Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Электронное учебное издание

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 3

ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ

Теорема о существовании ортонормированного базиса и процесс ортогонализации Грама — Шмидта (без док-ва). Линейные операторы и их матрицы (определение, примеры). Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису, инвариантность ее определителя. Подобные матрицы. Действия над линейными операторами и соответствующие действия с их матрицами. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

3.1. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта

В каждом ли *евклидовом пространстве* существует *ортонормированный базис*? Непосредственно из определения ответ на этот вопрос получить нельзя. Впрочем, ответ на поставленный вопрос утвердительный.

Теорема 3.1. В *конечномерном* евклидовом *пространстве* существует ортонормированный базис. #

Однако формального ответа на вопрос о существовании ортонормированного базиса недостаточно, нужно уметь находить и строить такие базисы. Построить ортонормированный базис можно, отталкиваясь от некоторого исходного базиса, при помощи алгоритма, который называют ***процессом ортогонализации Грама — Шмидта***. Изложим этот алгоритм.

Пусть $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1 \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{f}_n)$ — некоторый базис в *n-мерном* евклидовом *пространстве* $\mathcal{E}$. Модифицируя этот базис, мы будем строить новый базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{e}_n)$, который будет ортонормированным. Последовательно вычисляем векторы $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{g}_2$ и $\boldsymbol{e}_2$ и т.д. по формулам:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1, && \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\|\boldsymbol{g}_1\|};\\
&\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1, && \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|};\\
&\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2, && \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{g}_3}{\|\boldsymbol{g}_3\|};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\\
&\boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{f}_n - (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 - \ldots - (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_{n-1})\,\boldsymbol{e}_{n-1}, && \boldsymbol{e}_n = \frac{\boldsymbol{g}_n}{\|\boldsymbol{g}_n\|}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Геометрическая иллюстрация этой последовательности вычислений при $n = 3$ (линейное пространство V_3) приведена на рис. 3.1.

При практических применениях процесс Грама — Шмидта удобно модифицировать так, чтобы ограничиться вычислением векторов $\boldsymbol{g}_i$ и не использовать их нормированные варианты $\boldsymbol{e}_i$. В этом случае нужно последовательно вычислить векторы $\boldsymbol{g}_1$, …, $\boldsymbol{g}_n$, а затем провести

