Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Электронное учебное издание

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 4

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Характеристический многочлен линейного оператора, его независимость от базиса. След матрицы линейного оператора и его инвариантность. Характеристический многочлен и собственные значения матрицы. Свойство множества собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения, связь между ними (без док-ва). Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов. Критерий существования такого базиса (без док-ва). Существование базиса из собственных векторов в случае действительных и некратных корней характеристического уравнения.

4.1. Характеристическое уравнение матрицы

Для произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n рассмотрим определитель

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

где E — единичная матрица, а λ — действительное переменное. Относительно переменного λ этот определитель является многочленом степени n и может быть записан в виде

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_k \lambda^k, \tag{4.1}$$

где множители $(-1)^k$ введены для удобства.

Определение 4.1. Многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называют ***характеристическим многочленом матрицы*** A, а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ — ***характеристическим уравнением матрицы*** A.

Пример 4.1. Найдем характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для этого раскроем определитель:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\big((1-\lambda)(4-\lambda) - 9\big) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 30\lambda - 35.$$

Итак, характеристическое уравнение заданной матрицы имеет вид $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 30\lambda - 35 = 0$. #

Квадратную матрицу можно использовать в качестве значения переменного в произвольном многочлене. Тогда значением многочлена от матрицы будет матрица того же порядка, что и исходная. Интерес представляют такие многочлены, значение которых от данной матрицы есть нулевая матрица. Их называют аннулирующими многочленами. Оказывается, что одним из таких аннулирующих многочленов для матрицы является ее характеристический многочлен.

Теорема 4.1 (*теорема Кэли — Гамильтона*). Для любой квадратной матрицы характеристический многочлен является ее аннулирующим многочленом. #

Выясним, как связаны между собой характеристические многочлены *подобных матриц*.

Теорема 4.2. Характеристические многочлены (уравнения) подобных матриц совпадают.

◄ Пусть квадратные матрицы A и A' одного порядка подобны, т.е. существует такая невырожденная матрица P того же порядка, что $A' = P^{-1}AP$. Тогда в силу свойств определителей имеем

$$\chi_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) = \det\bigl(P^{-1}(A - \lambda E)P\bigr) = \\ = \det P^{-1} \det(A - \lambda E) \det P = \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda). \qquad ►$$

4.2. Характеристическое уравнение линейного оператора

Рассмотрим *линейный оператор* $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, действующий в *линейном пространстве* $\mathcal{L}$. Выберем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ некоторый *базис* $\boldsymbol{b}$ и запишем в этом базисе *матрицу* $A = (a_{ij})$ *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$. Согласно следствию 3.3 матрица $A - \lambda E$ является матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{I}$ — *тождественный оператор*. Определитель $\det(A - \lambda E)$ матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$, согласно следствию 3.2, от выбора базиса не зависит. Значит, *характеристический многочлен* $\chi_A(\lambda)$ матрицы A является также характеристическим многочленом любой другой матрицы оператора $\boldsymbol{A}$ и совпадает с *определителем линейного оператора* $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$. Мы можем ввести следующее определение.

Определение 4.2. ***Характеристическим многочленом линейного оператора*** $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называют *характеристический многочлен* его *матрицы* A, записанной в некотором базисе, а ***характеристическим уравнением*** этого ***оператора*** — *характеристическое уравнение матрицы* A.

Определение корректно, так как характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. При этом коэффициенты d_k характеристического многочлена, представленного в виде (4.1), также не связаны с используемым базисом, т.е. являются ***инвариантами*** относительно выбора базиса. Другими словами, коэффициенты d_k отражают свойства самого оператора, а не его матрицы A, являющейся записью оператора в конкретном базисе.

Коэффициенты d_k могут быть выражены в виде многочленов от элементов матрицы оператора. Таким образом, хотя коэффициенты матрицы меняются при замене базиса, некоторые выражения от этих коэффициентов остаются неизменными. Наиболее просто выражается коэффициент

$$d_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn},$$

равный сумме диагональных элементов матрицы A. Этот коэффициент называют ***следом линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$ (***следом матрицы*** A) и обозначают $\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$ ($\operatorname{tr} A$) или $\operatorname{sp} \boldsymbol{A}$ ($\operatorname{sp} A$). Коэффициент d_0 характеристического многочлена совпадает со значением этого многочлена при $\lambda = 0$ и равен определителю линейного оператора $\boldsymbol{A}$.

