случае действительных функций одного действительного переменного дифференцируемость функции в точке эквивалентна существованию в этой точке конечной производной функции. Однако уже для функций двух переменных существование *частных производных* в точке не означает, что *функция дифференцируема* в этой точке (см. пример 9.2). Существование частных производных является необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости. Чтобы при наличии частных производных гарантировать дифференцируемость *функции нескольких переменных*, нужны дополнительные условия.

Теорема 9.3 (*достаточное условие дифференцируемости*). Если функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки a определена и имеет частные производные по всем переменным, причем все производные непрерывны в самой точке a, то функция f дифференцируема в точке a.

◀ Упрощая выкладки, докажем утверждение теоремы для частного случая функции двух независимых переменных, т.е. при $n=2$. В общем случае доказательство аналогично.

Пусть задана точка $a=(x,\ y)\in\mathbb{R}^2$. Согласно условию теоремы, можно выбрать такое число $\delta>0$, что функция $f(x,y)$ будет иметь частные производные в любой точке $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ при $|\Delta x|<\delta$ и $|\Delta y|<\delta$. *Полное приращение функции* $f(x,y)$ удобно представить как сумму двух слагаемых:

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y) &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \\ &= \bigl(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\bigr) + \\ &\quad + \bigl(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\bigr) = \Delta_x f(x, y+\Delta y) + \Delta_y f(x,y).\end{aligned}$$

Каждое из этих слагаемых есть *частное приращение функции*, которое можно интерпретировать как приращение функции одного переменного. Например, $\Delta_x f(x, y+\Delta y)$ есть приращение функции

$$\varphi(t) = f(t, y + \Delta y)$$

в точке $t = x$, соответствующее приращению Δx независимого переменного t, так как

$$\Delta_x f(x, y+\Delta y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x).$$

Функция $\varphi(t)$ на интервале $(x-\delta,\ x+\delta)$ непрерывна и дифференцируема, поскольку при $t \in (x-\delta,\ x+\delta)$ точка $(t,\ y+\Delta y)$ удовлетворяет условиям $|t-x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ и существует производная $\varphi'(t) = f'_x(t, y+\Delta y)$.

На отрезке $[x,\ x+\Delta x]$ (или $[x+\Delta x,\ x]$ в случае $\Delta x < 0$) функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Следовательно, существует такое число $\vartheta_1 \in (0,\ 1)$, что

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(x+\vartheta_1\Delta x)\Delta x,$$

или с учетом конкретного вида функции $\varphi(t)$

$$\Delta_x f(x, y+\Delta y) = \varphi'(x+\vartheta_1\Delta x)\Delta x = f'_x(x+\vartheta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x.$$

Аналогично (с помощью функции $\psi(t) = f(x,t)$) можно показать, что существует такое число $\vartheta_2 \in (0,\ 1)$, для которого

$$\Delta_y f(x,y) = f'_y(x, y+\vartheta_2\Delta y)\Delta y.$$

Значит,

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x+\vartheta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\vartheta_2\Delta y)\Delta y.$$

Применяя в *окрестности точки a* к функциям f'_x и f'_y теорему 8.4 о связи функции, ее предела и бесконечно малой, а также учитывая, что частные производные являются *непрерывными функциями в точке a*, заключаем, что

$$f'_x(x+\vartheta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y) + \beta, \quad f'_y(x, y+\vartheta_2\Delta y) = f'_y(x,y) + \gamma,$$

где $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ и $\gamma = \gamma(\Delta y)$ — *бесконечно малые функции* при $(\Delta x,\ \Delta y) \to (0,\ 0)$. Следовательно,

$$\Delta f(x,y) = \big(f'_x(x,y)+\beta\big)\Delta x + \big(f'_y(x,y)+\gamma\big)\Delta y = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \beta\Delta x + \gamma\Delta y. \tag{9.4}$$

