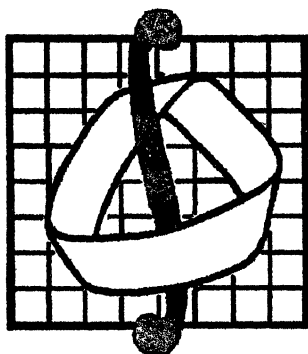


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**



**Механико-математический факультет**

**И.Л. Антонов**

# **КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

**Москва 2008 год**

УДК 531.39  
ББК 22.2  
А 55

**И.Л. Антонов**  
**Как решать задачи по теоретической механике**  
**М.:Изд-во Моск. ун-та, 2008. — 192с.**

В предлагаемом вниманию читателя пособии приводится подробный разбор решений ряда задач ( для многих рассматриваемых задач рассматривается несколько решений ) из разных разделов теоретической механики. Большое внимание уделяется вопросам использования теоретического материала, выработке общего подхода к построению решения и форме записи найденного решения. Пособие предназначено для студентов и аспирантов механико-математических факультетов университетов и преподавателей теоретической механики.

## Предисловие

При решении задач по теоретической механике студенты часто испытывают затруднения, связанные с рядом обстоятельств. Одно из этих обстоятельств заключается в том, что постановки задач теоретической механики менее формализованы, чем постановки задач, например, в математическом анализе, аналитической геометрии или линейной алгебре.

Другое обстоятельство связано, во-первых, с тем, что представление о многих основных понятиях механики, таких как *скорость*, *угловая скорость*, *сила* студенты получают в школьном курсе физики, где эти величины определяются на интуитивном, наглядном уровне, а, во-вторых, с тем, что эти понятия постоянно употребляются в быту, что как будто бы делает их очевидными. Поэтому, например, в ответ на вопрос: "Какая связь между сутками и угловой скоростью Земли?", в лучшем случае, можно услышать лишнюю смысловую фразу: "За сутки Земля поворачивается вокруг своей оси на угол  $2\pi$ " (правильный ответ см. в задаче 1.1).

Достаточно часто ошибки возникают из-за недостаточно ясного понимания того, что такое координата, вследствие чего, неправильно пишутся уравнения движения, и, конечно, невозможно решать задачи, не зная основных теорем и формул рассматриваемого раздела (поэтому в этой книге перед каждым разделом приведен соответствующий перечень).

Важную роль в процессе решения задачи играет использование четких обозначений и умение аккуратно записать результат рассуждений — иногда даже при наличии правильной идеи из-за поспешности и небрежности в выкладках получается совершенно неверный результат.

В предисловии к известной книге Д.Пойа "Как решать задачу" [1] говорится: "Пытаясь не только понять решение той или иной задачи, но и осознать, как, какими средствами было найдено это решение, делая попытки объяснить другим, в чем заключается сам процесс поисков решения, автор пришел в конце концов к мысли написать настоящую книгу. Он надеется, что она окажется полезной как для преподавателей, стремящихся развить способности своих учащихся к решению задач, так и для учеников, желающих развить свои собственные способности. Хотя эта книга имеет в виду главным образом потребности преподающих и изучающих математику, она представит интерес для любого лица, желающего понять

пути и средства, приводящие к новым идеям и открытиям".

Эти слова в значительной мере можно отнести и к предлагаемому пособию, ставящему перед собой более скромную цель: используя модифицированную с учетом специфики изучаемой дисциплины, основную идею, сформулированную в цитированной книге, привить читателю навыки, которые помогут ему решать задачи по теоретической механике и в ходе решения этих задач глубже понять материал, излагаемый в лекциях.

Упомянутая идея заключается в том, чтобы разбить решение задачи на несколько этапов, последовательно выполняя которые, можно прийти к ответу на поставленный вопрос.

. Следуя [1] назовем перечень предлагаемых этапов таблицей.

Таблица:

А. Нужно понять постановку задачи, ответить на вопросы :

Что дано?,

Что надо найти?.

Ввести подходящие обозначения и координаты и, если надо, нарисовать чертеж.

Б. Составление плана решения.

Выяснить сколько и каких неизвестных величин (скалярных или векторных) содержит задача. Ответ на этот вопрос позволяет определить число уравнений, необходимых для решения задачи. Среди общих формул и теорем, относящихся к данному разделу, найти те, которые связывают данные задачи с неизвестными величинами. Если прямой связи нет, попытаться, используя вспомогательные величины, найти цепочку соотношений, которая позволит такую связь установить.

Подумать, нельзя ли воспользоваться результатами ранее решенных задач.

В. Осуществление плана.

Проверить применимость выбранных формул и теорем в условиях решаемой задачи и выписать их *в общем виде*. Подставить в эти соотношения данные задачи и получить скалярные уравнения по числу скалярных неизвестных. Для этого уравнения, записанные в векторной форме, надо спроектировать на какие-либо направления (скалярно умножить на соответствующие единичные векторы). При выборе направлений проектирования руководствоваться простотой возникающих соотношений. Решить полученные уравнения.

Г. Взгляд назад.



**Проверка результата. Простейшая проверка — проверка по размерности или путем придания параметрам задачи значений, при которых ответ известен.**

**Зная решение, попытаться получить его другим способом — может быть более простым и красивым. Если это удалось, значит другие задачи такого рода будут решены быстрее .**

**Демонстрируя применение таблицы при решении конкретных задач, мы будем отмечать соответствующие этапы теми же буквами, какими они обозначены в таблице.**

## Введение

### Что такое движение и координаты?

Вопрос — *Что такое движение?* — может кому-то показаться тривиальным, однако, отвечая на него надо принимать во внимание ряд обстоятельств, без учета которых можно наделать много грубых ошибок. Так, следует иметь в виду, что понятие *движение* предполагает наличие как минимум двух объектов: того, который движется, например точки, и того, относительно которого рассматривается движение, например, какого-то тела, с которым можно жестко связать ортогональный трехгранник *Oxyz* (отметим, что это возможно лишь для тела, имеющего по крайней мере три точки, расстояния между которыми не меняются и которые не лежат на одной прямой). Этот трехгранник будем называть трехгранником пространства.

Любые характеристики движения точки, такие как *траектория*, *скорость* и т.п. становятся определенными только после того как явно указан трехгранник соответствующего пространства. Например, рассмотрим человека (пренебрегая размерами человека, будем считать его точкой), сидящего в кресле движущегося автобуса. Скорость человека относительно трехгранника, связанного с автобусом, равна нулю, а траектория вырождается в точку. Скорость того же человека относительно трехгранника, связанного с Землей, во все не равна нулю, а траектория может быть замысловатой кривой, зависящей от той дороги, по которой едет автобус. Наконец, если связать трехгранник с неподвижными звездами, скорость и траектория человека будут определяться движением автобуса относительно Земли и движением Земли относительно звезд.

При решении конкретной задачи следует четко представлять себе какие именно характеристики и относительно какого трехгранника надо определять.

Основными объектами, движение которых рассматривается в теоретической механике, являются материальная точка и абсолютно твердое тело.

Для описания положения и движения точки и твердого тела используются различные координаты.

#### 1. Координаты точки.

Координаты (от латинского *co* — совместный + *ordinatus* — упорядоченный, определенный) — набор чисел, определяющий положение точки относительно заданного трехгранника. Обычно, гово-

ря о координатах (без дополняющих определений), имеют в виду декартовы координаты точки. Однако, если точка движется по известной кривой или поверхности, задавать ее положение с помощью декартовых координат не всегда удобно.

Например, определяя положение автомобиля указывают шоссе, по которому он движется и номер ближайшего километрового столба, а, чтобы найти корабль в океане надо знать его долготу и широту.

Независимые параметры называются обобщенными координатами точки, если между значениями набора этих параметров и положениями точки в некоторой области пространства можно установить взаимно-однозначное соответствие.

В случае движения точки по кривой набор содержит один параметр (одну координату), при нахождении точки на поверхности — два, и, наконец, для свободной точки, т.е. при отсутствии связей, — три.

При введении обобщенной координаты (о.к.) необходимо соблюдать следующие правила:

а) Численное значение о.к. является результатом измерения некоторой величины. Эта величина должна быть четко определена.