Пример 4.2. В линейном пространстве $K_2[x]$ многочленов степени не выше двух элементы 1, x, x^2 образуют базис. Матрица A линейного оператора дифференцирования в этом базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислив определитель

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

и приравняв его нулю, получим характеристическое уравнение этого линейного оператора: $\lambda^3 = 0$.

4.3. Собственные векторы линейного оператора

Определение 4.3. *Ненулевой вектор* $\boldsymbol{x}$ в *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ называют ***собственным вектором линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$, если для некоторого действительного числа λ выполняется соотношение $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$. При этом число λ называют ***собственным значением*** (***собственным числом***) ***линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$.

Пример 4.3. В линейном пространстве $K_n[x]$ многочленов степени не выше n содержатся многочлены нулевой степени, т.е. постоянные функции. Так как $\dfrac{dc}{dx} = 0 = 0 \cdot c$, многочлены нулевой степени $p(x) = c \neq 0$ являются собственными векторами линейного оператора дифференцирования, а число $\lambda = 0$ — собственным значением этого оператора. #

Множество всех собственных значений линейного оператора называют ***спектром линейного оператора***. Каждый собственный вектор связан со своим собственным значением. Действительно, если вектор $\boldsymbol{x}$ одновременно удовлетворяет двум равенствам $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{Ax} = \mu\boldsymbol{x}$, то $\lambda\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}$, откуда $(\lambda - \mu)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Если $\lambda - \mu \neq 0$, умножим равенство на число $(\lambda - \mu)^{-1}$ и в результате получим, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Но это противоречит определению собственного вектора, так как собственный вектор всегда ненулевой.

Каждому собственному значению отвечают свои собственные векторы, причем таких бесконечно много. Действительно, если $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор линейного оператора $\boldsymbol{A}$ с собственным значением λ, т.е. $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$, то для любого ненулевого действительного числа α имеем $\alpha\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{Ax}) = \alpha\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(\alpha\boldsymbol{x})$. Значит, и вектор $\alpha\boldsymbol{x}$ является для линейного оператора собственным.

Замечание 4.1. Часто говорят о ***собственных значениях*** (***числах***), ***спектре*** и ***собственных векторах квадратной матрицы***. При этом имеют в виду следующее. Матрица A порядка n является *матрицей* некоторого *линейного оператора* в фиксированном *базисе*, действующего в n*-мерном линейном пространстве*. Например, если остановиться на *стандартном базисе* в *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$, то матрица A определяет линейный оператор $\boldsymbol{A}$, отображающий вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ со столбцом координат x в вектор со столбцом координат Ax. Матрицей $\boldsymbol{A}$ как раз и является матрица A. Естественно отождествить оператор с его матрицей аналогично тому, как арифметический вектор отождествляется со столбцом своих координат. Такое отождествление, которое часто используется и при этом не всегда оговаривается, позволяет перенести на матрицы «операторные» термины.

Спектр линейного оператора тесно связан с его *характеристическим уравнением*.

Теорема 4.3. Для того чтобы действительное число λ являлось собственным значением линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем характеристического уравнения этого оператора.

◄ Необходимость. Пусть число λ является собственным значением линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Это значит, что существует вектор $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, для которого

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}. \tag{4.2}$$

Отметим, что в $\mathcal{L}$ действует *тождественный оператор* $\boldsymbol{I}$: $\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$. Используя этот оператор, преобразуем равенство (4.2): $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}$, или

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{4.3}$$

Запишем векторное равенство (4.3) в каком-либо базисе $\boldsymbol{b}$. Матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ будет матрица $A - \lambda E$, где A — матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$, а E — единичная матрица, и пусть x — столбец координат собственного вектора $\boldsymbol{x}$. Тогда $x \neq 0$, а векторное равенство (4.3) равносильно матричному

$$(A - \lambda E)\,x = 0, \tag{4.4}$$

которое представляет собой матричную форму записи однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с квадратной матрицей $A - \lambda E$ порядка n. Эта система имеет ненулевое решение, являющееся столбцом координат x собственного вектора $\boldsymbol{x}$. Поэтому матрица $A - \lambda E$ системы (4.4) имеет нулевой определитель, т.е. $\det(A - \lambda E) = 0$. А это означает, что λ является корнем характеристического уравнения линейного оператора $\boldsymbol{A}$.

