

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Конспект лекций

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Лекция 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Полный дифференциал ФНП. Производная сложной функции. Частная и полная производные ФНП. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциалы высших порядков. Формула тейлора для ФНП (без док-ва). Применение дифференциала ФНП к приближенным вычислениям.

10.1. Дифференциал функции нескольких переменных

Пусть функция нескольких переменных $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определена в окрестности точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и дифференцируема в этой точке. Тогда, согласно следствию 9.1, полное приращение этой функции в точке x в зависимости от приращения $\Delta x = (\Delta x_1 \ \Delta x_2 \ \dots \ \Delta x_n)^T$ независимых переменных можно представить в виде

$$\Delta f(x) = f'_{x_1}(x)\Delta x_1 + f'_{x_2}(x)\Delta x_2 + \dots + f'_{x_n}(x)\Delta x_n + \alpha(\Delta x)|\Delta x|,$$

где $f'_{x_i}(x)$, $i = \overline{1, n}$, — частные производные функции $f(x)$, а функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой функцией при $\Delta x \rightarrow 0$. Как и в случае функций одного переменного, можно ввести следующее понятие.

Определение 10.1. Линейную относительно Δx часть полного приращения функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x , т.е. выражение

$$f'_{x_1}(x)\Delta x_1 + f'_{x_2}(x)\Delta x_2 + \dots + f'_{x_n}(x)\Delta x_n \quad (10.1)$$

называют (**полным**) **дифференциалом функции** f и обозначают через $df(x)$.

Дифференциалы независимых переменных x_i , $i = \overline{1, n}$, как и для функции одного переменного, по определению равны приращениям этих переменных: $dx_i = \Delta x_i$. С учетом этого дифференциал функции f можно записать в виде

$$df(x) = f'_{x_1}(x)dx_1 + f'_{x_2}(x)dx_2 + \dots + f'_{x_n}(x)dx_n. \quad (10.2)$$

Для полного приращения дифференцируемой функции нескольких переменных имеем равенство

$$\Delta f(x) = df(x) + \alpha(\Delta x)|\Delta x|, \quad (10.3)$$

где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Слагаемые $f'_{x_i} dx_i$ в правой части равенства (10.2) называют **частными дифференциалами функции** $f(x)$ в точке x . Каждое слагаемое $f'_{x_i} dx_i$ представляет собой линейную часть частного приращения $\Delta_i f(x)$ функции $f(x)$ в данной точке.

10.2. Дифференцируемость сложной функции

На функции нескольких переменных можно распространить *правило дифференцирования сложной функции*, установленное для функций одного действительного переменного.

Пусть на некотором множестве $A \subset \mathbb{R}^m$ определены функции $g_i: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, причем $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)) \in B \subset \mathbb{R}^n$ при $x \in A$. Пусть на множестве B задана функция $f: B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда на A определена сложная функция $F(x) = f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$.

Сложную функцию $F(x)$ часто задают в виде $z = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $i = \overline{1, n}$, вводя дополнительный набор переменных $u_1, u_2, \dots, u_n$. Эти переменные называют **промежуточными переменными**, подчеркивая роль, которую они играют при задании сложной функции.

Отметим, что если функции $g_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $i = \overline{1, n}$, определены в некоторой окрестности $U(a)$ точки $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$, и функция $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ определена в окрестности точки $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, то в некоторой окрестности $U'(a) \subset U(a)$ точки a определена сложная функция $F(x) = f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$, которая, согласно теореме 8.6, является непрерывной в точке a .

Теорема 10.1. Если функции $g_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}$, а функция $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ дифференцируема в точке $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, где $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$, то в некоторой окрестности точки a определена сложная функция $F(t) = f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$, дифференцируемая в точке a , причем

$$\frac{dF(a)}{dt} = \frac{\partial f(b)}{\partial u_1} \frac{dg_1(a)}{dt} + \frac{\partial f(b)}{\partial u_2} \frac{dg_2(a)}{dt} + \dots + \frac{\partial f(b)}{\partial u_n} \frac{dg_n(a)}{dt}. \quad (10.4)$$

◀ Условие дифференцируемости функции f в точке b предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности $U(b, \sigma)$ точки b . Так как функции g_i дифференцируемы в точке a , они определены в некоторой окрестности этой точки и являются *непрерывными функциями в точке a* . Значит, согласно определению непрерывности, существует такая окрестность $U(a, \delta)$, в которой определены все функции g_i , $i = \overline{1, n}$, и выполняются неравенства $|g_i(t) - g_i(a)| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Тогда для любого $t \in U(a, \delta)$ точка $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, где $u_i = g_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, попадает в окрестность $U(b, \sigma)$, поскольку $|u - b| < \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \cdot n} = \sigma$. Следовательно, в окрестности $U(a, \delta)$ определена сложная функция $F(t) = f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$.

