Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Электронное учебное издание

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 6

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Квадратичные формы. Координатная и матричная формы записи. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису. Ранг квадратичной формы, его независимость от выбора базиса. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра (без док-ва). Квадратичные формы канонического вида. Метод Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм (без док-ва).

6.1. Определение квадратичной формы

Определение 6.1. Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j, \qquad a_{ij}\in\mathbb{R}, \tag{6.1}$$

называют ***квадратичной формой***.

Для нас квадратичная форма представляет интерес как способ задания некоторой функции векторного аргумента, определенной в *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$. Если в этом пространстве выбрать какой-либо *базис*, то квадратичную форму (6.1) можно трактовать как функцию, значение которой определено через *координаты* x_1, x_2, ..., x_n *вектора* $\boldsymbol{x}$. Эту функцию часто отождествляют с квадратичной формой.

Квадратичную форму (6.1) можно записать в матричном виде:

$$x^{\mathrm{T}}Ax, \tag{6.2}$$

где $x = (x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n)^{\mathrm{T}}$ — столбец, составленный из переменных; $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n, называемая ***матрицей квадратичной формы*** (6.1).

Ранг матрицы A квадратичной формы называют ***рангом квадратичной формы***. Если матрица A имеет максимальный ранг, равный числу переменных n, то квадратичную форму называют ***невырожденной***, а если $\operatorname{Rg} A < n$, то ее называют ***вырожденной***.

Пример 6.1. Квадратичная форма от трех переменных $x_1^2 + 4x_1x_3$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{Rg} A = 2 < 3$, то эта квадратичная форма является вырожденной. В матричной записи квадратичная форма имеет вид

$$x_1^2 + 4x_1x_3 = (x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

6.2. Преобразование квадратичных форм

Пусть дана *квадратичная форма* $x^{\mathrm{T}}Ax$, где $x = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^{\mathrm{T}}$. В *$n$-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ с фиксированным *базисом* $\boldsymbol{b}$ она определяет функцию $f(\boldsymbol{x}) = x_b^{\mathrm{T}}Ax_b$, заданную через *координаты* x_b *вектора* $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b}$. Найдем представление этой же функции в некотором другом базисе $\boldsymbol{e}$. Пусть U — *матрица перехода* от $\boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{e}$. Тогда координаты x_b вектора $\boldsymbol{x}$ в старом базисе $\boldsymbol{b}$ и координаты x_e того же вектора в новом базисе $\boldsymbol{e}$ будут связаны соотношением

$$x_b = Ux_e. \tag{6.3}$$

Функция $f(\boldsymbol{x})$ в новом базисе будет выражаться через новые координаты вектора $\boldsymbol{x}$ следующим образом:

$$x_b^{\mathrm{T}}Ax_b = (Ux_e)^{\mathrm{T}}A(Ux_e) = x_e^{\mathrm{T}}(U^{\mathrm{T}}AU)x_e = x_e^{\mathrm{T}}A'x_e.$$

Итак, функция f в новом базисе также записывается при помощи квадратичной формы, причем матрица A' этой квадратичной формы связана с матрицей A исходной квадратичной формы соотношением

$$A' = U^{\mathrm{T}}AU. \tag{6.4}$$

Преобразование матрицы квадратичной формы вызывается заменой переменных (переходом от переменных x_b к переменным x_e) в соответствии с формулой (6.3).

Замечание 6.1. Замену переменных вида (6.3) с произвольной матрицей U называют ***линейной***. Изменение базиса в линейном пространстве приводит к линейной замене переменных с невырожденной матрицей.

Пример 6.2. Квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

преобразуем к новым переменным y_1, y_2, y_3, где

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Эта замена переменных в матричной записи имеет вид $x = Uy$, где

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно (6.4) имеем

$$A' = U^{\mathrm{T}}AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и квадратичная форма принимает вид

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2,$$

т.е. все коэффициенты при попарных произведениях переменных обнуляются и остаются слагаемые с квадратами переменных.

