Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Электронное учебное издание

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 7

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду.

7.1. Поверхности второго порядка

Рассмотрим *линейное арифметическое пространство* $\mathbb{R}^n$, являющееся *евклидовым пространством* со *стандартным скалярным произведением* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. *Векторы* из $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$ можно рассматривать как геометрические векторы в «точечном» трехмерном пространстве или соответственно двумерном пространстве (плоскости). Зафиксировав в трехмерном пространстве точку, мы можем считать ее стандартным началом каждого вектора, а тогда каждая точка пространства определяется как конец некоторого геометрического вектора.

Эту точку зрения можно обобщить на линейное арифметическое пространство произвольной *размерности*. Векторы в $\mathbb{R}^n$ будем трактовать как точки. Некоторую фиксированную точку O (другими словами, вектор) и *ортонормированный базис* $\boldsymbol{e}$ в $\mathbb{R}^n$ назовем ***прямоугольной системой координат в*** $\mathbb{R}^n$, точку O — ***началом системы координат***. ***Координатами*** произвольной ***точки*** M (это тоже вектор из $\mathbb{R}^n$) в этом пространстве назовем координаты вектора $M - O$ относительно базиса $\boldsymbol{e}$.

Приведенное обобщение позволяет с единых позиций анализировать геометрию плоскости и трехмерного пространства. Оно также позволяет дать геометрическую интерпретацию некоторым объектам арифметического пространства. Например, множество всех решений однородной системы линейных алгебраических уравнений с геометрической точки зрения представляет собой *линейное подпространство* арифметического пространства соответствующей размерности. А чем с геометрической точки зрения является множество решений неоднородной системы? Как представить множество решений алгебраического уравнения второй степени, если переменных в этом уравнении четыре или больше?

Определение 7.1. ***Поверхностью второго порядка в*** $\mathbb{R}^n$ называют множество точек $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, координаты $x = (x_1 \; \ldots \; x_n)^{\mathrm{T}}$ которых в данной прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = 0, \qquad (7.1)$$

где a_{ij}, b_k, c — действительные коэффициенты, причем хотя бы один из коэффициентов a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, отличен от нуля.

Замечание 7.1. Поверхность второго порядка в $\mathbb{R}^n$ при $n = 3$ представляет собой обычную поверхность в пространстве, а при $n = 2$ — кривую на плоскости.

Уравнение (7.1) удобно записывать в матричной форме, полагая $a_{ij} = a_{ji}$ при $i > j$ и сводя все коэффициенты a_{ij} в симметрическую матрицу $A = (a_{ij})$ порядка n, а слагаемые b_k — в столбец $b = (b_1 \ \ \ldots \ \ b_n)^{\mathrm{T}}$:

$$x^{\mathrm{T}}Ax + 2b^{\mathrm{T}}x + c = 0. \tag{7.2}$$

В левой части уравнения (7.2) слагаемые естественным образом распались на три группы. Первая группа представляет собой *квадратичную форму* $x^{\mathrm{T}}Ax$ от координат точки. Ее называют ***квадратичной формой поверхности*** (7.1) (***кривой*** при $n = 2$) ***второго порядка***. Вторая группа представляет собой линейные слагаемые. Ее можно трактовать как координатную запись удвоенного скалярного произведения вектора $\boldsymbol{b}$ со столбцом координат b на вектор $\boldsymbol{x}$ со столбцом координат x. Третья группа в левой части (7.2) представлена одним слагаемым c.

7.2. Изменение системы координат

Пусть даны старая *прямоугольная система координат*, состоящая из *ортонормированного базиса* $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{b}_n)$ и ее *начала* в точке $\boldsymbol{b}_0$, и новая система координат, состоящая из ортонормированного базиса $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1 \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{c}_n)$ и начала $\boldsymbol{c}_0$. Рассмотрим произвольную *точку* $\boldsymbol{x}$ с *координатами* x_b и x_c соответственно в старой и новой системах координат.

