

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Конспект лекций

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Лекция 14

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Условный экстремум ФНП, его геометрическая интерпретация (при $n = 2$), функция Лагранжа. Необходимое условие условного экстремума (вывод для $n = 2$). Достаточные условия (без док-ва). Нахождение наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой ФНП на замкнутом ограниченном множестве.

В приложениях часто встречаются задачи поиска *экстремумов функций нескольких переменных* при дополнительных ограничениях на возможные изменения переменных. Такие ограничения могут иметь различный характер. Например, значения переменных должны удовлетворять одному или нескольким уравнениям или неравенствам. Как ограничение можно рассматривать условие попадания точки n -мерного линейного арифметического пространства в заданную область, или, наоборот, точки некоторого множества в $\mathbb{R}^n$ не принимаются в расчет. Далее мы остановимся на случае, когда аргументы функции подчиняются ограничениям в виде одного или нескольких уравнений, часто называемых *уравнениями связи*.

14.1. Общая постановка задачи

Пример 14.1. Рассмотрим задачу определения прямоугольника с заданным периметром наибольшей площади. Обозначив через x и y длины сторон прямоугольника, через $2p$ — его периметр, мы приходим к задаче поиска максимума площади прямоугольника $S(x, y) = xy$ при дополнительном условии (ограничении) $2(x + y) = 2p$, что кратко можно записать следующим образом:

$$S(x, y) = xy \rightarrow \max, \quad 2(x + y) = 2p. \quad (14.1)$$

Нас интересует решение задачи в области $x > 0, y > 0$.

В данном случае решение задачи легко можно найти, выразив из *уравнения связи* $2(x + y) = 2p$ одно из переменных и подставив найденное выражение в функцию $S(x, y)$. В результате мы приходим к задаче поиска минимума действительной функции одного действительного переменного. Например, из уравнения связи находим $y = p - x$. Тогда площадь прямоугольника при заданном ограничении можно представить как функцию только переменного x : $S(x) = x(p - x)$. Исходя из естественных ограничений $x > 0, y > 0$, находим область изменения переменного x : $0 < x < p$. Функция $S(x)$ достигает максимума в интервале $(0, p)$ при $x = p/2$, что дает решение рассматриваемой задачи: $x = y = p/2$. Итак, среди всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Отметим, что функция двух переменных $S(x, y) = xy$ не имеет *экстремумов*, а у рассмотренной задачи решение существует. Это связано с тем, что для задачи (14.1) не играют роли значения функции $S(x, y)$ в тех точках, которые не удовлетворяют ограничениям. В задачах такого типа все зависит от поведения функции лишь на части ее *области определения*, а именно на множестве тех точек в области определения, которые подчиняются установленным ограничениям.

Определение 14.1. Говорят, что функция $f(x)$, определенная в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, достигает в этой точке *условного локального максимума (минимума)* при условиях $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \dots, \varphi_m(x) = 0$, где $\varphi_i(x), i = \overline{1, m}$, — некоторые функции нескольких

переменных, определенные в окрестности точки a , если существует такая *проколота окрестность* $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a , что для всех точек $x \in \mathring{U}(a, \delta)$, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, верно неравенство

$$f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)). \quad (14.2)$$

Понятия условного локального максимума и минимума объединяют под общим названием **условный экстремум функции**. Если в определении 14.1 неравенства строгие, то говорят о **строгом условном экстремуме функции**.

Задачу исследования функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на условный экстремум при ограничениях $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, заданных с помощью функций $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, часто записывают в виде

$$f(x) \rightarrow \text{extr}, \quad (14.3)$$

$$\varphi_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (14.4)$$

и называют **задачей на условный экстремум**. При этом функцию $f(x)$ называют **целевой функцией**. Условия (14.4) в общем случае представляют собой систему нелинейных уравнений — уравнений связи.