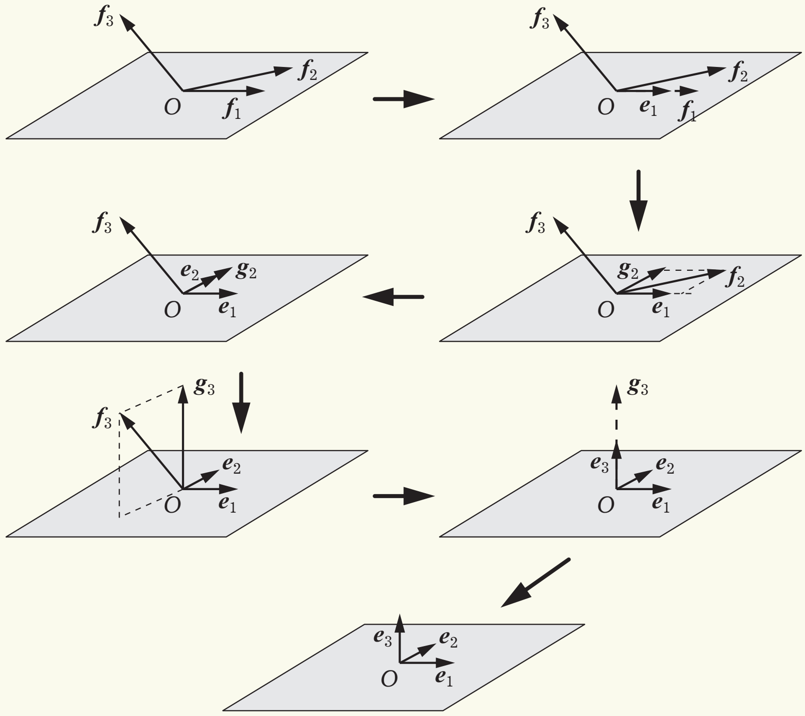

Рис. 3.1

их нормировку, приводящую к векторам $\boldsymbol{e}_i$. Чтобы модифицировать алгоритм вычислений, в левой колонке (3.1) заменим векторы $\boldsymbol{e}_i$ на $\boldsymbol{g}_i$ согласно формулам в правой колонке. Получим:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1,\\
&\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_2,\,\boldsymbol{g}_1)}{\|\boldsymbol{g}_1\|^2}\boldsymbol{g}_1,\\
&\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \frac{(\boldsymbol{f}_3,\,\boldsymbol{g}_1)}{\|\boldsymbol{g}_1\|^2}\boldsymbol{g}_1 - \frac{(\boldsymbol{f}_3,\,\boldsymbol{g}_2)}{\|\boldsymbol{g}_2\|^2}\boldsymbol{g}_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{f}_n - \frac{(\boldsymbol{f}_n,\,\boldsymbol{g}_1)}{\|\boldsymbol{g}_1\|^2}\boldsymbol{g}_1 - \frac{(\boldsymbol{f}_n,\,\boldsymbol{g}_2)}{\|\boldsymbol{g}_2\|^2}\boldsymbol{g}_2 - \ldots - \frac{(\boldsymbol{f}_n,\,\boldsymbol{g}_{n-1})}{\|\boldsymbol{g}_{n-1}\|^2}\boldsymbol{g}_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Пример 3.1. В линейном пространстве V_2 рассмотрим векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ с длинами $|\boldsymbol{a}_1| = 2$, $|\boldsymbol{a}_2| = 6$ и углом между ними $\varphi = \pi/3$. Так как векторы ненулевые, а угол между ними не равен 0 или π, они неколлинеарны, а потому образуют базис в V_2. Построим при помощи процесса Грама — Шмидта ортонормированный базис. Согласно описанному выше алгоритму находим:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{a}_1,\\
&\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_1)}{|\boldsymbol{a}_1|^2}\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{6\cdot 2\cdot \frac{1}{2}}{4}\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1.
\end{aligned}
$$

Затем полученные векторы $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2$ нормируем:

$$
|\boldsymbol{g}_1| = |\boldsymbol{a}_1| = 2, \quad \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{|\boldsymbol{g}_1|} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1,
$$

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{g}_2|^2 = \left|\boldsymbol{a}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1\right|^2 = \left(\boldsymbol{a}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1\right) = |\boldsymbol{a}_2|^2 - 3\,(\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_1) + \frac{9}{4}|\boldsymbol{a}_1|^2 =\\
= 6^2 - 3\cdot 6\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{4}\cdot 2^2 = 27, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{|\boldsymbol{g}_2|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{a}_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\boldsymbol{a}_1.
\end{aligned}
$$

Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и построенный по ним ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ представлены на рис. 3.2.

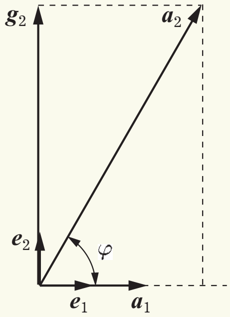

Рис. 3.2

3.2. Определение и примеры линейных операторов

Линейная алгебра большое внимание уделяет отображениям, которые *векторам* одного *линейного пространства* ставят в соответствие векторы другого (возможно того же) линейного пространства. Среди таких отображений выделяются те, которые сохраняют алгебраические соотношения. В некотором смысле такие отображения являются и наиболее простыми, так как они естественным образом связаны со структурой линейного пространства.

Напомним некоторую терминологию из теории отображений. Отображение $f\colon X \to Y$ называют ***сюръективным***, если каждый элемент $y \in Y$ является образом некоторого элемента $x \in X$. Отображение $f\colon X \to Y$ называют ***инъективным***, если разные элементы $x_1, x_2 \in X$ имеют разные образы. Отображение одновременно и сюръективное, и инъективное называют ***биективным***. Биективное отображение устанавливает между множествами X и Y взаимно однозначное соответствие.