Из определения координат точки в $\mathbb{R}^n$ имеем соотношения

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}x_b, \qquad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{c}x_c.$$

Приравнивая выражения для $\boldsymbol{x}$, получаем

$$\boldsymbol{b}x_b + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{c}x_c + \boldsymbol{c}_0. \tag{7.3}$$

Пусть U — *матрица перехода* из ортонормированного базиса $\boldsymbol{b}$ старой системы координат в ортонормированный базис $\boldsymbol{c}$ новой системы координат. Тогда U — *ортогональная матрица* (см. теорему 5.9) и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U$. Подставляя это представление для $\boldsymbol{c}$ в равенство (7.3), находим $\boldsymbol{b}x_b + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}Ux_c + \boldsymbol{c}_0$, или

$$\boldsymbol{b}(x_b - Ux_c) = \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{b}_0. \tag{7.4}$$

Координаты вектора $\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{b}_0$ относительно базиса $\boldsymbol{b}$ представляют собой координаты точки $\boldsymbol{c}_0$ (начала новой системы координат) относительно старой системы координат, которые мы обозначим через $c_{0,b}$: $\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}c_{0,b}$. С учетом этого равенства преобразуем правую часть (7.4): $\boldsymbol{b}(x_b - Ux_c) = \boldsymbol{b}c_{0,b}$. Отсюда следует, что

$$x_b = Ux_c + c_{0,b}. \tag{7.5}$$

Соотношение (7.5) представляет собой формулу преобразования координат при изменении системы координат.

Если $c_{0,b} = 0$, т.е. начала старой и новой систем координат совпадают, то преобразование координат принимает вид

$$x_b = Ux_c. \tag{7.6}$$

В двумерном случае при дополнительном условии $\det U = 1$ преобразование (7.6) представляет собой поворот системы координат вокруг неподвижного начала системы координат. В трехмерном случае при том же условии $\det U = 1$ это преобразование является поворотом системы координат вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат. Ось поворота определяется *собственным вектором* матрицы U с *собственным значением* 1. Если $\det U = -1$, то преобразование системы координат кроме поворота включает преобразование симметрии относительно некоторой плоскости или сводится к одной симметрии.

Пример 7.1. Преобразование системы координат с матрицей

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

состоит в повороте на угол φ вокруг третьего вектора исходного базиса и последующей симметрии относительно плоскости, которой параллельны первые два вектора (при повороте эта плоскость перейдет в себя). #

По аналогии с двумерным и трехмерным случаями условно назовем замену (7.6) при произвольном n ***поворотом системы координат*** в случае $\det U = 1$ и ***поворотом системы координат с отражением*** (***симметрией***) в случае $\det U = -1$. Введенные термины условны потому, что в n-мерном пространстве при $n > 3$ теряется наглядный смысл понятия «поворот».

Если в преобразовании (7.5) матрица U является единичной, т.е. $U = E$, то старая и новая системы координат имеют один и тот же ортонормированный базис. В этом случае преобразование координат имеет вид

$$x_b = x_c + c_{0,b}. \tag{7.7}$$

При $n = 2, 3$ такое преобразование означает параллельный перенос системы координат, при котором направления осей координат не изменяются. В общем случае (при $n > 3$) преобразование (7.7) мы также будем называть ***параллельным переносом системы координат***.

Любое преобразование координат вида (7.5) можно представить как последовательное применение двух преобразований $x' = Ux_c$ и $x_b = x' + c_{0,b}$, которые означают параллельный перенос исходной системы координат в точку $\boldsymbol{c}$ и последующий ее поворот (возможно, с отражением), определяемый матрицей U.

7.3. Упрощение уравнения поверхности второго порядка

Один из подходов к анализу *поверхности второго порядка* в $\mathbb{R}^n$, заданной уравнением (7.2), состоит в подборе такой *прямоугольной системы координат*, в которой уравнение принимает наиболее простой вид.