Пусть $t \in U(a, \delta)$ — произвольная точка, $u_i = g_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $z = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Обозначим $\Delta t = t - a$, $\Delta u_i = u_i - b_i$, $\Delta z = z - c$, где $c = f(b)$. В силу дифференцируемости функций g_i в точке a имеем представление

$$\Delta u_i = g_i(t) - g_i(a) = g'_i(a)\Delta t + \alpha_i(\Delta t)|\Delta t|, \quad (10.5)$$

где $\Delta u = u - b$, $\alpha_i(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. В силу дифференцируемости f в точке b имеем аналогичное представление

$$\Delta z = f(u) - f(b) = \sum_{i=1}^n f'_{u_i}(b)\Delta u_i + \beta(\Delta u)|\Delta u|, \quad (10.6)$$

где $\beta(\Delta u) \rightarrow 0$ при $\Delta u \rightarrow 0$. Подставив (10.5) в (10.6), получим

$$\begin{aligned} \Delta F(a) = \Delta z &= \sum_{i=1}^n f'_{u_i}(b_i)(g'_i(a)\Delta t + \alpha_i(\Delta t)|\Delta t|) + \beta(\Delta u)|\Delta u| = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n f'_{u_i}(b_i)g'_i(a) \right) \Delta t + \gamma(\Delta t)|\Delta t|, \end{aligned} \quad (10.7)$$

где

$$\gamma(\Delta t) = \sum_{i=1}^n f'_{u_i}(b)\alpha_i(\Delta t) + \beta(\Delta g_1(a), \Delta g_2(a), \dots, \Delta g_m(a)) \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(g'_i(a)\nu(\Delta t) + \alpha_i(\Delta t) \right)^2},$$

и $\nu(\Delta t) = \frac{\Delta t}{|\Delta t|}$.

Функция $\beta(\Delta u)$ бесконечно малая при $\Delta u \rightarrow 0$, причем на представление (10.6) не влияет значение этой функции при $\Delta u = 0$. Поэтому можно считать, что $\beta(0) = 0$ и что функция $\beta(\Delta u)$ непрерывна при $\Delta u = 0$. Но тогда функция $\beta(\Delta g_1(a), \Delta g_2(a), \dots, \Delta g_m(a))$ непрерывна при $\Delta t = 0$, как композиция непрерывных функций. Значит, она является бесконечно малой при $\Delta t \rightarrow 0$. Функция $\nu(\Delta t)$ является ограниченной: $|\nu(\Delta t)| = 1$. Отсюда вытекает, что функция $\eta(\Delta t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(g'_i(a) \nu(\Delta t) + \alpha_i(\Delta t) \right)^2}$ ограничена при $\Delta t \rightarrow 0$. Следовательно, произведение $\beta(\Delta g_1(a), \Delta g_2(a), \dots, \Delta g_m(a)) \eta(\Delta t)$ есть бесконечно малая функция при $\Delta t \rightarrow 0$, так как представляет собой произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию. Таким образом, функция $\gamma(\Delta t)$, как сумма бесконечно малых функций, является бесконечно малой функцией при $\Delta t \rightarrow 0$. Согласно определению 9.1, представление (10.7) означает, что функция F дифференцируема в точке a . При этом сумма $\sum_{i=1}^n f'_{x_i}(b_i) g'_i(a)$ является, согласно (10.7), линейной частью приращения функции F , т.е. имеет место равенство (10.4). ►

Следствие 10.1. Если функции $g_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $i = \overline{1, n}$, дифференцируемы в точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$, и функция $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ дифференцируема в точке $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, то в некоторой окрестности точки a определена сложная функция $F(x) = f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$, где $x = (x_1, x_2, x_m)$, эта функция дифференцируема в точке a , причем

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(b)}{\partial u_1} \frac{\partial g_1(a)}{\partial x_k} + \frac{\partial f(b)}{\partial u_2} \frac{\partial g_2(a)}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f(b)}{\partial u_n} \frac{\partial g_n(a)}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (10.8)$$