Определение 3.1. Отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ из линейного пространства $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{L}'$ называют ***линейным отображением*** или ***линейным оператором***, если выполнены следующие условия:

а) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$;
б) $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, который осуществляет отображение линейного пространства $\mathcal{L}$ в себя, называют также ***линейным преобразованием*** линейного пространства $\mathcal{L}$ и говорят, что линейный оператор $\boldsymbol{A}$ действует в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Условия а), б) определения 3.1 можно скомбинировать в виде одного условия, например, так: для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ и любых действительных λ и μ

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + \mu(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}). \tag{3.2}$$

Нетрудно убедиться в том, что условия определения 3.1 являются частными случаями (3.2). С другой стороны, если выполнены условия а) и б) определения 3.1, то

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\mu\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},$$

т.е. выполняется и (3.2).

Свойства а), б) линейности отображения делают более удобной не традиционную форму записи линейного оператора в виде $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, при которой аргумент записывается в скобках вслед за функцией, а более простую в виде $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ как своеобразное «умножение линейного оператора на вектор». При такой записи условие а) определения 3.1 можно интерпретировать как свойство дистрибутивности этого «умножения», а условие б) — как свойство ассоциативности (если число λ записывать не слева от вектора, а справа, то запись будет выглядеть так: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}\lambda) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\lambda$).

Непосредственно из определения 3.1 вытекает, что для любого линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ образом $\boldsymbol{A}\mathbf{0}$ *нулевого вектора* в $\mathcal{L}$ является нулевой вектор $\mathbf{0}'$ в $\mathcal{L}'$: $\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}'$. Действительно,

$$\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \boldsymbol{A}(0 \cdot \mathbf{0}) = 0(\boldsymbol{A}\mathbf{0}) = \mathbf{0}'.$$

Рассмотрим несколько примеров линейных операторов. Отметим, что для того, чтобы доказать линейность какого-либо отображения линейных пространств, нужно проверить условия а), б) определения 3.1 или комбинированное условие (3.2). Нарушение любого из этих условий означает, что отображение не является линейным. Линейный оператор переводит нулевой вектор снова в нулевой, и это свойство может рассматриваться как необходимое условие линейности (но не достаточное).

Пример 3.2. Пусть $K_n[x]$ — линейное пространство многочленов одного переменного x степени, не превышающей натуральное число n. Для каждого многочлена $P(x)$ определена его производная $P'(x)$, являющаяся многочленом степени не выше $n-1$. Таким образом, на линейном пространстве $K_n[x]$ определено отображение $\frac{d}{dx}$, которое каждому многочлену ставит в соответствие его производную. В качестве пространства значений такого отображения можно выбрать как исходное пространство $K_n[x]$, так и пространство $K_{n-1}[x]$. Оба отображения

$$\frac{d}{dx}\colon K_n[x] \to K_n[x], \qquad \frac{d}{dx}\colon K_n[x] \to K_{n-1}[x]$$

являются линейными в силу свойств линейности производной (производная суммы функций равна сумме производных, при умножении функции на число производная функции умножается на это число).

Пример 3.3. В пространстве V_2 свободных векторов на плоскости поворот вектора на заданный угол φ против часовой стрелки представляет собой отображение V_2 в себя, являющееся линейным оператором. Линейность отображения вытекает из простых геометрических соображений. Во-первых, сумма свободных векторов может вычисляться по правилу параллелограмма, но тогда очевидно, что сумма двух векторов как диагональ параллелограмма при повороте векторов на угол φ также повернется на этот же угол. Во-вторых, умножение свободного вектора на число означает изменение его длины и, возможно, изменение его направления на противоположное. Ясно, что можно сначала умножить вектор на число, а потом повернуть на угол φ, а можно выполнить эти две операции в обратном порядке, т.е. повернуть вектор, а затем умножить его на число. Результат в обоих случаях будет один и тот же.