Изменение системы координат приводит к преобразованию исходных *координат x точки* к ее новым координатам y по формуле

$$x = Uy + y_0,$$

где y_0 — координаты *начала* новой *прямоугольной системы координат* относительно старой (см. (7.5)), а U — *ортогональная матрица*. При этом преобразовании уравнение (7.2) трансформируется к виду

$$(Uy + y_0)^{\mathrm{T}} A(Uy + y_0) + 2b^{\mathrm{T}}(Uy + y_0) + c = 0,$$

или

$$y^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} AUy + 2(b^{\mathrm{T}} U + y_0^{\mathrm{T}} AU)y + y_0^{\mathrm{T}} Ay_0 + 2b^{\mathrm{T}} y_0 + c = 0. \tag{7.8}$$

Уравнение (7.8) показывает, что *параллельный перенос системы координат* (в этом случае $U = E$) не изменяет *квадратичной формы поверхности второго порядка*. Квадратичная форма поверхности преобразуется по общему правилу (6.4) преобразования квадратичных форм при замене *базиса*.

Наиболее естественный способ упрощения уравнения (7.2) базируется на предварительном преобразовании квадратичной формы поверхности. Согласно теореме 6.2, существует новый *ортонормированный базис*, в котором *квадратичная форма* имеет *канонический вид*. Этот базис состоит из *собственных векторов матрицы A квадратичной формы*, записанных в исходном ортонормированном базисе. Матрица перехода от старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису является ортогональной. Изменяя, если необходимо, направление одного собственного вектора на противоположное, можно считать, что определитель этой ортогональной матрицы положителен и потому равен единице. Значит, существует такой *поворот* исходной системы координат, что квадратичная форма поверхности (7.2) в новых переменных будет иметь канонический вид.

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — новые координаты, в которых квадратичная форма поверхности (7.2) имеет канонический вид. Начало системы координат при этом не изменяется, и преобразованное уравнение (7.8) поверхности сводится к следующему:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + c = 0, \tag{7.9}$$

где $(d_1 \ \ldots \ d_n)^{\mathrm{T}} = d = U^{\mathrm{T}} b$, а λ_i, $i = \overline{1, n}$, представляют собой *собственные значения* матрицы A квадратичной формы поверхности, соответствующие векторам нового ортонормированного базиса. Дальнейшее определяется возможными значениями λ_i и d_i.

Для каждого значения индекса i, $i = \overline{1, n}$, возможен один из четырех случаев:

1) $\lambda_i \neq 0$, $d_i \neq 0$;
2) $\lambda_i \neq 0$, $d_i = 0$;
3) $\lambda_i = 0$, $d_i \neq 0$;
4) $\lambda_i = 0$, $d_i = 0$.

Если реализуется случай 4), то соответствующая переменная y_i вообще не входит в уравнение и мы имеем случай ***цилиндрической поверхности в*** $\mathbb{R}^n$ (при $n = 3$ такая поверхность действительно является цилиндрической). В остальных случаях дальнейшее упрощение уравнения (7.9) сводится к упрощению вида линейных слагаемых.

Если в уравнении (7.9) для i-й переменной y_i реализуется случай 1), то по этой переменной можно выделить полный квадрат:

$$\lambda_i y_i^2 + 2d_i y_i = \lambda_i\Big(y_i + \frac{d_i}{\lambda_i}\Big)^2 - \frac{d_i^2}{\lambda_i}.$$

После *параллельного переноса системы координат* $y_i' = y_i + \dfrac{d_i}{\lambda_i}$, $y_j' = y_j$, $j \neq i$, этот случай сводится к случаю 2).

Реализуем все такие параллельные переносы и, если необходимо, изменим порядок переменных (это равносильно перестановке векторов в базисе). Тогда уравнение поверхности (7.9) в новых переменных z примет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + 2\sum_{i=r+1}^{s} d_i z_i + h = 0, \tag{7.10}$$

где параметр r определяет количество переменных, для которых реализовался случай 2) (возможно, после выделения полного квадрата и соответствующего параллельного переноса). Для остальных переменных реализуется случай 3) (после перестановки индексы от $r+1$ до s) или случай 4) (индексы от $s+1$ до n).