6.3. Квадратичные формы канонического вида

Определение 6.2. *Квадратичную форму*

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1,\,n}, \tag{6.5}$$

не имеющую попарных произведений переменных, называют ***квадратичной формой канонического вида***. Переменные $x_1, \ldots, x_n$, в которых квадратичная форма имеет канонический вид, называют ***каноническими переменными***.

Один из методов преобразования (или, как говорят, приведения) квадратичной формы к каноническому виду путем замены переменных состоит в последовательном выделении полных квадратов. Такой метод называют ***методом Лагранжа***. Проиллюстрируем этот метод на простом примере.

Пример 6.3. Рассмотрим квадратичную форму $x_1^2 - 4x_1x_2$ от двух переменных. Для преобразования ее к каноническому виду выделим полный квадрат по x_1. Для этого соберем все слагаемые, содержащие x_1, и дополним до полного квадрата:

$$x_1^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2.$$

Введя новые переменные $z_1 = x_1 - 2x_2$, $z_2 = 2x_2$, получим квадратичную форму канонического вида: $z_1^2 - z_2^2$. #

Как применять метод Лагранжа в общем случае? Рассмотрим квадратичную форму от n переменных общего вида (6.1). Если $a_{11} \neq 0$, соберем все слагаемые формы, содержащие переменное x_1, и дополним их слагаемыми так, чтобы получился полный квадрат. В результате получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j = \\ &= a_{11}\left(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n\right)^2 - a_{11}\sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j}^2x_j^2 - 2a_{11}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_{1i}\alpha_{1j}x_ix_j + \\ &\qquad + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j = a'_1\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}x_j\Bigr)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

где $a'_1 = a_{11}$, $\alpha_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j = \overline{1,\,n}$, а f_1 — квадратичная форма, не содержащая переменного x_1.

С квадратичной формой f_1 можно поступить аналогичным образом, выделяя полный квадрат по переменной x_2. Продолжая процесс, мы преобразуем квадратичную форму $f(x)$ к виду

$$f(x) = a'_1\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}x_j\Bigr)^2 + a'_2\Bigl(\sum_{j=2}^{n}\alpha_{2j}x_j\Bigr)^2 + \ldots + a'_r\Bigl(\sum_{j=r}^{n}\alpha_{rj}x_j\Bigr)^2,$$

где коэффициенты a'_j являются ненулевыми, а $\alpha_{jj} = 1$, $j = \overline{1,\,r}$.

Выполним *линейную замену переменных*

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x'_2 &= \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_r &= \alpha_{rr}x_r + \ldots + \alpha_{rn}x_n, \\ x'_{r+1} &= x_{r+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n &= x_n, \end{aligned}$$

определяемую верхней треугольной матрицей U. Отметим, что диагональные элементы матрицы U равны единице, поэтому эта матрица невырождена. В результате замены переменных мы придем к квадратичной форме

$$f(x') = a_1'(x_1')^2 + \ldots + a_r'(x_r')^2,$$

имеющей канонический вид.

Изложенная схема не применима, если на каком-либо ее этапе в квадратичной форме нет соответствующего переменного во второй степени. Например, может случиться, что $a_{11} = 0$. Тогда мы вместо переменного x_1 можем остановить свой выбор на другом, квадрат которого присутствует в квадратичной форме. Но может быть так, что в квадратичной форме нет ни одного квадрата (например, $f(x_1, x_2) = x_1x_2$). Тогда перед выделением квадрата следует выполнить промежуточную замену переменных. Для этого выбираем любое слагаемое квадратичной формы. Пусть для определенности $a_{12} \neq 0$, так что присутствует слагаемое $2a_{12}x_1x_2$. После замены переменных $x_1 = x_1' + x_2'$, $x_2 = x_1' - x_2'$, $x_3 = x_3'$, ..., $x_n = x_n'$ получим квадратичную форму, у которой присутствует квадрат переменного x_1', так как $x_1x_2 = (x_1'+x_2')(x_1'-x_2') = (x_1')^2 - (x_2')^2$.

Отметим, что канонический вид, к которому приводится данная квадратичная форма, определяется неоднозначно. Так, в примере 6.3 после дополнительной замены переменных $w_1 = z_1/2$, $w_2 = z_2/2$ получим еще одну квадратичную форму канонического вида $4w_1^2 - 4w_2^2$.

