

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Конспект лекций

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Лекция 15

ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Векторная ФНП (ВФНП) как отображение $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Координатные функции ВФНП. Геометрическая интерпретация для $n, m = 2, 3$. Предел ВФНП. Непрерывность ВФНП.

15.1. Определение векторной функции

Существует обобщение понятия *функции нескольких переменных*, когда в качестве значений отображения используются не числа, а векторы (или точки n -мерного пространства). Такое обобщение упрощает теоретические построения, связанные с понятиями непрерывности и дифференцируемости.

В общем случае мы называем **функцией многих переменных** (**функцией нескольких переменных**) отображение вида $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Если $m = 1$, т.е. значением отображения является действительное число (*скалярная величина*), отображение называют **скалярной функцией нескольких переменных**. Если же $m > 1$, то указанное отображение называют **векторной функцией нескольких переменных** (или **векторной функцией векторного аргумента**).

Значением векторной функции является упорядоченный набор из m чисел, который можно интерпретировать двояко: как элемент *линейного арифметического пространства* или как элемент *аффинного арифметического пространства*. Пример первого рода дает поле скоростей текущей жидкости, когда в каждой точке некоторой области в пространстве задана скорость частиц жидкости, протекающих через эту точку. Пример второго рода дает перемещение частиц жидкости в пространстве: каждая частица жидкости перемещается из одной точки пространства в другую и результат перемещения можно рассматривать как отображение точек старого положения частиц жидкости в точки их нового положения.

Как и в случае скалярной функции нескольких переменных, множество $D(f) = A \subset \mathbb{R}^n$, на котором определена функция $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, называют **областью определения (существования) функции** f , а множество $R(f) = \{y \in \mathbb{R}^m: y = f(x), x \in D(f)\}$ — **областью значений (изменения) функции** f .

Поскольку элемент линейного пространства $\mathbb{R}^m$ при $m > 1$ является совокупностью m действительных чисел, то векторную функцию нескольких переменных $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ можно рассматривать как совокупность m скалярных функций f_i , полагая, что

$$f(x) = (f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_m(x))^T, \quad x \in D(f). \quad (15.1)$$

Функции нескольких переменных f_i , $i = \overline{1, m}$, называют **координатными функциями** векторной функции f . Для представления векторной функции наряду с матричной формой записи (15.1) используют координатную форму записи

$$y_1 = f_1(x), \quad y_i = f_2(x), \quad \dots, \quad y_m = f_m(x), \quad x \in D(f).$$

На множестве $F(A, \mathbb{R}^m)$ всех функций вида $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, как и в случае скалярных функций, можно ввести операции сложения функций и умножения функций на действительные

числа. **Суммой функций нескольких переменных** $f, g \in F(A, \mathbb{R}^m)$ называют такую функцию $f + g \in F(A, \mathbb{R}^m)$, что для любого $x \in A$ верно равенство $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, в правой части которого стоит сумма значений векторных функций, являющихся элементами линейного пространства $\mathbb{R}^m$. Аналогично **произведением функции нескольких переменных** $f \in F(A, \mathbb{R}^m)$ **на действительное число** λ называют такую функцию $(\lambda f) \in F(A, \mathbb{R}^m)$, что для любого $x \in A$ верно равенство $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, в правой части которого стоит произведение вектора $f(x) \in \mathbb{R}^m$ на действительное число λ .

Записав функции $f, g \in F(A, \mathbb{R}^m)$ в матричной форме

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_m(x))^T, \\ g(x) &= (g_1(x) \ g_2(x) \ \dots \ g_m(x))^T, \end{aligned}$$

мы можем представить введенные операции следующим образом:

$$f(x) + g(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) + g_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) + g_m(x) \end{pmatrix}, \quad \lambda f(x) = \begin{pmatrix} \lambda f_1(x) \\ \vdots \\ \lambda f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что относительно введенных операций множество $F(A, \mathbb{R}^m)$ является линейным пространством.

Определение 15.1. **Графиком векторной функции** нескольких переменных $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называют подмножество $\Gamma(f)$ в $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, которое задается следующим образом:

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}: x \in D(f), y = f(x)\}.$$

Это определение обобщает понятие графика скалярной функции нескольких переменных (см. определение 8.8), в то же время являясь частным случаем общего определения графика отображения $f: X \rightarrow Y$ произвольного множества X в множество Y .

Пример 15.1. График функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, которая задана соотношениями $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in (-\infty, +\infty)$, представляет собой винтовую линию, рассмотренную в примере 8.4. Действительно, графиком этой векторной функции является множество

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = t, y = \cos t, z = \sin t\},$$

что после переобозначения осей координат приводит к образу отображения φ из примера 8.4 (см. рис. 8.5).

