Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Конспект лекций

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 12
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Касательная плоскость и нормаль к поверхности, условия их существования и вывод уравнений. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Формула Тейлора для ФНП (без док-ва).

12.1. Касательная плоскость и нормаль

Рассмотрим некоторую поверхность* S в пространстве. Пусть точка M принадлежит поверхности S и существует такая плоскость π, проходящая через точку M, которая содержит *касательные*, построенные в точке M ко всем кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку M. Плоскость π называют ***касательной плоскостью*** к поверхности S в точке M (рис. 12.1). Прямую L, проходящую через точку M и перпендикулярную плоскости π, называют ***нормалью к поверхности*** S в точке M.

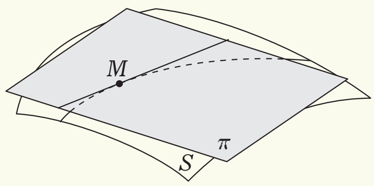

Рис. 12.1

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке M на этой поверхности найдем в предположении, что в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$ и выполнены следующие четыре условия.

1°. Поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$.

2°. Известны координаты a, b, c точки $M\in S$.

3°. *Функция* $F(x,y,z)$ *дифференцируема* в точке M.

4°. *Градиент функции* $F(x,y,z)$ в точке M отличен от нуля, т.е. $\operatorname{grad} F(a,b,c)\neq 0$.

Рассмотрим кривую γ, лежащую на поверхности S и проходящую через точку M. Зададим эту кривую параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t) \tag{12.1}$$

так, чтобы значение параметра $t=0$ соответствовало точке M, т.е. чтобы

$$\varphi(0)=a,\quad \psi(0)=b,\quad \chi(0)=c.$$

Предположим, что в точке $t=0$ функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют производные, не обращающиеся в нуль одновременно.

При сделанных предположениях

$$F\bigl(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\bigr)\equiv 0, \tag{12.2}$$

причем *сложная функция* в левой части тождества дифференцируема в точке $t=0$. Поэтому, дифференцируя (12.2) в точке $t=0$ по *правилу дифференцирования сложной функции*, получаем

$$\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial x}\varphi'(0)+\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial y}\psi'(0)+\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial z}\chi'(0)=0.$$

*Детальное описание поверхностей и их свойств выходит за рамки курса. Здесь мы опираемся на интуитивное понимание термина «поверхность».

Записанное равенство означает, что вектор

$$\boldsymbol{\tau} = (\varphi'(0),\ \psi'(0),\ \chi'(0)),$$

называемый ***касательным вектором к кривой*** γ в точке M, ортогонален вектору

$$\operatorname{grad} F(a,b,c) = \big(F'_x(a,b,c),\ F'_y(a,b,c),\ F'_z(a,b,c)\big),$$

не зависящему от выбора кривой γ.

Итак, все касательные векторы в точке $M \in S$ всевозможных кривых, лежащих на поверхности S и проходящих через точку M, ортогональны *градиенту* $\operatorname{grad} F(a,b,c)$ *функции* $F(x,y,z)$. Построим плоскость π, проходящую через точку M и имеющую *нормальный вектор* $\operatorname{grad} F(a,b,c)$. Тогда касательный вектор любой кривой, лежащей на поверхности S, в точке M будет параллелен плоскости π. Согласно определению, плоскость π является касательной плоскостью к поверхности S в точке M.

Зная координаты a, b, c точки M, через которую проходит плоскость π, и координаты нормального вектора $\operatorname{grad} F(a,b,c)$ этой плоскости, можем записать *общее уравнение плоскости* π:

$$F'_x(a,b,c)(x-a) + F'_y(a,b,c)(y-b) + F'_z(a,b,c)(z-c) = 0. \tag{12.3}$$

Нормаль в точке M поверхности S определяется той же точкой M и тем же вектором $\operatorname{grad} F(a,b,c)$, который является *направляющим вектором* этой *прямой*. По этим данным можно записать уравнения нормали к поверхности S в точке M как *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x-a}{F'_x(a,b,c)} = \frac{y-b}{F'_y(a,b,c)} = \frac{z-c}{F'_z(a,b,c)}. \tag{12.4}$$

Замечание 12.1. Уравнения (12.3), (12.4) получены в предположении, что выполнены условия 1°–4° в отношении поверхности S и точки $M \in S$. Значит, эти условия являются достаточными условиями существования касательной плоскости и нормали поверхности S в точке M.

