МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Электронное учебное издание

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 5

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный и самосопряженный операторы, их матрицы в ортонормированном базисе. Свойства корней характеристического многочлена самосопряженного оператора: вещественность и равенство алгебраических и геометрических кратностей (без док-ва). Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих различным собственным значениям. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора (док-во для случая различных собственных значений). Ортогональные преобразования, ортогональные матрицы и их свойства. Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием.

5.1. Сопряженный оператор

Пусть $\mathcal{E}$ — *евклидово пространство.*

Определение 5.1. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}^*\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ называют ***сопряженным*** к линейному оператору $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, если для любых *векторов* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ верно равенство

$$(\boldsymbol{Ax},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y})\,. \tag{5.1}$$

Данное определение сформулировано так, что оставляет открытыми два вопроса. Во-первых, не ясно, каждый ли линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве, имеет сопряженный. Во-вторых, из определения нельзя понять, однозначно или нет определяется сопряженный оператор. Прежде чем формулировать теорему, отвечающую на оба эти вопроса, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Если квадратные матрицы M и N порядка n таковы, что для любых вектор-столбцов x, $y \in \mathbb{R}^n$ выполняется соотношение $x^{\mathrm{T}}My = x^{\mathrm{T}}Ny$, то $M = N$.

◀ Пусть m_{ij}, n_{ij} — элементы матриц M и N соответственно, стоящие в i-й строке и j-м столбце. Для произвольной пары индексов i и j выберем такие вектор-столбцы x и y:

$$x = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{i-я строка} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, \qquad y = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{j-я строка} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array},$$

в которых присутствует только один ненулевой элемент, равный единице и стоящий на указанном месте. Записав равенство $x^{\mathrm{T}}My = x^{\mathrm{T}}Ny$ с выбранными столбцами x и y и вычислив обе стороны равенства, получаем $m_{ij} = n_{ij}$.

Так как пара индексов может быть выбрана произвольно, заключаем, что $M = N$. ▶

Теорема 5.1. Любому линейному оператору $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ соответствует единственный сопряженный оператор $\boldsymbol{A}^*$, причем его матрицей в любом *ортонормированном базисе* $\boldsymbol{e}$ является матрица A^{T}, транспонированная матрице A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в том же базисе $\boldsymbol{e}$.

◀ Доказательство теоремы основано на том, что фиксированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}$ позволяет установить взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $L(\mathcal{E},\mathcal{E})$ и матрицами из $M_n(\mathbb{R})$, $n = \dim\mathcal{E}$. Это соответствие заключается в сопоставлении *линейному оператору* его *матрицы* в фиксированном базисе.

Докажем, что линейный оператор $\boldsymbol{B}$ с матрицей $B = A^{\mathrm{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ является сопряженным к линейному оператору $\boldsymbol{A}$. Для этого достаточно проверить выполнение равенства

$$(\boldsymbol{Ax},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{By}) \tag{5.2}$$

для любой пары векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$.

Пусть x, y — столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Тогда, согласно теореме 3.3, вектор $\boldsymbol{Ax}$ имеет столбец координат Ax, а левая часть равенства (5.2) равна $(Ax)^{\mathrm{T}}y$, что следует из ортонормированности базиса (см. **2.7**). Аналогично правая часть этого равенства имеет вид $x^{\mathrm{T}}(By)$. Следовательно, равенство (5.2) в координатной записи имеет вид

$$(Ax)^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}(By). \tag{5.3}$$

Так как $(Ax)^{\mathrm{T}} = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ в силу свойств матричных операций, равенство (5.3) эквивалентно равенству

$$x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}By, \tag{5.4}$$

которое при $B = A^{\mathrm{T}}$ превращается в тождество.