Метод решения, использованный в примере 14.1, может применяться лишь в простейших ситуациях. Распространение этого метода на общий случай наталкивается на трудности, связанные с исключением части переменных из аргументов целевой функции при помощи уравнений связи. Такой подход приводит к необходимости решать систему нелинейных уравнений, а это, как известно, — сложная задача. Отметим, что исключение неизвестных с помощью уравнений связи приводит затем к задаче поиска локального экстремума функции нескольких переменных, т.е. к решению еще одной системы нелинейных уравнений, которые получаются приравниванием нулю частных производных. Исключение неизвестных нужно лишь затем, чтобы вычислить эти частные производные, но частные производные можно также вычислить и с помощью *теоремы о неявной функции*. В этом случае исключение неизвестных фактически уже не нужно, и решение задачи упрощается. Развитию этого подхода на основе теоремы о неявной функции мы и уделим внимание, начав с более простой задачи для условного экстремума функции двух переменных.

14.2. Необходимое условие условного экстремума

Остановимся на простейшем случае функции двух переменных.

Теорема 14.1 (необходимое условие условного экстремума). Пусть функции двух переменных $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $P(a; b)$. Если функция $f(x, y)$ имеет в точке P **условный экстремум** при условии $\varphi(x, y) = 0$, причем $\text{grad } \varphi(a, b) \neq 0$, то существует такое число λ , которое вместе с координатами a и b точки P удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (14.5)$$

◀ Поскольку $\text{grad } \varphi(a, b) \neq 0$, то одна из частных производных первого порядка функции $\varphi(x, y)$ в точке P отлична от нуля. Пусть, например, $\varphi'_y(a, b) \neq 0$. По *теореме 11.1 о неявной функции* в некотором прямоугольнике

$$U = \{(x, y): |x - a| < \delta_1, |y - b| < \delta_2\}$$

с центром в точке $(a; b)$ уравнение $\varphi(x, y) = 0$ разрешимо относительно переменного y , т.е. задает неявную функцию $y = h(x)$, непрерывно дифференцируемую в окрестности точки a , причем

$$h'(x) = - \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \Big|_{y=h(x)}. \quad (14.6)$$

В прямоугольнике U точки, удовлетворяющие условию $\varphi(x, y) = 0$, имеют вид $(x; h(x))$, где $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$. Значит, если функция $f(x, y)$ имеет в точке P условный экстремум при условии $\varphi(x, y) = 0$, то функция $g(x) = f(x, h(x))$ одного переменного имеет в точке a локальный экстремум. Эта функция, как композиция дифференцируемых функций, является дифференцируемой в точке a . Следовательно, в силу необходимого условия локального экстремума верно соотношение $g'(a) = 0$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции и равенству (14.6), находим

$$g'(a) = f'_x(a, b) + f'_y(a, b)h'(a) = f'_x(a, b) - f'_y(a, b) \frac{\varphi'_x(a, b)}{\varphi'_y(a, b)} = f'_x(a, b) - \frac{f'_y(a, b)}{\varphi'_y(a, b)} \varphi'_x(a, b) = 0.$$

Введем обозначение $\lambda = -f'_y(a, b)/\varphi'_y(a, b)$. Тогда

$$\begin{cases} f'_x(a, b) + \lambda \varphi'_x(a, b) = 0, \\ f'_y(a, b) + \lambda \varphi'_y(a, b) = 0, \end{cases}$$

где первое из этих уравнений вытекает из условия $g'(a) = 0$, а второе эквивалентно равенству, определяющему число λ . Добавив к этим уравнениям равенство $\varphi(a, b) = 0$, которое должно выполняться в точке условного локального экстремума, получим систему уравнений (14.5).

Доказательство теоремы в случае, когда $\varphi'_x(a, b) \neq 0$, проводится аналогично. ►

Систему уравнений (14.5) можно записать в виде

$$\text{grad } f(x, y) = -\lambda \text{grad } \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) = 0$$

и придать ей следующую геометрическую интерпретацию: если в точке условного экстремума выполняются условия теоремы 14.1, то линия уровня целевой функции касается кривой, заданной уравнением связи. На рис. 14.1, а показано, почему в этом случае необходимое условие не может нарушаться в точке P условного экстремума. Представлены линии уровня $f(x) = c_1$, $f(x) = c_2$ и $f(x) = c_3$. В изображенной ситуации $c_1 < c_2 < c_3$ (это определяется направлением градиента функции $f(x, y)$, являющимся направлением ее роста) и функция $f(x, y)$ на кривой $\varphi(x, y) = 0$ не может иметь экстремума. На рис. 14.1, б показано поведение функции в окрестности условного максимума P . В соответствии с указанным направлением градиента функции $f(x, y)$ имеем $c_1 < c_2 < c_3$, что и обеспечивает локальный максимум $f(x, y)$ в точке P на кривой $\varphi(x, y) = 0$. На рис. 14.1, в изображена ситуация, при которой необходимое условие условного экстремума выполнено, но экстремума тем не менее нет (в соответствии с направлением $\text{grad } f$ в точке P имеем $c_1 < c_2 < c_3$).