Замечание 12.2. Из приведенных рассуждений вытекает важное свойство градиента функции: если функция $F(x,y,z)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0; z_0)$ и $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, то градиент ортогонален *поверхности уровня* $F(x,y,z) = C$, где $C = F(x_0,y_0,z_0)$. В самом деле, в этом случае вектор $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)$ является нормальным вектором касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z) - C = 0$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

Пример 12.1. Найдем уравнения касательной плоскости и нормали к сфере $x^2+y^2+z^2 = 9$ в точке $M(1;-2;2)$.

Легко убедиться, что, рассмотрев функцию $F = x^2+y^2+z^2-9$, мы обеспечим выполнение условий 1°–4° в данной задаче. Значит, касательная плоскость и нормаль к сфере в точке M существуют. Для построения их уравнений определяем *частные производные первого порядка* функции F: $F'_x(x,y,z) = 2x$, $F'_y(x,y,z) = 2y$, $F'_z(x,y,z) = 2z$. Вычисляем значения частных производных в точке $M(1;-2;2)$:

$$F'_x(1,-2,2) = 2, \quad F'_y(1,-2,2) = -4, \quad F'_z(1,-2,2) = 4.$$

Находим уравнение касательной плоскости в точке M

$$2(x-1) - 4(y+2) + 4(z-2) = 0$$

и уравнения нормали в этой точке

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{4}. \quad \#$$

Пусть поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $M(a; b)$. Найдем уравнения касательной плоскости и нормали в точке $(a; b; c)$, где $c = f(a, b)$.

Поверхность S следует описать уравнением вида $F(x, y, z) = 0$ с дифференцируемой функцией $F(x, y, z)$. В качестве этой функции можно взять $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Тогда условия $1°$–$4°$ будут выполнены, и, следовательно, в точке M существуют касательная плоскость и нормаль к поверхности S. Уравнения касательной плоскости найдем по формуле (12.3). Так как $F'_x(a, b, c) = f'_x(a, b)$, $F'_y(a, b, c) = f'_y(a, b)$, $F'_z(a, b, c) = -1$, то уравнение касательной плоскости имеет вид

$$f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) - (z - c) = 0. \tag{12.5}$$

Аналогично по формуле (12.4) находим канонические уравнения нормали

$$\frac{x - a}{f'_x(a, b)} = \frac{y - b}{f'_y(a, b)} = \frac{z - c}{-1}. \tag{12.6}$$

Пример 12.2. Рассмотрим поверхность $z = x^2/2 + y^2/4$ (это эллиптический параболоид). Найдем точку на этой поверхности, нормаль в которой параллельна прямой

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 1}{1},$$

и запишем уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке.

В нашем случае $f(x, y) = x^2/2 + y^2/4$, $f'_x = x$, $f'_y = y/2$, так что направляющий вектор нормали к поверхности в произвольной точке $(x,\ y,\ z)$ имеет вид $(x,\ y/2,\ -1)$. По условию нормаль в искомой точке параллельна заданной прямой. Критерием параллельности двух прямых в пространстве является коллинеарность их направляющих векторов. В результате, записывая критерий коллинеарности двух векторов, получаем соотношения

$$\frac{x}{1} = \frac{y/2}{-1} = \frac{-1}{1}.$$

Из этих соотношений находим координаты точки P, в которой нормаль к поверхности параллельна заданной прямой: $x = -1$, $y = 2$, $z = x^2/2 + y^2/4 = 3/2$. Остается записать уравнение касательной плоскости в найденной точке исходя из координат этой точки и нормального вектора плоскости:

$$(x + 1) - (y - 2) + (z - 3/2) = 0, \quad \text{или} \quad 2x - 2y + 2z + 3 = 0.$$

Пример 12.3. Найдем уравнения касательной плоскости и нормали к *графику функции* $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ в точке $(1; 1; 3)$.