Так, в примере с автомобилем, значение о.к. равно расстоянию, измеренному вдоль выбранного шоссе, от фиксированной точки до автомобиля. В Москве, например, нулевая отметка для всех дорог расположена около Исторического музея в проезде Воскресенских ворот. Координата, численное значение которой равно длине пути, пройденного точкой вдоль заданной кривой, от фиксированного положения, называется в общем случае длиной дуги или естественным параметром кривой.

В примере с кораблем долгота представляет собой угол между плоскостью Гринвичского меридиана и плоскостью меридиана, в которой в данный момент находится корабль, а широта (геоцентрическая) — угол между плоскостью экватора и радиусом, соединяющим центр Земли и корабль.

б) Задание номера дороги и длины пути однозначно определяет положение автомобиля. Однако, корабль, находящийся на Гринвичском меридиане, может направиться на восток или на запад. Соответственно, при определении долготы необходимо добавить характеристику — восточная или западная.

Аналогично обстоит дело и с широтой — она может быть север-

ной или южной. Поэтому, чтобы определение о.к. в таких ситуациях было однозначным, необходимо кроме начала отсчета (положения, в котором значение о.к. равно нулю) указать положительное направление отсчета, т.е. направление, при движении в котором численное значение о.к. будет расти. Это означает, что при переходе точки через нуль о.к. будет менять знак. Если при определении долготы и широты выбрать в качестве положительных направлений направления с запада на восток и с юга на север, то при задании координат точки вместо  $10^0$  восточной долготы,  $5^0$  южной широты можно написать: долгота - ( $10^0$ ), широта - ( $-5^0$ ).

Выбор положительного направления определяется удобством при решении конкретной задачи или традицией (например, выбор положительного направления третьей декартовой координаты в правой или левой системе).

Положительное направление, обычно, указывается на рисунках стрелкой.

На рис.1, в качестве примера, изображены цилиндрические и сферические координаты (более подробно об этих координатах см. ниже).

## 2. Координаты твердого тела.

Задать положение твердого тела можно, определив положение одной из его точек и угловое положение трехгранника, жестко связанного с телом, по отношению к неподвижному трехграннику. Задать угловое положение одного трехгранника относительно другого можно разными способами (например, с помощью углов Эйлера, см. рис. 2, другие способы задания положения твердого тела см. [10]), важно, лишь, соблюдать правила введения обобщенных координат, сформулированные выше.

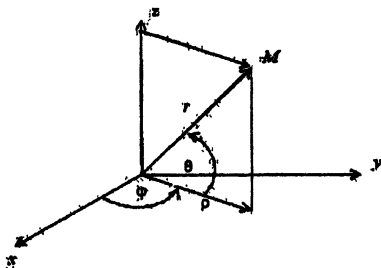


Рис.1.

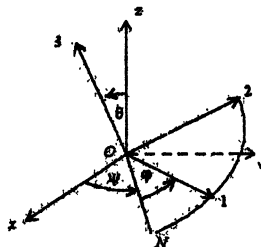


Рис. 2

### Основные обозначения.

- $\vec{a}$  – вектор  $\vec{a}$ ;  
 $(\vec{a}, \vec{b})$  – скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;  
 $[\vec{a}, \vec{b}]$  – векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;  
 $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$  – смешанное произведение векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ ;  
 $\vec{e}_q$  – единичный вектор, касательный к координатной линии  $q$ ;  
 $\vec{e}_{AB}$  – единичный вектор, параллельный отрезку  $AB$ ;  
 $[N, m]$  –  $N$  – номер источника задачи в списке литературы,  $m$  – номер задачи в источнике.

## Глава 1

# Кинематика

### 1. Перечень I: основные понятия и формулы кинематики

#### 1.1. Кинематика точки .

Точка  $M$  движется в трехмерном евклидовом пространстве. В этом пространстве фиксирован правый ортогональный трехгранник  $Oxyz$ , по отношению к которому положение точки может задаваться радиусом-вектором  $\vec{r}_M$ , или декартовыми координатами  $(x_M, y_M, z_M)$ :

$$\vec{r}_M = x_M \vec{e}_x + y_M \vec{e}_y + z_M \vec{e}_z \quad (I.1)$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  — орты соответствующих осей.

Кривая, которую описывает точка в пространстве, связанном с трехгранником  $Oxyz$  называется *траекторией*.

*Скорость* точки  $M$  относительно трехгранника  $Oxyz$  называется вектор

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \dot{\vec{r}}_M = \dot{x}_M \vec{e}_x + \dot{y}_M \vec{e}_y + \dot{z}_M \vec{e}_z. \quad (I.2)$$

*Ускорением* точки  $M$  относительно трехгранника  $Oxyz$  называется вектор

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \ddot{\vec{r}}_M = \ddot{x}_M \vec{e}_x + \ddot{y}_M \vec{e}_y + \ddot{z}_M \vec{e}_z. \quad (I.3)$$

Наряду с декартовыми координатами часто используются криволинейные координаты: цилиндрические —  $(\varrho_M, \varphi_M, z_M)$  (при движении точки в плоскости — полярные —  $(\varrho_M, \varphi_M)$ ) и сферические —  $(r_M, \varphi_M, \vartheta_M)$  (см. рис.1).

Тогда

$$\vec{r}_M = \varrho_M \vec{e}_\varrho + z_M \vec{e}_z, \quad (I.4)$$

$$\vec{r}_M = r_M \vec{e}_r, \quad (I.5)$$

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \dot{\varrho}_M \vec{e}_\varrho + \varrho_M \dot{\varphi}_M \vec{e}_\varphi + \dot{z}_M \vec{e}_z, \quad (I.6)$$

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \dot{r}_M \vec{e}_r + r_M \cos \vartheta_M \dot{\varphi}_M \vec{e}_\varphi + r_M \dot{\vartheta}_M \vec{e}_\vartheta, \quad (I.7)$$

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = (\ddot{\varrho}_M - \varrho_M \dot{\varphi}_M^2) \vec{e}_\varrho + \\ + (\varrho_M \ddot{\varphi}_M + 2\dot{\varrho}_M \dot{\varphi}_M) \vec{e}_\varphi + \ddot{z}_M \vec{e}_z, \quad (I.8)$$

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = (\ddot{r}_M - r_M \dot{\varphi}_M^2 \cos^2 \vartheta_M - r_M \dot{\vartheta}_M^2) \vec{e}_r + \\ + (2\dot{r}_M \dot{\varphi}_M \cos \vartheta_M + r_M \ddot{\varphi}_M \cos \vartheta_M - 2r_M \dot{\varphi}_M \dot{\vartheta}_M \sin \vartheta_M) \vec{e}_\varphi + \\ + (2\dot{r}_M \dot{\vartheta}_M + r_M \ddot{\vartheta}_M + r_M \dot{\varphi}_M^2 \cos \vartheta_M \sin \vartheta_M) \vec{e}_\vartheta, \quad (I.9)$$

$(\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z), (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\vartheta)$  — реперы, составленные из единичных векторов, касательных к соответствующим координатным линиям в точке  $M$ .

Пусть траектория точки  $M$  задана и  $s_M(t)$  — координата точки, равная по модулю длине дуги, отсчитываемой от фиксированной точки этой кривой до текущего положения точки  $M$ . В этом случае

$$\vec{V}_M = \dot{s}_M \vec{e}_s, \quad (I.10)$$

$$\vec{a}_M = \ddot{s}_M \vec{e}_s + \frac{1}{\varrho} \dot{s}_M^2 \vec{e}_\nu + 0 \cdot \vec{e}_\beta, \quad (I.11)$$

$(\vec{e}_s = \vec{e}_\tau$  — единичный вектор касательной к кривой,  $\vec{e}_\nu$  — единичный вектор *главной* нормали,  $\varrho$  — радиус кривизны кривой в данной точке), репер  $(\vec{e}_\tau, \vec{e}_\nu, \vec{e}_\beta = [\vec{e}_\tau, \vec{e}_\nu])$  называется репером Френе, сопровождающим или естественным репером.