Если $s = r$, то случай 3) не встречается и в уравнении (7.10) линейные слагаемые будут отсутствовать. При $s > r + 1$ случай 3) реализуется для нескольких переменных. Тогда необходим дополнительный поворот, который преобразует ситуацию к случаю $s = r + 1$. Этот поворот сводится к замене переменных $z_{r+1}, \ldots, z_s$ новыми переменными $z'_{r+1}, \ldots, z'_s$, при которой

$$z'_{r+1} = \sum_{i=r+1}^{s} d'_i z_i, \quad d'_i = \gamma d_i, \ i = \overline{r+1,\, s}, \gamma = \Bigl(\sum_{i=r+1}^{s} (d'_i)^2\Bigr)^{-1/2}, \tag{7.11}$$

а остальные переменные подбираются так, чтобы соответствующая замена переменных имела ортогональную матрицу U'. Эта матрица при указанной замене переменных имеет блочно-диагональную структуру:

$$U' = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

в которой блоки E представляют собой единичные матрицы порядков r и $n-s$, а блок V порядка $s-r$ отвечает переменным $z_{r+1}, \ldots, z_s$ и должен быть ортогональной матрицей. Элементами первого столбца в этой матрице являются числа $d'_{r+1}, \ldots, d'_s$*. Такую матрицу можно построить, взяв вектор $\bigl(d'_{r+1}, \ldots, d'_s\bigr)$ из $(s-r)$-*мерного линейного арифметического пространства* и дополнив его в указанном пространстве до ортонормированного базиса.

Итак, после выделения квадратов и выполнения параллельного переноса мы можем, если нужно, выполнить дополнительный поворот так, что в конечном счете уравнение поверхности (7.2) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + d''_{r+1} z_{r+1} + h = 0, \tag{7.12}$$

в котором $r > 0$ (должно быть хотя бы одно слагаемое второго порядка), а коэффициент d''_{r+1} может быть нулевым.

Если $d''_{r+1} \neq 0$ и $h \neq 0$, то еще одним параллельным переносом, который определяется заменой переменного z_{r+1} по формуле

$$z'_{r+1} = z_{r+1} + \frac{h}{d''_{r+1}},$$

можно «убрать» слагаемое h. Учитывая, что умножение уравнения на произвольное ненулевое число не меняет поверхности, мы заключаем, что исходное уравнение (7.2) путем замены системы координат приводится к одному из следующих видов:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{r} \mu_i z_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{r} \mu_i z_i^2 = z_{r+1}. \tag{7.13}$$

В представлениях (7.13) параметр r является *рангом квадратичной формы* поверхности второго порядка, который не зависит от выбора системы координат и при описанных преобразованиях не меняется. В первом и втором случае ранг может иметь любые значения от 1 до n, в последнем случае $r < n$, т.е. этот случай возможен для поверхности второго порядка с *вырожденной квадратичной формой.*

Уравнения (7.13), к одному из которых приводится уравнение произвольной поверхности второго порядка в $\mathbb{R}^n$, назовем ***уравнениями канонического вида***, а переменные, в которых они записаны, — ***каноническими***.

*Равенство (7.11) представляет собой первое из уравнений перехода от нового базиса к старому, которое реализуется обратной матрицей V^{-1}. Значит, первая строка матрицы V^{-1} состоит из коэффициентов в (7.11), но $V^{-1} = V^{\mathrm{T}}$, т.е. первая строка в V^{-1} является первым столбцом в V.

7.4. Примеры

Описанный выше процесс упрощения уравнения *поверхности второго порядка в* $\mathbb{R}^n$ реализуется и для кривых второго порядка на плоскости, и для поверхностей второго порядка в пространстве. Рассмотрим этот процесс на конкретных примерах.

Пример 7.2. Приведем к *каноническому виду уравнение* кривой второго порядка

$$14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2 - 4x_1 + 18x_2 - 139 = 0, \tag{7.14}$$

выпишем все использованные преобразования и построим эту кривую в исходной системе координат.

Квадратичная форма кривой имеет вид

$$14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2,$$

а *матрицей этой квадратичной формы* является

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *ортогональное преобразование*, приводящее квадратичную форму кривой к *каноническому виду*, выпишем *характеристическое уравнение матрицы* A

$$\lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0$$

и найдем его корни: $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 5$.

