Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Конспект лекций

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 11
НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ. ГРАДИЕНТ

Неявные функции. Теорема о существовании (без док-ва) и дифференцируемости неявной ФНП. Производная ФНП по направлению и градиент, их свойства.

11.1. Неявные функции

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, \end{cases} \tag{11.1}$$

где функции $f_1(x)$, ..., $f_m(x)$ определены в некоторой *области* $X \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Предположим, что эта система разрешима относительно части переменных, например x_{n+1}, ..., x_{n+m}. Разрешимость системы в данном случае следует понимать в широком смысле как существование для любых значений x_1, ..., x_n единственного решения системы относительно переменных x_{n+1}, ..., x_{n+m}. Тогда определена *функция нескольких переменных* $y = h(x)$, которая точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие точку $y = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^m$ так, что в совокупности переменные $x_1, \ldots, x_{n+m}$ составляют решение рассматриваемой системы. В этом случае о функции $h(x)$ говорят как о ***неявной функции***, или ***неявно заданной функции***. Отметим, что термин «неявная функция» относится не к виду или структуре функции, а лишь к способу ее задания.

В математическом анализе важную роль играют условия, при выполнении которых система уравнений вида (11.1) разрешима относительно части переменных. Отметим, что весьма не просто определить, разрешима ли система в заданной области. Условия же локальной разрешимости системы (11.1), т.е. ее разрешимости в некоторой *окрестности* заданной *точки*, достаточно просты и связаны в первую очередь с дифференциальными свойствами функций f_1, f_2, ..., f_m.

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных. Уравнение $f(x, y) = 0$ будем называть ***уравнением с двумя неизвестными***. Остановимся на вопросе о том, при каких условиях это уравнение определяет переменное y как *неявную функцию* переменного x. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 11.1. Уравнение $3x^2 - y + 20 = 0$ может быть записано в эквивалентном виде $y = 3x^2 + 20$, и мы видим, что это уравнение задает переменное y как функцию переменного x. Выполненное преобразование уравнения — это фактически его решение относительно переменного y (мы выразили y через x).

Пример 11.2. Из уравнения $x^2 + y^2 - 9 = 0$ тоже можно выразить y через x: $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Однако в этом случае каждому значению $x \in (-3, 3)$ соответствуют уже два значения y. Мы получаем из уравнения не одну, а две функции, определенные на отрезке $[-3, 3]$: $h_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$ и $h_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$.

Пример 11.3. Уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не имеет решений и потому не задает ни одно из переменных как функцию от другого.

Пример 11.4. Задает ли уравнение $e^y + y - x + \ln x = 0$ переменное y как функцию переменного x или переменное x как функцию переменного y? Ответить на этот вопрос сложно, так как не ясно, каким образом одно из переменных можно выразить через другое, преобразуя это уравнение. #

Приведенные примеры показывают, что не так-то просто, исходя из вида уравнения $f(x, y) = 0$, выяснить, задает оно неявную функцию или нет. Как отмечено выше, ответить на этот вопрос можно в *окрестности* заданной *точки*, если использовать дифференциальные свойства функции двух переменных $f(x, y)$.

Теорема 11.1 (*теорема о неявной функции*). Пусть уравнение $f(x, y) = 0$, x, $y \in \mathbb{R}$, удовлетворяет следующим трем условиям:

1) координаты точки $(a,\ b)$ удовлетворяют уравнению, т.е. $f(a, b) = 0$;

2) *функция* $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности U точки $(a,\ b)$ и *непрерывно дифференцируема* в U, т.е. $f \in C^1(U)$;

3) *частная производная функции* $f(x, y)$ в точке $(a,\ b)$ по переменному y отлична от нуля, т.е. $f'_y(a, b) \neq 0$.