Обозначим $|(\Delta x,\ \Delta y)| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ через ρ. Тогда

$$\frac{|\beta\Delta x + \gamma\Delta y|}{\rho} \leqslant |\beta|\frac{|\Delta x|}{\rho} + |\gamma|\frac{|\Delta y|}{\rho} \leqslant |\beta| + |\gamma| \to 0$$

при $\rho \to 0$, так как $|\Delta x|/\rho \leqslant 1$, $|\Delta y|/\rho \leqslant 1$, а $\beta,\ \gamma \to 0$ при $\rho \to 0$. Следовательно, $\beta\Delta x + \gamma\Delta y = \alpha\rho$, где $\alpha \to 0$ при $\rho \to 0$. Итак,

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha\rho,$$

где $\alpha \to 0$ при $\rho \to 0$. Поэтому, согласно определению 9.1, функция f дифференцируема в точке $(x,\ y)$. ▶

Для произвольной области $X \subset \mathbb{R}^n$ через $C^1(X)$ обозначают множество всех функций нескольких переменных $f\colon X \to \mathbb{R}$, определенных в X и имеющих в X непрерывные частные производные по всем переменным. Для дифференцируемости функции нескольких переменных f в области X достаточно, чтобы она принадлежала множеству функций $C^1(X)$. Функции из множества $C^1(X)$ называют ***непрерывно дифференцируемыми*** в области X.

9.3. Частные производные высших порядков

Предположим, что *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ во всех точках в некоторой *окрестности* $\mathrm{U}(a,\delta)$ *точки* a имеет *частную производную* $f'_{x_i}(x)$. Эта частная производная сама является *функцией нескольких переменных*, определенной в окрестности $\mathrm{U}(a,\delta)$, и может оказаться, что она имеет частную производную в точке a, например по переменному x_j. Частную производную

$$\left(f'_{x_i}\right)'_{x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)\bigg|_{x=a}$$

функции $f'_{x_i}(x)$ называют ***частной производной второго порядка*** функции $f(x)$ в точке a по переменным x_i и x_j и обозначают

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \text{или} \qquad f''_{x_i x_j}(a).$$

Производные $f'_{x_i}(x)$ в связи с этим называют ***частными производными первого порядка***.

Всего у функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющей n переменных, в заданной точке a может быть n^2 частных производных $f''_{x_i x_j}(a)$ второго порядка. При $i \neq j$ их называют ***смешанными***. При $j = i$ используют обозначения

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2}, \qquad f''_{x_i x_i}(a) \qquad \text{или} \qquad f''_{x_i^2}(a).$$

Если для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке x существуют все частные производные второго порядка, то из них можно составить квадратную матрицу порядка n

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

которую называют ***матрицей Гессе***.

Пример 9.5. У функции трех переменных $u = x^y + y^z + \ln(xz)$ в первом октанте, т.е. в *области*

$$\left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\colon x > 0,\ y > 0,\ z > 0\right\},$$

существуют все частные производные первого порядка:

$$u'_x = yx^{y-1} + \frac{1}{x}, \quad u'_y = x^y \ln x + zy^{z-1}, \quad u'_z = y^z \ln y + \frac{1}{z}.$$

Эта функция в первом октанте имеет и частные производные второго порядка, которые вычисляются как частные производные первого порядка от уже найденных производных.

Вычисляя частные производные первого порядка функции u'_x по переменным x, y и z, находим

$$u''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2} - \frac{1}{x^2}, \quad u''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \quad u''_{xz} = 0.$$

Аналогично, используя частные производные u'_y и u'_z, получаем

$$u''_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}, \quad u''_{y^2} = x^y \ln^2 x + z(z-1)y^{z-2},$$
$$u''_{yz} = y^{z-1} + zy^{z-1}\ln y$$

и

$$u''_{zx} = 0, \quad u''_{zy} = zy^{z-1}\ln y + y^{z-1}, \quad u''_{z^2} = y^z \ln^2 y - \frac{1}{z^2}.$$

Отметим, что смешанные производные во всех точках первого октанта удовлетворяют равенствам

$$u''_{yx} = u''_{xy}, \quad u''_{xz} = u''_{zx}, \quad u''_{zy} = u''_{yz}.$$

Пример 9.6. Найдем все частные производные второго порядка для функции двух переменных $f(x, y) = 3x^2y + y^2 + 5$ и запишем для нее матрицу Гессе.