Достаточность. Легко убедиться, что приведенные рассуждения можно провести в обратном порядке. Если λ является корнем характеристического уравнения, то в заданном базисе $\boldsymbol{b}$ выполняется равенство $\det(A - \lambda E) = 0$. Следовательно, матрица однородной СЛАУ (4.4), записанной в матричной форме, вырождена, и система имеет ненулевое решение x. Это ненулевое решение представляет собой набор координат в базисе $\boldsymbol{b}$ некоторого ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$, для которого выполняется векторное равенство (4.3) или ему эквивалентное равенство (4.2). Мы приходим к выводу, что число λ является собственным значением линейного оператора $\boldsymbol{A}$. ►

Каждому собственному значению λ матрицы (линейного оператора) сопоставляют его ***кратность***, полагая ее равной кратности корня λ характеристического уравнения этой матрицы (этого линейного оператора).

Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению линейного оператора, не является *линейным подпространством*, так как это множество не содержит *нулевого вектора*, который, по определению, не может быть собственным. Но это формальное и легко устранимое препятствие является единственным. Обозначим через $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$ множество всех собственных векторов линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$, отвечающих собственному значению λ, с добавленным к этому множеству нулевым вектором.

Теорема 4.4. Множество $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}$.

◄ Выберем произвольные два вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$ и докажем, что для любых действительных α и β вектор $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ также принадлежит $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$. Для этого вычислим образ этого вектора под действием линейного оператора $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\beta\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \alpha(\lambda\boldsymbol{x}) + \beta(\lambda\boldsymbol{y}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x}) + \lambda(\beta\boldsymbol{y}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}).$$

Таким образом, для вектора $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ выполняется соотношение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}$. Если $\boldsymbol{z}$ — нулевой вектор, то он принадлежит $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$. Если же он ненулевой, то, согласно доказанному соотношению, он является собственным с собственным значением λ и опять-таки принадлежит множеству $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$. ►

Линейное подпространство $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda)$ иногда называют ***собственным подпространством линейного оператора****. Оно является частным случаем ***инвариантного подпространства*** линейного оператора $\boldsymbol{A}$ — такого линейного подпространства $\mathcal{H}$, что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$ вектор $\boldsymbol{Ax}$ также принадлежит $\mathcal{H}$.

Инвариантным подпространством линейного оператора является также линейная оболочка любой системы его собственных векторов. Инвариантным подпространством линейного оператора, не связанным с его собственными векторами, является *образ оператора*.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ можно рассматривать как *линейное отображение* любого своего инвариантного пространства $\mathcal{H}$ в себя. Такое отображение, по сути, есть результат *сужения отображения* $\boldsymbol{A}$ на линейное подпространство $\mathcal{H}$, и его называют ***ограничением линейного оператора*** на инвариантное подпространство $\mathcal{H}$.

4.4. Вычисление собственных значений и собственных векторов

Характеристическое уравнение линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, действующего в *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$, — это алгебраическое уравнение n-й степени с действительными коэффициентами. Среди его корней могут быть комплексные числа, но эти корни не относят к *собственным значениям линейного оператора*, так как, согласно определению, собственное значение линейного оператора — действительное число. Чтобы комплексные корни характеристического уравнения можно было рассматривать как собственные значения линейного оператора, в линейном пространстве должно быть определено умножение вектора на любые комплексные числа.