Тогда на плоскости существует прямоугольник P, определяемый неравенствами $|x - a| < \delta_x$, $|y - b| < \delta_y$, имеющий центр симметрии в точке $(a,\ b)$, такой, что в P уравнение $f(x, y) = 0$ разрешимо относительно переменного y и тем самым задает функцию $y = \varphi(x)$, $x \in T = (a - \delta_x,\ a + \delta_x)$. При этом функция $y = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на T, а ее производная может быть вычислена по формуле

$$\varphi'(x) = -\left.\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}\right|_{y=\varphi(x)}. \quad \# \tag{11.2}$$

Отметим, что прямоугольник P, построенный в доказательстве теоремы 11.1, выбран так, что график функции $y = \varphi(x)$ расположен внутри этого прямоугольника и соединяет две точки на противоположных вертикальных сторонах прямоугольника.

Пример 11.5. Уравнение $f(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ из примера 11.2 задает окружность радиуса 3. Условия теоремы 11.1 выполнены во всех точках окружности, кроме точек $(3,\ 0)$ и $(-3,\ 0)$, в которых $f'_y = 0$. Для любой точки $(a,\ b)$ окружности в верхней полуплоскости существует прямоугольник P, в котором уравнение разрешимо относительно y: $y = \sqrt{9 - x^2}$ (рис. 11.1). В качестве такого прямоугольника подходит любой прямоугольник в верхней полуплоскости со сторонами, параллельными осям координат, центром в точке $(a,\ b)$, такой, что окружность пересекается с его боковыми сторонами. Для точек окружности в нижней полуплоскости в соответствующем прямоугольнике $y = -\sqrt{9 - x^2}$. В окрестности точек $(3,\ 0)$ и $(-3,\ 0)$ уравнение неразрешимо относительно y. Например, возьмем точку $(3,\ 0)$. Тогда при любом $x > 3$ уравнение не имеет решений, а при $x < 3$ оно имеет два решения, т.е. в окрестности этой точки уравнение не определяет y как функцию x. Отметим, что в этих особых точках касательные к окружности вертикальны.

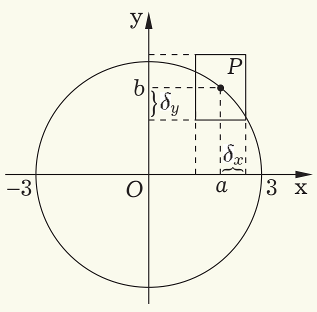

Рис. 11.1

Пример 11.6. Функция $f(x, y) = e^y + y - x + \ln x$ из примера 11.4 удовлетворяет условию $f'_y(x, y) = e^y + 1 > 0$ всюду в правой полуплоскости $x > 0$. Значит, если это уравнение имеет хотя бы одно решение $(a,\ b)$, то в окрестности этого решения уравнение разрешимо относительно переменного y и задает y как функцию переменного x. Например, это справедливо и для точки $(1,\ 0)$, поскольку $f(1, 0) = 0$. Согласно теореме 11.1, в некотором прямоугольнике с центром в точке $(1,\ 0)$ рассматриваемое уравнение неявно задает функцию $y = \varphi(x)$, причем эта функция имеет непрерывную производную

$$\varphi'(x) = -\frac{-1+1/x}{e^y+1}\bigg|_{y=\varphi(x)}.$$

Подставив координаты точки (1, 0) в найденное выражение производной, заключаем, что $\varphi'(1) = 0$. Следовательно, в точке $x = 1$ неявно заданная функция $y = \varphi(x)$ может иметь экстремум. Поэтому продолжим исследование поведения этой функции в окрестности точки $x = 1$. Найдем вторую производную неявной функции $y = \varphi(x)$, дифференцируя ее первую производную как сложную функцию:

$$\varphi''(x) = \frac{\frac{1}{x^2}\Big(e^y+1\Big) + e^y y'\Big(-1+\frac{1}{x}\Big)}{(e^y+1)^2},$$

где $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x)$. В точке $x = 1$ находим $\varphi''(1) = 0{,}5 > 0$. Следовательно, неявно заданная функция $y = \varphi(x)$ в точке $x = 1$ имеет минимум, а ее график в окрестности точки (1, 0) является выпуклым вниз (рис. 11.2).