Функция $f(x, y)$ является дифференцируемой в точке $(1; 1)$. Поэтому в соответствующей точке графика этой функции существуют касательная плоскость и нормаль к этому графику. Уравнения касательной плоскости и нормали можно получить с помощью формул (12.5) и (12.6). С учетом равенств $f'_x(1, 1) = f'_y(1, 1) = 3$ получаем уравнение касательной плоскости

$$3(x - 1) + 3(y - 1) - (z - 3) = 0$$

и канонические уравнения нормали

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 3}{-1}. \quad \#$$

Понятие касательной плоскости позволяет дать геометрическую интерпретацию *дифференциалу функции нескольких переменных*. Пусть функция $z = f(x, y)$ двух переменных дифференцируема в точке $(a,\ b)$. Тогда ее дифференциал dz в этой точке равен

$$dz = f'_x(a, b)\,dx + f'_y(a, b)\,dy. \tag{12.7}$$

В то же время уравнение $z = f(x, y)$, рассматриваемое в прямоугольной системе координат Oxyz, задает поверхность в пространстве, и эта поверхность в точке $(a; b; f(a, b))$ имеет *касательную плоскость*, уравнение (12.5) которой можно записать в виде

$$z - c = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Обозначив $x - a = \Delta x$, $y - b = \Delta y$, $z - c = \Delta z$, перепишем это уравнение в виде

$$\Delta z = f'_x(a, b)\,\Delta x + f'_y(a, b)\,\Delta y. \tag{12.8}$$

Сравнивая (12.7) и (12.8), заключаем, что дифференциал dz совпадает с Δz, так как приращения Δx и Δy независимых переменных x и y в точке $(a; b)$ в то же самое время являются дифференциалами этих переменных. Другими словами, дифференциал функции двух переменных есть приращение в точке M *аппликаты* точки на касательной плоскости, соответствующее приращениям dx, dy независимых переменных (рис. 12.2).

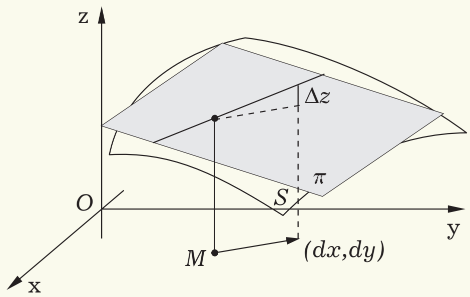

Рис. 12.2

12.2. Касательная и нормаль кривой на плоскости

Рассмотрим на плоскости xOy кривую Q и точку M на этой кривой. Найдем уравнения *касательной* и *нормали к кривой Q в точке M* в предположении, что выполнены следующие четыре условия.

1°. Кривая Q задана уравнением $f(x, y) = 0$.

2°. Известны координаты a, b точки $M \in Q$.

3°. *Функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема* в точке M.

4°. *Градиент функции* $f(x, y)$ в точке $(a,\ b)$ отличен от нуля, т.е. $\operatorname{grad} f(a, b) \neq 0$.

Напомним, что если кривая Q на плоскости является графиком некоторой действительной функции действительного переменного $\varphi(x)$, то касательная к этой кривой в точке $(a; \varphi(a))$ определяется уравнением

$$y = \varphi'(a)(x - a) + \varphi(a), \tag{12.9}$$

а достаточным условием существования касательной является дифференцируемость функции $\varphi(x)$ в точке a.