**1.2. Кинематика абсолютно твердого тела** Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояния между которыми не изменяются с течением времени. Пусть рассматриваемое твердое тело обладает, по крайней мере, тремя точками не лежащими на одной прямой. В этом случае с телом можно жестко связать правый ортогональный трехгранник  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  так, что движение тела будет однозначно определять движение трехгранника. Если относительно трехгранника *Охуз* тело движется, орты связанного с ним трехгранника, вообще говоря, зависят от времени —  $\vec{e}_i = \vec{e}_i(t), i = 1, 2, 3$ . Вектор

$$\vec{\omega} = (\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_2) \vec{e}_3 + (\dot{\vec{e}}_2, \vec{e}_3) \vec{e}_1 + (\dot{\vec{e}}_3, \vec{e}_1) \vec{e}_2 \quad (I.12)$$

характеризует скорость изменения углов, задающих ориентацию трехгранника  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  относительно трехгранника *Охуз*:

$$\dot{\vec{e}}_i = [\omega, \vec{e}_i], \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{формулы Пуассона}) \quad (I.13)$$

и называется вектором *мгновенной угловой скорости* абсолютно твердого тела (если твердое тело состоит из одной точки или представляет собой отрезок прямой (прямую), угловая скорость для него *не определена*; исключение составляет отрезок (прямая), постоянно остающийся в неподвижной плоскости: в этом случае  $\vec{e}_1$  можно направить вдоль отрезка,  $\vec{e}_2$  — перпендикулярно к нему в указанной плоскости,  $\vec{e}_3$  — перпендикулярно к этой плоскости).

Если угловое положение связанного с телом трехгранника  $O123$  относительно неподвижного трехгранника  $Oxyz$  задается углами Эйлера ( $\vartheta, \psi, \varphi$ ) (см. рис. 2), вектор угловой скорости определяется формулой

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\vartheta}\vec{e}_{ON} + \dot{\varphi}\vec{e}_3, \quad (I.14)$$

$\vec{e}_z$  — единичный вектор оси  $Oz$ ,  $\vec{e}_{ON}$  — единичный вектор прямой  $ON$  — линии пересечения плоскостей  $Oxy$  и  $O12$ ,  $\vec{e}_3$  — единичный вектор оси  $O3$ .

Пусть  $A$  и  $M$  две точки тела. Их скорости относительно трехгранника  $Oxyz$  связаны соотношением

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + [\vec{\omega}, \overrightarrow{AM}]. \quad (I.15)$$

Эта формула задает распределение (поле) скоростей точек тела и называется *формулой Эйлера*. Распределение (поле) ускорений точек твердого тела, совершающего произвольное движение, определяется *формулой Ривальса*:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + [\vec{\epsilon}, \overrightarrow{AM}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{AM}]], \quad \vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (I.16)$$

Вектор  $\vec{\epsilon}$  называется *угловым ускорением* твердого тела.

Если в некоторый момент времени  $\omega = 0$ , скорости всех точек тела одинаковы и движение тела называется *мгновенно - поступательным*. При мгновенно - поступательном движении ускорения разных точек тела, вообще говоря, различны.

Если каждая точка тела движется на *постоянном расстоянии* от некоторой *неподвижной плоскости*, движение называется *плоско - параллельным*. В этом случае движение тела полностью определяется движением его плоского сечения, параллельного указанной плоскости, а векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\epsilon}$  перпендикулярны этой плоскости. Если  $\omega \neq 0$ , скорость одной из точек плоского сечения (или скорость одной из точек плоскости, жестко связанной с этим сечением) равна нулю. Эта точка называется *мгновенным центром скоростей* (мгновенным центром вращения). Геометрическое место



мгновенных центров скоростей на неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой*, а на плоскости, связанной с телом, — *подвижной центроидой*.

Если скорость некоторой точки тела *A* постоянно равна нулю (точка *A* неподвижна) движение тела называется *сферическим* (все точки тела движутся по концентрическим сферам с центром в точке *A*). Те точки *M*, скорость которых в данный момент равна нулю ( $\vec{V}_M = [\vec{\omega}, \overrightarrow{AM}] = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \vec{\omega}$ ) образуют прямую, называемую *мгновенной осью вращения*. Геометрическое место мгновенных осей вращения в неподвижном пространстве называется *неподвижным аксоидом*, геометрическое место тех же осей в пространстве, связанном с телом, называется *подвижным аксоидом*.

### 1.3. Теоремы сложения

**Теорема сложения скоростей для точки .**

Пусть *Oxyz* — неподвижный, а *O<sub>1</sub>ξηζ* — движущийся трехгранник, и точка *M* движется относительно каждого из них. Справедливо следующее утверждение, называемое *теоремой сложения скоростей для точки*:

$$\vec{V}_M^{\text{абс}} = \vec{V}_M^{\text{пер}} + \vec{V}_M^{\text{отн}}, \quad (\text{I.17})$$

$\vec{V}_M^{\text{абс}} = \dot{x}_M \vec{e}_x + \dot{y}_M \vec{e}_y + \dot{z}_M \vec{e}_z$  — абсолютная скорость точки *M*,

$\vec{V}_M^{\text{отн}} = \dot{\xi}_M \vec{e}_\xi + \dot{\eta}_M \vec{e}_\eta + \dot{\zeta}_M \vec{e}_\zeta$  — относительная скорость точки *M*,

$\vec{V}_M^{\text{пер}} = \vec{V}_{O_1} + [\vec{\omega}, \overrightarrow{O_1 M}]$  — переносная скорость точки *M*;  $\vec{\omega}$  — угловая скорость трехгранника *O<sub>1</sub>ξηζ* относительно трехгранника *Oxyz*.

**Теорема сложения ускорений для точки .**

При сохранении предположений предыдущего пункта имеет место *теорема сложения ускорений*:

$$\vec{a}_M^{\text{абс}} = \vec{a}_M^{\text{пер}} + \vec{a}_M^{\text{отн}} + \vec{a}_M^{\text{кор}}, \quad (\text{I.18})$$

$\vec{a}_M^{\text{абс}} = \ddot{x}_M \vec{e}_x + \ddot{y}_M \vec{e}_y + \ddot{z}_M \vec{e}_z$  — абсолютное ускорение точки *M*,

$\vec{a}_M^{\text{отн}} = \ddot{\xi}_M \vec{e}_\xi + \ddot{\eta}_M \vec{e}_\eta + \ddot{\zeta}_M \vec{e}_\zeta$  — относительное ускорение точки *M*,

$\vec{a}_M^{\text{пер}} = \vec{a}_{O_1} + [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{O_1 M}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{O_1 M}]]$  — переносное ускорение точки *M*,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$  — угловая скорость и угловое ускорение трехгранника *O<sub>1</sub>ξηζ* относительно трехгранника *Oxyz*,

$\vec{a}_M^{\text{кор}} = 2[\vec{\omega}, \vec{V}_M^{\text{отн}}]$  — ускорение Кориолиса,  $\vec{\omega}$  — угловая скорость трехгранника *O<sub>1</sub>ξηζ* относительно трехгранника *Oxyz*.

## Теорема сложения угловых скоростей .

Рассматриваются два трехгранника — неподвижный  $Oxyz$ , подвижный  $O_1\xi\eta\zeta$  и абсолютно твердое тело, совершающее движение относительно каждого из трехгранников. В этих условиях справедливо утверждение:

$$\vec{\omega}^{abc} = \vec{\omega}^{пер} + \vec{\omega}^{отн}, \quad (I.19)$$

$\vec{\omega}^{abc}$  — угловая скорость тела относительно трехгранника  $Oxyz$ ,

$\vec{\omega}^{пер}$  — угловая скорость трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$  относительно трехгранника  $Oxyz$ ,

$\vec{\omega}^{отн}$  — угловая скорость тела относительно трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$ .

## 2. Задачи

### Задача 1.1.

Какая связь между сутками и угловой скоростью Земли?

Решение.

А. Прежде чем отвечать на этот вопрос, надо определить, что такое сутки и о какой угловой скорости идет речь, потому что говорить об угловой скорости бессмысленно, пока не указан трехгранник, по отношению к которому рассматривается движение .