6.4. Ортогональные преобразования квадратичных форм

Как мы установили (см. **6.2**), *матрица A квадратичной формы* при переходе к новому *базису* изменяется по формуле $A' = U^{\mathrm{T}}AU$, где U — *матрица перехода*. Если рассматривается *евклидово пространство*, а старый и новый *базисы* выбраны *ортонормированными*, то матрица перехода U является *ортогональной* и мы имеем дело с ***ортогональным преобразованием квадратичной формы***, т.е. преобразованием $A' = U^{\mathrm{T}}AU$, в котором матрица U ортогональна.

Теорема 6.1. При ортогональном преобразовании квадратичной формы *характеристическое уравнение* ее *матрицы* не изменяется.

◄ Пусть A — матрица заданной квадратичной формы. При ортогональном преобразовании эта матрица изменяется по формуле $A' = U^{\mathrm{T}}AU$, где U — ортогональная матрица. Согласно свойству 5.2, ортогональная матрица U имеет обратную, причем $U^{-1} = U^{\mathrm{T}}$. Поэтому $A' = U^{\mathrm{T}}AU = U^{-1}AU$, и мы видим, что матрицы A' и A подобны. Согласно теореме 4.2, характеристические уравнения подобных матриц совпадают. ►

Теорема 6.2. Любую *квадратичную форму ортогональным преобразованием* можно привести к *каноническому виду*.

◄ Матрица A данной квадратичной формы является симметрической. Но любая симметрическая матрица, согласно следствию 5.4, подобна диагональной, т.е. существует такая невырожденная матрица P, что матрица $A' = P^{-1}AP$ является диагональной. Нам надо лишь убедиться, что в качестве P можно выбрать ортогональную матрицу. Тогда $A' = P^{\mathrm{T}}AP$ и диагональная матрица A' является матрицей квадратичной формы, полученной из исходной при помощи ортогонального преобразования. Диагональный вид A' равнозначен каноническому виду квадратичной формы. Чтобы выяснить характер матрицы P, нужно вспомнить теорему 5.5, из которой и было выведено упомянутое следствие 5.4.

Рассмотрим произвольное *n-мерное* евклидово *пространство* $\mathcal{E}$ (n — количество переменных в квадратичной форме) и некоторый ортонормированный базис $\boldsymbol{b}$ в этом пространстве. Матрица A является *матрицей* некоторого *самосопряженного оператора* $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{b}$. Согласно теореме 5.6, существует такой ортонормированный базис $\boldsymbol{e}$, что матрица A' оператора

$\boldsymbol{A}$ в этом базисе является диагональной. Согласно формуле преобразования матрицы линейного оператора, имеем $A' = P^{-1}AP$ (см. теорему 3.5), где P — матрица перехода из базиса $\boldsymbol{b}$ в базис $\boldsymbol{e}$. Так как оба базиса ортонормированные, матрица P является ортогональной. ►

Теорема доказана, но подход, который мы использовали в доказательстве, позволяет сделать и другие выводы, о которых в формулировке теоремы речь не идет. Во-первых, диагональными элементами матрицы A' квадратичной формы канонического вида, получающейся в результате ортогонального преобразования, являются *собственные значения матрицы* A квадратичной формы. Из этого следует, что мы можем записать матрицу A' канонического вида, не находя соответствующего ортогонального преобразования.

Во-вторых, находя ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, мы фактически ищем базис из *собственных векторов* соответствующего *самосопряженного оператора*. Действительно, если квадратичная форма и самосопряженный оператор имели в исходном ортонормированном базисе одинаковую матрицу, то и в новом ортонормированном базисе их матрицы будут совпадать.

Мы предполагаем, что квадратичная форма представляет собой запись функции, заданной в евклидовом пространстве, через *координаты вектора* в некотором ортонормированном базисе. На самом деле такая интерпретация носит чисто вспомогательный характер, помогающий смотреть на процесс с геометрической точки зрения, но она никак не используется в самом алгоритме построения ортогонального преобразования. Достаточно лишь записать матрицу квадратичной формы и применить к этой матрице процедуру приведения к диагональному виду (см. **5.5**).