Если некоторый линейный оператор $\boldsymbol{B}$ является сопряженным к линейному оператору $\boldsymbol{A}$, то для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выполняется равенство (5.2). Значит, для матриц A и B этих операторов равенство (5.4) выполняется для любых столбцов x и y. Согласно доказанной лемме, $B = A^{\mathrm{T}}$. Поэтому линейный оператор $\boldsymbol{B}$ определен однозначно, так как однозначно определена его матрица. ▶

В некоторых случаях линейный оператор, сопряженный к данному линейному оператору, можно найти, не вычисляя матрицы этого оператора.

Пример 5.1. Вектор $\boldsymbol{a} \in V_3$ порождает линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon V_3 \to V_3$ согласно формуле

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}.$$

Оператор, сопряженный к оператору $\boldsymbol{A}$, можно определить, опираясь на свойства скалярного, векторного и смешанного произведений:

$$(\boldsymbol{Ax},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{axy} = \boldsymbol{yax} = (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\, -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, -\boldsymbol{Ay}).$$

Из приведенных соотношений видно, что $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}$.

Пример 5.2. Множество $C_0^\infty[a,\, b]$ бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a,\, b]$ функций, у которых в точках a и b производные любого порядка равны нулю, является линейным пространством относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на действительное число, а формула

$$(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

задает в этом линейном пространстве скалярное произведение (см. пример 2.10). Отображение $\boldsymbol{A}f = f'$, которое каждой функции $f \in C_0^\infty[a,\, b]$ ставит в соответствие ее производную, является линейным оператором. Оператором, сопряженным к $\boldsymbol{A}$, будет $-\boldsymbol{A}$, поскольку, согласно *правилу интегрирования по частям*,

$$(\boldsymbol{A}f,\, g) = \int\limits_0^1 f'(t)g(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(t)g'(t)\,dt = \\ = -\int\limits_0^1 f(t)g'(t)\,dt = \int\limits_0^1 f(t)\bigl(-g'(t)\bigr)\,dt = (f, -\boldsymbol{A}g).$$

5.2. Самосопряженные операторы и их матрицы

Определение 5.2. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}$, действующий в *евклидовом пространстве*, называют ***самосопряженным***, если $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$.

Это определение можно сформулировать по-другому. Линейный оператор самосопряженный, если для любых *векторов* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ верно равенство

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y})\,.$$

Действительно, если указанное соотношение выполняется, то, согласно определению 5.1, линейный оператор $\boldsymbol{A}$ является *сопряженным оператором* к самому себе, т.е. $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$.

Пример 5.3. Самосопряженными являются простейшие линейные операторы: *нулевой* $\boldsymbol{\Theta}$ и *тождественный* $\boldsymbol{I}$, так как для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$

$$(\boldsymbol{I}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{I}\boldsymbol{y})\,,$$
$$(\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{0},\, \boldsymbol{y}) = 0 = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{y})\,.$$

Пример 5.4. Рассмотрим линейное пространство V_3 с обычным скалярным произведением *свободных векторов* $(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$. Отображение $\boldsymbol{A}\colon V_3 \to V_3$ ортогонального проектирования векторов из V_3 на направление вектора $\boldsymbol{a}$ единичной длины, которое определяется формулой $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}$, является линейным оператором, так как

$$\boldsymbol{A}(\mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{y}) = (\mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a} = \mu\,(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a} + \nu\,(\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a} = \mu(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + \nu(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}).$$

Убедимся, что этот оператор является самосопряженным:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = ((\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, (\boldsymbol{a},\boldsymbol{y})\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\, (\boldsymbol{y},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y})\,.$$

Приведенные рассуждения не используют специфику пространства V_3 и могут быть проведены в произвольном евклидовом пространстве. Любой единичный вектор $\boldsymbol{a}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ порождает линейный оператор $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a}}$ ортогонального проектирования на линейное подпространство $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}\}$ согласно формуле $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}$, и этот оператор является самосопряженным.

Теорема 5.2. *Матрица самосопряженного оператора* в любом *ортонормированном базисе* является симметрической. Наоборот, если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе является симметрической, то этот оператор — самосопряженный.