Для графического представления векторной функции нескольких переменных в случае небольших размерностей области определения и области значений могут использоваться *поверхности уровня функции*, т.е. множества $\{x \in \mathbb{R}^n: f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}^m$ фиксированный вектор.

При $m > 1$ поверхность уровня функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, соответствующая значению $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$, состоит из тех точек, координаты которых являются решением системы уравнений $f_i(x) = c_i$, $i = \overline{1, m}$, где f_i — координатные функции векторной функции f . Поэтому поверхность уровня векторной функции нескольких переменных является пересечением соответствующих поверхностей уровня ее координатных функций.

15.2. Предел векторной функции нескольких переменных

На векторные функции нескольких переменных естественным образом распространяется понятие предела, введенное для скалярных функций нескольких переменных. Пусть заданы векторная функция нескольких переменных $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, множество $A \subset D(f)$ и предель-

ная точка a множества A . Точку $b \in \mathbb{R}^m$ называют **пределом функции f в точке a по множеству A** , если для любой ε -окрестности $U(b, \varepsilon)$ точки b существует такая проколота δ -окрестность $\dot{U}(a, \delta)$ точки a , что $f(x) \in U(b, \varepsilon)$ при $x \in \dot{U}(a, \delta) \cap A$. В этом случае, как и в скалярном, записывают $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, или $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$.

Если $A = \mathbb{R}^n$, то говорят просто о **пределе функции в точке a** и обозначают его, опуская упоминание множества A : $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Отметим, что если множество A включает некоторую проколотую окрестность точки a (в частности, если точка a внутренняя для A), то можно считать, что $A = \mathbb{R}^n$, поскольку такая замена не изменяет ситуацию.

На векторные функции переносятся утверждения теоремы 8.3 и ее следствия 8.1 о связи пределов в данной точке по различным множествам.

Исследование предела векторной функции нескольких переменных можно свести к исследованию пределов ее координатных функций.

Теорема 15.1. Векторная функция нескольких переменных $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет предел при $x \rightarrow a$, равный b тогда и только тогда, когда существуют пределы ее координатных функций $f_i(x)$ при $x \rightarrow a$, равные b_i , $i = \overline{1, m}$, где

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

◀ Предположим, что существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела векторной функции нескольких переменных, для выбранного числа ε существует такое число $\delta > 0$, что при $x \in A \cap \dot{U}(a, \delta)$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ (это неравенство равносильно соотношению $f(x) \in U(b, \varepsilon)$). Так как

$$|f(x) - b| = \sqrt{(f_1(x) - b_1)^2 + \dots + (f_m(x) - b_m)^2} = |f(x) - b|, \quad i = \overline{1, m},$$

то для тех же $x \in A \cap \dot{U}(a, \delta)$ для каждого $i = \overline{1, n}$ верно и неравенство $|f_i(x) - b_i| < \varepsilon$, или $f_i(x) \in U(b_i, \varepsilon)$, где $U(b_i, \varepsilon)$ — ε -окрестность точки b_i на числовой прямой. Но это и означает существование предела каждой координатной функции $f_i(x)$ при $x \rightarrow a$, равного b_i .

Перейдем к доказательству обратного утверждения и предположим, что при $x \rightarrow a$ существует предел каждой координатной функции $f_i(x)$, равный b_i , $i = \overline{1, m}$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Для $\varepsilon' = \varepsilon/\sqrt{m}$ и каждого $i = \overline{1, m}$ существует такое число $\delta_i > 0$, что при $x \in A \cap \dot{U}(a, \delta_i)$ выполнено неравенство $|f_i(x) - b_i| < \varepsilon/\sqrt{m}$. Пусть $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_m)$. Тогда $U(a, \delta) \subset U(a, \delta_i)$ для каждого $i = \overline{1, m}$. Поэтому при $x \in A \cap \dot{U}(a, \delta)$ одновременно выполняются неравенства $|f_i(x) - b_i| < \varepsilon/\sqrt{m}$, $i = \overline{1, m}$. Следовательно, при $x \in A \cap \dot{U}(a, \delta)$ имеем

$$|f(x) - b| = \sqrt{(f_1(x) - b_1)^2 + \dots + (f_m(x) - b_m)^2} < \sqrt{\varepsilon^2/m + \dots + \varepsilon^2/m} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon,$$

что означает существование предела векторной функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, равного b . ▶

Доказанная теорема фактически утверждает, что в случае векторной функции переход к пределу можно выполнять по координатам (т.е. отдельно для каждой координатной функции). Если хотя бы для одной координатной функции предел не существует, то не существует предел и самой векторной функции.