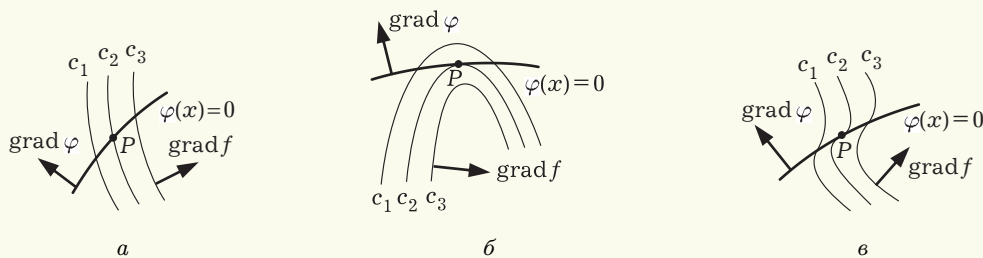


Рис. 14.1

Введем функцию

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y), \quad (14.7)$$

которую называют **функцией Лагранжа**, где λ — **множитель Лагранжа**. Тогда система (14.5) будет иметь вид

$$L'_x(x, y, \lambda) = 0, \quad L'_y(x, y, \lambda) = 0, \quad L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0. \quad (14.8)$$

Таким образом, задача на условный экстремум

$$f(x, y) \rightarrow \text{extr}, \quad \varphi(x, y) = 0$$

при выполнении условий теоремы 14.1 сводится к поиску стационарных точек функции Лагранжа (14.7) и их анализу.

Пример 14.2. Найдем точки, подозрительные на условный экстремум, в задаче

$$f(x, y) = xy \rightarrow \text{extr}, \quad 2(x + y) = 2p, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

сформулированной в примере 14.1.

Функции $f(x, y) = xy$ и $\varphi(x, y) = 2(x + y) - 2p$ удовлетворяют условиям теоремы 14.1, поэтому решать задачу можно при помощи функции Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа (14.7):

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - p).$$

Необходимые условия (14.8) условного экстремума приводят к системе уравнений

$$L'_x(x, y, \lambda) = y + \lambda = 0,$$

$$L'_y(x, y, \lambda) = x + \lambda = 0,$$

$$L'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - p = 0.$$

Выражая x и y из первых двух уравнений и подставляя эти выражения в третье уравнение, находим $-2\lambda - p = 0$, откуда $\lambda = -p/2$ и $x = y = p/2$. Следовательно, условный экстремум в рассматриваемой задаче может быть только в точке $P(p/2; p/2)$ (рис. 14.2). #

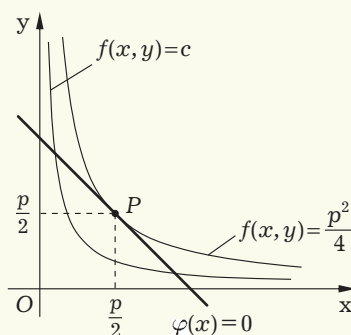


Рис. 14.2

Необходимое условие для задачи общего вида (14.3), (14.4) может быть получено по той же схеме, что и в частном случае двух переменных. В задаче (14.3), (14.4) **функция Лагранжа** по определению имеет вид

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x). \quad (14.9)$$

При этом числа λ_i , $i = \overline{1, m}$, называют **множителями Лагранжа** в этой задаче.