◀ Согласно определению 5.2, $\boldsymbol{A}$ — самосопряженный оператор, если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$, т.е. если линейный оператор равен своему сопряженному оператору. Это эквивалентно тому, что матрица линейного оператора в ортонормированном базисе совпадает со своей транспонированной (она является матрицей сопряженного оператора). Такие матрицы и называют симметрическими. ►

Теорема 5.3. Все корни *характеристического уравнения* самосопряженного оператора действительны.

Следствие 5.1. Если матрица A является симметрической, то все корни ее характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ действительные.

Следствие 5.2. Самосопряженный оператор, действующий в *n-мерном* евклидовом *пространстве*, имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его *кратность*.

Следствие 5.3. Симметрическая матрица порядка n имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

5.3. Собственные векторы самосопряженного оператора

Теорема 5.4. *Собственные векторы самосопряженного оператора*, отвечающие различным *собственным значениям*, *ортогональны*.

◄ Рассмотрим самосопряженный оператор $\boldsymbol{A}$ и два его собственных вектора $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2. Тогда $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$. Поэтому

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2). \tag{5.5}$$

Но так как $\boldsymbol{A}$ является самосопряженным оператором, то $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)$. Значит,

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2). \tag{5.6}$$

Приравнивая правые части соотношений (5.5) и (5.6), получаем

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2),$$

или

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0. \tag{5.7}$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, из равенства (5.7) следует, что $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$, что и означает ортогональность векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$. ►

Теорема 5.5. Если собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в *n-мерном евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$, попарно различны, то в $\mathcal{E}$ существует *ортонормированный базис*, в котором *матрица* этого *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ имеет диагональный вид, причем диагональными элементами такой матрицы являются собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

◄ Поскольку собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ попарно различны, то, выбрав для каждого λ_i соответствующий ему собственный вектор $\boldsymbol{e}_i$, получим систему $\boldsymbol{e}$ *ненулевых векторов*, которые по теореме 5.4 попарно ортогональны. Поэтому $\boldsymbol{e}$ — *ортогональная система векторов*. Согласно теореме 4.5, она *линейно независима* и является базисом, так как содержит n векторов (см. теорему 1.4). Этот базис является ортогональным, а чтобы его превратить в ортонормированный, достаточно каждый вектор $\boldsymbol{e}_i$ нормировать делением на его длину.

Таким образом, в условиях теоремы существует базис из собственных векторов самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$. По теореме 4.6 матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов является диагональной, а диагональные элементы матрицы представляют собой собственные значения. ►

Хотя все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора действительны (см. теорему 5.3), среди них могут быть кратные, и тогда теорема 5.5 неприменима. Однако и в этом случае матрица самосопряженного оператора в некотором базисе имеет диагональный вид.

Теорема 5.6. Для любого самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого линейного оператора. Матрица A самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$ в этом базисе имеет диагональный вид, на ее диагонали расположены собственные значения оператора $\boldsymbol{A}$, повторяющиеся столько раз, какова их *кратность*. #

Следствие 5.4. Любая симметрическая матрица M порядка n подобна некоторой диагональной, т.е. существует такая невырожденная матрица P порядка n, что

$$P^{-1}MP = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n).$$

Последовательность $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из n чисел представляет собой перечень всех корней характеристического уравнения матрицы M с учетом их кратностей.

◄ Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ *стандартный* ортонормированный *базис*, и пусть матрица M является матрицей в этом базисе некоторого линейного оператора $\boldsymbol{M}$. Тогда этот оператор будет самосопряженным. По теореме 5.6 для него существует ортонормированный базис, в котором его матрица M' имеет диагональный вид $M' = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$. Матрица M' получается из исходной матрицы M при помощи матрицы перехода P из стандартного базиса в указанный ортонормированный базис: $M' = P^{-1}MP$. ►

5.4. Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Определение 5.3. Квадратную матрицу O называют ***ортогональной***, если она удовлетворяет условию

$$O^{\mathrm{T}}O = E, \tag{5.8}$$

где E — единичная матрица.