Как следует из доказательства теоремы 4.3, чтобы вычислить собственные значения линейного оператора $\boldsymbol{A}$ и найти его *собственные векторы*, нужно выполнить следующие операции:

– выбрать в линейном пространстве *базис* и сопоставить $\boldsymbol{A}$ *матрицу* A этого *линейного оператора* в выбранном базисе;

– составить характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найти все его действительные корни λ_k, которые и будут собственными значениями линейного оператора;

– для каждого собственного значения λ_k найти *фундаментальную систему решений* для однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(A - \lambda_k E)x = 0$. Столбцы фундаментальной системы решений представляют собой координаты векторов некоторого базиса в *собственном подпространстве* $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda_k)$ *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$.

Любой собственный вектор с собственным значением λ_k принадлежит подпространству $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda_k)$, и, следовательно, найденный базис в этом подпространстве позволяет представить любой собственный вектор с собственным значением λ_k.

Пример 4.4. Найдем собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\boldsymbol{A}$, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с описанной процедурой необходимо выполнить три действия. Первое действие можно опустить, так как оператор уже представлен своей матрицей в некотором базисе. Выполняем дальнейшие действия.

*Не следует путать два термина: *собственное подпространство* и *собственное подпространство линейного оператора*.

2) Находим собственные значения, решая характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

3) Находим столбцы координат собственных векторов, решая для каждого из трех собственных значений однородную СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

3а) Для $\lambda = \lambda_1 = -3$ система (4.5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 2:

$$\operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Поэтому размерность линейного пространства решений системы равна $3 - 2 = 1$. Фундаментальная система решений содержит одно решение, например

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Все множество собственных векторов линейного оператора с собственным значением $\lambda_1 = -3$ в координатной форме имеет вид

$$\alpha x^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где α — произвольное ненулевое действительное число.

3б) При $\lambda = \lambda_2 = 1$ система (4.5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Как и в предыдущем случае, размерность линейного пространства решений равна $2 - 1 = 1$ и фундаментальная система решений содержит одно решение. Выберем следующее:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Все множество собственных векторов с собственным значением $\lambda = -1$ в координатной форме имеет вид

$$\beta x^{(2)} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где β — произвольное ненулевое действительное число.

3в) Для $\lambda = \lambda_3 = 3$ аналогично предыдущим двум случаям находим столбец координат одного из собственных векторов, например

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix},$$

который порождает собственное подпространство линейного оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающее собственному значению $\lambda = 3$.

Пример 4.5. Найдем собственные значения линейного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в *n-мерном линейном пространстве*, *матрица* A которого в некотором базисе является верхней треугольной порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем все ее диагональные элементы a_{ii} попарно различны, т.е. $a_{ii} \neq a_{jj}$ при $i \neq j$.

Составляем характеристическое уравнение матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda) = 0$$

(определитель верхней треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов). Находим все действительные корни этого уравнения:

$$\lambda_k = a_{kk}, \quad k = \overline{1,\, n}.$$

Как видим, линейный оператор $\boldsymbol{A}$ имеет n попарно различных собственных значений.

Рассмотрим *собственное подпространство* $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda_r)$ *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$, отвечающее собственному значению λ_r, где $1 \leqslant r \leqslant n$. Базис этого подпространства получим как фундаментальную систему решений однородной СЛАУ

$$(A - a_{rr}E)x = 0. \tag{4.6}$$

Ранг матрицы $A - a_{rr}E$ системы (4.6) равен $n-1$. Действительно, с одной стороны, по определению собственного значения $\det(A - a_{rr}) = 0$, т.е. ранг матрицы $A - a_{rr}E$ меньше ее порядка n и не превышает $n-1$. С другой стороны, после вычеркивания в матрице r-й строки и r-го столбца получим верхнюю треугольную матрицу с ненулевыми элементами на диагонали. Это значит, что ранг матрицы $A - a_{rr}E$ не меньше $n-1$.

Так как матрица СЛАУ (4.6) имеет ранг, на единицу меньший ее порядка, эта СЛАУ имеет фундаментальную систему решений из одного вектора. Это означает, что подпространство $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \lambda_r)$ одномерное.