Ранг матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda = \lambda_{1,2}$ равен единице, и мы можем в системе оставить только одно уравнение — первое: $(14 - \lambda)x_1 + 12x_2 = 0$. Собственному значению $\lambda_1 = 30$ соответствует *единичный собственный вектор*

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

а $\lambda_2 = 5$ — единичный собственный вектор

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

который в двумерном случае проще найти из условия ортогональности вектору $\boldsymbol{e}_1$, т.е. путем перестановки координат вектора $\boldsymbol{e}_1$ и изменения знака у одной из координат.

Из найденных *координат* собственных *векторов* составляем *матрицу ортогонального преобразования*

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

которое является поворотом, так как $\det U = 1$. Этому ортогональному преобразованию соответствует *линейная замена переменных*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2, \\ x_2 = \frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2. \end{cases} \tag{7.15}$$

Чтобы получить уравнение кривой с *квадратичной формой канонического вида*, нужно подставить выражения (7.15) для переменных x_1 и x_2 в (7.14):

$$14x_1^2+24x_1x_2+21x_2^2-4x_1+18x_2-139=14\left(\frac{3}{5}y_1-\frac{4}{5}y_2\right)^2+$$
$$+24\left(\frac{3}{5}y_1-\frac{4}{5}y_2\right)\left(\frac{4}{5}y_1+\frac{3}{5}y_2\right)+21\left(\frac{4}{5}y_1+\frac{3}{5}y_2\right)^2-4\left(\frac{3}{5}y_1-\frac{4}{5}y_2\right)+18\left(\frac{4}{5}y_1+\frac{3}{5}y_2\right)-139=$$
$$=\left(14\cdot\frac{9}{25}+24\cdot\frac{12}{25}+21\cdot\frac{16}{25}\right)y_1^2+\left(-14\cdot\frac{24}{25}-24\cdot\frac{7}{25}+21\cdot\frac{24}{25}\right)y_1y_2+$$
$$\left(14\cdot\frac{16}{25}-24\cdot\frac{12}{25}+21\cdot\frac{9}{25}\right)y_2^2+\left(-4\cdot\frac{3}{5}+18\cdot\frac{4}{5}\right)y_1+\left(4\cdot\frac{4}{5}+18\cdot\frac{3}{5}\right)y_2-139=$$
$$=30y_1^2+5y_2^2+12y_1+14y_2-139. \quad (7.16)$$

Следует отметить, что мы сразу можем записать канонический вид квадратичной формы кривой по известным собственным числам: $30y_1^2+5y_2^2$. Линейные слагаемые $-4x_1+18x_2=2b^{\mathrm T}x$, представляющие собой удвоенное скалярное произведение вектора с координатами b на вектор с координатами x, в новых переменных будет иметь вид $2(Ub)^{\mathrm T}y=2b^{\mathrm T}Uy$, или

$$2b^{\mathrm T}Uy=(-4\ \ 18)\,U\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}(-4\ \ 18)\begin{pmatrix}3&-4\\ 4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=12y_1+14y_2.$$

Свободный член в процессе преобразования поворота не изменится. Таким образом, приходим к тому же уравнению (7.16).

По каждому из переменных выделяем полный квадрат:

$$30\left(y_1+\frac{1}{5}\right)^2+5\left(y_2+\frac{7}{5}\right)^2=150.$$

Теперь *параллельный перенос системы координат*, определяемый соотношениями

$$\begin{cases} z_1=y_1+\dfrac{1}{5},\\ z_2=y_2+\dfrac{7}{5}, \end{cases} \quad (7.17)$$

приводит к уравнению $30z_1^2+5z_2^2=150$, которое легко преобразуется к каноническому уравнению эллипса делением на 150:

$$\frac{z_1^2}{5}+\frac{z_2^2}{30}=1.$$

Чтобы построить эллипс, заданный в исходной системе координат уравнением (7.14), можно поступить следующим образом. Изобразим исходную систему координат $O\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$, а в ней векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, которые являются собственными для матрицы квадратичной формы поверхности. Эти векторы откладываем от начала O системы координат, они задают координатные оси новой системы координат $O\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2$. В этой системе координат строим точку $O_1(-1/5;-7/5)$, которая должна быть началом следующей канонической системы координат $O_1\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2$. Оси этой системы координат параллельны осям $O\mathrm{y}_1$ и $O\mathrm{y}_2$.