Центр Солнца ежедневно описывает на небе некоторую кривую, одна из точек которой  $M_i$  ( $i$ - порядковый номер дня, когда происходит наблюдение) находится на максимальной высоте над линией горизонта. Пусть  $T_i$  интервал времени между прохождениями центра Солнца через точки  $M_i$  и  $M_{i+1}$ . Этот интервал называется солнечными сутками. Тогда интервал

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{365} T_i}{365}$$

называется средними солнечными сутками, и он то и определяет те 24 часа, которые отсчитываются обычными часами.

Б. Теперь надо определить по отношению к какому трехграннику Земля поворачивается на угол  $2\pi$  за солнечные сутки.

В. Проведем прямую через центр Солнца и центр Земли. Эта прямая вместе с осью Земли (прямой, соединяющей Северный и Южный полюсы Земли) в каждый момент времени однозначно

определяет плоскость  $P$ . Построим трехгранник, вершина которого совпадает с центром Земли, первая ось направлена по оси Земли, вторая перпендикулярна первой и лежит в плоскости  $P$ , третья перпендикулярна этой плоскости. В момент прохода меридиана, на котором находится наблюдатель, через плоскость  $P$ , центр Солнца проходит через точку  $M_i$ . После поворота Земли относительно оси на угол  $2\pi$ , центр Солнца попадет в точку  $M_{i+1}$ .

Таким образом, можно сказать, что *величина средней угловой скорости* Земли за прошедшие сутки *относительно указанного трехгранника* равна  $\frac{2\pi}{T_1}$  (она, вообще говоря, меняется в течение года).

Г. Важно еще раз подчеркнуть, что любые характеристики движения становятся определенными только тогда, когда четко определено пространство (или трехгранник, жестко с ним связанный), по отношению к которому рассматривается движение. Так, можно повторить проделанные выше рассуждения, заменив Солнце одной из звезд (только не Полярной!). Получим интервал времени, называемый звездными сутками. Звездные сутки связаны с поворотом Земли на угол  $2\pi$  относительно ортогонального трехгранника, вершина которого совпадает с центром Земли, одна ось направлена по оси Земли, а две другие сохраняют свое направление по отношению к пространству, связанному с неподвижными звездами (т.е. этот трехгранник движется по отношению к указанному пространству поступательно). Звездные сутки короче солнечных примерно на 4 минуты.

**Задача 1.2.** [2, 360]

Точка описывает плоскую траекторию с постоянной по величине скоростью  $V$  так, что вектор ускорения точки все время направлен в данную неподвижную точку  $O$ .

Найти траекторию точки, если в начальный момент она находилась на расстоянии  $b$  от точки  $O$ .

**Решение.**

А+Б. Проанализируем вопрос поставленный в задаче. Траектория это линия, которую описывает точка в процессе движения. Поскольку по условию движение точки плоское, положение ее определяется двумя координатами, и уравнение траектории можно получить либо в параметрическом виде, найдя координаты точки, как функции какого-либо параметра, либо выписав одно уравнение, связывающее координаты точки.

В. Попробуем найти координаты. Для нахождения двух координат надо написать два уравнения. Если неподвижную точку  $O$  принять за начало координат, то вектор ускорения будет направлен все время по радиусу-вектору, что позволяет думать об удобстве использования полярных координат. Выбрав полярные координаты, одно из уравнений можем записать сразу, поскольку из условия задачи следует, что трансверсальная составляющая ускорения равна нулю (см. формулу I.8):

$$\begin{aligned} r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} &= 0 \Rightarrow \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} &= -r\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Для написания второго уравнения воспользуемся тем, что скорость точки постоянна:

$$\begin{aligned} \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2} &= \text{const} \Rightarrow \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\dot{r}\ddot{r} + r\dot{\varphi}(\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})}{\sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2}} &= 0 \Rightarrow \\ \dot{r}\ddot{r} + r\dot{\varphi}(\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= 0 \Rightarrow \\ \dot{r}\ddot{r} + r\dot{\varphi}(2\dot{r}\dot{\varphi} - \dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

Получили систему двух дифференциальных уравнений, которую в принципе можно решить и найти полярные координаты, как функции времени и начальных условий и тем самым найти траекторию:

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\dot{\varphi} &= -r\ddot{\varphi}, \\ \dot{r}\ddot{r} + r\dot{\varphi}(2\dot{r}\dot{\varphi} - \dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

Однако в рассматриваемой задаче в интегрировании системы нет необходимости. Подставим во второе уравнение значение  $2\dot{r}\dot{\varphi} = -r\ddot{\varphi}$ , в результате получим:

$$\dot{r}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 0 \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow r = \text{const} = b,$$

( $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \neq 0$ , т.к. в противном случае был бы равен нулю модуль ускорения, и было бы бессмысленно говорить о его направлении). Значит точка движется по окружности радиуса  $b$  с центром в точке  $O$ .

Г. Проверка: если точка движется по окружности с постоянной скоростью, то ее ускорение направлено по нормали к окружности (см формулу I.11), т.е по радиусу и, следовательно, проходит через неподвижную точку.

Формула I.11 позволяет найти более короткое решение. В условиях рассматриваемой задачи она принимает вид:

$$\vec{a}_M = \frac{1}{\rho} \dot{s}_M^2 \vec{e}_\nu,$$

откуда следует, что векторы скорости и ускорения перпендикулярны, и значит, если снова выбрать точку  $O$  за начало координат, вектор скорости перпендикулярен радиусу-вектору, т.е.

$$(\vec{V}, \vec{e}_r) = 0 \Rightarrow (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \vec{e}_r) = \dot{r} = 0 \Rightarrow r = \text{const} = b.$$

Заметим, что и в этом случае мы использовали два скалярных уравнения:

$$(\vec{V}, \vec{a}) = 0,$$

$$(\vec{a}, \vec{e}_\varphi) = 0.$$

Еще один способ решения: рассмотрим движение точки в декартовых координатах. Тогда

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \text{const} \Rightarrow \frac{dV^2}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} = 0. \quad (1.2.1)$$

Кроме того, по условию,

$$\begin{aligned} \vec{a} = \lambda \vec{e}_r &\Leftrightarrow \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y = \lambda \left( \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{r} \right) \Rightarrow \\ \ddot{x} &= \lambda \frac{x}{r}, \ddot{y} = \lambda \frac{y}{r}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Подставляя (1.2.2) в (1.2.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{r} 2(\dot{x}x + \dot{y}y) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) &= 0 \Rightarrow (x^2 + y^2) = \text{const} \end{aligned}$$

т.е. точка движется по окружности.

### Задача 1.3. [2, 363]

Закон движения точки задан в декартовых координатах  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Найти величины касательной и нормальной составляющих ускорения.

Решение.

А+Б. Неизвестные — касательная и нормальная составляющие ускорения связаны с ускорением формулами

$$\begin{aligned} a_\tau &= (\vec{a}, \vec{e}_\tau), \quad a_\nu = (\vec{a}, \vec{e}_\nu), \\ \vec{a} &= a_\tau \vec{e}_\tau + a_\nu \vec{e}_\nu \Rightarrow a_\nu \vec{e}_\nu = \vec{a} - a_\tau \vec{e}_\tau, \end{aligned}$$

значит, чтобы решить задачу нам достаточно знать векторы  $\vec{a}$  и  $a_\tau \vec{e}_\tau$ .

В. Вектор ускорения по условию известен:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Известно, что вектор скорости направлен по касательной, поэтому

$$\vec{e}_\tau = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \Rightarrow$$

$$a_\tau = (\vec{a}, \vec{e}_\tau) = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

$$a_\nu = \sqrt{a^2 - (a_\tau)^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - \left( \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right)^2}.$$

Г. Можно получить выражение для нормального ускорения иначе, если заметить, что

$$a_\nu \vec{e}_\nu = \vec{a} - a_\tau \vec{e}_\tau = [\vec{e}_\tau, [\vec{a}, \vec{e}_\tau]] \Rightarrow$$

$$a_\nu = |[\vec{a}, \vec{e}_\tau]| = \frac{\sqrt{(\dot{z}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}^2}.$$

Для проверки надо сравнить полученные для  $a_\nu$  выражения и убедиться, что они совпадают.