Теорема 14.2. Пусть функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = \overline{1, m}$, определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, причем ранг матрицы $\left(\frac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j}\right)$ частных производных функций φ_i в точке a равен m . Если в точке a функция $f(x)$ имеет условный локальный экстремум при условиях $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, которые вместе с координатами точки a удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \dots \dots, \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_n} = 0, \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \dots \dots \dots, \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_m} = 0. \end{cases} \quad (14.10)$$

14.3. Достаточные условия условного экстремума

Достаточные условия *условного экстремума* в задаче (14.3), (14.4) можно сформулировать с помощью *функции Лагранжа*. Пусть в задаче на условный экстремум функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ при условиях $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, заданных функциями $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, в точке $a \in \mathbb{R}^n$ выполнено *необходимое условие условного экстремума*. В этом случае в точке a определен вектор λ_a *множителей Лагранжа*. Зафиксируем в функции Лагранжа $L(x, \lambda)$ значения множителей Лагранжа, представив ее как функцию только переменных x : $L(x) = L(x, \lambda_a)$. Чтобы выяснить, является ли точка a точкой условного экстремума рассматриваемой функции, нужно проанализировать *дифференциал второго порядка* $d^2L(a)$ функции $L(x)$ в точке a , являющийся квадратичной формой от приращений переменных. Рассмотрим этот дифференциал как квадратичную форму $d^2L(a)_H$ на *линейном подпространстве* H в $\mathbb{R}^n$, заданном системой линейных уравнений $d\varphi_i(a) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 14.3. Пусть функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(a) = 0$, $\text{Rg}\left(\frac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j}\right) = m$ и координаты точки a вместе с координатами некоторого вектора λ_a удовлетворяют системе уравнений (14.10). Тогда:

- 1) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ положительно определенная, то функция $f(x)$ имеет в точке a *строгий условный локальный минимум* при условии $\varphi(x) = 0$;
- 2) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ отрицательно определенная, то функция $f(x)$ имеет в точке a *строгий условный локальный максимум* при условии $\varphi(x) = 0$;
- 3) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ знакопеременная, то функция $f(x)$ в точке a не имеет условного экстремума. #

Теорема 14.3 утверждает, что для проверки точек, подозрительных на условный экстремум, необходимо проанализировать квадратичную форму $d^2L(a)$, т.е. дифференциал второго порядка функции Лагранжа, при значениях дифференциалов dx_j , $j = \overline{1, n}$, которые удовлетворяют системе линейных уравнений

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (14.11)$$

Матрица этой системы линейных алгебраических уравнений совпадает с матрицей $\left(\frac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j}\right)$ частных производных функций $\varphi_i(x)$ в точке a , ранг которой по условию теоремы 14.2 равен m . Следовательно, система (14.11) позволяет выразить m дифференциалов через оставшиеся $n - m$ дифференциалов. Зафиксируем известные значения множителей Лагранжа (координат вектора λ_a). Рассматривая функцию Лагранжа $L(x)$ как функцию только переменных $x_1, \dots, x_n$, вычислим ее дифференциал второго порядка d^2L в точке a . Исключим из квадратичной формы d^2L указанные m дифференциалов. Получим квадратичную форму относительно $n - m$ дифференциалов. Если эта квадратичная форма является положительно определенной (отрицательно определенной, знакопеременной), то в точке a функция $f(x)$ имеет условный локальный минимум (условный локальный максимум, не имеет условного локального экстремума). Если указанная квадратичная форма от $n - m$ переменных вырождена, но сохраняет знак (неположительно или неотрицательно определена), то в точке a функция $f(x)$ может иметь условный локальный экстремум, а может и не иметь. В этом случае по виду второго дифференциала в точке выявить поведение функции $f(x)$ нельзя и нужны другие методы исследования.

Пример 14.3. В примере 14.2 уравнение $d\varphi = 0$ дает $dx + dy = 0$, откуда можно, например, выразить dx через dy : $dx = -dy$. Дифференциал второго порядка функции Лагранжа $L(x, y, \lambda)$ при фиксированном значении $\lambda = -p/2$ в точке $(p/2; p/2)$ имеет вид $d^2L = 2dxdy$. Исключая из второго дифференциала dx , получаем квадратичную форму $2(-dy)dy = -2(dy)^2$, которая отрицательно определена. Следовательно, в точке $(p/2; p/2)$ мы имеем условный локальный максимум.