Решение имеет вид

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что в ответе получилась *симметрическая матрица*, т.е. в данном случае (как, кстати, и в примере 9.5) значение смешанных производных второго порядка не зависит от порядка дифференцирования (последовательности, в которой вычисляются частные производные первого порядка). #

Как показывают рассмотренные примеры, в некоторых случаях смешанные производные, которые отличаются лишь порядком дифференцирования, совпадают. Следующая теорема дает достаточные условия для такого совпадения, т.е. условия, при выполнении которых значение смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования.

Теорема 9.4 (*теорема о смешанных частных производных*). Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n > 1)$ в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ имеет частные производные первого порядка f'_{x_i} и f'_{x_j}, $i \neq j$, а также смешанные производные $f''_{x_ix_j}$ и $f''_{x_jx_i}$. Если эти смешанные производные являются *непрерывными в точке a функциями по части переменных x_i* и x_j, то в этой точке их значения совпадают, т.е. $f''_{x_ix_j}(a) = f''_{x_jx_i}(a)$.

◀ При доказательстве теоремы значения всех переменных, кроме x_i и x_j, можно считать фиксированными. Поэтому можно вести речь о функции, имеющей только два аргумента x_i и x_j, которые удобно переобозначить: $x_i = x$, $x_j = y$. Итак, пусть функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности U точки $(p,\ q)$ имеет частные производные первого порядка и смешанные производные f''_{xy}, f''_{yx}, причем обе смешанные производные непрерывны в самой точке $(p,\ q)$. Покажем, что в этой точке смешанные производные равны.

Выберем такое число $\delta > 0$, что при $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ точка $(p + \Delta x,\ q + \Delta y)$ попадает в окрестность U. Тогда в квадрате $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ определена функция

$$g(\Delta x, \Delta y) = f(p+\Delta x, q+\Delta y) - f(p+\Delta x, q) - f(p, q+\Delta y) + f(p, q).$$

Для функции $\varphi(x) = f(x, q + \Delta y) - f(x, q)$ одного переменного имеем

$$g(\Delta x, \Delta y) = \varphi(p + \Delta x) - \varphi(p).$$

Функция $\varphi(x)$ на отрезке $[p,\ p + \Delta x]$ (или $[p + \Delta x,\ p]$ при $\Delta x < 0$) имеет производную

$$\varphi'(x) = f'_x(x, q + \Delta y) - f'_x(x, q)$$

и потому непрерывна на этом отрезке. Следовательно, к функции $\varphi(x)$ на указанном отрезке можно применить теорему Лагранжа. Согласно этой теореме, существует такое число $\vartheta \in \in (0,\ 1)$, что

$$\varphi(p + \Delta x) - \varphi(p) = \varphi'(p + \vartheta\Delta x)\Delta x = \big[f'_x(p + \vartheta\Delta x, q + \Delta y) - f'_x(p + \vartheta\Delta x, q)\big]\Delta x.$$

Итак,

$$g(\Delta x, \Delta y) = \varphi(p + \Delta x) - \varphi(p) = \big[f'_x(p + \vartheta\Delta x, q + \Delta y) - f'_x(p + \vartheta\Delta x, q)\big]\Delta x.$$

Разность в квадратных скобках представляет собой приращение функции $\lambda(y) = f'_x(p+\vartheta\Delta x, y)$ одного переменного на отрезке $[q,\, q+\Delta y]$ (или минус приращение на отрезке $[q+\Delta y,\, q]$ при $\Delta y < 0$):

$$\lambda(q+\Delta y) - \lambda(q) = f'_x(p+\vartheta\Delta x, q+\Delta y) - f'_x(p+\vartheta\Delta x, q).$$