**Задача 1.4.** [4, 1.12]

Точка  $M$  движется по винтовой линии. В цилиндрических координатах закон движения для нее имеет вид:

$$\rho = b, \quad \varphi = kt, \quad z = \nu t.$$

Найти выражения скорости и ускорения точки в этих координатах, касательную и нормальную составляющие ускорения, а также радиус кривизны траектории.

**Решение.**

А+Б. Сформулированная задача разбивается на три отдельных задачи:

- 1) при заданных условиях найти выражения скорости и ускорения точки в цилиндрических координатах;
- 2) при заданных условиях найти касательную и нормальную составляющие ускорения;
- 3) при заданных условиях найти радиус кривизны траектории.

В.1) Выпишем выражения скорости и ускорения в цилиндрических координатах:

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z,$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Подставляя заданные в условиях задачи выражения, получим:

$$\vec{V} = 0 \cdot \vec{e}_\rho + bk\vec{e}_\varphi + \nu\vec{e}_z, V = \sqrt{(bk)^2 + \nu^2} = \text{const},$$

$$\vec{a} = (-bk^2)\vec{e}_\rho + 0 \cdot \vec{e}_\varphi + 0 \cdot \vec{e}_z. \quad (1.4.1)$$

2) Чтобы найти касательную и нормальную составляющие ускорения и радиус кривизны траектории воспользуемся формулой (1.11) и результатом задачи (1). Обозначив радиус кривизны через  $R$ , запишем:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{e}_\tau + \frac{V^2}{R}\vec{e}_\nu + 0 \cdot \vec{e}_\beta = 0 \cdot \vec{e}_\tau + \frac{(b^2k^2 + \nu^2)}{R}\vec{e}_\nu + 0 \cdot \vec{e}_\beta. \quad (1.4.2)$$

Сравнивая выражения (1.4.1) и (1.4.2) получим:

$$a_\tau = 0, \quad a_\nu = a = bk^2.$$

3) Продолжая сравнивать выражения (1.4.1) и (1.4.2) получим:

$$\vec{e}_\nu = -\vec{e}_\tau \Rightarrow bk^2 = \frac{(b^2k^2 + \nu^2)}{R} \Rightarrow R = \frac{(b^2k^2 + \nu^2)}{bk^2}.$$

**Задача 1.5.** [3, 23.65]

Восточная, северная и радиальная проекции скорости точки  $M$  относительно Земли равны соответственно  $V_E, V_N, V_r$ .

Считая Землю шаром радиуса  $R$ , определить восточную, северную и радиальную проекции ускорения точки относительно Земли, если высота ее над поверхностью Земли в данный момент равна  $h_M$ , а широта места —  $\varphi_M$ .

**Решение.**

А. Введем правый трехгранник  $Oxyz$  жестко связанный с Землей: точка  $O$  совпадает с центром Земли, ось  $Oz$  направим к северному полюсу, ось  $Ox$  пусть лежит в плоскости нулевого (гринвичского) меридиана, ось  $Oy$  тогда определяется однозначно.

Обозначим угол между плоскостями  $Oxz$  и  $OzM$ , отсчитываемый на восток буквой  $\lambda$  (долгота), а угол между плоскостью  $Oxy$  и лучом  $OM$ , отсчитываемый к северу буквой  $\varphi$  (широта). Тогда  $(r_M = R + h_M, \varphi_M, \lambda_M)$  представляют собой сферические координаты точки  $M$  относительно выбранного трехгранника, и, в соответствии с определениями ортов сферической системы и условиями задачи, мы можем записать

$$\vec{V}_M = V_r\vec{e}_r + V_E\vec{e}_\lambda + V_N\vec{e}_\varphi. \quad (1.5.1)$$

Б. Задача, таким образом, свелась к тому, чтобы зная проекции скорости точки в сферических координатах, ее радиус-вектор и

широту, найти проекции ее ускорения в этих же координатах. Воспользуемся формулой (1.9), заменив  $\varphi$  на  $\lambda$  и  $\vartheta$  на  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} &= (\ddot{r}_M - r_M \dot{\lambda}_M^2 \cos^2 \varphi_M - r_M \dot{\varphi}_M^2) \vec{e}_r + \\ &+ (2\dot{r}_M \dot{\lambda}_M \cos \varphi_M + r_M \ddot{\lambda}_M \cos \varphi_M - 2r_M \dot{\lambda}_M \dot{\varphi}_M \sin \varphi_M) \vec{e}_\lambda + \\ &+ (2\dot{r}_M \dot{\varphi}_M + r_M \ddot{\varphi}_M + r_M \dot{\lambda}_M^2 \cos \varphi_M \sin \varphi_M) \vec{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (1.5.2)$$

В. Значит, чтобы решить задачу с помощью этой формулы нам надо знать  $\dot{r}_M, \ddot{r}_M, \dot{\varphi}_M, \ddot{\varphi}_M, \dot{\lambda}_M, \ddot{\lambda}_M$ . Сравнивая формулы (1.7) и (1.5.1) найдем

$$\begin{aligned}\dot{r}_M &= V_r, r_M \dot{\lambda}_M \cos \varphi_M = V_E, r_M \dot{\varphi}_M = V_N \Rightarrow \\ \ddot{r}_M &= \dot{V}_r, \dot{\lambda}_M = \frac{V_E}{r_M \cos \varphi_M}, \dot{\varphi}_M = \frac{V_N}{r_M}; \\ \dot{V}_E &= \dot{r}_M \dot{\lambda}_M \cos \varphi_M + r_M \ddot{\lambda}_M \cos \varphi_M - r_M \dot{\lambda}_M \dot{\varphi}_M \sin \varphi_M \\ \dot{V}_N &= \dot{r}_M \dot{\varphi}_M + r_M \ddot{\varphi}_M \Rightarrow \\ r_M \ddot{\lambda}_M \cos \varphi_M &= \dot{V}_E - \dot{r}_M \dot{\lambda}_M \cos \varphi_M + r_M \dot{\lambda}_M \dot{\varphi}_M \sin \varphi_M, \\ r_M \ddot{\varphi}_M &= \dot{V}_N - \dot{r}_M \dot{\varphi}_M.\end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в формулу (1.5.2), получим

$$\begin{aligned}\vec{a}_M &= \left( \dot{V}_r - \frac{(V_E)^2}{r_M} - \frac{(V_N)^2}{r_M} \right) \vec{e}_r + \\ &+ \left( \dot{V}_E + \frac{V_r V_E}{r_M} - \frac{V_N V_E}{r_M} \operatorname{tg} \varphi_M \right) \vec{e}_\lambda + \\ &+ \left( \dot{V}_N + \frac{V_r V_N}{r_M} + \frac{(V_E)^2}{r_M} \operatorname{tg} \varphi_M \right) \vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Г. Полученный ответ не вызывает сомнений с точки зрения размерности получившихся выражений, однако громоздкие вычисления, проводившиеся в процессе решения задачи, могли привести к ошибке, поэтому попытаемся решить задачу другим способом.

Действительно для нахождения ускорения точки по отношению к трехграннику  $Oxyz$  можно воспользоваться определением:

$$\begin{aligned}\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} &\Rightarrow \vec{a}_M = \frac{d}{dt} (V_r \vec{e}_r + V_E \vec{e}_\lambda + V_N \vec{e}_\varphi) \Rightarrow \\ \vec{a}_M &= \dot{V}_r \vec{e}_r + \dot{V}_E \vec{e}_\lambda + \dot{V}_N \vec{e}_\varphi + V_r \dot{\vec{e}}_r + V_E \dot{\vec{e}}_\lambda + V_N \dot{\vec{e}}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.5.3)$$



т.е. чтобы довести решение поставленной задачи до конца надо найти разложение векторов  $\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_\varphi$  по базису  $\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_\varphi$ . В "Перечне I" замечаем формулы Пуассона (I.13)

$$\dot{\vec{e}}_r = [\vec{\omega}, \vec{e}_r], \dot{\vec{e}}_\lambda = [\vec{\omega}, \vec{e}_\lambda], \dot{\vec{e}}_\varphi = [\vec{\omega}, \vec{e}_\varphi], \quad (1.5.4)$$

где  $\vec{\omega}$  представляет собой вектор угловой скорости репера  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_\varphi)$ . Задача свелась, таким образом, к вычислению угловой скорости указанного репера.