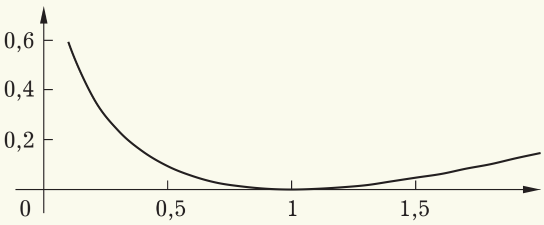

Рис. 11.2

Итак, не имея явного выражения для функции $\varphi(x)$, мы смогли ее исследовать в окрестности точки $x = 1$. Отметим, что функция $f(x,y) = e^y + y - x + \ln x$ при фиксированном x монотонно возрастает как функция переменного y на всей числовой оси. При этом $f(x,y) \to +\infty$ при $y \to +\infty$ и $f(x,y) \to -\infty$ при $y \to -\infty$. Значит, уравнение $f(x,y)$ при любом $x > 0$ относительно y имеет решение, и притом единственное. Таким образом, рассматриваемое уравнение неявно задает переменное y как функцию переменного x при $x > 0$ и в данном конкретном случае в качестве прямоугольника P можно взять любой прямоугольник в правой полуплоскости $x > 0$ со сторонами, параллельными осям координат, нижние вершины которого расположены в нижней полуплоскости, а в верхних вершинах функция f имеет положительные значения. Из найденного выражения для производной определяем, что неявная функция убывает при $0 < x < 1$ и возрастает при $x > 1$.

Теорему 11.1 несложно обобщить на случай одного уравнения с $n+1$ неизвестными.

Теорема 11.2. Пусть в *окрестности* V *точки* $(a,\ b)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, задана функция $f(x,y)$ от $n+1$ переменных ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$), удовлетворяющая условиям:

а) $f(a,b) = 0$;

б) *функция* $f(x,y)$ *непрерывно дифференцируема* в V;

в) $f'_y(a,b) \neq 0$.

Тогда точка $(a,\ b)$ имеет окрестность вида

$$\Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ |x-a| < \delta_x,\ |y-b| < \delta_y\Big\},$$

в которой уравнение $f(x,y) = 0$ разрешимо относительно y, т.е. в окрестности $U(a,\delta_x) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x-a| < \delta_x\}$ определена функция нескольких переменных $\varphi(x)$, удовлетворяющая тождеству $f\bigl(x,\varphi(x)\bigr)\equiv 0$. При этом функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в $U(a,\delta_x)$, а ее частные производные в $U(a,\delta_x)$ могут быть вычислены по формулам

$$\varphi'_{x_k}(x_k) = -\frac{f'_{x_k}(x,y)}{f'_y(x,y)}\bigg|_{y=\varphi(x)}, \quad k=\overline{1,\,n}. \quad \# \tag{11.3}$$

Теоремы 11.1 и 11.3 не только дают формулы для вычисления производных неявных функций, но и дают достаточные условия дифференцируемости неявной функции. Покажем, что формулы дифференцирования неявной функции могут быть получены, если использовать предположение о дифференцируемости неявной функции и правило дифференцирования сложной функции. Пусть функция $\varphi(x)$, $x\in G\subset\mathbb{R}^n$, определена неявно уравнением $f(x,y)=0$. Тогда в области G имеем $f(x,\varphi(x))\equiv 0$. Считая, что функции $y=\varphi(x)$ и $z=f(x,y)$ дифференцируемы в соответствующих точках, причем $f'_y(x,y)\neq 0$, по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x_k}=0, \quad x\in G.$$

Из этого уравнения находим

$$\frac{\partial y}{\partial x_k}=-\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}},$$

что представляет собой иную запись формулы (11.3).

Теоремы 11.1–11.2 содержат три условия, которые являются достаточными для локального существования неявной функции и ее дифференцируемости. В случае нарушения хотя бы одного из этих условий применение указанных теорем невозможно и следует искать другие подходы к выявлению разрешимости системы нелинейных уравнений. Покажем на примерах, что при нарушении условий теоремы о неявной функции ее утверждение может выполняться, а может и нет.