Пример 14.4. Исследуем на условный экстремум функцию $f(x, y) = x^2 + y^2$ при условии $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где $a > b$.

Функция $f(x, y)$, как и функция $\varphi(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$, является по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемой на всей плоскости. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = \left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)y^2 - \lambda.$$

Запишем систему (14.10) необходимых условий условного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)x = 0, \\ L'_y(x, y) = 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)y = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что либо $x = 0$, либо $\lambda = -a^2$. В первом случае ($x = 0$) из третьего уравнения вытекает, что $y = \pm b \neq 0$, а из второго — что $\lambda = -b^2$. Во втором случае ($\lambda = -a^2$) из второго уравнения сразу получаем, что $y = 0$. Окончательно, используя третье уравнение, заключаем, что есть четыре точки, подозрительные на условный экстремум:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 0, & y_{1,2} &= \pm b, & \lambda &= -b^2; \\ x_{3,4} &= \pm a, & y_{3,4} &= 0, & \lambda &= -a^2. \end{aligned}$$

Исследуем эти четыре точки, применяя достаточное условие условного экстремума. Рассмотрим два случая.

В первом случае, когда $\lambda = -b^2$, дифференциал второго порядка функции Лагранжа имеет вид

$$d^2L(x, y) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dx^2.$$

Подпространство H в точке $(0, b)$ описывается уравнением

$$\varphi'_x(0, b) dx + \varphi'_y(0, b) dy = 0,$$

или с учетом равенств $\varphi'_x(0, a) = 0$, $\varphi'_y(0, b) = 2/b$

$$dy = 0.$$

В точке $(0, -b)$ подпространство H описывается тем же уравнением. Легко увидеть, что квадратичная форма

$$k(dx) = d^2L(0, \pm b) \Big|_{dy=0} = 2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2,$$

являющаяся сужением $d^2L(0, b)$ (или $d^2L(0, -b)$) на подпространство H , положительно определена, так как $a > b$. Значит, точки $(0, b)$ и $(0, -b)$ являются точками условного минимума.

Во втором случае, когда $\lambda = -a^2$, в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ второй дифференциал d^2L функции Лагранжа имеет вид

$$d^2L(\pm a, 0) = 2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) dy^2,$$

а подпространство H описывается уравнением

$$dx = 0.$$

Так как $a > b$, квадратичная форма $d^2L(\pm a, 0)$ на подпространстве H (т.е. при $dx = 0$) отрицательно определена, и поэтому точки $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ являются точками условного локального максимума.

Этот пример является иллюстративным, и приведенное решение в данном случае не самое лучшее. Действительно, ограничение $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ можно записать параметрически в виде $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Это позволяет заменить исследование функции $f(x, y)$ двух

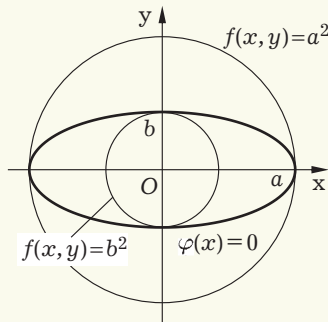


Рис. 14.3

переменных на условный экстремум исследованием на экстремум функции $f(a \cos t, b \sin t)$ одного переменного. Кроме того, поставленная задача имеет простую геометрическую интерпретацию. Кривая $\varphi(x, y) = 0$ в данном случае представляет собой эллипс с полуосями a и b . А *линии уровня* функции $f(x, y)$ — это концентрические окружности, причем значение функции на каждой такой окружности равно квадрату радиуса (рис. 14.3). Максимальный радиус окружности, пересекающей эллипс, равен большой полуоси эллипса. При этом окружность пересекает эллипс в его вершинах, расположенных на большой оси. Минимальный радиус окружности, пересекающей эллипс, равен малой полуоси эллипса, а точками пересечения будут оставшиеся две вершины эллипса.