Функцию нескольких переменных $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называют **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$ (a — предельная точка множества A), если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, где символ «0» ((в случае $m > 1$) обозначает точку $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$). Из теоремы 15.1 следует, что векторная функция

является бесконечно малой при $x \xrightarrow{A} a$ тогда и только тогда, когда бесконечно малыми при $x \xrightarrow{A} a$ являются все ее координатные функции. Например, из двух функций

$$f(x, y) = (x \ x^2 + y^4 \ xy^3)^T \quad \text{и} \quad g(x, y) = (x + 1 \ x^2 + y^4 \ x - y)^T$$

первая является бесконечно малой при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, а вторая — нет. Действительно, все координатные функции векторной функции $f(x, y)$ имеют предел 0 в точке $(0, 0)$, в то время как координатная функция $g_1(x, y) = x + 1$ векторной функции $g(x, y)$ имеет предел 1 (ненулевой) в точке $(0, 0)$.

Для функций нескольких переменных остается в силе **теорема 8.4 о связи функции, ее предела и бесконечно малой**. Доказательство этого утверждения получается дословным повторением доказательства теоремы 8.4.

Векторная функция нескольких переменных $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ограничена на множестве A , если множество $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^m: y = f(x), x \in A\}$ ограничено. Эта **функция ограничена при $x \xrightarrow{A} a$ (локально ограничена в точке a)**, если существует такая проколота окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a , что функция ограничена на множестве $A \cap \mathring{U}(a, \delta)$.

Пределы векторных функций, бесконечно малые векторные функции имеют те же свойства, что и в случае скалярных функций нескольких переменных (т.е. при $m = 1$). Соответствующие формулировки и доказательства (см. 8.3) переносятся на векторные функции «почти без изменений». Последние слова заключены в кавычки, так как в этих доказательствах, не изменяющихся по форме, изменяется смысл обозначения $|a|$: для числа a — это абсолютная величина, а для точки $a \in \mathbb{R}^n$ — это **евклидова норма** элемента a в евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть для функций $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ выполнено условие $f(A) \subset B$. Тогда определена **композиция отображений $g \circ f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$** , которая задается равенством $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Эту композицию обычно называют **сложной функцией**. Верна следующая теорема о пределе сложной функции, аналогичная соответствующему утверждению для функций одного переменного.

Теорема 15.2. Пусть для функции $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ существует предел $\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) = b$, причем функция не принимает значение b в точках множества A в некоторой проколоте окрестности точки a . Пусть для функции $g: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, удовлетворяющей условию $f(A) \subset B$, существует предел $\lim_{u \xrightarrow{B} b} g(u) = c$. Тогда существует предел $\lim_{x \xrightarrow{A} a} (g \circ f)(x) = c$. #

Свойства предела позволяют вычислять пределы функций нескольких переменных, если они существуют. Методы вычисления пределов повторяют те методы, которые использовались в случае функций одного действительного переменного.

15.3. Непрерывность векторной функции нескольких переменных

На **векторные функции нескольких переменных** естественным образом переносится понятие непрерывности скалярной функции (см. определение 8.11). Говорят, что **векторная функция нескольких переменных $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $a \in A$** , если для любой окрестности $U(f(a), \varepsilon)$ точки $f(a) \in \mathbb{R}^m$ существует такая окрестность $U(a, \delta)$ точки a , что для любой точки $x \in U(a, \delta) \cap A$ верно включение $f(x) \in U(f(a), \varepsilon)$ (или, короче, $f(U(a, \delta) \cap A) \subset U(f(a), \varepsilon)$).

Каждая точка $a \in A$ является либо **предельной точкой** множества A , либо его **изолированной точкой**. В первом случае условие непрерывности функции f в этой точке означает существование предела

$$\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) = f(a). \quad (15.2)$$

В изолированной точке множества A , согласно определению, функция $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ всегда непрерывна.

Определение непрерывности функции в точке можно сформулировать следующим образом. Функция $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $a \in A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при всех $x \in A$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Другими словами, бесконечно малому приращению аргумента в данной точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функцию $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, непрерывную во всех точках множества A , называют **непрерывной на этом множестве**.

Непосредственным следствием теоремы 15.1 является следующее утверждение.

Теорема 15.3. Для непрерывности векторной функции нескольких переменных в некоторой точке необходимо и достаточно, чтобы все ее *координатные функции* были непрерывны в этой точке.