Пример 11.7. **а.** Рассмотрим уравнение $y^{2/3}-x=0$. Оно разрешимо относительно переменного x и определяет функцию $x=y^{2/3}$ (рис. 11.3). Ясно, что в окрестности точки (0, 0) рассматриваемое уравнение не разрешимо относительно переменного y, так как любому значению $x>0$ соответствуют два противоположных по знаку значения y, в то время как при $x<0$ уравнение вообще не имеет решений. Такая ситуация указывает на нарушение условий теоремы 11.1. Действительно, в точке (0, 0) выполнено первое условие теоремы, но нарушены второе и третье условия, так как в точке (0, 0) не определена частная производная функции $f(x,y)=y^{2/3}-x$ по переменному y.

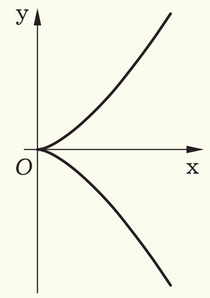

Рис. 11.3

б. Уравнение $y^2-x^3=0$, как нетрудно увидеть, эквивалентно предыдущему уравнению $y^{2/3}-x=0$, но ему соответствует функция $F(x,y)=$ $=x^3-y^2$, непрерывно дифференцируемая на всей плоскости. Новое уравнение по-прежнему не разрешимо в окрестности точки (0, 0) относительно переменного y (так как оно эквивалентно прежнему). Теорема 11.1 не применима, и единственной причиной этого в данном случае является нарушение третьего условия теоремы. Отметим, что в других точках в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению $y^{2/3}-x=0$ (или $y^2-x^3=0$), условия теоремы 11.1 выполнены, а уравнение в области $x>0$ задает неявную функцию $y=x^{3/2}$ для точек выше оси абсцисс и $y=-x^{3/2}$ для точек ниже оси абсцисс.

Пример 11.8. Уравнению $(y-x)^2=0$ соответствует функция $F(x,y)=(y-x)^2$, непрерывно дифференцируемая всюду в $\mathbb{R}^2$. В точке (0, 0) выполнены первое и второе условия теоремы 11.1, однако третье условие нарушено, так как $F'_y(x,y)=2(y-x)$ и $F'_y(0,0)=0$. Тем не менее уравнение разрешимо относительно переменного y и задает функцию $y = x$, определенную и непрерывно дифференцируемую всюду в $\mathbb{R}$. В данном случае утверждение теоремы (в части существования неявной функции) верно, хотя применение этой теоремы невозможно из-за нарушения ее условий.

11.2. Производная по направлению

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$ и задан вектор $\boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}$. Обозначим через $\boldsymbol{n}^\circ$ *единичный вектор*, имеющий то же направление, что и вектор $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n}^\circ = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = (\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n).$$

Определение 11.1. ***Производной*** функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ ***по направлению вектора*** $\boldsymbol{n}$ называют число

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}} = \lim_{s\to+0} \frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s}, \tag{11.4}$$

если этот предел существует.

Из этого определения и содержащегося в нем соотношения (11.4) легко сделать вывод о том, что производная по направлению вектора представляет собой скорость изменения значений функции f в точке a в направлении вектора $\boldsymbol{n}$.

Теорема 11.3. Если *функция* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке она имеет производную по направлению любого ненулевого вектора $\boldsymbol{n}$, причем

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\nu_i, \tag{11.5}$$

где $\boldsymbol{n}^\circ = (\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n) = \boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|$.

◄ Рассмотрим функцию $g(s) = f(a + s\boldsymbol{n}^\circ)$ одного действительного переменного s. Поскольку функция нескольких переменных $f(x)$ дифференцируема в точке $a = (a_1,\ \ldots,\ a_n)$, то *сложная функция* $g(s) = f(x(s))$, где $x(s) = a + s\boldsymbol{n}^\circ$, дифференцируема в точке $s = 0$ и

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{df(a_1 + s\nu_1, \ldots, a_n + s\nu_n)}{ds}\right|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f(a_1 + s\nu_1, \ldots, a_n + s\nu_n)}{\partial x_i}\,\nu_i\right|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\,\nu_i.$$

В то же время, согласно определению производной функции действительного переменного, имеем

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \lim_{s\to0} \frac{g(s) - g(0)}{s} = \lim_{s\to0} \frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s}.$$