В данном случае функция $f(x, y)$ является дифференцируемой в точке $M(a; b)$, причем $\operatorname{grad} f(a, b) = \big(f'_x(a, b),\ f'_y(a, b)\big) \neq 0$. Значит, одна из *частных производных* функции $f(x, y)$ в точке M отлична от нуля. Пусть, например, $f'_y(a, b) \neq 0$. Тогда выполнены условия *теоремы о неявной функции*. Согласно этой теореме, уравнение $f(x, y) = 0$ в некотором прямоугольнике P с центром в точке M задает дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, $x \in [a - \delta,\ a + \delta]$, $\delta > 0$. Иначе говоря, часть кривой Q внутри прямоугольника P является *графиком функции* $\varphi(x)$, и мы можем записать уравнение касательной к кривой Q в точке M в виде (12.9). Учитывая выражение (11.2) для производной неявной функции $\varphi(x)$ и равенство $\varphi(a) = b$, находим

$$y - b = -\frac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}(x-a),$$

откуда получаем

$$f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = 0. \tag{12.10}$$

Поскольку нормаль к кривой в точке M проходит через эту точку и перпендикулярна касательной, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x-a}{f'_x(a,b)} = \frac{y-b}{f'_y(a,b)}. \tag{12.11}$$

Если $f'_y(a,b) = 0$, но $f'_x(a,b) \neq 0$, то, поменяв местами переменные x и y и повторив рассуждения, получим те же уравнения касательной и нормали.

Итак, условия 1°–4° являются достаточными для того, чтобы в точке $(a,\ b)$ существовали касательная и нормаль к кривой Q, которые в этом случае задаются уравнениями (12.10) и (12.11). Можно показать, что это утверждение остается верным и тогда, когда условие 3° заменено более слабым условием дифференцируемости функции в точке $(a,\ b)$.

Пример 12.4. Найдем уравнения касательной и нормали к эллипсу $x^2/3 + y^2/6 = 1$ в точке $M(1;2)$.

Легко убедиться, что в данной задаче при выборе функции $f(x,y) = x^2/3 + y^2/6 - 1$ достаточные условия 1°–4° существования касательной и нормали выполнены. Для построения уравнений касательной и нормали вычислим частные производные первого порядка функции $f(x,y)$: $f'_x(x,y) = 2x/3$, $f'_y(x,y) = y/3$. Их значения в точке $M(1;2)$ равны

$$f'_x(1,2) = \frac{2}{3}, \qquad f'_y(1,2) = \frac{2}{3}.$$

Записываем уравнение касательной

$$\frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-2) = 0,$$

или

$$x + y - 3 = 0,$$

и нормали

$$\frac{x-1}{2/3} = \frac{y-2}{2/3},$$

или

$$x - y + 1 = 0.$$

Пример 12.5. Найдем точки, в которых касательная к кривой $y^3 - 3xy + x^3 = 3$ параллельна оси Oy.

Нормальным вектором касательной рассматриваемой кривой в произвольной точке $(x,\ y)$ является вектор $\left(f'_x,\ f'_y\right) = (-3y + 3x^2,\ 3y^2 - 3x)$. Касательная кривой параллельна оси Oy, если ее нормальный вектор параллелен оси Ox, т.е. коллинеарен вектору $(1,\ 0)$. Записывая условие коллинеарности двух векторов на плоскости, получаем уравнение

$$\frac{-3y + 3x^2}{1} = \frac{3y^2 - 3x}{0},$$

которое равносильно уравнению $3y^2 - 3x = 0$. Таким образом, координаты точки кривой, в которой касательная параллельна оси Oy, подчиняются уравнению $x - y^2 = 0$. Так как координаты точек кривой удовлетворяют также уравнению этой кривой, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ y^3 - 3xy + x^3 = 3. \end{cases}$$

Не составляет труда найти два решения этой системы: $x_1 = 1$, $y_1 = -1$ и $x_2 = \sqrt[3]{9}$, $y_2 = \sqrt[3]{3}$. Так как в этих точках градиент функции не обращается в нуль, обе точки — искомые.

ОГЛАВЛЕНИЕ