Наиболее просто решение системы (4.6) выглядит для $r = 1$. В этом случае собственным является вектор $\boldsymbol{x}_1$ со столбцом координат $(1\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}}$. При $r = 2$ все координаты собственного вектора, начиная с третьей, будут равны нулю, так как они удовлетворяют системе

$$\begin{pmatrix} a_{33} - a_{22} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} - a_{22} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

получающейся отбрасыванием в исходной системе первых двух уравнений. Второе из отбрасываемых уравнений вытекает из всех последующих и может быть опущено, а первое определяет связь между первыми двумя координатами. Мы заключаем, что собственному значению a_{22} отвечает вектор $\boldsymbol{x}_2$ со столбцом координат $(-a_{12}\ \ a_{11}-a_{22}\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0)^{\mathrm{T}}$. Собственному значению a_{33} отвечает вектор $\boldsymbol{x}_3$ со столбцом координат $(x_{13}\ \ x_{23}\ \ x_{33}\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0)^{\mathrm{T}}$, у которого лишь первые три координаты отличны от нуля. Эти три координаты удовлетворяют однородной системе из двух уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-a_{33})x_{13}+a_{12}x_{23}+a_{13}x_{33}=0, \\ \qquad\qquad (a_{22}-a_{33})x_{23}+a_{33}x_{33}=0. \end{cases}$$

Эти рассуждения можно продолжить.

Пример 4.6. Преобразование поворота в V_3 на заданный острый угол вокруг некоторой оси — это линейный оператор. Его собственными векторами являются векторы, коллинеарные оси поворота, они отвечают единственному собственному значению 1. Например, если поворот выполняется вокруг оси Oz, то матрица оператора в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение оператора

$$\big((\cos\varphi-\lambda)^2+\sin^2\varphi\big)^2(1-\lambda)=0.$$

Нетрудно увидеть, что характеристическое уравнение имеет единственный действительный корень 1, так что линейный оператор имеет единственное собственное значение 1. Этому собственному значению отвечают собственные векторы со столбцами координат вида $\alpha(0\ \ 0\ \ 1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha\neq 0$.

4.5. Свойства собственных векторов

Теорема 4.5. Пусть *собственные значения* λ_1, ..., λ_r *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ попарно различны. Тогда *система* соответствующих им *собственных векторов* $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_r$ *линейно независима*.

◄ Доказательство опирается на метод математической индукции, проводимый по количеству r векторов в системе. При $r=1$ утверждение теоремы верно, так как линейная независимость системы из одного вектора означает, что этот *вектор ненулевой*, а собственный вектор, согласно определению 4.3, является ненулевым.

Пусть утверждение верно при $r=m$, т.е. для произвольной системы из m собственных векторов $\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_m$. Добавим к системе векторов еще один собственный вектор $\boldsymbol{e}_{m+1}$, отвечающий собственному значению λ_{m+1}, и докажем, что расширенная таким способом система векторов останется линейно независимой. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию полученной системы собственных векторов и предположим, что она равна *нулевому вектору*:

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{e}_m+\alpha_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1}=\boldsymbol{0}. \tag{4.7}$$

К равенству (4.7) применим линейный оператор $\boldsymbol{A}$ и в результате получим еще одно векторное равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_m+\alpha_{m+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{m+1}=\boldsymbol{0}.$$

Учтем, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{m+1}$ являются собственными:

$$\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\lambda_m\boldsymbol{e}_m + \alpha_{m+1}\lambda_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} = \mathbf{0}. \tag{4.8}$$

Умножив равенство (4.7) на коэффициент λ_{m+1} и вычтя его из равенства (4.8), получим линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, равную нулевому вектору:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})\boldsymbol{e}_m = \mathbf{0}.$$

Вспоминая, что система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, по предположению, линейно независима, делаем вывод, что у полученной линейной комбинации все коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_k\,(\lambda_k - \lambda_{m+1}) = 0, \quad k = \overline{1,\, m}. \tag{4.9}$$

Поскольку все собственные значения λ_i попарно различны, то из равенств (4.9) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Значит соотношение (4.7) можно записать в виде $\alpha_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} = \mathbf{0}$, а так как вектор $\boldsymbol{e}_{m+1}$ ненулевой (как собственный вектор), то $\alpha_{m+1} = 0$. В итоге получаем, что равенство (4.7) выполняется лишь в случае, когда все коэффициенты α_i, $i = \overline{1,\, m{+}1}$, равны нулю. Тем самым мы доказали, что система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}$ линейно независима. ►

Теорема 4.6. *Матрица линейного оператора* $\boldsymbol{A}$, действующего в *линейном пространстве*, в данном *базисе* является диагональной тогда и только тогда, когда все векторы этого базиса являются собственными для оператора $\boldsymbol{A}$.