Проиллюстрируем на примерах процедуру практического вычисления ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Пример 6.4. Квадратичную форму $f(x, y) = x_1^2 - 4x_1x_2$ от двух переменных мы приводили к каноническому виду методом Лагранжа (см. пример 6.3). Теперь попробуем привести ее к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Матрица нашей квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем *характеристическое уравнение* этой *матрицы*:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 4 = 0.$$

Вычисляем корни характеристического уравнения, они же собственные значения матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Теперь можем записать канонический вид нашей квадратичной формы:

$$\frac{1+\sqrt{17}}{2}y_1^2 + \frac{1-\sqrt{17}}{2}y_2^2.$$

Пример 6.5. Найдем канонический вид квадратичной формы

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2,$$

к которому она приводится ортогональным преобразованием, и укажем одно из таких ортогональных преобразований.

Квадратичная форма имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

с характеристическим уравнением матрицы

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 0.$$

Собственными значениями матрицы квадратичной формы являются $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$, т.е. квадратичная форма приводится ортогональным преобразованием к каноническому виду

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + 9y_2^2.$$

Для построения ортогонального преобразования найдем *собственные векторы матрицы* рассматриваемой квадратичной формы. Из однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda = 1$ находим собственный вектор $\boldsymbol{e}_1 = (1\ \ -1)^{\mathrm{T}}$. Тогда вектор $\boldsymbol{e}_2 = (1\ \ 1)^{\mathrm{T}}$, ортогональный вектору $\boldsymbol{e}_1$, будет собственным вектором с соответствующим собственным значением $\lambda_2 = 9$ (см. **5.2**). Пронормировав эти векторы, составляем из столбцов их координат *матрицу ортогонального преобразования*

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

которой соответствует *линейная замена переменных* $x = Py$.

6.5. Закон инерции

Квадратичная форма может быть приведена к различным *каноническим видам*. Например, для квадратичной формы $x_1^2 - 4x_1x_2$ найдены уже три канонических вида. Но, несмотря на многообразие канонических видов для данной квадратичной формы, имеются такие характеристики их коэффициентов, которые во всех этих канонических видах остаются неизменными. Например, если квадратичная форма преобразовалась к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2,$$

в котором все коэффициенты λ_i положительны, то соответствующая этой квадратичной форме функция в линейном пространстве принимает только неотрицательные значения. Значит никакой другой канонический вид не может иметь отрицательных коэффициентов, так как наличие отрицательных коэффициентов означает, что функция имеет и отрицательные значения. Другой важной характеристикой является ранг *матрицы квадратичной формы*.

Теорема 6.3. *Ранг квадратичной формы* не меняется при невырожденных *линейных заменах переменных* и равен:

а) числу отличных от нуля коэффициентов в любом ее каноническом виде;

б) количеству ненулевых *собственных значений матрицы* квадратичной формы (с учетом их *кратности*).

В различных канонических видах данной квадратичной формы остается неизменным не только количество ненулевых коэффициентов, но и количество положительных и соответственно отрицательных коэффициентов. Объединяя это с доказанной теоремой, получаем следующее утверждение, называемое ***законом инерции***.

Теорема 6.4. Для любых двух канонических видов

$$f_1(y_1,\ldots,y_m)=\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_my_m^2,\quad \lambda_i\neq 0,\ i=\overline{1,\,m}, \tag{6.6}$$

$$f_2(z_1,\ldots,z_k)=\mu_1z_1^2+\ldots+\mu_kz_k^2,\quad \mu_j\neq 0,\ j=\overline{1,\,k}, \tag{6.7}$$

одной и той же квадратичной формы:

– $m=k$ и их общее значение равно рангу квадратичной формы;

– количество положительных коэффициентов λ_i совпадает с количеством положительных коэффициентов μ_j;

– количество отрицательных коэффициентов λ_i совпадает с количеством отрицательных коэффициентов μ_j.

6.6. Критерий Сильвестра

Квадратичные формы подразделяют на различные типы в зависимости от множества их значений.