На отрезке $[q,\, q+\Delta y]$ функция $\lambda(y)$ имеет производную

$$\lambda'(y) = f''_{xy}(p+\vartheta\Delta x, y)$$

и является поэтому непрерывной на этом отрезке. Значит, и к этой функции на указанном отрезке можно применить теорему Лагранжа. Мы приходим к выводу, что

$$\lambda(q+\Delta y) - \lambda(q) = \lambda'(q+\vartheta_1\Delta y)\Delta y = f''_{xy}(p+\vartheta\Delta x, q+\vartheta_1\Delta y)\Delta y,$$

где $\vartheta_1 \in (0,\, 1)$ — некоторое число. В результате находим, что

$$g(\Delta x, \Delta y) = f''_{xy}(p+\vartheta\Delta x, q+\vartheta_1\Delta y)\Delta x\Delta y. \tag{9.5}$$

Равенство (9.5) было получено в результате двукратного применения теоремы Лагранжа, причем сперва она применялась по переменному x, затем — по переменному y. Но те же рассуждения можно повторить, поменяв лишь порядок переменных. Тогда получим равенство, аналогичное (9.5), но включающее другую смешанную производную. Действительно, если функцию $g(\Delta x, \Delta y)$ представить в виде

$$g(\Delta x, \Delta y) = \psi(q+\Delta y) - \psi(q),$$

где $\psi(y) = f(p+\Delta x, y) - f(p, y)$, то получим

$$g(\Delta x, \Delta y) = \psi'(q+\vartheta_2\Delta y)\Delta y = \bigl[f'_y(p+\Delta x, q+\vartheta_2\Delta y) - f'_y(p, q+\vartheta_2\Delta y)\bigr]\Delta y,$$

где $\vartheta_2 \in (0,\, 1)$. Повторно применяя теорему Лагранжа к разности в квадратных скобках, приходим к равенству

$$g(\Delta x, \Delta y) = f''_{yx}(p+\vartheta_3\Delta x, q+\vartheta_2\Delta y)\Delta y\Delta x, \tag{9.6}$$

где $\vartheta_3 \in (0,\, 1)$.

Соединяя равенства (9.5) и (9.6), а затем сокращая на произведение $\Delta x\Delta y \ne 0$, получаем

$$f''_{xy}(p+\vartheta\Delta x, q+\vartheta_1\Delta y) = f''_{yx}(p+\vartheta_3\Delta x, q+\vartheta_2\Delta y).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $(\Delta x,\ \Delta y) \to (0,\ 0)$, заключаем, что $f''_{xy}(p, q) = f''_{yx}(p, q)$, так как по условию теоремы смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке $(p,\ q)$. ►

Условие непрерывности смешанных производных в доказанной теореме нельзя опустить: при нарушении этого условия смешанные частные производные могут отличаться.

Пример 9.7. Покажем, что смешанные частные производные второго порядка функции двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \ne 0; \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

различны в точке $(0,\ 0)$.

Найдем частные производные первого порядка:

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} x\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$$

При $y \neq 0$ имеем $f'_x(0,y) = -y$, откуда

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = -1.$$

Аналогично $f'_y(x,0) = x$ при $x \neq 0$, и поэтому

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = 1.$$

Следовательно, $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{xy}(0,0)$, что связано с нарушением условия непрерывности смешанных производных в точке $(0,\ 0)$. Разрыв смешанных производных вытекает из теоремы 9.4 (согласно этой теореме, в случае непрерывности смешанных производных в точке $(0,\ 0)$ они в этой точке совпадали бы). Но в этом можно убедиться и непосредственно. Действительно, в области $x^2+y^2 \neq 0$ функции f'_x и f'_y имеют непрерывные частные производные первого порядка по переменным y и x соответственно, которые равны между собой:

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = f''_{yx}(x,y).$$

Однако, например, при $y = kx$, $x \neq 0$, имеем

$$f''_{xy}(x,kx) = \frac{1-k^2}{1+k^2}\left(1 + \frac{8k^2}{(1+k^2)^2}\right),$$

и предел этой производной при $x \to 0$ зависит от k, т.е. f''_{xy} является функцией, разрывной в точке $(0,\ 0)$.