Рассмотрим репер  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  с вершиной в точке  $O$  и ортами  $\vec{e}_1 = \vec{e}_r, \vec{e}_2 = \vec{e}_\lambda, \vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$ . Очевидно (см. формулу I.12), что угловые скорости реперов  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  и  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_\varphi)$  одинаковы. Введем подвижный трехгранник, жестко связанный с плоскостью  $OzM$ , и применим для нахождения угловой скорости репера  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  теорему сложения угловых скоростей (I.19)

$$\vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{пер} + \vec{\omega}_{отн},$$

$$\vec{\omega}_{пер} = \dot{\lambda}_M \vec{e}_\lambda = \dot{\lambda}_M \sin \varphi_M \vec{e}_r + \dot{\lambda}_M \cos \varphi_M \vec{e}_\varphi,$$

т.к. трехгранник, жестко связанный с плоскостью  $OzM$ , вращается вокруг *неподвижной* оси  $Oz$ ,

$$\vec{\omega}_{отн} = -\dot{\varphi}_M \vec{e}_2 = -\dot{\varphi}_M \vec{e}_\lambda,$$

т.к. относительное движение репера  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  представляет собой вращение вокруг оси, определяемой ортом  $\vec{e}_2$ , которая *неподвижна* относительно трехгранника, связанного с плоскостью  $OzM$ .

Итак

$$\vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega} = \dot{\lambda}_M \sin \varphi_M \vec{e}_r + \dot{\lambda}_M \cos \varphi_M \vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}_M \vec{e}_\lambda. \quad (1.5.5)$$

Подставляя выражение (1.5.5) в формулы (1.5.4) получим:

$$\dot{\vec{e}}_r = [\vec{\omega}, \vec{e}_r] \Rightarrow \dot{\vec{e}}_r = \dot{\lambda}_M \cos \varphi_M \vec{e}_\lambda + \dot{\varphi}_M \vec{e}_\varphi \Rightarrow \dot{\vec{e}}_r = \frac{V_E}{r_M} \vec{e}_\lambda + \frac{V_N}{r_M} \vec{e}_\varphi,$$

$$\dot{\vec{e}}_\lambda = [\vec{\omega}, \vec{e}_\lambda] \Rightarrow \dot{\vec{e}}_\lambda = -\dot{\lambda}_M \cos \varphi_M \vec{e}_r + \dot{\lambda}_M \sin \varphi_M \vec{e}_\varphi \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{e}}_\lambda = -\frac{V_E}{r_M} \vec{e}_r + \frac{V_E}{r_M} \operatorname{tg} \varphi_M \vec{e}_\varphi,$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = [\vec{\omega}, \vec{e}_\varphi] \Rightarrow \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}_M \vec{e}_r - \dot{\lambda}_M \sin \varphi_M \vec{e}_\lambda \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\frac{V_N}{r_M} \vec{e}_r - \frac{V_E}{r_M} \operatorname{tg} \varphi_M \vec{e}_\lambda.$$

Используя найденные выражения, имеем

$$\vec{a}_M = (\dot{V}_r - \frac{(V_E)^2}{r_M} - \frac{(V_N)^2}{r_M}) \vec{e}_r +$$

$$(\dot{V}_E + \frac{V_r V_E}{r_M} - \frac{V_N V_E}{r_M} \operatorname{tg} \varphi_M) \vec{e}_\lambda +$$

$$(\dot{V}_N + \frac{V_r V_N}{r_M} + \frac{(V_E)^2}{r_M} \operatorname{tg} \varphi_M) \vec{e}_\varphi,$$

что совпадает с ответом, полученным ранее.

#### Задача 1.6. [2, 382]

Прямые  $AB$  и  $CD$  движутся в фиксированной плоскости. Скорость всех точек прямой  $AB$  в данный момент времени равна по величине  $V_1$  и перпендикулярна к  $AB$ , скорость всех точек прямой  $CD$  в данный момент времени равна по величине  $V_2$  и перпендикулярна к  $CD$ . Найти величину скорости точки  $M$  пересечения этих прямых, если в данный момент угол между ними равен  $\alpha$ .

Решение.

А. Для наглядности будем считать, что обе прямые пропущены через малое колечко, находящееся как раз в точке пересечения прямых, и будем искать его скорость. Вектор скорости точки при движении в плоскости определяется двумя величинами: например, двумя проекциями на оси координат или величиной и направлением и т.п., следовательно, число неизвестных в нашей задаче равно двум, значит, чтобы их найти нам надо написать два уравнения.

Ясно, что, с одной стороны, прямая  $AB$  увлекает колечко в своем движении и что, с другой стороны, колечко, чтобы оставаться на прямой  $CD$  должно сдвигаться по  $AB$ . Из сказанного понятно, что для представления движения колечка, удобно воспользоваться теоремой сложения скоростей.

Введем подвижный трехгранник, связанный с прямой  $AB$ : зафиксируем на ней точку  $S$  и поместим в ней начало трехгранника  $Sxyz$ , ось  $Sx$  направим вдоль прямой  $AB$ , а ось  $Sy$  перпендикулярно к ней (см. рис.1.6.1), ось  $Sz$  (хотя при решении поставленной задачи, она нам не понадобится) перпендикулярно к плоскости, в которой лежат обе прямые, так чтобы она образовывала правый трехгранник с осями  $Sx$  и  $Sy$ .

Будем обозначать величины, значение которых определяется выбором этой системы, индексом  $I$ . Через  $x_M$  обозначим координату колечка на прямой  $AB$ .

Б. Запишем теорему сложения скоростей для колечка  $M$ , используя в качестве подвижного трехгранника  $Sxyz$

$$\vec{V}_M^{\text{абс}} = \vec{V}_M^{\text{пер}}(I) + \vec{V}_M^{\text{отн}}(I), \quad (1.6.1)$$

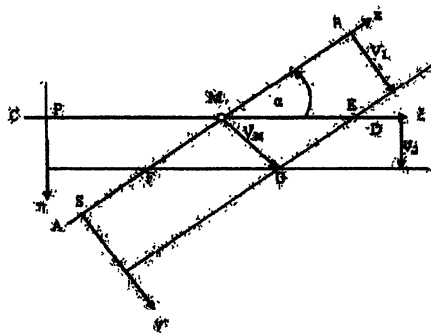


Рис. 1.6.1.

здесь  $\vec{V}_M^{abc}$  — скорость колечка относительно неподвижной плоскости, в которой движутся прямые,

$\vec{V}_M^{пер}(I)$  — переносная скорость колечка,

$\vec{V}_M^{отн}(I)$  — относительная скорость колечка.

В соответствии с определениями переносной и относительной скоростей

$\vec{V}_M^{пер}(I) = V_1 \vec{e}_y$  (так как скорости всех точек прямой  $AB$  одинаковы),

$\vec{V}_M^{отн}(I) = \dot{x}_M \vec{e}_x$  (вследствие того, что относительно трехгранника  $Sxyz$  колечко движется по оси  $Sx$ ).

Уравнение (1.6.1) — векторное и, следовательно, в рассматриваемой задаче дает нам возможность получить два скалярных уравнения, которые однако не приведут нас к желаемому результату, поскольку эти два уравнения будут содержать три неизвестных величины: две проекции вектора  $\vec{V}_M^{abc}$  и  $\dot{x}_M$ .

Дело легко поправить, если вспомнить, что мы пока никак не использовали вторую прямую, которая тоже влияет на движение колечка и, в принципе, ничем не "хуже" прямой  $AB$ .

Поэтому, введем подвижный трехгранник  $P\xi\eta\zeta$ , жестко связанный с прямой  $CD$  ( $P$  — одна из точек этой прямой, ось  $Px$  направлена вдоль нее, ось  $P\eta$  перпендикулярна к ней (см. рис.1.6.1), ось  $P\zeta$  перпендикулярна плоскости и образует правый трехгранник с первыми двумя).