Из существования последнего предела вытекает и существование равного ему одностороннего предела при $s \to +0$. Поэтому

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \lim_{s\to+0} \frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s} = \frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получаем утверждение теоремы. ►

Пример 11.9. Функция двух переменных $f(x, y) = e^{xy}$ имеет *частные производные* $f'_x(x, y) = ye^{xy}$, $f'_y(x, y) = xe^{xy}$, являющиеся *непрерывными функциями* в $\mathbb{R}^2$. Поэтому она, согласно теореме 9.3, дифференцируема в каждой точке плоскости. В точке (1, 0) функция $f(x,y)$ имеет производную по любому направлению. Взяв вектор

$$\boldsymbol{n} = \left(\cos\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

удовлетворяющий условию $\|\boldsymbol{n}\| = 1$ и направленный под углом $\pi/4$ к оси абсцисс, получим

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{n}} = f'_x(1,0)\frac{1}{\sqrt{2}} + f'_y(1,0)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

11.3. Градиент

Определение 11.2. Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x имеет все *частные производные первого порядка.* Вектор

$$\operatorname{grad} f(x) = \big(f'_{x_1}(x),\ \ldots,\ f'_{x_n}(x)\big),$$

составленный из частных производных первого порядка функции $f(x)$ в точке x, называют ***градиентом функции*** f в точке x.

Понятие градиента позволяет упростить запись формулы (11.5) для вычисления производной по направлению вектора $\boldsymbol{n}$ *дифференцируемой* в точке x *функции.* Используя стандартное скалярное умножение в $\mathbb{R}^n$, формулу (11.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = (\operatorname{grad} f(x),\ \boldsymbol{n}^\circ)\,. \tag{11.6}$$

Пример 11.10. Найдем производную функции $u = x^2 - 2y^3 + \cos xz$ трех переменных x, y и z в точке $M(2;1;0)$ по направлению вектора $\boldsymbol{n} = (-1,\ 2,\ 2)$.

Функция $u(x,y,z)$ дифференцируема в любой точке в $\mathbb{R}^3$. Найдем ее частные производные первого порядка в произвольной точке $(x,\ y,\ z)$:

$$u'_x = 2x - z\sin xz, \quad u'_y = -6y^2, \quad u'_z = -x\sin xz.$$

Градиент функции $u(x,y,z)$ существует в любой точке и имеет вид

$$\operatorname{grad} u(x,y,z) = \big(2x - z\sin xz,\ \ -6y^2,\ \ -x\sin xz\big).$$

Подставляя в это выражение координаты точки $M(2;1;0)$, находим $\operatorname{grad} u(2,1,0) = (4,\ -6,\ 0)$.

Для заданного вектора $\boldsymbol{n}$ вычисляем *единичный вектор* $\boldsymbol{n}^\circ$ с тем же направлением. Так как $|\boldsymbol{n}| = 3$, то $\boldsymbol{n}^\circ = (-1/3,\ 2/3,\ 2/3)$. Воспользовавшись формулой (11.6), окончательно получаем

$$\frac{\partial u(2,1,0)}{\partial \boldsymbol{n}} = (\operatorname{grad} u(2,1,0),\ \boldsymbol{n}^\circ) = 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + (-6)\cdot\frac{2}{3} + 0\cdot\frac{2}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Замечание 11.1. Непосредственно из определения вытекает, что при изменении направления вектора $\boldsymbol{n}$ на противоположное, т.е. при замене вектора $\boldsymbol{n}$ вектором $-\boldsymbol{n}$, производная по направлению дифференцируемой функции меняет знак.