◄ Пусть A — матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_n)$. Согласно определению 3.3, j-м столбцом матрицы A является столбец координат вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j$.

Если матрица A является диагональной, то произвольно взятый ее j-й столбец имеет вид $(0\ \ldots\ 0\ \mu_j\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}}$ (единственный ненулевой элемент стоит на j-м месте). Для вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j$ получаем представление

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{b}(0\ \ldots\ 0\ \mu_j\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} = \mu_j\boldsymbol{b}_j,$$

которое как раз и означает, что вектор $\boldsymbol{b}_j$ является собственным с собственным значением μ_j. Значит, все базисные векторы являются собственными, а все диагональные элементы матрицы A являются собственными значениями.

Верно и обратное. Если каждый вектор $\boldsymbol{b}_j$ является собственным для линейного оператора $\boldsymbol{A}$ и ему отвечает собственное значение λ_j, то

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j = \lambda_j\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{b}(0\ \ldots\ 0\ \lambda_j\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}},$$

т.е. в матрице оператора $\boldsymbol{A}$ в этом базисе равны нулю все элементы, кроме диагональных, а диагональный элемент в j-м столбце равен λ_j. ►

Следствие 4.1. Если *характеристическое уравнение линейного оператора*, действующего в n*-мерном линейном пространстве*, имеет n попарно различных действительных корней, то существует базис, в котором матрица этого оператора является диагональной.

◄ Каждый действительный корень характеристического уравнения является собственным значением линейного оператора. Каждому из таких корней можно сопоставить хотя бы по одному собственному вектору. Система выбранных таким образом векторов, согласно теореме 4.5, является линейно независимой, а так как количество n векторов в ней равно *размерности* линейного пространства, она является базисом. Этот базис состоит из собственных векторов. Согласно теореме 4.6, матрица линейного оператора в этом базисе имеет диагональный вид. ►

Следствие 4.2. Если характеристическое уравнение квадратной матрицы порядка n имеет n попарно различных действительных корней, то эта *матрица подобна* некоторой диагональной.

◀ Пусть характеристическое уравнение матрицы A порядка n имеет n различных действительных корней. Выберем произвольное n-мерное линейное пространство $\mathcal{L}$, зафиксируем в нем некоторый базис $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_n)$ и рассмотрим линейный оператор $\boldsymbol{A}$, матрицей которого в базисе $\boldsymbol{b}$ является матрица A. По теореме 4.6 существует базис, в котором матрица A' этого оператора диагональна. Согласно теореме 3.5, матрицы A и A' подобны. Отметим, что на диагонали матрицы A' стоят все попарно различные собственные значения матрицы A. ▶

Если характеристическое уравнение линейного оператора имеет кратные действительные корни, то такой линейный оператор может иметь диагональную матрицу в некотором базисе, но так бывает не всегда.

Пример 4.7. В двумерном линейном пространстве (например, в $\mathbb{R}^2$) рассмотрим линейные операторы, матрицы которых в некотором базисе имеют вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристические уравнения этих операторов совпадают и имеют вид $(\lambda - 2)^2 = 0$. Поэтому оба оператора имеют единственное *собственное значение* $\lambda = 2$ *кратности* 2. Матрица первого линейного оператора уже имеет диагональный вид, т.е. исходный базис состоит из собственных векторов этого оператора. Можно показать, что любой ненулевой вектор для этого оператора является собственным и потому для него любой базис есть базис из собственных векторов. У второго линейного оператора все собственные векторы отвечают собственному значению 2, но *собственное подпространство линейного оператора* для этого собственного значения одномерно. Следовательно, найти два линейно независимых собственных вектора для этого линейного оператора невозможно и базиса из собственных векторов не существует. #

При изучении заданного линейного оператора появляется мысль выбрать такой базис, в котором его матрица выглядит наиболее просто. Из вышеизложенного следует, что в определенных ситуациях линейный оператор в некотором базисе имеет диагональную матрицу. Чтобы это было так, оператор должен иметь базис из собственных векторов. Изменение базиса вызывает замену матрицы оператора подобной ей. Замену матрицы A диагональной матрицей A', подобной A, называют ***приведением матрицы A к диагональному виду***.