Величины, значение которых определяется выбором системы  $P\xi\eta\zeta$ , будем обозначать индексом  $II$ . Запишем еще раз теорему сложения скоростей, рассматривая теперь в качестве подвижного

трехгранника  $P\xi\eta\zeta$ :

$$\vec{V}_M^{\text{abc}} = \vec{V}_M^{\text{пер}}(II) + \vec{V}_M^{\text{отн}}(II), \quad (1.6.2)$$

где  $\vec{V}_M^{\text{abc}}$  по прежнему, скорость колечка относительно неподвижной плоскости,

$\vec{V}_M^{\text{пер}}(II) = V_2 \vec{e}_\eta$  — переносная скорость колечка,

$\vec{V}_M^{\text{отн}}(II) = \dot{\xi}_M \vec{e}_\xi$  — относительная скорость колечка.

Так как абсолютная скорость колечка одна и та же в обоих случаях, выражения, стоящие в правых частях уравнений (1.6.1) и (1.6.2), можно приравнять

$$\begin{aligned} \vec{V}_M^{\text{пер}}(I) + \vec{V}_M^{\text{отн}}(I) &= (I) \vec{V}_M^{\text{пер}}(II) + \vec{V}_M^{\text{отн}}(II) \Rightarrow \\ V_1 \vec{e}_y + \dot{x}_M \vec{e}_x &= V_2 \vec{e}_\eta + \dot{\xi}_M \vec{e}_\xi. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Уравнение (1.6.3), в принципе, решает задачу поскольку с его помощью можно написать два скалярных соотношения, достаточных для нахождения двух неизвестных величин:  $\dot{x}_M$  и  $\dot{\xi}_M$ .

В. Переход от векторного уравнения к скалярным осуществляется путем умножения его скалярно на единичные векторы двух неколлинеарных направлений. Выбором этих направлений можно добиться упрощения получающейся системы уравнений. В частности, для решения рассматриваемой задачи совсем не обязательно находить обе неизвестных величины — достаточно найти одну из них, например,  $\dot{x}_M$ . Для того, чтобы ее найти умножим скалярно правую и левую части уравнения (1.6.3) на  $\vec{e}_\eta$ . В результате получим

$$V_1(\vec{e}_y, \vec{e}_\eta) + \dot{x}_M(\vec{e}_x, \vec{e}_\eta) = V_2 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_M = \frac{V_2 - V_1(\vec{e}_y, \vec{e}_\eta)}{(\vec{e}_x, \vec{e}_\eta)} \Rightarrow$$

$$\vec{V}_M^{\text{abc}} = \frac{V_1 \cos \alpha - V_2}{\sin \alpha} \vec{e}_x + V_1 \vec{e}_y.$$

Поскольку векторы  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$  известны, задача решена.

Г. Используя ту же теорему сложения скоростей, можно решить задачу чисто геометрическим способом.

Рассматривая в качестве подвижного трехгранник  $Sxyz$  заметим, что поскольку переносная скорость равна  $\vec{V}_1$  и перпендикулярна прямой  $AB$ , а относительная скорость направлена вдоль этой прямой, конец вектора абсолютной скорости точки  $M$  должен лежать на прямой, проходящей через конец вектора  $\vec{V}_1$  параллельно прямой  $AB$ .

С другой стороны, если в качестве подвижного рассмотреть трехгранник  $P\xi\eta\zeta$ , конец вектора абсолютной скорости точки  $M$  должен лежать на прямой, проходящей через конец вектора  $\vec{V}_2$  и параллельной  $CD$ .

Единственной точкой удовлетворяющей обоим условиям является точка  $G$  (см.рис.1.6.1). Значит вектор абсолютной скорости точки  $M$  представлен отрезком  $\vec{MG}$ .

Фигура  $MEGF$  представляет собой параллелограмм, со сторонами  $|ME| = V_1/\sin \alpha$ ,  $|EG| = V_2/\sin \alpha$ , поэтому

$$|MG| = V_M = \sqrt{\left(\frac{V_1}{\sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{V_2}{\sin \alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{V_1 V_2}{\sin^2 \alpha}\right) \cos \alpha}$$

Этот результат подтверждает ранее полученный, и, тем самым, свидетельствует, что найденное решение правильно.

#### Задача 1.7. [3, 18.18]

Антипараллелограмм составлен из двух стержней  $AB$  и  $CD$  одинаковой длины  $2a$  и шарнирно соединенного с ними стержня  $BC$  длины  $2b$ . Расстояние между неподвижными осями  $A$  и  $D$  равно  $2b$ . Стержень  $AB$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ . Найти угловую скорость и угловое ускорение стержня  $BC$  в момент, когда угол  $ADC$  равен  $\pi/2$ .

Решение.

А. Стержень  $BC$  совершает плоскопараллельное движение. В этом случае векторы угловой скорости и углового ускорения направлены перпендикулярно к плоскости  $Axy$  (см.рис.1.7.1), в которой движется стержень, и, следовательно, их можно представить в виде:  $\vec{\omega}_{BC} = \omega_{BC}\vec{e}_z$ ,  $\vec{\epsilon}_{BC} = \epsilon_{BC}\vec{e}_z$ .

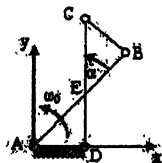


Рис. 1.7.1.

Таким образом, задача содержит две скалярных неизвестных:  $\omega_{BC}$  и  $\epsilon_{BC}$ , значит, для их нахождения надо написать два скалярных уравнения, которые не содержали бы других неизвестных величин.

Б. Чтобы составить уравнение, позволяющее найти значение интересующей нас величины, необходимо воспользоваться какой-либо известной теоремой или формулой, содержащей указанную величину в том или ином виде (если таковых не окажется, придется предпринять попытку вывести соответствующее соотношение самостоятельно, т.е. решить дополнительную задачу).

Во многих задачах кинематики для определения угловой скорости удобно применить формулу Эйлера (1.15). Для нахождения

$\omega_{BC}$  с помощью формулы (1.15) надо знать скорости двух точек стержня  $BC$ . Определив угловую скорость, можно попытаться найти угловое ускорение с помощью формулы Ривальса (1.16).

В. Точка  $B$  принадлежит стержню  $AB$ , который вращается вокруг неподвижной оси  $Az$ , поэтому

$$\vec{V}_B = [\omega_0 \vec{e}_z, |AB| \vec{e}_{AB}].$$

Но эта точка принадлежит и стержню  $BC$ , и таким образом, мы знаем скорость одной точки стержня  $BC$ . Скорость какой-либо другой точки стержня нам не известна, однако мы знаем направление скорости точки  $C$ . Так как точка  $C$  принадлежит и стержню  $DC$ , а он вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости  $Axy$  и проходящей через точку  $D$ , ее скорость направлена перпендикулярно стержню  $DC$ . Запишем формулу Эйлера для точек  $B$  и  $C$  стержня  $BC$ :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + [\omega_{BC} \vec{e}_z, |CB| \vec{e}_{CB}].$$

Вектор  $\vec{V}_C$  не известен по величине, но известно его направление, поэтому умножив обе части этого уравнения скалярно на вектор  $\vec{e}_{DC}$  мы получим уравнение, в которое входит только одна неизвестная -  $\omega_{BC}$ :

$$\begin{aligned} (\vec{V}_B, \vec{e}_{DC}) &= (\vec{V}_C, \vec{e}_{DC}) + (\vec{e}_{DC}, [\omega_{BC} \vec{e}_z, |CB| \vec{e}_{CB}]) \Rightarrow \\ \omega_{BC} &= \omega_0 \frac{|AB|(\vec{e}_{DC}, [\vec{e}_z, \vec{e}_{AB}])}{|CB|(\vec{e}_{DC}, [\vec{e}_z, \vec{e}_{CB}])}. \end{aligned}$$

Полученная формула справедлива для любого положения рассматриваемого механизма. В момент, когда угол  $ADC$  равен  $\pi/2$

$$\vec{e}_{DC} = \cos \alpha \vec{e}_{AB} - \sin \alpha \vec{e}_{CB} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{a}{b} \omega_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

Задача сведена к элементарной геометрии — определению  $\operatorname{tg} \alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|CB|}{|BE|} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \Rightarrow \omega_{BC} = \omega_0 \left( \frac{2a^2}{a^2 - b^2} \right).$$

Для нахождения углового ускорения воспользуемся формулой Ривальса для точек  $B$  и  $C$  стержня  $BC$ :

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_C + [\varepsilon_{BC} \vec{e}_z, |CB| \vec{e}_{CB}] + [\omega_{BC} \vec{e}_z, [\omega_{BC} \vec{e}_z, |CB| \vec{e}_{CB}]] \Rightarrow \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_C + \varepsilon_{BC} |CB| [\vec{e}_z, \vec{e}_{CB}] + (\omega_{BC})^2 |CB| [\vec{e}_z, [\vec{e}_z, \vec{e}_{CB}]]. \quad (1.7.1) \end{aligned}$$

В этом соотношении известно все кроме ускорения точки  $C$  и величины углового ускорения стержня  $BC$  (ускорение точки  $B$  известно, так как она движется по окружности с постоянной скоростью).