Пример 14.5. Рассмотрим следующую задачу на экстремум:

$$\begin{cases} x + 2y + z \rightarrow \text{extr}, \\ 2x^2 + y^2 - z^2 = 2, \\ y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

Целевая функция задачи и обе функции, задающие *уравнения связи*, являются по крайней мере дважды дифференцируемыми. Поэтому решение задачи можно искать с помощью функции Лагранжа. В данном случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 2y + z + \lambda(2x^2 + y^2 - z^2 - 2) + \mu(y^2 + z^2 - 2).$$

Необходимые условия экстремума приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} 1 + 4\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y + 2\mu y = 0, \\ 1 - 2\lambda z + 2\mu z = 0, \\ 2x^2 + y^2 - z^2 = 2, \\ y^2 + z^2 = 2. \end{cases} \quad (14.12)$$

Из первых трех уравнений заключаем, что

$$\lambda \neq 0, \quad \lambda + \mu \neq 0, \quad \lambda - \mu \neq 0. \quad (14.13)$$

Кроме того, находим

$$x = -\frac{1}{4\lambda}, \quad y = -\frac{1}{\lambda + \mu}, \quad z = \frac{1}{2(\lambda - \mu)}. \quad (14.14)$$

Вычитая из четвертого уравнения системы (14.12) пятое и сокращая на 2, получаем $x^2 = z^2$, что приводит к двум случаям $x = z$ и $x = -z$. Однако последний случай невозможен, так как иначе из равенств (14.14) будет следовать, что $4\lambda = 2(\lambda - \mu)$ и $\lambda + \mu = 0$, а это противоречит неравенствам (14.13).

Итак, $x = z$. Учитывая это, из равенств (14.14) находим, что $\mu = 3\lambda$ и $y = -\frac{1}{4\lambda} = x$, т.е. $x = y = z$. Используя четвертое или пятое уравнение, получаем два решения рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} x = y = z = 1, & \lambda = -\frac{1}{4}, & \mu = -\frac{3}{4}; \\ x = y = z = -1, & \lambda = \frac{1}{4}, & \mu = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Необходимые условия экстремума привели к двум точкам, подозрительным на экстремум. Исследуем эти точки, используя достаточные условия экстремума. Вычисляем дифференциал второго порядка функции Лагранжа:

$$d^2L = 4\lambda dx^2 + 2(\lambda + \mu) dy^2 + 2(\mu - \lambda) dz^2.$$

В точке $(1, 1, 1)$ с учетом $\lambda = -1/4$ и $\mu = -3/4$ дифференциал принимает вид

$$d^2L = -dx^2 - 2dy^2 - dz^2,$$

а в точке $(-1, -1, -1)$ будет отличаться знаком:

$$d^2L = dx^2 + 2dy^2 + dz^2.$$

Видно, что в первом случае второй дифференциал является отрицательно определенной квадратичной формой, а во втором — положительно определенной квадратичной формой. Это свойство сохранится и на подпространстве H , которое в данном случае определяется уравнениями $2dx + dy - dz = 0$, $dy + dz = 0$. Учитывая это, заключаем, что точка $(1, 1, 1)$ является точкой условного максимума, а точка $(-1, -1, -1)$ — точкой условного минимума.

14.4. Нахождение наибольшего и наименьшего значений

Напомним, что поиск наибольшего и наименьшего значений действительной функции одного действительного переменного на заданном отрезке сводится к поиску всех *критических точек функции* и к сравнению значений функции в критических точках и на концах отрезка. *Функция нескольких переменных, непрерывная на компактном множестве K , достигает на этом*

множестве наибольшего и наименьшего значений, но определение точек множества K , в которых достигаются эти значения, — более сложная задача, так как компактное множество в $\mathbb{R}^n$ в отличие от отрезка числовой оси может иметь границу очень сложной структуры. В таких ситуациях исследовать поведение функции весьма непросто.

Пусть функция нескольких переменных $f(x)$ непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$ и достигает своего наименьшего и наибольшего значений соответственно в точках $x_* \in K$ и $x^* \in K$. Тогда выполняются неравенства

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*), \quad x \in K. \quad (14.15)$$

Чтобы проанализировать способы поиска точек x_* и x^* , рассмотрим некоторые частные случаи.