Пример 3.4. Рассмотрим *n-мерное линейное арифметическое пространство* $\mathbb{R}^n$, элементы которого будем представлять как матрицы-столбцы высотой n, и квадратную матрицу A порядка n. Отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое столбцу $\boldsymbol{x}$ ставит в соответствие столбец $A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$), является линейным оператором в силу свойств умножения матриц:

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = A(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda A\boldsymbol{x} + \mu A\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Пример 3.5. В n-мерном линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого действительного числа k отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}$ (растяжение в k раз с дополнительным отражением при $k < 0$), является линейным оператором. Этот линейный оператор — частный случай предыдущего, он может быть определен при помощи матрицы kE, где E — единичная матрица.

Пример 3.6. Отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ n-мерного линейного арифметического пространства в себя, которое задается формулой $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ — некоторый фиксированный вектор, не является линейным, так как, например, образом нулевого вектора является вектор $\boldsymbol{a}$.

3.3. Изоморфизм линейных пространств

Определение 3.2. Два *линейных пространства* $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ называют ***изоморфными***, если существует *линейное биективное отображение* $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$. При этом само отображение $\boldsymbol{A}$ называют ***изоморфизмом линейных пространств*** $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$.

Примером изоморфизма линейного пространства в себя является *тождественный оператор*.

Теорема 3.2. Два *конечномерных линейных пространства* изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую *размерность*.

Следствие 3.1. Все n-мерные линейные пространства изоморфны *линейному арифметическому пространству* $\mathbb{R}^n$.

Пример 3.7. В линейном пространстве $K_3[x]$ многочленов переменного x степени не выше трех элементы 1, x, x^2, x^3 образуют базис. Этому базису соответствует изоморфизм между $K_3[x]$ и $\mathbb{R}^4$, при котором многочлену $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ сопоставляется арифметический вектор $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$.

3.4. Матрица линейного оператора

Пример 3.4 более глубок, чем это может показаться с первого взгляда. Фактически любой *линейный оператор* можно интерпретировать как линейный оператор, описанный в этом примере, т.е. действие линейного оператора сводится к умножению столбца координат вектора на матрицу. Поясним это подробнее.

Пусть задан линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, т.е. *линейное преобразование n-мерного линейного пространства* $\mathcal{L}$ в себя. Выберем *базис* $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{b}_n)$ в $\mathcal{L}$. Действие линейного оператора полностью определено, если известны образы *векторов* базиса. Действительно, если вектор $\boldsymbol{x}$ имеет *координаты* $x = (x_1\ \ \ldots\ \ x_n)^{\mathrm{T}}$, то

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = x_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n),$$

т.е., зная векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$, мы можем найти образ любого вектора $\boldsymbol{x}$ линейного пространства $\mathcal{L}$.

Рассмотрим действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на векторы базиса $\boldsymbol{b}$. Обозначим столбцы координат векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$ в базисе $\boldsymbol{b}$ через a_i, $a_i = (a_{1i}\ \ \ldots\ \ a_{in})^{\mathrm{T}}$, $i = \overline{1,\, n}$. Тогда

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}a_i, \quad i = \overline{1,\, n}.$$

Определение 3.3. Матрицу $A = (a_1\ \ \ldots\ \ a_n)$, составленную из координатных столбцов векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n$ в базисе $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{b}_n)$ называют ***матрицей линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$.

Матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ является квадратной, ее порядок совпадает с *размерностью линейного пространства* $\mathcal{L}$.

Рассмотрим несколько примеров линейных операторов и их матриц.

Пример 3.8. Матрицей *нулевого оператора* $\boldsymbol{\Theta}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ независимо от выбора базиса является нулевая матрица соответствующего типа. Действительно, образом любого вектора в случае нулевого оператора является *нулевой вектор*. Поэтому матрица нулевого оператора в любом базисе должна состоять из нулевых столбцов.

Пример 3.9. *Матрица тождественного оператора* $\boldsymbol{I}$ также не зависит от выбора базиса и в любом базисе является единичной. Действительно, взяв произвольный базис $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{b}_n)$, заключаем, что при $i = \overline{1,\, n}$

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где единица в последнем столбце стоит на i-м месте. Видно, что столбец координат вектора $\boldsymbol{I}\boldsymbol{b}_i$ является i-м столбцом единичной матрицы.