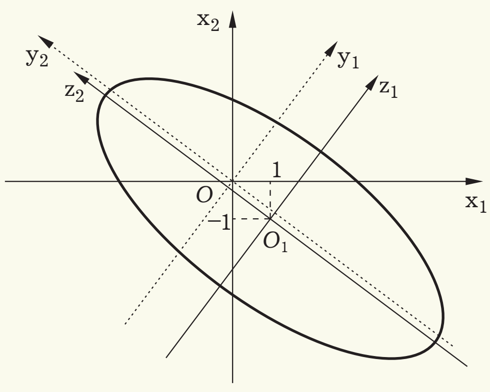

Рис. 7.1

Определив положение канонической системы координат $O_1\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2$ относительно исходной $O\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$, строим в ней эллипс, руководствуясь величинами его большой и малой полуосей. В результате получаем расположение эллипса относительно исходной системы координат. Расположение осей трех систем координат и эллипса в данной задаче показано на рис. 7.1.

Пример 7.3. Определим, какая кривая задается уравнением

$$32x_1^2 + 52x_1x_2 - 7x_2^2 + 180 = 0,$$

и изобразим ее в канонической системе координат.

Для решения поставленной задачи приведем к каноническому виду квадратичную форму $F = 32x_1^2 + 52x_1x_2 - 7x_2^2$ этой кривой. Матрица A квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, или

$$\begin{vmatrix} 32-\lambda & 26 \\ 26 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda - 900 = 0,$$

откуда находим собственные значения $\lambda_1 = 45$, $\lambda_2 = -20$. Теперь мы можем записать канонический вид квадратичной формы кривой:

$$F = 45y_1^2 - 20y_2^2.$$

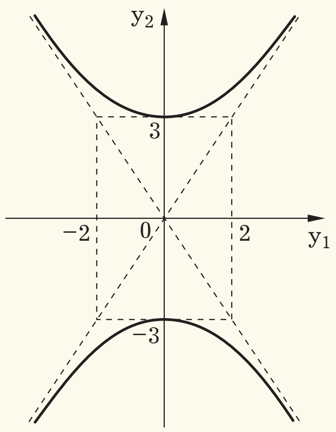

Рис. 7.2

Так как линейные слагаемые в исходном уравнении отсутствуют, то и после поворота, приводящего квадратичную форму кривой к каноническому виду, линейные слагаемые будут отсутствовать. Свободный член при поворотах также не изменяется. Поэтому в новой системе координат кривая будет описываться уравнением

$$45y_1^2 - 20y_2^2 + 180 = 0,$$

или

$$\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{9} = -1.$$

Мы получили уравнение гиперболы, ее положение в канонической системе координат изображено на рис. 7.2.

Пример 7.4. Приведем к каноническому виду уравнение поверхности

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 - 20 = 0,$$

определим ее тип и изобразим в канонической системе координат.

Как и в предыдущем примере, уравнение поверхности не содержит линейных слагаемых. Следовательно, чтобы привести уравнение к каноническому виду, достаточно привести к каноническому виду квадратичную форму поверхности. Само преобразование поворота по условию примера находить не требуется.

Квадратичная форма данной поверхности имеет вид

$$F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2.$$

Запишем ее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и составим характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((4-\lambda)^2 - 36\big) = 0.$$

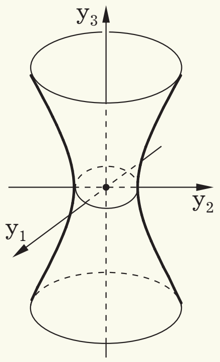

Рис. 7.3

Решая уравнение, находим его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = -2$. Зная их, записываем канонический вид квадратичной формы поверхности, а вместе с ним и каноническое уравнение самой поверхности:

$$y_1^2 + 10y_2^2 - 2y_3^2 - 20 = 0,$$

или

$$\frac{y_1^2}{20} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{10} = 1.$$

Видим, что полученное уравнение описывает однополостный гиперболоид (рис. 7.3).

7.5. Классификация кривых второго порядка

Кривая второго порядка на плоскости в системе координат Oxy описывается уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов при слагаемых второй степени отличен от нуля. Это уравнение может быть преобразовано к одному из канонических видов (7.13).