Пример 5.5. Простейшей ортогональной матрицей является единичная матрица E, так как $E^{\mathrm{T}}E = EE = E$. Напротив, нулевая матрица не является ортогональной: $\Theta^{\mathrm{T}}\Theta = \Theta \neq E$.

Пример 5.6. Матрица

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

является ортогональной, поскольку $U^{\mathrm{T}}U = E$. Это можно проверить непосредственно. #

Из определения 5.3 вытекает ряд свойств ортогональных матриц.

Свойство 5.1. Определитель ортогональной матрицы O может иметь одно из двух возможных значений: $\det O = \pm 1$.

◄ Согласно равенству (5.8), имеем $\det\left(O^{\mathrm{T}}O\right) = \det E$. Вспомнив, что определитель произведения матриц равен произведению их определителей, а при транспонировании матрицы определитель не меняется, получим

$$\det(O^{\mathrm{T}}O) = \det O^{\mathrm{T}} \det O = (\det O)^2\,.$$

Так как $\det E = 1$, то и $(\det O)^2 = 1$. Следовательно, $\det O = \pm 1$. ►

Свойство 5.2. Матрица, обратная к ортогональной матрице O, совпадает с ее транспонированной матрицей, т.е. $O^{-1} = O^{\mathrm{T}}$.

◄ Согласно свойству 5.1, ортогональная матрица невырождена и потому имеет обратную матрицу O^{-1}. Умножая равенство (5.8) справа на матрицу O^{-1}, получаем

$$(O^{\mathrm{T}}O)O^{-1} = EO^{-1},$$

откуда $O^{\mathrm{T}}(OO^{-1}) = O^{-1}$. Но $OO^{-1} = E$, поэтому $O^{\mathrm{T}} = O^{-1}$. ►

Свойство 5.3. Произведение ортогональной матрицы O на транспонированную к ней равно единичной матрице, т.е. $OO^{\mathrm{T}} = E$.

◄ Согласно свойству 5.2 и определению обратной матрицы, $OO^{\mathrm{T}} = OO^{-1} = E$. ►

Свойство 5.4. Матрица, транспонированная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.

◄ Нужно для произвольной ортогональной матрицы O доказать равенство

$$(O^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}O^{\mathrm{T}} = E, \tag{5.9}$$

представляющее собой запись соотношения (5.8) для матрицы O^{T}. Так как, согласно свойству операции транспонирования, $(O^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = O$, равенство (5.9) эквивалентно равенству $OO^{\mathrm{T}} = E$, которое верно в силу свойства 5.3. ►

Свойство 5.5. Произведение двух ортогональных матриц O и Q одного порядка является ортогональной матрицей.

◄ Для доказательства достаточно проверить выполнение равенства (5.8) для матрицы OQ:

$$(OQ)^{\mathrm{T}}(OQ) = (Q^{\mathrm{T}}O^{\mathrm{T}})OQ = Q^{\mathrm{T}}(O^{\mathrm{T}}O)Q = Q^{\mathrm{T}}EQ = Q^{\mathrm{T}}Q = E.$$

В этих выкладках E, как обычно, обозначает единичную матрицу. ►

Свойство 5.6. Матрица, обратная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.

◄ Согласно свойству 5.1, ортогональная матрица невырождена, а потому имеет обратную. Согласно свойству 5.2, матрица, обратная к ортогональной, совпадает с транспонированной. Наконец, согласно свойству 5.4, матрица, транспонированная к ортогональной, является ортогональной. ►

Пример 5.7. Рассмотрим матрицу U из примера 5.6. Так как она ортогональна, то обратную матрицу легко найти, используя свойство 5.6:

$$U^{-1} = U^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Определение 5.4. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, действующий в *евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$, называют ***ортогональным оператором*** (или ***ортогональным преобразованием***), если он сохраняет *скалярное произведение* в $\mathcal{E}$, т.е. для любых *векторов* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ выполняется равенство

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{5.10}$$

Так как ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение, то он сохраняет *норму* (длину) вектора и угол между ненулевыми векторами. Действительно,

$$\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2.$$

МГТУ ФН-12

Отсюда, в частности, следует, что если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ненулевые, то и векторы $\boldsymbol{Ax}$ и $\boldsymbol{Ay}$ ненулевые. При этом

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay}}) = \frac{(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay})}{\|\boldsymbol{Ax}\|\,\|\boldsymbol{Ay}\|} = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} = \cos(\widehat{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}).$$

Менее очевидно, что верно и обратное утверждение.