Теорема 3.3. Пусть $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — линейный оператор. Тогда столбец y координат вектора $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ в данном базисе $\boldsymbol{b}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ равен произведению Ax матрицы A оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$ на столбец x координат вектора $\boldsymbol{x}$ в том же базисе: $y = Ax$.

◀ Выберем произвольный вектор $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n$. Его образом будет вектор

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = x_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n) = \\ = x_1(a_{11}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{b}_n) + \ldots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{b}_n) = \\ = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{b}_1 + \ldots + (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n)\boldsymbol{b}_n. \end{aligned}$$

Столбец координат вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax. \qquad ▶$$

Запись $y = Ax$ из формулировки теоремы 3.3 удобно называть матричной формой записи действия линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$.

Замечание 3.1. Выкладки, приведенные в доказательстве теоремы, можно упростить, если использовать матричные обозначения и правила выполнения матричных операций. Полагая, что строка образов базисных векторов $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 \;\ldots\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n)$ получается «умножением» строки векторов $\boldsymbol{b}$ слева на оператор $\boldsymbol{A}$:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 \;\ldots\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b},$$

получаем

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 \;\ldots\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{b}a_1 \;\ldots\; \boldsymbol{b}a_n) = \boldsymbol{b}(a_1 \;\ldots\; a_n) = \boldsymbol{b}A,$$

так как $\boldsymbol{b}a_i$ — матричная запись *разложения вектора* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$ *по базису* $\boldsymbol{b}$, $i = \overline{1,\, n}$. Здесь мы использовали технику операций с *блочными матрицами*.

Взяв произвольный вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}x$, получаем

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}x) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b})x = (\boldsymbol{b}A)x = \boldsymbol{b}(Ax).$$

Это означает, что столбец Ax является столбцом координат вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Пример 3.10. Рассмотрим отображение $\boldsymbol{A}\colon V_3 \to V_3$, которое каждый вектор $\boldsymbol{x}$ преобразует в его векторное произведение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{i}$ на *орт* $\boldsymbol{i}$ оси Ox. В силу свойств векторного произведения это отображение — линейный оператор. Найдем матрицу A этого линейного оператора в (правом) ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Для этого надо найти образы базисных векторов и разложить их по тому же базису. Поскольку $\boldsymbol{A}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$, то первый столбец в матрице A нулевой. Далее получаем второй столбец матрицы A:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - 1\cdot\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i}\;\;\boldsymbol{j}\;\;\boldsymbol{k})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Затем третий столбец:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Итак, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на вектор $\boldsymbol{x}$ можно теперь записать как умножение столбца координат $(x\ \ y\ \ z)^{\mathrm{T}}$ вектора $\boldsymbol{x}$ слева на матрицу оператора:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})\begin{pmatrix}0\\z\\-y\end{pmatrix} = z\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}. \quad \#$$

Матрица линейного оператора полностью характеризует линейный оператор. В то же время, какую бы квадратную матрицу порядка n мы ни взяли, она будет матрицей некоторого линейного оператора в заданном базисе n-мерного линейного пространства (см. пример 3.4). Таким образом, между линейными операторами, действующими в данном n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ и квадратными матрицами порядка n существует соответствие, которое является взаимно однозначным, что и утверждает следующая теорема.

Теорема 3.4. Пусть $\boldsymbol{b}$ — произвольный базис в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$. Различным линейным операторам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, действующим в пространстве $\mathcal{L}$, соответствуют и различные матрицы в базисе $\boldsymbol{b}$. Любая квадратная матрица A порядка n является матрицей некоторого линейного оператора, действующего в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

◄ Если матрицы A и B операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{b}$ совпадают, то, согласно теореме 3.3, для любого вектора $\boldsymbol{x}$ со столбцом координат x

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}Ax = \boldsymbol{b}Bx = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x},$$

т.е. образы произвольного вектора при двух отображениях совпадают. Следовательно, совпадают и сами отображения.