Замечание 11.2. Пусть вектор $\boldsymbol{n}$ задает направление, совпадающее с направлением одного из векторов *стандартного базиса* в $\mathbb{R}^n$ (в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$ такое направление совпадает с направлением соответствующей координатной оси). Например, $\boldsymbol{n} = (0,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,\ 0)$, где единица стоит на i-м месте. Тогда в соответствии с определением 11.1 производной по направлению вектора получаем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = \lim_{s\to+0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + s, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x)}{s} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Таким образом, производная по направлению базисного вектора совпадает с соответствующей частной производной. Однако обратим внимание на то, что производная по направлению определяется односторонним пределом, а частная производная — двусторонним. Поэтому возможна ситуация, когда производная по базисному направлению существует, а соответствующая частная производная — нет. Учитывая изложенное, можно сказать, что производная по направлению вектора обобщает понятие частной производной первого порядка, распространяя это понятие на случай произвольного направления в заданной точке.

Замечание 11.3. Производная по направлению имеет простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим, например, функцию двух переменных $f(x, y)$ в *окрестности точки* $(a,\ b)$ и некоторый вектор $\boldsymbol{n} = (p,\ q)$. Единичный вектор $\boldsymbol{n}^\circ$ в этом случае имеет координаты $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, где α — угол между вектором и осью абсцисс, а производная по направлению вектора $\boldsymbol{n}$ в точке $(a,\ b)$ равна

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \lim_{t\to+0} \frac{f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)}{t},$$

т.е. совпадает с правосторонней производной функции $\varphi(t) = f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)$ в точке $t = 0$. График функции $\varphi(t)$ можно представить как сечение поверхности $z = f(x, y)$ вертикальной плоскостью, пересекающей координатную плоскость xOy по прямой L, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a + t\cos\alpha, \\ y = b + t\sin\alpha, \\ z = 0 \end{cases}$$

(рис. 11.4). А тогда односторонняя производная функции $\varphi(t)$ представляет собой тангенс угла наклона ϑ односторонней касательной в точке P к сечению графика функции $z = f(x, y)$ указанной плоскостью. Поскольку производную действительной функции одного действительного переменного в точке интерпретируют как скорость роста функции, производную функции $f(x, y)$ по направлению вектора $\boldsymbol{n}$ можно трактовать как скорость роста этой функции в направлении этого вектора.

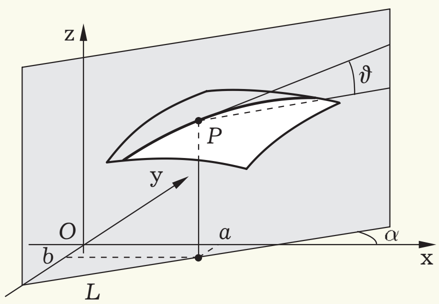

Рис. 11.4

Остановимся на некоторых свойствах градиента функции.

Свойство 11.1. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = \text{пр}_{\boldsymbol{n}} \operatorname{grad} f(x), \tag{11.7}$$

где $\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{b}$.

◀ В случае $n = 2$ или 3 соотношение (11.7) эквивалентно (11.6) в силу формулы связи между ортогональной проекцией и скалярным произведением двух векторов:

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{y}, \tag{11.8}$$

в которой надо взять $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n}^\circ$, $\boldsymbol{y} = \operatorname{grad} f(x)$ и учесть, что $|\boldsymbol{n}^\circ| = 1$. При $n > 3$ формулу (11.8) следует трактовать как определение ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{y}$ на направление вектора $\boldsymbol{x}$. Это также позволит записать равенство (11.6) в виде (11.7). ▶

Свойство 11.2. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и $\operatorname{grad} f(x) \neq \mathbf{0}$, то при $\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} f(x)$ имеем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = |\operatorname{grad} f(x)|.$$

◀ Если $\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} f(x)$, то $\boldsymbol{n}^\circ = \dfrac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|}$ и, согласно (11.6),

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = \left(\operatorname{grad} f(x),\, \frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|}\right) = \frac{|\operatorname{grad} f(x)|^2}{|\operatorname{grad} f(x)|} = |\operatorname{grad} f(x)|. \quad ▶$$

Свойство 11.3. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке вектор $\operatorname{grad} f(x)$ указывает направление наибольшего роста функции $f(x)$.