Теорема 5.7. Если линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon \mathcal{E}\to\mathcal{E}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ сохраняет *евклидову норму*: $\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|$, $\boldsymbol{x}\in\mathcal{E}$, то этот оператор ортогональный. #

Теорема 5.7 позволяет привести примеры ортогональных операторов. В пространствах V_2 и V_3 *свободных векторов* ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние. Например, линейный оператор поворота вектора на фиксированный угол (см. пример 3.3) является ортогональным, так как при таком повороте длины векторов не изменяются. Линейный оператор симметрии относительно прямой на плоскости или относительно плоскости в пространстве также является ортогональным.

Теорема 5.8. Если *матрица линейного оператора* в некотором ортонормированном базисе *ортогональна*, то этот оператор является ортогональным. Наоборот, матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе является ортогональной.

◀ Выберем в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ любой ортонормированный базис $\boldsymbol{e}$. Тогда для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, имеющих в этом ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ столбцы координат x и y соответственно, выполнено равенство $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}}y$ (это запись скалярного произведения в ортонормированном базисе, см. **2.7**).

Пусть матрица A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в ортонормированном базисе является ортогональной. Тогда выполняется соотношение $A^{\mathrm{T}}A = E$. Следовательно, равенство

$$(Ax)^{\mathrm{T}}(Ay) = (x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})(Ay) = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)y = x^{\mathrm{T}}Ey = x^{\mathrm{T}}y \tag{5.11}$$

верно для любых столбцов x и y. Но это равенство представляет собой матричную запись равенства скалярных произведений $(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, имеющих столбцы координат x и y в этом же ортонормированном базисе. Мы приходим к заключению, что оператор $\boldsymbol{A}$ ортогональный.

Докажем обратное утверждение теоремы. В любом ортонормированном базисе соотношение $(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ в координатах имеет вид $(Ax)^{\mathrm{T}}(Ay) = x^{\mathrm{T}}y$, откуда, согласно (5.11), следует, что

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)y = (Ax)^{\mathrm{T}}(Ay) = x^{\mathrm{T}}Ey.$$

Как ранее доказано (см. лемму в **5.1**), из этого равенства, выполняющегося для любых столбцов x и y, следует равенство матриц $A^{\mathrm{T}}A = E$, что и означает ортогональность матрицы A. ▶

Теорема 5.9. В *евклидовом пространстве матрица перехода* от одного *ортонормированного базиса* к другому является *ортогональной*.

◀ Рассмотрим в произвольном *n-мерном* евклидовом *пространстве* $\mathcal{E}$ два ортонормированных базиса $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}_n)$ и $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n)$. Пусть U — матрица перехода от $\boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{e}$.

Как следует из определения 1.6, столбцы $e_1, \ldots, e_n$ матрицы перехода U — это столбцы *координат векторов* нового базиса $\boldsymbol{e}$ относительно старого базиса $\boldsymbol{b}$, т.е. $U = (e_1\ \ldots\ e_n)$, где $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{b}e_i$, $i=\overline{1,n}$. Поэтому