◀ Пусть функция $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x) \dots f_m(x))^T$, непрерывна в некоторой точке $a \in A$, являющейся предельной для A . По определению непрерывности это означает, что существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. По теореме 15.1 последнее равенство эквивалентно тому, что существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = f_i(a)$, $i = \overline{1, m}$. Но это, в свою очередь, означает непрерывность в точке a координатных функций $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ (см. определение 8.11).

Обратное утверждение доказывается аналогично. Если все функции $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, непрерывны в точке a , то в этой точке существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = f_i(a)$, $i = \overline{1, m}$. В этом случае по теореме 15.1 существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, означающий, что векторная функция $f(x)$ непрерывна в точке a . ▶

Следующие так называемые локальные свойства непрерывных функций нескольких переменных вытекают из свойств предела функции нескольких переменных (см. 8.3).

1* Если функции $f_i: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = \overline{1, k}$, непрерывны в некоторой точке $a \in A$, то любая их линейная комбинация непрерывна в этой точке.

2* Если функция $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $a \in A$, то она ограничена в пересечении множества A с некоторой окрестностью точки a .

В сформулированных свойствах упоминание о множестве A можно опустить, если точка a является *внутренней точкой* множества A .

Для векторных функций нескольких переменных, как и для функций одного переменного, верна следующая теорема о непрерывности *сложной функции*.

Теорема 15.4. Если функция $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $a \in A$, $f(A) \subset B$ и функция $g: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ непрерывна в точке $b = f(a)$, то сложная функция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in A$, непрерывна в точке a .

◀ Обозначим точку $g(b)$ через c и фиксируем любую ε -окрестность $U(c, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^p$ этой точки. Из непрерывности функции g в точке b следует, что существует такая δ_1 -окрестность $U(b, \delta_1) \subset \mathbb{R}^m$ точки b , что $g(x) \in U(c, \varepsilon)$ при $x \in B \cap U(b, \delta_1)$, или, другими словами,

$$g(B \cap U(b, \delta_1)) \subset U(c, \varepsilon).$$

Аналогично из непрерывности функции f в точке a следует, что для уже выбранной окрестности $U(b, \delta_1)$ точки $b = f(a)$ существует такая δ -окрестность $U(a, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ точки a , что

$$f(A \cap U(a, \delta)) \subset U(b, \delta_1),$$

а так как $f(A) \subset B$, то в действительности

$$f(A \cap U(a, \delta)) \subset B \cap U(b, \delta_1).$$

Следовательно,

$$(g \circ f)(A \cap U(a, \delta)) \subset g(B \cap U(b, \delta_1)) \subset U(c, \varepsilon).$$

Итак, для любой ε -окрестности $U(c, \varepsilon)$ точки c найдена такая δ -окрестность $U(a, \delta)$ точки a , что

$$(g \circ f)(A \cap U(a, \delta)) \subset U(c, \varepsilon).$$

Это означает, что сложная функция $g \circ f$ непрерывна в точке a .

На рис. 15.1 приведена геометрическая иллюстрация доказательства теоремы. ►

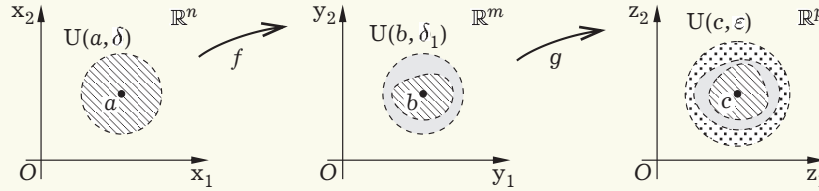


Рис. 15.1

На векторные функции переносятся понятия **функции, непрерывной по переменному** в данной **точке** и **функции, непрерывной в точке a по части переменных**. Непрерывность по части переменных можно рассматривать как существование предела функции в данной точке по соответствующему множеству, равного значению функции в этой точке. Например, непрерывность функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по совокупности переменных x_1, x_2 означает существование предела

$$\lim_{x \xrightarrow{A_{12}} a} f(x) = f(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

где

$$A_{12} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_3 = a_3, \dots, x_n = a_n\}.$$

Отметим, что, как и в скалярном случае, из непрерывности векторной функции функции нескольких переменных в точке a следует ее непрерывность в этой точке по любому набору переменных, но условие непрерывности функции в точке a по любому неполному набору переменных вовсе не означает, что функция непрерывна в этой точке.

Если векторная функция нескольких переменных непрерывна по части своих переменных во всех точках некоторой области, то ее называют **непрерывной в области по (этой) части переменных (совокупности переменных)**.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 15. Векторные функции нескольких переменных	72
15.1. Определение векторной функции	72
15.2. Предел векторной функции нескольких переменных	73
15.3. Непрерывность векторной функции нескольких переменных	75