◀ В силу *неравенства Коши — Буняковского* для любого вектора $\boldsymbol{n}$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = (\operatorname{grad} f(x),\, \boldsymbol{n}^\circ) \leqslant |\operatorname{grad} f(x)|\, |\boldsymbol{n}^\circ| = |\operatorname{grad} f(x)|,$$

причем несложно убедиться, что в случае, когда $\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} f(x)$, приведенное неравенство превращается в равенство. Действительно, тогда $\boldsymbol{n}^\circ = \lambda \operatorname{grad} f(x)$, где $\lambda = 1/|\operatorname{grad} f(x)|$, и

$$(\operatorname{grad} f(x),\, \boldsymbol{n}^\circ) = \lambda |\operatorname{grad} f(x)|^2 = |\operatorname{grad} f(x)|.$$

Докажем, что никакое другое направление не является направлением наибольшего роста. Отметим, что для несовпадающих единичных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ в силу легко проверяемого тождества

$$2\,(\boldsymbol{n}_1,\, \boldsymbol{n}_2) = |\boldsymbol{n}_1|^2 + |\boldsymbol{n}_2|^2 - |\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_2|^2 = 2 - |\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_2|^2$$

верно неравенство $(\boldsymbol{n}_1,\, \boldsymbol{n}_2) < 1$. Поэтому если единичный вектор $\boldsymbol{n}^\circ$ имеет то же направление, что и $\operatorname{grad} f(x)$, а $\boldsymbol{m}^\circ$ — любой другой единичный вектор, то с учетом свойства 11.2 имеем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{m}^\circ} = (\operatorname{grad} f(x),\, \boldsymbol{m}^\circ) = |\operatorname{grad} f(x)|\, (\boldsymbol{n}^\circ,\, \boldsymbol{m}^\circ) < |\operatorname{grad} f(x)| = \frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}^\circ}. \quad ▶$$

Свойство 11.4. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то в этой точке вектор $-\operatorname{grad} f(x)$ задает направление наибольшего убывания функции $f(x)$.

◀ Как было отмечено выше (см. замечание 11.1), при изменении направления вектора на противоположное *производная* дифференцируемой функции *по направлению* меняет знак. Поэтому если вектор $\boldsymbol{n}$ указывает направление наибольшего убывания функции, то вектор $-\boldsymbol{n}$ указывает направление наибольшего возрастания функции. В самом деле, если функция $f(x, y)$ возрастает в направлении некоторого вектора $\boldsymbol{a}$ быстрее, чем в направлении вектора $-\boldsymbol{n}$, то она и убывает в направлении вектора $-\boldsymbol{a}$ быстрее, чем в направлении вектора $\boldsymbol{n}$. Но это противоречит выбору вектора $\boldsymbol{n}$ как вектора, определяющего направление наибольшего убывания функции. Согласно свойству 11.3, вектор $-\boldsymbol{n}$ имеет то же направление, что и вектор $\operatorname{grad} f(x)$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{n}$ по направлению совпадает с вектором $-\operatorname{grad} f(x)$. ▶

Свойство 11.5. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то наибольшая скорость роста (убывания) функции $f(x)$ в этой точке равна $|\operatorname{grad} f(x)|$ $(-|\operatorname{grad} f(x)|)$.

◄ Согласно свойствам 11.2 и 11.3, производная функции $f(x)$ по направлению вектора $\operatorname{grad} f(x)$ (направлению наибольшего роста) равна $|\operatorname{grad} f(x)|$. Производная по противоположному направлению, определяющая наибольшую скорость убывания функции (см. свойство 11.4), отличается лишь знаком и равна $-|\operatorname{grad} f(x)|$. ►

Пример 11.11. Найдем в точке $M(2;1)$ наибольшую скорость роста функции двух переменных $z(x,y) = x^2y - 2y^3$.

Поскольку функция дифференцируема в точке M, то наибольшая скорость ее роста в этой точке равна модулю ее градиента в этой точке. Находим градиент данной функции в произвольной точке:

$$\operatorname{grad} z = \bigl(2xy,\ \ x^2 - 6y^2\bigr).$$

Вычисляем значение градиента в заданной точке $M(2;1)$:

$$\operatorname{grad} z(2,1) = (4,\ -2).$$

И наконец, находим искомую скорость:

$$|\operatorname{grad} z(2,1)| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