$$U^{\mathrm{T}}U = \begin{pmatrix} e_1^{\mathrm{T}} \\ e_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ e_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (e_1\ e_2\ \ldots\ e_n) = \begin{pmatrix} e_1^{\mathrm{T}}e_1 & e_1^{\mathrm{T}}e_2 & \ldots & e_1^{\mathrm{T}}e_n \\ e_2^{\mathrm{T}}e_1 & e_2^{\mathrm{T}}e_2 & \ldots & e_2^{\mathrm{T}}e_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_n^{\mathrm{T}}e_1 & e_n^{\mathrm{T}}e_2 & \ldots & e_n^{\mathrm{T}}e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство в приведенной выкладке следует из того, что столбцы $e_1, \ldots, e_n$ — это столбцы координат векторов ортонормированного базиса в ортонормированном базисе, а матричное произведение $e_i^{\mathrm{T}} e_j$ представляет собой запись в координатах *скалярного произведения* $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, которое в силу ортонормированности базиса $\boldsymbol{e}$ равно нулю при $i \neq j$ и единице при $i = j$.

Мы показали, что $U^{\mathrm{T}} U = E$, а это, согласно определению 5.3 ортогональной матрицы, и означает, что U — ортогональная матрица. ►

Замечание 5.1. Иногда говорят, что ортогональная матрица состоит из ортонормированных столбцов и строк. Эта терминология мотивируется следующим. Равенства $O^{\mathrm{T}} O = E$, $OO^{\mathrm{T}} = E$, верные для любой ортогональной матрицы, означают, что системы столбцов и строк матрицы O, рассматриваемых как элементы n-мерного *линейного арифметического пространства*, являются ортонормированными. #

5.5. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду

Матрица A *линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ при замене *базиса* преобразуется согласно формуле $A' = U^{-1} A U$, где U — *матрица перехода* (см. теорему 3.5). Если речь идет об *евклидовом пространстве* и переходе из одного *ортонормированного базиса* в другой, *матрица* перехода U является *ортогональной* (см. теорему 5.9). Согласно свойству 5.2, такая матрица удовлетворяет соотношению $U^{-1} = U^{\mathrm{T}}$. Поэтому для случая ортонормированных базисов формулу преобразования матрицы линейного оператора можно записать следующим образом:

$$A' = U^{\mathrm{T}} A U. \tag{5.12}$$

Теорема 5.10. Для любой симметрической матрицы M существует такая ортогональная матрица U, что $U^{\mathrm{T}} M U = \Lambda$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица, диагональными элементами которой являются *собственные значения* матрицы M, повторяющиеся согласно их *кратности*.

◄ Доказательство теоремы основано на следствии 5.4, теореме 5.9 и свойстве 5.2. Согласно следствию 5.4, для симметрической матрицы M порядка n существует такая невырожденная матрица P, что $P^{-1} M P = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где в последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ указаны все собственные значения матрицы M с учетом их кратностей. Из доказательства того же следствия вытекает, что P является матрицей перехода между ортонормированными базисами. Поэтому P — ортогональная матрица (см. теорему 5.9) и $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ (см. свойство 5.2). Следовательно, $P^{\mathrm{T}} M P = P^{-1} M P = \Lambda$, т.е. в качестве матрицы U в формулировке теоремы можно взять P. ►

Преобразование (5.12) с ортогональной матрицей U иногда называют ***ортогональным преобразованием матрицы*** A. Поэтому теорему 5.10 можно сформулировать так: любая симметрическая матрица ортогональным преобразованием приводится к диагональному виду. Чтобы найти соответствующую матрицу U, о которой говорится в этой теореме, необходимо:

1) найти собственные значения матрицы M;

2) для каждого собственного значения найти набор *собственных векторов*, соответствующих этому собственному значению, при этом эти собственные *векторы* должны быть *линейно независимыми* и их количество должно равняться кратности собственного значения;

3) преобразовать *системы* собственных *векторов*, полученные для каждого собственного значения, в *ортонормированные* при помощи *процесса ортогонализации Грама — Шмидта*.

МГТУ ФН-12

Объединить ортонормированные системы для каждого собственного значения в единую систему векторов, которая будет ортонормированным базисом евклидова пространства;

4) выписать матрицу U, столбцами которой являются координаты векторов построенной ортонормированной системы.

Пример 5.8. Найдем ортогональное преобразование, приводящее симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

к диагональному виду.