Определение 6.3. Квадратичную форму $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$, $x=(x_1\ x_2\ \ \ldots\ \ x_n)^{\mathrm{T}}$, будем называть:

– ***положительно*** (***отрицательно***) ***определенной***, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x)>0$ ($f(x)<0$);

– ***неотрицательно*** (***неположительно***) ***определенной***, если $f(x)\geqslant 0$ ($f(x)\leqslant 0$) для любого столбца x, причем существует ненулевой столбец x, для которого $f(x)=0$;

– ***знакопеременной*** (***неопределенной***), если существуют такие столбцы x и y, что $f(x)>0$ и $f(y)<0$.

Пример 6.6. Рассмотрим четыре квадратичные формы от трех переменных:

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2,\qquad f_3(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2,$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2,\qquad f_4(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2.$$

Квадратичная форма f_1 положительно определена, так как представляет собой сумму трех квадратов и потому принимает только положительные значения, если переменные одновременно не обращаются в нуль. Квадратичная форма f_2 неотрицательно определена: будучи суммой двух квадратов она не принимает отрицательных значений, но при $x_1=x_2=0$ и $x_3\neq 0$ она принимает нулевые значения. Квадратичные формы f_3 и f_4 знакопеременны. Первая из них положительна при $x=(1\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$ и отрицательна при $x=(0\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$. Вторая положительна при $x=(1\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$ и отрицательна при $x=(1\ \ -1\ 0)^{\mathrm{T}}$. Квадратичные формы f_2 и f_4 являются вырожденными, так как ранг каждой из них равен двум. #

Как следует из определения 6.3, тип квадратичной формы зависит только от множества значений, которые она принимает, но не зависит от переменных, в которых она записана. Поэтому, представив *квадратичную форму* в *каноническом виде*, сразу получаем следующие критерии для типа квадратичной формы в зависимости от множества *собственных значений* ее *матрицы*.

Тип квадратичной формы	Множество собственных значений
Положительно определенная ($\forall x\neq 0: f(x)>0$)	Все собственные значения положительны ($\lambda_i>0$, $i=\overline{1,\,n}$)
Отрицательно определенная ($\forall x\neq 0: f(x)<0$)	Все собственные значения отрицательны ($\lambda_i<0$, $i=\overline{1,\,n}$)
Знакопеременная ($\exists x$: $f(x)>0$, $\exists y$: $f(y)<0$)	Есть собственные значения разных знаков ($\exists\lambda_i>0$, $\exists\lambda_j<0$)
Вырожденная (матрица формы вырожденная),	Есть нулевое собственное значение ($\exists\lambda_i=0$).

Хотя эта таблица дает удобную характеристику типам квадратичных форм, ее использование для определения типа конкретной квадратичной формы связано с вычислением собственных значений матрицы. А это достаточно трудоемкая операция. На самом деле во многих случаях тип квадратичной формы можно определить, не вычисляя собственных значений ее матрицы. Метод состоит в вычислении и проверке знаков некоторых *миноров* матрицы квадратичной формы. Введем следующие обозначения.

Пусть матрица квадратичной формы $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$. Рассмотрим ***угловые миноры*** этой матрицы (которые также называют ***главными минорами***):

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Как видим, угловой минор порядка k расположен на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы. Угловой минор максимального, n-го порядка представляет собой определитель матрицы.

Теорема 6.5 (*критерий Сильвестра*). Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\dots$, $\Delta_n > 0$.

Следствие 6.1. Для того чтобы квадратичная форма n переменных была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $-\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $-\Delta_3 > > 0$, $\dots$, $(-1)^n\Delta_n > 0$ (знаки угловых миноров чередуются начиная с минуса).