◄ Как и в доказательстве теоремы 10.1 сначала показываем, что сложная функция определена в некоторой окрестности точки a . Затем, фиксируя все переменные, кроме x_i и применяя теорему 10.1 к сложной функции

$$F_i(t) = f(g_1(a_t^{(i)}), g_2(a_t^{(i)}), \dots, g_n(a_t^{(i)})), \quad a_t^{(i)} = (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m),$$

получаем формулу (10.8). ►

Используя промежуточные переменные, равенство (10.8) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial z}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (10.9)$$

Отметим, что частные производные в (10.9) вычисляются в соответствующих точках, а именно: $\frac{\partial z}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial u_s}{\partial x_j}$ — в точке a , а $\frac{\partial z}{\partial u_s}$ — в точке b .

В равенствах (10.9) следует обратить внимание на то, как в них входят промежуточные и остальные переменные. Запись частных производных сложной функции в виде (10.9) называют **правилом дифференцирования сложной функции** или, иногда, **цепным правилом**.

Рассмотрим некоторые частные случаи дифференцирования сложных функций при различных значениях n и m . Будем предполагать, не оговаривая этого специально, что условия теоремы 10.1 (или следствия 10.1) для этих функций выполнены в соответствующих точках.

При $n = 1$ у функции f всего лишь один аргумент и частная производная будет фактически обыкновенной производной. Это должно быть отражено в обозначениях производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{df}{du} \frac{du}{\partial x_j}. \quad (10.10)$$

где частные и обыкновенная производные вычисляются в соответствующих точках.

При $m = 1$ функции g_i имеют один аргумент, а правило дифференцирования сложной функции записывается в виде (10.4) или, если использовать промежуточные переменные, в виде

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt}. \quad (10.11)$$

Производную сложной функции $z = f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ (т.е. действительной функции действительного переменного, получаемой через несколько промежуточных переменных), вычисляемую в соответствии с формулой (10.11), называют **полной производной функции** $f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$.

Пример 10.1. У сложной функции $y(u, v)$, $u = u(t)$, $v = v(t)$, один аргумент t , как и у функций $u(t)$ и $v(t)$ (т.е. в данном случае $m = 1$). Согласно (10.4), находим

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \frac{du(t)}{dt} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \frac{dv(t)}{dt},$$

где частные производные $\frac{\partial y(u, v)}{\partial u}$ и $\frac{\partial y(u, v)}{\partial v}$ вычисляются в точке $u = u(t)$, $v = v(t)$.

Пусть $z = g(u)$ — функция одного переменного u , а $u = f(x, y)$ — функция двух переменных x и y . Тогда z есть сложная функция переменных x и y : $z = z(x, y) = g(f(x, y))$, причем u — единственное промежуточное переменное. В данном случае $m = 2$, $n = 1$ и мы имеем две формулы вида (10.8):

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \frac{dg(u)}{du} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \frac{dg(u)}{du} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

где производная $\frac{dg(u)}{du}$ вычисляется в точке $u = f(x, y)$.

Пример 10.2. Докажем, что сложная функция двух переменных $z(x, t) = g(u)$, $u = x - at$, где g — произвольная дифференцируемая в $\mathbb{R}$ функция действительного переменного, является решением *дифференциального уравнения в частных производных* первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Для этого достаточно убедиться, что заданная функция обращает данное уравнение в тождество. Поскольку $z(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 10.1, то при вычислении частных производных $z'_t(x, t)$ и $z'_x(x, t)$ можно воспользоваться цепным правилом, согласно которому

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} &= \frac{dg(u)}{du} \Big|_{u=x-at} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = g'(u) \Big|_{u=x-at} = g'(x - at), \\ \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} &= \frac{dg(u)}{du} \Big|_{u=x-at} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -ag'(u) \Big|_{u=x-at} = -ag'(x - at). \end{aligned}$$

Подставляя найденные частные производные в уравнение, убеждаемся, что в результате оно обращается в тождество $0 = 0$.

Пример 10.3. а. Найдём полную производную сложной функции $z = f(t, x, y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, предполагая, что *функция нескольких переменных* $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в $\mathbb{R}^3$.