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная квадратная матрица порядка n. Определим отображение $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ согласно формуле $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}Ax$, где x — столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$. Несложно проверить, что заданное таким образом отображение является линейным оператором. Действительно, для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ и любых действительных чисел λ, μ

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}A(\lambda x + \mu y) = \lambda(\boldsymbol{b}Ax) + \mu(\boldsymbol{b}Ay) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

В этой выкладке мы использовали теорему 1.3 и свойства умножения матриц. Вычислив для $i = \overline{1,\, n}$ столбец координат образа i-го вектора из базиса $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}A\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{b}\begin{pmatrix}a_{1i}\\\vdots\\a_{i-1,i}\\a_{ii}\\a_{i+1,i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix},$$

где единица стоит в i-й строке, убеждаемся, что он совпадает с i-м столбцом матрицы A и поэтому матрица заданного линейного оператора совпадает с исходной матрицей A. ►

3.5. Преобразование матрицы линейного оператора

Матрица линейного оператора изменяется, когда изменяется *базис линейного пространства*. Возникает естественный вопрос, как она изменяется. Напомним, что связь двух базисов, старого (исходного) и нового, отражается *матрицей перехода*.

Теорема 3.5. Матрицы A_b и A_e линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, записанные в базисах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{e}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, связаны друг с другом соотношением

$$A_e = U^{-1} A_b U, \tag{3.3}$$

где $U = U_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}}$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{e}$.

◄ Пусть $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Обозначим *координаты векторов* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в старом базисе $\boldsymbol{b}$ через x_b и y_b, а в новом базисе $\boldsymbol{e}$ — через x_e и y_e. Поскольку действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в матричной форме в базисе $\boldsymbol{b}$ имеет вид $y_b = A_b x_b$ (см. теорему 3.3), а координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в новом и старом базисах связаны между собой равенствами (см. **1.8**)

$$x_b = U x_e, \qquad y_b = U y_e,$$

то получаем

$$y_e = U^{-1} y_b = U^{-1}(A_b x_b) = U^{-1}\left(A_b U x_e\right) = \left(U^{-1} A_b U\right) x_e.$$

Равенство $y_e = \left(U^{-1} A_b U\right) x_e$ является матричной формой записи действия линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ и поэтому, согласно теореме 3.4, $U^{-1} A_b U = A_e$. ►

Замечание 3.2. Изложенное доказательство теоремы хорошо иллюстрирует следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} x_e & \xrightarrow{A_e} & y_e \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle U^{-1}} \\ x_b & \xrightarrow{A_b} & y_b \end{array}$$

Определение 3.4. Квадратные матрицы A и B порядка n называют ***подобными***, если существует такая невырожденная матрица P, что $P^{-1}AP = B$.

Формула (3.3) означает, что матрицы, представляющие один и тот же линейный оператор в разных базисах, являются подобными. Верно также и обратное: если две матрицы A и B подобны, т.е. $B = P^{-1}AP$, то их можно рассматривать как матрицы одного оператора, но в разных базисах. Действительно, в произвольном *n-мерном линейном пространстве* зафиксируем произвольный базис $\boldsymbol{b}$ и выберем линейный оператор, который в этом базисе имеет матрицу A. Тогда в базисе $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}P$ этот же оператор будет иметь матрицу $P^{-1}AP = B$.

Теорема 3.6. Если матрицы A и B подобны, то $\det A = \det B$.

◄ Если матрицы A и B подобны, то, согласно определению 3.4, существует такая невырожденная матрица P, что $B = P^{-1}AP$. Так как определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, а $\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}$, то получаем

$$\det B = \det\left(P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det A \det P = \det A. \qquad ►$$

Следствие 3.2. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

◄ Действительно, возьмем матрицы A_b и A_e линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в двух различных базисах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{e}$. Согласно теореме 3.5 и определению 3.4 эти матрицы подобны. Поэтому $\det A_b = \det A_e$ по теореме 3.6. ►

Следствие говорит о том, что, хотя матрица линейного оператора и изменяется при замене базиса, определитель ее при этом остается неизменным. Значит, этот определитель характеризует не матрицу оператора в конкретном базисе, а сам оператор. Это позволяет ввести следующее понятие.

Определение 3.5. ***Определителем линейного оператора*** называют определитель его матрицы в каком-либо базисе.