◄ Если квадратичная форма $f(x)$ отрицательно определена, то квадратичная форма $-f(x)$ положительно определена, и наоборот. Матрицей квадратичной формы $-f(x)$ является матрица $-A$, противоположная матрице A квадратичной формы $f(x)$. Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной формы $-f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры Δ'_r, $r = \overline{1, n}$, матрицы $-A$ были положительны. Но при умножении матрицы A на число -1 все ее элементы умножаются на это число и поэтому $\Delta'_r = (-1)^r\Delta_r$, где Δ_r — угловой минор порядка r матрицы A. Таким образом, квадратичная форма $-f(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $(-1)^r\Delta_r > 0$, $r = \overline{1, n}$, и это условие эквивалентно тому, что квадратичная форма $f(x)$ отрицательно определена. ►

Следствие 6.2. Невырожденная квадратичная форма знакопеременна тогда и только тогда, когда для матрицы квадратичной формы выполнено хотя бы одно из условий:

– один из угловых миноров равен нулю;
– один из угловых миноров четного порядка отрицателен;
– два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки.

◄ Необходимость. Если нарушаются все три условия доказываемого следствия, то у матрицы квадратичной формы все четные угловые миноры положительны, а все нечетные ненулевые и имеют одинаковые знаки. В таком случае выполняются либо условия теоремы 6.5, либо условия следствия 6.1, т.е. квадратичная форма знакоопределенная. Значит, для знакопеременной квадратичной формы выполняется хотя бы одно из условий доказываемого утверждения.

Достаточность. Невырожденная квадратичная форма может быть либо положительно определенной, либо отрицательно определенной, либо знакопеременной — в зависимости от знаков коэффициентов в ее каноническом виде. Если имеется нулевой угловой минор или один из угловых миноров четного порядка отрицателен, то, согласно теореме 6.5 и следствию 6.1, эта квадратичная форма не является ни положительно, ни отрицательно определенной. То же можно утверждать и в случае, когда есть два угловых минора нечетного порядка с разными знаками. Значит, в этих случаях квадратичная форма знакопеременная. ►

Критерий Сильвестра и его следствия показывают, что тип квадратичной формы полностью определяется свойствами ее матрицы. Поэтому термины, введенные определением 6.3, можно перенести на симметрические матрицы. В частности, симметрическую матрицу A называют ***положительно*** (***отрицательно***) ***определенной*** и пишут $A > 0$ ($A < 0$), если положительно (отрицательно) определена соответствующая квадратичная форма. Согласно теореме 6.5 и ее следствиям, симметрическая матрица положительно определена, если все ее угловые миноры положительны. Симметрическая матрица отрицательно определена, если у ее угловых миноров знаки чередуются начиная со знака минус.

Следствие 6.3. Если симметрическая матрица положительно определена, то все ее диагональные элементы положительны.

◄ Если $A = (a_{ij})$ — симметрическая положительно определенная матрица порядка n, то ее первый угловой минор положителен, т.е. $a_{11} = \Delta_1 > 0$. Воспользовавшись тем, что утверждение следствия верно для диагонального элемента a_{11}, докажем что и $a_{ii} > 0$ при $i > 1$. В квадратичной форме $x^{\mathrm{T}}Ax$, $x = (x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n)^{\mathrm{T}}$ сделаем замену переменных

$$x_1 = y_i, \quad x_i = y_1, \quad x_j = y_j \text{ при } j \neq 1, i.$$

В новых переменных матрица $A' = (a'_{ij})$ квадратичной формы такова, что $a_{ii} = a'_{11} > 0$. ►

Рассмотрим примеры на применение критерия Сильвестра.

Пример 6.7. Квадратичная форма $x^{\mathrm{T}}Ax$ от трех переменных с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

положительно определена, так как $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1 > 0$.

Пример 6.8. Квадратичная форма $x^{\mathrm{T}}Ax$ от трех переменных с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

является знакопеременной, так как она невырождена ($\Delta_3 \neq 0$) и $\Delta_1 = 1 > 0$, а $\Delta_2 = -8 < 0$.

Пример 6.9. Квадратичная форма $2x_1x_2$ от двух переменных является знакопеременной, так как она невырождена ($\Delta_2 = -1 \neq 0$), а $\Delta_1 = 0$.

Пример 6.10. Квадратичная форма $f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = 4x_1x_3 + 2x_2x_4 + x_4^2$ имеет угловые миноры $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 4$ и, согласно следствию 6.2, является знакопеременной. В этом можно убедиться, используя несложное преобразование вида квадратичной формы:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3)^2 - x_2^2 - (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