В данном случае промежуточных переменных два, но удобно ввести третье промежуточное переменное $w = t$ и рассмотреть сложную функцию $z = f(w, x, y)$, $w = t$, $x = \sin t$, $y = \cos t$. Используя правило дифференцирования сложной функции, находим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial x} \cos t - \frac{\partial f}{\partial y} \sin t,$$

где частные производные функции f вычисляются в точке $(t, \sin t, \cos t)$.

б. Найдём частные производные сложной функции $z(x, y) = f(u, v, x)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Вводя, как и выше, промежуточное переменное $w = x$ и записывая сложную функцию

$z(x, y) = f(u, v, w)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = x$, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},\end{aligned}$$

где частные производные функции f вычисляются в точке $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = x$.

Пример 10.4. Найдем дифференциал dz дифференцируемой сложной функции двух переменных $z = f(u, v)$, где $u = x + y$, $v = xy$.

В данном случае $dz = z'_x dx + z'_y dy$, где

$$z'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u + f'_v y, \quad z'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u + f'_v x,$$

а частные производные функции $f(u, v)$ вычисляются в точке $(x + y, xy)$. Таким образом,

$$dz = (f'_u + f'_v y) dx + (f'_u + f'_v x) dy. \quad \#$$

Дифференциал функции нескольких переменных, как и функции одного действительного переменного, имеет свойство, которое называют **инвариантностью формы записи дифференциала**. Фактически это свойство есть простая и удобная форма представления правила дифференцирования сложной функции.

Пусть функции $g_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}^m$, а функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, где $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$. Согласно следствию 10.1, сложная функция $F(x) = f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ дифференцируема в точке a , а ее дифференциал в точке a в соответствии с определением дифференциала и правилом дифференцирования сложной функции имеет вид

$$dF(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F(a)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \sum_{j=1}^m \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} du_i.$$

где

$$du_i = \sum_{j=1}^m \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j \quad \text{—}$$

дифференциал функции g_i в точка a . Таким образом,

$$dF(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} du_i.$$

Мы видим, что дифференциал dz сложной функции $z = f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ выражается через дифференциалы $du_1, du_2, \dots, du_n$ промежуточных переменных так же, как и в случае, когда эти переменные являются независимыми. Другими словами, если $z = f(u)$, то $dz = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(u)}{\partial u_i} du_i$ и эта формула не зависит от того, каковы переменные $du_1, du_2, \dots, du_n$, промежуточные или независимые. Это свойство дифференциала и называют инвариантностью его формы записи.

Замечание 10.1. Для дифференциала функции нескольких переменных сохраняются свойства дифференциала функции одного переменного. Например, для дифференцируемых функций $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и произвольного действительного числа c верны равенства $d(cf) = cdf$, $d(f \pm g) = df \pm dg$. Кроме того, справедливы еще два равенства: $d(fg) = f dg + g df$ и $d(f/g) = (g df - f dg)/g^2$ (в точках, где $g \neq 0$).

10.3. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция нескольких переменных $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки x . Тогда ее дифференциал

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$$

как функция от переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ может оказаться дифференцируемой функцией в точке x . В этом случае выражение

$$d(df(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial df(x)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j, \quad (10.12)$$

представляющее собой дифференциал от дифференциала функции $f(x)$, называют **дифференциалом второго порядка** функции $f(x)$ в точке x и обозначают $d^2 f(x)$. В этой связи дифференциал $df(x)$ называют **дифференциалом первого порядка** функции f .

Из теоремы 9.1 следует, что для существования в точке x дифференциала второго порядка функции f необходимо существование всех частных производных второго порядка этой функции в точке x . Достаточным же условием существования дифференциала является условие, что указанные производные являются непрерывными функциями в точке x (см. теорему 9.3).

Если дифференциал первого порядка является линейной функцией переменных $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, то дифференциал второго порядка, согласно представлению (10.12), является квадратичной формой относительно этих переменных. В матричной записи дифференциал второго порядка имеет вид

$$d^2 f(x) = dx^T f''(x) dx,$$

где $f''(x)$ — матрица Гессе функции f .

Итак, если $f \in C^2(U)$, где U — некоторая окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой окрестности существуют непрерывные частные производные первого и второго порядка, а значит, в U существуют как дифференциал первого порядка df , так и дифференциал второго порядка $d^2 f$.