Пример 3.11. Линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon V_3 \to V_3$, определяемый формулой $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{i}$, в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(см. пример 3.10). Определитель этой матрицы равен нулю. Значит, и в любом другом базисе определитель матрицы этого линейного оператора равен нулю.

3.6. Произведение линейных операторов

Пусть в *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ действуют два *линейных оператора* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Рассмотрим отображение $\boldsymbol{BA}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, которое является композицией двух отображений и задается формулой $(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax})$. Это *отображение* является *линейным*, так как для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и любых действительных λ и μ

$$(\boldsymbol{BA})\,(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{B}\big(\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y})\big) = \boldsymbol{B}(\lambda\boldsymbol{Ax} + \mu\boldsymbol{Ay}) = \\ = \lambda\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax}) + \mu\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ay}) = \lambda(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x} + \mu(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{y}.$$

Введенный нами линейный оператор $\boldsymbol{BA}$ называют ***произведением линейных операторов*** $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$.

Теорема 3.7. Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ действуют линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, а A и B — *матрицы* этих *линейных операторов* в некотором *базисе* $\boldsymbol{b}$. Тогда матрицей линейного оператора $\boldsymbol{BA}$ в том же базисе $\boldsymbol{b}$ является матрица BA.

◄ Действие линейного оператора на вектор в данном базисе представляется как умножение матрицы этого оператора на столбец координат вектора. Поэтому для произведения двух операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ получаем

$$(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{b}Ax) = \boldsymbol{b}(B(Ax)) = \boldsymbol{b}(BA)x. \qquad ►$$

Если линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ представляет собой *биективное отображение*, то существует обратное отображение $\boldsymbol{A}^{-1}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

Теорема 3.8. Если линейный оператор $\boldsymbol{A}$ имеет обратное отображение $\boldsymbol{A}^{-1}$, то это отображение линейно, причем если матрицей $\boldsymbol{A}$ в данном базисе $\boldsymbol{b}$ является A, то матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$ в том же базисе является A^{-1}.

◄ Любым векторам $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ линейного пространства $\mathcal{L}$ соответствуют такие однозначно определенные векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, что $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{Ax}_i$, $i = 1, 2$. При этом для любых действительных λ и μ вектору $\lambda\boldsymbol{y}_1 + \mu\boldsymbol{y}_2$ соответствует вектор $\lambda\boldsymbol{x}_1 + \mu\boldsymbol{x}_2$, так как

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}_1 + \mu\boldsymbol{x}_2) = \lambda\boldsymbol{Ax}_1 + \mu\boldsymbol{Ax}_2 = \lambda\boldsymbol{y}_1 + \mu\boldsymbol{y}_2.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\boldsymbol{y}_1 + \mu\boldsymbol{y}_2) = \lambda\boldsymbol{x}_1 + \mu\boldsymbol{x}_2 = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}_1 + \mu\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}_2.$$

Следовательно, отображение $\boldsymbol{A}^{-1}$ линейно.

Отметим, что произведение операторов $\boldsymbol{A}^{-1}$ и $\boldsymbol{A}$, как композиция прямого и обратного отображений, является *тождественным оператором*. Согласно теореме 3.7, произведение матриц A' и A этих операторов равно единичной матрице E: $A'A = E$. Это значит, что матрица A' оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$ является обратной к матрице A оператора $\boldsymbol{A}$: $A' = A^{-1}$. ►

3.7. Линейные пространства линейных операторов

Обозначим через $L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ множество всех *линейных операторов*, действующих из *линейного пространства* $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{L}'$. В этом множестве введем операции ***сложения линейных операторов*** и ***умножения линейного оператора на действительное число***. ***Суммой линейных операторов*** $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ назовем оператор $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$, определяемый формулой

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{L},$$

а ***произведением линейного оператора $\boldsymbol{A} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ на действительное число*** λ назовем оператор $\lambda\boldsymbol{A} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$, действующий согласно формуле

$$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}).$$

Поскольку

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{B}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \\ &= (\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) + (\alpha\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = \\ &= \alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} + \beta(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{A})(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) &= \lambda\big(\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})\big) = \lambda\big(\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\beta\boldsymbol{y})\big) = \\ &= (\lambda\alpha)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + (\lambda\beta)\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\alpha\lambda)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + (\beta\lambda)\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \\ &= \alpha(\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + \beta(\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = \alpha((\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}) + \beta((\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

отображения $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ и $\lambda\boldsymbol{A}$ действительно являются линейными операторами. Таким образом, *относительно* введенных нами *операций множество* $L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ *замкнуто*. Проверив *аксиомы линейного пространства*, можно убедиться, что $L(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ относительно этих операций является линейным пространством.