Задача приведения матрицы к диагональному виду может рассматриваться самостоятельно, вне зависимости от изучения конкретного линейного оператора. Она состоит в подборе для данной матрицы A такой невырожденной матрицы P, что матрица $A' = P^{-1}AP$ является диагональной.

Пример 4.8. Выясним, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Если это возможно, найдем соответствующую диагональную матрицу и матрицу P преобразования подобия.

Найдем собственные значения данной матрицы. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и решая характеристическое уравнение, находим его корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Видим, что имеются два собственных значения, причем одно из них кратности 2.

Матрицу можно привести к диагональному виду, если сумма размерностей всех собственных подпространств (в данном случае матрицы, см. замечание 4.1) равна размерности линейного пространства, в нашем случае — трем. Отметим без доказательства, что размерность собственного подпространства линейного оператора (матрицы) не превышает кратности соответствующего собственного значения. Проверим это на собственном подпространстве, отвечающем собственному значению λ_1, для чего вычислим ранг матрицы $A-\lambda_1 E$:

$$\mathrm{Rg}(A-\lambda_1 E) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} = 2.$$

Значит, размерность первого собственного подпространства равна $3-2=1$.

Аналогично находим размерность второго собственного подпространства. Вычисляем ранг соответствующей матрицы $A-\lambda_2 E$:

$$\mathrm{Rg}(A-\lambda_2 E) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} = 1.$$

Размерность второго собственного подпространства равна $3-1=2$.

Сумма размерностей обоих подпространств равна трем. Следовательно, базис из собственных векторов существует. Он собирается из базисов собственных подпространств. Чтобы его построить, нужно для каждого собственного значения λ найти фундаментальную систему решений СЛАУ $(A-\lambda E)x=0$. Фундаментальная система решений представляет собой базис линейного пространства решений однородной СЛАУ, в нашем случае собственного подпространства матрицы.

Для собственного значения $\lambda_1=-1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен двум, поэтому фундаментальная система состоит из одного столбца. Например, можно взять столбец $(3\ \ 5\ \ 6)^{\mathrm{т}}$.

Для собственного значения $\lambda_2=1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен единице, поэтому фундаментальная система состоит из двух столбцов. Например, фундаментальную систему решений составляют столбцы $(2\ \ 1\ \ 0)^{\mathrm{т}}$ и $(0\ \ 1\ \ 2)^{\mathrm{т}}$.

Таким образом, базисом из собственных векторов матрицы A является система

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а сама матрица A подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица P преобразования подобия представляет собой матрицу перехода из одного базиса в другой, т.е. ее столбцы представляют собой столбцы координат векторов нового базиса, записанные в старом. В нашем случае столбцы матрицы P определяются векторами «нового» базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.9. Линейный оператор, действующий в трехмерном линейном пространстве, в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно ли, изменив базис, привести матрицу этого оператора к диагональному виду?

Составляем характеристическое уравнение линейного оператора:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа $\lambda_1 = 1$ кратности 2 и $\lambda_2 = 2$. Для определения размерностей собственных подпространств линейного оператора, отвечающих этим двум значениям, вычислим ранги соответствующих матриц:

$$\mathrm{Rg}(A - \lambda_1 E) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\mathrm{Rg}(A - \lambda_2 E) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

Оба собственных подпространства линейного оператора, отвечающие двум собственным значениям, имеют размерность $3 - 2 = 1$. Поэтому линейно независимая система из собственных векторов данного оператора может содержать максимум два вектора и по соображениям размерности не может быть базисом.

ОГЛАВЛЕНИЕ