Пример 14.6. При $n = 1$ и $K = [a, b]$ для поиска точек x_* и x^* можно поступить, как уже отмечено, следующим образом:

- в интервале (a, b) отобрать все *критические точки функции* $f(x)$;
- к критическим точкам добавить граничные точки a и b ;
- во всех отобранных точках вычислить значения функции $f(x)$ и по этим значениям выделить те точки x_* и x^* , в которых значение функции является наименьшим наибольшим.

Пример 14.7. В случае $n = 2$ рассмотрим функцию $f(x, y)$, непрерывную на компакте K , который ограничен тремя кривыми $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = 0$, $g_3(x, y) = 0$ (рис. 14.4). Будем считать, что функции $g_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$, непрерывно дифференцируемы, а компакт K описывается неравенствами

$$g_1(x, y) \geq 0, \quad g_2(x, y) \geq 0, \quad g_3(x, y) \geq 0.$$

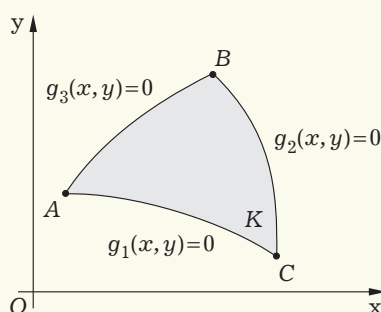


Рис. 14.4

Наибольшее (наименьшее) значение функции может достигаться или во *внутренней точке* множества K , или на одномерной границе (на одной из дуг AC , AB , BC), или в угловых точках границы (A , B или C), являющихся точками пересечения дуг. Поэтому для поиска точек с наибольшим (наименьшим) значением функции можно действовать следующим образом:

- находим все критические точки функции $f(x, y)$, которые являются внутренними для компакта K (они удовлетворяют неравенствам $g_1 > 0$, $g_2 > 0$, $g_3 > 0$);
- среди точек, подозрительных на *условный экстремум*, в каждой из трех задач

$$\begin{cases} f(x, y) \rightarrow \text{extr}, \\ g_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x, y) \rightarrow \text{extr}, \\ g_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x, y) \rightarrow \text{extr}, \\ g_3 = 0 \end{cases}$$

отбираем те, которые лежат на соответствующей дуге AC , BC , AB , т.е. удовлетворяют соответствующим неравенствам:

$$\begin{aligned} g_2(x, y) > 0, \quad g_3(x, y) > 0; \quad g_1(x, y) > 0, \quad g_3(x, y) > 0; \\ g_1(x, y) > 0, \quad g_2(x, y) > 0; \end{aligned}$$

– к указанным точкам добавляем точки A, B, C , являющиеся решениями систем уравнений

$$\begin{cases} g_1(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) > 0, \\ g_3(x, y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} g_1(x, y) > 0, \\ g_2(x, y) = 0, \\ g_3(x, y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} g_1(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0, \\ g_3(x, y) > 0; \end{cases}$$

– во всех отобранных точках вычисляем значения функции и по этим значениям выделяем две точки x_* и x^* , в которых значение является соответственно наименьшим и наибольшим.

В общем случае при вычислении наименьшего и наибольшего значений функции $f(x)$ n переменных на компактном множестве K , которое задано, например, m условиями $g_i(x) \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, задачу можно решать аналогично. Отбираются точки в которых может достигаться наибольшее или наименьшее значение: а) среди внутренних точек множества K ; б) на всех $(n-k)$ -мерных частях границы ($k = \overline{1, n-1}$); в) все нульмерные элементы границы (такие, как точки A, B, C в примере 14.7). Отбор точек внутри K приводит к задаче на локальный экстремум, отбор точек на $(n-k)$ -мерных частях границы приводит к задаче на условный локальный экстремум, как правило, с k уравнениями связи. Затем во всех отобранных точках вычисляются значения функции и выбираются точки с наименьшим и наибольшим значением.

Реализация предложенной схемы опирается на «геометрическое представление компакта K ». В самом общем случае такая схема часто оказывается очень сложной и трудной в применении. В таких случаях более выгодными могут оказаться численные методы конечномерной оптимизации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 14. Условный экстремум	62
14.1. Общая постановка задачи	62
14.2. Необходимое условие условного экстремума	63
14.3. Достаточные условия условного экстремума	66
14.4. Нахождение наибольшего и наименьшего значений	69