Дифференциал второго порядка, зависящий от набора независимых переменных x и вектора их приращений dx (дифференциалов независимых переменных), может оказаться дифференцируемой функцией по совокупности переменных x . Повторяя последовательно процесс вычисления дифференциалов, приходим к **дифференциалу** функции **k -го порядка**, который является дифференциалом первого порядка от дифференциала $(k-1)$ -го порядка функции f :

$$d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x)).$$

Достаточным условием существования дифференциала k -го порядка в области X является k -й порядок гладкости функции в этой области, т.е. условие $f \in C^k(X)$.

С помощью оператора

$$\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$$

дифференциал k -го порядка функции $f \in C^k$ удобно записывать в виде

$$d^k f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f(x). \quad (10.13)$$

Здесь выражение в скобках возводится в степень k по обычным алгебраическим правилам, причем полагают, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^m = \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} dx_i^m,$$

где использовано обозначение $dx_i^m = (dx_i)^m$.

Пример 10.5. В случае функции двух независимых переменных $z = f(x, y) \in C^2$ имеем

$$dz = f'_x dx + f'_y dy,$$

поэтому

$$d^2z = d(f'_x dx + f'_y dy) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2.$$

Это же выражение для дифференциала второго порядка функции двух переменных получается и по формуле (10.13):

$$d^2f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x, y) = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2.$$

Так, для функции $z = x^2 y^3$ ее второй дифференциал имеет вид

$$d^2z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

Пример 10.6. Найдем второй дифференциал сложной функции $z = e^u + u$, $u = x^2 + y^2$. Первый дифференциал этой функции можно найти, используя инвариантность формы записи дифференциала. Имеем

$$dz = d(e^u + u) = (e^u + 1) du,$$

где

$$du = d(x^2 + y^2) = 2x dx + 2y dy.$$

Дальнейшее дифференцирование дает

$$\begin{aligned} d^2z &= d(e^u + 1) du + (e^u + 1) d^2u = e^u (du)^2 + (e^u + 1) d(2x dx + 2y dy) = \\ &= e^u (2x dx + 2y dy)^2 + (e^u + 1)(2 dx^2 + 2 dy^2) = \\ &= (4e^u x^2 + 2e^u + 2) dx^2 + 8e^u xy dx dy + (4e^u y^2 + 2e^u + 2) dy^2, \end{aligned}$$

где u по-прежнему обозначает функцию $u(x, y) = x^2 + y^2$.

Вычислим, например, второй дифференциал функции в точке $x = y = 0$. В этой точке имеем $u(0, 0) = 0$. Следовательно, в выражение для дифференциала необходимо подставить $x = y = u = 0$. В результате получаем

$$d^2z(0, 0) = 4 dx^2 + 4 dy^2.$$

Тот же ответ можно получить, вычислив производные второго порядка функции $z = e^{x^2+y^2} + x^2 + y^2$. Отметим, что дифференциал второго порядка не обладает свойством инвариантности формы записи даже в случае функций действительного переменного. Если бы это свойство имело место, мы могли бы записать $d^2z = z''_{u^2} du^2 = e^u du^2$. Но, сравнивая с предыдущими вычислениями, легко увидеть, что мы при этом теряем слагаемое $f'_u d^2u$, которое в нашем случае равно $(e^u + 1)(2 dx + 2 dy)$ и не обращается в нуль.

10.4. Формула Тейлора

Напомним, что если у действительной функции действительного переменного $g(t)$ в интервале $(0, T)$ существует конечная производная $(m+1)$ -го порядка, то при любом $t \in [0, T]$ имеет место формула Тейлора (а точнее, формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа):

$$g(t) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} t + \frac{g''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{g^{(m+1)}(\vartheta t)}{(m+1)!} t^{m+1},$$

где $\vartheta \in (0, 1)$ — некоторое число. В частности, при $t = 1$ (если $T \geq 1$) имеем

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \frac{g''(0)}{2!} + \dots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!}. \quad (10.14)$$

Следующая теорема обобщает формулу Тейлора на случай *функции нескольких переменных*.

Теорема 10.2 (теорема Тейлора). Пусть функция нескольких переменных f определена в некоторой окрестности U точки $a \in \mathbb{R}^n$, причем $f \in C^{m+1}(U)$. Если отрезок, соединяющий точки $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, \dots, a_n + \Delta x_n)$, содержится в U , то для функции $f(x)$ имеет место **формула Тейлора**

$$f(a + \Delta x) = \sum_{k=0}^m \frac{d^k f(a)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(a + \vartheta \Delta x)}{(m+1)!}, \quad (10.15)$$

где $\vartheta \in (0, 1)$ — некоторое число, а $d^0 f(a) = f(a)$ по определению.