В нашем случае $n = 2$, так что при $r = 2$ возможны лишь два варианта:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1, \qquad \alpha X^2 + \beta Y^2 = 0, \tag{7.18}$$

где через X, Y обозначены *канонические переменные*, а параметры α, β одновременно не равны нулю. В зависимости от знаков коэффициентов α и β в уравнениях (7.18) с учетом возможного переименования канонических переменных приходим к следующим вариантам:

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ — эллипс,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$ — пустое множество (мнимый эллипс),

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ — гипербола,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ — точка (вырожденный эллипс),

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся прямых.

Если $r = 1$, то *квадратичная форма кривой второго порядка вырождена* и имеет одно слагаемое. В этом случае возможны три варианта:

$$\alpha X^2 = 0, \qquad \alpha X^2 = 1, \qquad \alpha X^2 = Y,$$

где $\alpha \neq 0$. В последнем варианте можно считать, что $\alpha > 0$, так как иначе достаточно поменять направления *векторов базиса* и тем самым изменить знак переменной Y в правой части. Кривые с рангом квадратичной формы $r = 1$ дают еще четыре канонических уравнения:

$X^2 = 0$ — двойная прямая,

$X^2 = a^2$, $a \neq 0$, — пара параллельных прямых,

$X^2 = -a^2$, $a \neq 0$, — пустое множество (пара мнимых прямых),

$X^2 = 2pY$, $p \neq 0$, — парабола.

7.6. Классификация поверхностей второго порядка в пространстве

Классификация *поверхностей второго порядка* в пространстве аналогична классификации кривых второго порядка на плоскости. Но количество *уравнений канонического вида* при этом возрастает.

Если *ранг квадратичной формы поверхности второго порядка* равен трем ($r = 3$), то возможны два варианта (см. (7.13)):

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1, \qquad \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 0,$$

где коэффициенты α, β, γ ненулевые. С учетом возможных комбинаций знаков коэффициентов и перестановки переменных получаем следующую таблицу канонических видов:

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = -1$ — пустое множество (мнимый эллипсоид),

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 0$ — конус,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 0$ — точка (вырожденный эллипсоид).

Если ранг квадратичной формы поверхности равен двум ($r = 2$), то из уравнений канонического вида (7.13) получаем два варианта:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma, \qquad \alpha X^2 + \beta Y^2 = Z,$$

где $\alpha, \beta \neq 0$. В первом варианте одно из переменных, Z, не входит в уравнение, и мы получаем *цилиндрическую поверхность* с *образующей*, параллельной оси OZ, и *направляющей* в плоскости XOY, которая является кривой второго порядка с квадратичной формой ранга 2. Направляющая определяет тип поверхности согласно классификации кривых второго порядка:

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$ — пустое множество (мнимый цилиндр),

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр,

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся плоскостей,

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ — прямая (вырожденный эллиптический цилиндр).

Во втором варианте мы получаем параболоиды. С учетом возможного изменения знаков приходим к двум каноническим уравнениям, различающимся знаками в квадратичной форме поверхности:

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = Z$ — эллиптический параболоид,

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = Z$ — гиперболический параболоид.

Если ранг квадратичной формы поверхности равен единице ($r = 1$), то уравнения канонического вида (7.13) приводят к двум случаям:

$$\alpha X^2 = \gamma, \qquad \alpha X^2 = Y,$$

в которых $\alpha \neq 0$. В этих двух случаях в уравнении также отсутствует переменное Z. Значит, это цилиндрические поверхности с образующей, параллельной оси OZ, и направляющей, которая расположена в плоскости XOY и представляет собой кривую второго порядка с квадратичной формой ранга 1. Всего получается четыре варианта канонических уравнений:

$X^2 = 0$ — двойная плоскость,

$X^2 = a^2$, $a \neq 0$, — пара параллельных плоскостей,

$X^2 = -a^2$, $a \neq 0$, — пустое множество (мнимая пара плоскостей),

$X^2 = 2pY$, $p \neq 0$, — параболический цилиндр.

ОГЛАВЛЕНИЕ