Для каждого линейного оператора $\boldsymbol{A}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ определен линейный оператор $(-\boldsymbol{A})$, задаваемый равенством $(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$. Нетрудно проверить, что $(-\boldsymbol{A})$ действительно линейный оператор:

$$\begin{aligned}(-\boldsymbol{A})(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) &= -(\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})) = -(\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = \\ &= \lambda(-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})) + \mu(-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})) = \lambda((-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}) + \mu((-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

В сумме с $\boldsymbol{A}$ линейный оператор $(-\boldsymbol{A})$ дает *нулевой оператор*. Поэтому в соответствии с терминологией линейных пространств $(-\boldsymbol{A})$ называют ***оператором***, ***противоположным*** к $\boldsymbol{A}$.

Линейное пространство $L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ линейных операторов из линейного пространства $\mathcal{L}$ в себя называют ***линейным пространством линейных операторов (преобразований)*** пространства $\mathcal{L}$.

Каждому линейному оператору $\boldsymbol{A} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$, действующему в *$n$-мерном* линейном пространстве $\mathcal{L}$, в заданном базисе $\boldsymbol{b}$ соответствует квадратная матрица A порядка n (*матрица* этого *линейного оператора*). Тем самым определено отображение $\Phi\colon L(\mathcal{L},\mathcal{L}) \to M_n(\mathbb{R})$ из линейного пространства $L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ в линейное пространство $M_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц порядка n с действительными коэффициентами, при этом $\Phi(\boldsymbol{A}) = A$. Согласно теореме 3.4 *отображение* Φ является *биективным*.

Теорема 3.9. Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задан некоторый базис $\boldsymbol{b}$. Тогда отображение $\Phi\colon L(\mathcal{L},\mathcal{L}) \to M_n(\mathbb{R})$, сопоставляющее каждому линейному оператору его матрицу в базисе $\boldsymbol{b}$, является *изоморфизмом линейных пространств* $L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ и $M_n(\mathbb{R})$.

◀ Как мы уже отметили, *отображение* Φ биективно, и нам остается показать, что оно *линейно*. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — два произвольных линейных оператора из линейного пространства $L(\mathcal{L},\mathcal{L})$. Тогда для любого *вектора* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ со столбцом *координат* x

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}Ax + \boldsymbol{b}Bx = \boldsymbol{b}\big((A+B)x\big),$$

где A и B — матрицы операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{b}$. Итак, действие линейного оператора $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{b}$ записывается как умножение столбца координат вектора слева на матрицу $A+B$. Значит, $A+B$ и является матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

Итак, *сложению линейных операторов* при отображении Φ соответствует сложение их матриц. Аналогично *умножению линейного оператора на действительное число* λ соответствует умножение его матрицы на это число:

$$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{b}Ax) = \boldsymbol{b}\big((\lambda A)x\big).$$

Условия а) и б) определения 3.1 выполнены, поэтому отображение Φ линейно. ▶

Следствие 3.3. Если матрицы A, $B \in M_n(\mathbb{R})$ являются матрицами линейных операторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ в некотором базисе $\boldsymbol{b}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, то для любых чисел λ и μ матрица $\lambda A + \mu B$ является матрицей линейного оператора $\lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B} \in L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ в том же базисе $\boldsymbol{b}$.

◀ Эта формулировка лишь перефразирует утверждение, что отображение $\Phi\colon L(\mathcal{L},\mathcal{L}) \to M_n(\mathbb{R})$ является линейным, что доказано в теореме 3.9. ▶

ОГЛАВЛЕНИЕ