Частные производные высшего порядка вводятся так же, как и *частные производные второго порядка*. Частную производную k-го порядка $(k > 1)$ *функции нескольких переменных* определяют как *частную производную первого порядка* от некоторой частной производной $(k-1)$-го порядка этой функции.

Например, для функции $f = f(x,y)$ двух переменных могут существовать следующие частные производные третьего порядка: $f'''_{xxx} \equiv f'''_{x^3}$, $f'''_{xxy} \equiv f'''_{x^2y}$, f'''_{xyx}, $f'''_{yxx} \equiv f'''_{yx^2}$, $f'''_{yyx} \equiv f'''_{y^2x}$ и т.д., всего восемь частных производных.

Порядок производной в верхнем индексе указывают соответствующим количеством штрихов, если он невелик (не выше трех-четырех), а в общем случае натуральным числом. При этом используют как римские обозначения натуральных чисел, так и арабские (в круглых скобках). Например, $f'''_{xxy} \equiv f^{(3)}_{x^2y}$, $f''''_{xxyy} \equiv f^{(4)}_{x^2y^2} \equiv f^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2}$.

Пусть X — *область* в $\mathbb{R}^n$. Через $C^k(X)$ обозначают множество тех функций нескольких переменных, у которых все частные производные до порядка k включительно являются *непрерывными на множестве X функциями*. Множества $C^k(X)$ называют классами и говорят, что функция принадлежит ***классу C^k*** в области X, если она является элементом множества $C^k(X)$. О функции $f \in C^k(X)$ также говорят, что она имеет k-й ***порядок гладкости*** в области X или что она является ***k раз непрерывно дифференцируемой*** в области X. В этих обозначениях допусти́м случай $k = \infty$, означающий, что соответствующая функция имеет непрерывные частные производные любого порядка. Такую функцию обычно называют ***гладкой***[*] или ***бесконечно дифференцируемой функцией***.

Для функций k-го порядка гладкости в некоторой области значение частной производной порядка не выше k не зависит от последовательности, в которой выполняется дифференцирование. Например, при $k = 4$ равенство $f^{\mathrm{IV}}_{xyxy} = f^{\mathrm{IV}}_{xxyy}$ можно рассматривать как равенство частных производных по переменному y функций f'''_{xyx} и f'''_{xxy}, или g''_{xy} и g''_{yx}, где $g = f'_x$. Но $g''_{xy} = g''_{yx}$, так как эти частные производные, являющиеся частными производными функции f'_x, непрерывны. Значит, $f'''_{xyx} = f'''_{xxy}$ и $f^{\mathrm{IV}}_{xyxy} = f^{\mathrm{IV}}_{xxyy}$.

Свойство независимости частных производных от порядка дифференцирования, которым обладают функции классов C^k, позволяет в обозначениях частных производных группировать одни и те же переменные и тем самым упрощать запись. Для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^k(X)$ частные производные r-го порядка ($r \leqslant k$) обозначают следующим образом:

$$D^\sigma f \equiv \frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \equiv \frac{\partial^{|\sigma|} f(x)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}},$$

где $\sigma = (i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n)$ и $r = |\sigma|$ обозначает сумму $i_1 + \ldots + i_n$ всех индексов.

[*]Термин «гладкий» в математической литературе не имеет устоявшегося смысла. В разных областях математики этот термин может обозначать разные понятия.

ОГЛАВЛЕНИЕ