◀ Рассмотрим действительную функцию действительного переменного

$$g(t) = f(a + t\Delta x), \quad (10.16)$$

определенную на отрезке $[0, 1]$. Эта функция $m+1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, и потому для нее справедливо равенство (10.14). Покажем, что это равенство для функции вида (10.16) можно преобразовать в равенство (10.15). Действительно,

$$g(1) = f(a + 1 \cdot \Delta x) = f(a + \Delta x), \quad g(0) = f(a) = d^0 f(a).$$

Для вычисления производных функции $g(t)$ рассмотрим ее как сложную функцию $g(t) = f(x)$, $x = a + t\Delta x$. Согласно свойству инвариантности формы записи дифференциала первого порядка,

$$\begin{aligned} dg(t) &= df(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f(x) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 dt + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n dt \right) f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right) f(x) dt, \end{aligned}$$

так как при фиксированных a и Δx имеем $dx_i = d(a_i + t\Delta x_i) = \Delta x_i dt$, $i = \overline{1, n}$. Повторяя процесс дифференцирования, находим

$$\begin{aligned} d^2 g(t) &= d(df(x)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^2 f(x) dt^2, \\ &\dots \dots \dots \\ d^k g(t) &= d(d^{k-1} f(u)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^k f(x) dt^k, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Из найденных дифференциалов функции $g(t)$ при $t = 0$ (что равносильно $x = a$) получаем

$$g^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^k f(a) = d^k f(a), \quad k = \overline{1, m},$$

и при $k = m+1$ и $t = \vartheta \in (0, 1)$

$$g^{(m+1)}(\vartheta) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^{m+1} f(a + \vartheta \Delta x) = d^{m+1} f(a + \vartheta \Delta x).$$

Заменяя в (10.14) производные функции $g(t)$ согласно полученным формулам, приходим к равенству (10.15). ►

Как и в случае функций одного переменного, при $a = 0$ формулу Тейлора (10.15) часто называют **формулой Маклорена**. Число m , определяющее количество слагаемых в формуле

Тейлора, называют **порядком формулы Тейлора**. Последнее слагаемое в формуле Тейлора (10.15) называют **остаточным членом в форме Лагранжа**. Остаточный член можно также записать в виде

$$o(|\Delta x|^m) \quad (10.17)$$

(читается: «о малое от $|\Delta x|^m$ »), и тогда его называют **остаточным членом в форме Пеано**. Таким образом, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет вид

$$f(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^m \frac{d^k f(x)}{k!} + o(|\Delta x|^m). \quad (10.18)$$

Пример 10.7. Запишем формулу (10.15) для функции двух переменных $f(x, y)$ в случае $m = 2$:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = & f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \\ & + \frac{1}{2} \left(f''_{x^2}(x, y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(x, y)(\Delta y)^2 \right) + \\ & + \frac{1}{3!} d^3 f(x + \vartheta \Delta x, y + \vartheta \Delta y). \end{aligned}$$

Замечание 10.2. Формула Тейлора (10.18) с остаточным членом в форме Пеано справедлива при более слабых предположениях о функции f , чем формула Тейлора (10.15) с остаточным членом в форме Лагранжа: она справедлива, если функция f имеет непрерывные частные производные до порядка m включительно в окрестности точки x и частные производные порядка $m + 1$ в окрестности точки x , непрерывные в самой точке x .

Замечание 10.3. При $m = 1$ формула Тейлора (10.18) с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$f(a + \Delta x) = f(a) + df(a) + o(|\Delta x|) = f(a) + f'(a) dx + o(|\Delta x|).$$

Отбрасывая в этой формуле остаточный член, получаем приближенное представление l_f функции f в окрестности точки a . Его обычно записывают в виде

$$l_f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{или} \quad l_f(x) = f(a) + f'(a)\xi, \quad (10.19)$$

где $\xi = x - a$, и называют **линейным** (или **первым**) **приближением функции f** в точке a .

Линейные приближения функций широко используют при изучении локальных свойств (т.е. в окрестности заданной точки) математических моделей объектов, которые описываются сложными функциональными зависимостями. Наиболее широкое применение линейные приближения нашли в теории дифференциальных уравнений, приближенных методах решения задач математической физики, методах оптимизации, теории случайных процессов и др.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа порядка $m = 0$ имеет вид

$$f(a + \Delta a) = f(a) + f'(a + \Theta \Delta a)\Delta a, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

или

$$f(a + \Delta a) - f(a) = f'(a + \Theta \Delta a)\Delta a, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

и известна как **формула конечных приращений**.