1. Находим собственные значения матрицы A. Для этого составляем ее *характеристическое уравнение*

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+12\lambda^2-21\lambda+10=0.$$

Это уравнение третьей степени. Так как его коэффициенты являются целыми числами, то целое число может быть его корнем лишь в случае, если оно делитель свободного члена. Поэтому мы можем поискать корни среди чисел ±1, ±2, ±5, ±10. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что одним из корней является $\lambda_1 = 1$.

Найденный корень позволяет разложить левую часть характеристического уравнения на линейный и квадратичный множители, например, при помощи деления характеристического многочлена на $\lambda - 1$ «в столбик»:

$$\begin{array}{r|l}
\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 & \lambda - 1 \\
\underline{\lambda^3 - \lambda^2 \qquad\qquad\quad} & \lambda^2 - 11\lambda + 10 \\
-11\lambda^2 + 21\lambda \qquad & \\
\underline{-11\lambda^2 + 11\lambda \qquad} & \\
10\lambda - 10 & \\
\underline{10\lambda - 10} & \\
0 &
\end{array}$$

Получаем разложение

$$(\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+10)=0,$$

откуда находим оставшиеся два корня $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 10$. Таким образом, имеются два собственных значения: 1 кратности 2 и 10 кратности 1.

2–3. Найдем для собственного значения $\lambda_{1,2} = 1$ кратности 2 два линейно независимых собственных вектора. Для этого нужно найти *фундаментальную систему решений* однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A-E)x = 0$, т.е. системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен единице (все строки матрицы системы пропорциональны), поэтому можно отбросить второе и третье уравнения, оставив первое

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

В качестве независимых переменных выбираем x_2, x_3. Фундаментальную систему решений составляют $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_1 = 2$, т.е. векторы

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найденные собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2} = 1$, линейно независимы, но ортогональными не являются. Построим по ним другую, ортонормированную пару собственных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ при помощи процесса ортогонализации Грама — Шмидта:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{b}_2 - (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\|\boldsymbol{g}_2\| = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Для собственного значения $\lambda_3 = 10$ система линейных алгебраических уравнений имеет вид $(A - 10E)x = 0$, или

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

В качестве ее фундаментальной системы решений можно взять одно ненулевое решение, например вектор $\boldsymbol{b}_3 = (1 \;\; 2 \;\; -2)^{\mathrm{T}}$. Нормируя этот вектор, получаем

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найденные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов.

4. Составим из найденных векторов $\boldsymbol{e}_i$ матрицу

$$U = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 2 & \sqrt{5} \\ 3 & 4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

которая и является искомой.

Убедиться в том, что матрица U определена правильно, можно при помощи подстановки матрицы U и заданной матрицы A в следующее тождество:

$$U^{\mathrm{T}}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Замечание 5.2. В случае $n = 3$ при $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ собственные векторы удобнее с точки зрения экономии вычислений находить в следующем порядке. Сначала для собственного значения кратности 1 ($\lambda_3 = 10$ в рассмотренном примере) найти собственный вектор и нормировать его. Обозначим полученный вектор, например, $\boldsymbol{e}_3$. Затем для собственного значения кратности 2 ($\lambda_{1,2} = 1$ в рассмотренном примере) найти один собственный вектор и нормировать его. Получим вектор $\boldsymbol{e}_1$. Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$ будут ортогональными согласно теореме 5.4. Недостающий третий вектор ортонормированного базиса может быть найден при помощи векторного произведения: $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3$.

Описанный прием позволяет избежать процесса ортогонализации. Точно так же можно не применять процесс ортогонализации при $n = 2$, так как, зная один вектор $\boldsymbol{e}_1$ ортонормированного базиса, мы можем получить второй поворотом первого на $90°$. Для этого достаточно поменять две координаты вектора $\boldsymbol{e}_1$ местами, а у первой из них к тому же изменить знак.

МГТУ ФН-12

ОГЛАВЛЕНИЕ

МГТУ ФН-12