10.5. Дифференциалы в приближенных вычислениях

Дифференциалы функций нескольких переменных и формула Тейлора для функций нескольких переменных могут использоваться в приближенных вычислениях примерно так же, как и в случае действительных функций одного действительного переменного. Применение аппарата функций нескольких переменных предпочтительнее, когда в вычисляемом выражении есть несколько величин, которые могут меняться независимо друг от друга. Покажем это на нескольких примерах.

Пример 10.8. Вычислим приближенное значение

$$\sqrt{12,01^2 + 4,98^2}.$$

Это выражение можно рассматривать как значение функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке с координатами $x = 12,01$, $y = 4,98$. Полагаем $a = 12$, $b = 5$, $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = -0,02$. Тогда

$$f(x, y) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) \approx f(a, b) + f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y.$$

В точке $(12, 5)$ значение функции равно $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. Вычисляем частные производные функции:

$$f'_x(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f'_y(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{12,01^2 + 4,98^2} &\approx \sqrt{12^2 + 5^2} + \frac{12}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \cdot 0,01 - \frac{5}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \cdot 0,02 = \\ &= 13 + \frac{12}{1300} - \frac{10}{1300} = 13 + \frac{1}{650} \approx 13,0015. \end{aligned}$$

Полученное значение отличается от точного лишь в пятом знаке после запятой. Если необходимо оценить точность R полученного приближения, можно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. В рассматриваемом случае

$$f''_{x^2}(x, y) = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad f''_{xy}(x, y) = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad f''_{y^2}(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Поэтому

$$R = \frac{1}{2}d^2 f(a + \vartheta\Delta x, b + \vartheta\Delta y) = \frac{y^2(\Delta x)^2 - 2xy\Delta x\Delta y + x^2(\Delta y)^2}{2(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (10.20)$$

где $x = a + \vartheta\Delta x$, $y = b + \vartheta\Delta y$, $0 < \vartheta < 1$. Используя неравенства $x \leq 13$, $y \leq 5$ в числителе дроби и оценивая снизу знаменатель дроби с помощью неравенства $\sqrt{x^2 + y^2} > 12$, получаем

$$R < \frac{25(\Delta x)^2 + 130|\Delta x\Delta y| + 169(\Delta y)^2}{2 \cdot 12^3} = \frac{961}{2 \cdot 12^3} \cdot 10^{-4} < 0,3 \cdot 10^{-4}.$$

Отметим, что значение R , которое вычислено подстановкой в (10.20) значений $x = 12$, $y = 5$ и которое, очевидно, можно рассматривать как приближение остаточного члена в форме Лагранжа, приблизительно равно $0,19 \cdot 10^{-4}$. Это близко к полученной нами оценке сверху. #

Дифференциалы функций нескольких переменных могут использоваться для анализа чувствительности функций на изменение тех или иных аргументов.

Пример 10.9. Плоская деталь имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной 100 мм и углом при вершине 45° . Насколько изменится расход материала, требуемого для изготовления детали, если угол при вершине увеличится на 1° , а боковая сторона уменьшится на 1 мм?

Площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной l и углом φ при вершине равна $S(l, \varphi) = 0,5 l^2 \sin \varphi$. Полагая $\Delta l = -1$ мм, $\Delta \varphi = \pi/180$, получаем

$$\begin{aligned}\Delta S(l, \varphi) &\approx dS(l, \varphi) = S'_l(l, \varphi) \Delta l + S'_\varphi(l, \varphi) \Delta \varphi = \\ &= l(\sin \varphi) \Delta l + \frac{l^2}{2} (\cos \varphi) \Delta \varphi = -50\sqrt{2} + \frac{125}{9} \pi \sqrt{2} \approx -9,004.\end{aligned}$$

Таким образом, площадь, пропорциональная количеству расходуемого материала, уменьшится на 9 мм^2 .

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 10. Дифференциал	31
10.1. Дифференциал функции нескольких переменных	31
10.2. Дифференцируемость сложной функции	31
10.3. Дифференциалы высших порядков	36
10.4. Формула Тейлора	37
10.5. Дифференциалы в приближенных вычислениях	40