Для нахождения  $\epsilon_{BC}$  достаточно одного скалярного уравнения, поэтому если бы удалось найти проекцию ускорения точки  $C$  на какое-либо направление задача была бы решена.

Точка  $C$  принадлежит и стержню  $BC$  и стержню  $DC$ , следовательно, движется по окружности радиуса  $|DC|$  и, значит, радиальная составляющая ее ускорения равна  $(-\ddot{e}_{DC}(V_C)^2/|DC|)$ . Скорость  $V_C$  найдем следующим образом: точка  $E$  является мгновенным центром скоростей стержня  $BC$ , поэтому

$$\vec{V}_C = [\omega_{BC}\vec{e}_z, |EC|\vec{e}_{EC}] = \omega_{BC}|EC|[\vec{e}_z, \vec{e}_{EC}]$$

Умножив обе части соотношения (1.7.1) скалярно на  $\vec{e}_{EC}$ , получим:

$$\begin{aligned} (\ddot{a}_B, \vec{e}_{EC}) &= (\ddot{a}_C, \vec{e}_{EC}) + \epsilon_{BC}|CB|(\vec{e}_{EC}, [\vec{e}_z, \vec{e}_{CB}]) + \\ &\quad + (\omega_{BC})^2|CB|(\vec{e}_{EC}, [\vec{e}_z, [\vec{e}_z, \vec{e}_{CB}]]) \Rightarrow \\ \epsilon_{BC} &= \frac{(\ddot{a}_B, \vec{e}_{EC}) - (\ddot{a}_C, \vec{e}_{EC}) - (\omega_{BC})^2|CB|(\vec{e}_{EC}, [\vec{e}_z, [\vec{e}_z, \vec{e}_{CB}]])}{|CB|(\vec{e}_{EC}, [\vec{e}_z, \vec{e}_{CB}])}. \end{aligned}$$

Последнее выражение справедливо в любом положении антипараллелограмма. Вычислим его, в положении когда угол  $ADC$  равен  $\pi/2$ :

$$\begin{aligned} (\ddot{a}_B, \vec{e}_{EC}) &= -(\omega_0)^2|AB|(\vec{e}_{AB}, \vec{e}_{EC}) = -(\omega_0)^2|AB|\cos\alpha = \\ &= -(\omega_0)^22a\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right), \\ -(\ddot{a}_C, \vec{e}_{EC}) &= \frac{(V_C)^2}{|DC|} = \frac{(\omega_{BC})^2|AE|^2}{|DC|} = (\omega_0)^2\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)^2 2a, \\ -(\omega_{BC})^2|CB|(\vec{e}_{EC}, [\vec{e}_z, [\vec{e}_z, \vec{e}_{CB}]]) &= -\left(\omega_0\left(\frac{2a^2}{a^2 - b^2}\right)\right)^2 2b\sin\alpha = \\ &= -\left(\omega_0\left(\frac{2a^2}{a^2 - b^2}\right)\right)^2 2b\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right), \\ |CB|(\vec{e}_{EC}, [\vec{e}_z, \vec{e}_{CB}]) &= 2b\cos\alpha = 2b\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) \Rightarrow \\ \epsilon_{BC} &= -(\omega_0)^22ab\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Г. Рассмотрим еще один способ решения. Определим углы  $\varphi_0, \varphi_1, \gamma$  следующими соотношениями (направление отсчета углов указано на рис.1.7.2):

$$\cos\varphi_0 = (\vec{e}_{AB}, \vec{e}_x),$$

$$\cos \varphi_1 = (\vec{e}_{BC}, \vec{e}_x),$$

$$\cos \gamma = (\vec{e}_{DB}, \vec{e}_x).$$

Так как движение стержня  $BC$  происходит в плоскости  $Axy$ , его угловую скорость и угловое ускорение можно представить в виде:

$$\vec{\omega}_{BC} = \dot{\varphi}_1 \vec{e}_z, \quad \vec{\epsilon}_{BC} = \ddot{\varphi}_1 \vec{e}_z.$$

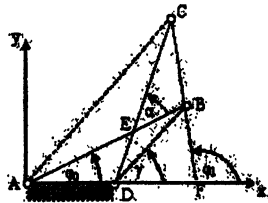


Рис. 1.7.2.

Нетрудно видеть (см. рис.1.7.2), что треугольники  $ADB$  и  $DBC$  равны, откуда следует равенство треугольников  $ADE$  и  $EBC$ .

Поэтому углы  $DAC$  и  $BCA$  равны, значит, треугольники  $AEC$ ,  $AFC$  и  $DFB$  — равнобедренные, что влечет за собой равенства:

$$\varphi_1 = 2\gamma \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = 2\dot{\gamma}$$

Теорема синусов, примененная к треугольнику  $ADB$ , дает:

$$\frac{2a}{\sin(\pi - \gamma)} = \frac{|BD|}{\sin \varphi_0} \Rightarrow 2a \sin \varphi_0 = |BD| \sin \gamma. \quad (1.7.2)$$

Обозначим для удобства  $|BD| = \lambda$ . Из того же треугольника получим:

$$\lambda = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2 - 8ab \cos \varphi_0}$$

Продифференцировав равенство (1.7.2) по времени, имеем:

$$\omega_0 2a \cos \varphi_0 = \dot{\lambda} \sin \gamma + \dot{\gamma} \lambda \cos \gamma \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi}_1 = 2\dot{\gamma} = 2 \frac{\omega_0 2a \cos \varphi_0 - \dot{\lambda} \sin \gamma}{\lambda \cos \gamma}, \quad \sin \gamma = \frac{2a \sin \varphi_0}{\lambda}, \quad \dot{\lambda} = \frac{4ab \sin \varphi_0}{\lambda}.$$

Полученную формулу можно применять для нахождения угловой скорости стержня при любом положении рассматриваемого механизма.

Вычислим значение  $\dot{\varphi}_1$  в момент, когда угол  $ADC$  — прямой. В этот момент

$$\varphi_0 + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

$$\lambda^2 = \frac{4(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}, \quad \sin \gamma = \frac{a}{2\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \lambda \cos \gamma = \frac{2b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \Rightarrow$$



$$\dot{\varphi}_1 = \omega_0 \frac{2a^2}{a^2 - b^2}$$

Найденное значение совпадает с полученным ранее, что подтверждает его достоверность. Аналогично можно получить значение углового ускорения.

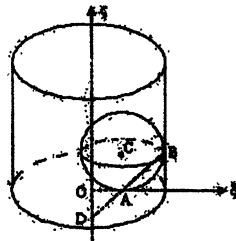
#### Задача 1.8. [4, 1.106]

Шар радиуса  $r$  катится по плоскости, касаясь изнутри боковой поверхности прямого кругового цилиндра радиуса  $R$ , образуя поверхность которого перпендикулярна плоскости. Проскальзывания в точках касания на плоскости и на поверхности цилиндра нет. Модули скорости и ускорения центра шара равны соответственно  $V$  и  $a$ . Найти векторы угловой скорости  $\vec{\omega}$  и углового ускорения  $\vec{\epsilon}$  шара.

Решение.

А. Обозначим точку, совпадающую с центром шара, через  $C$ , а точки касания с плоскостью и поверхностью цилиндра, соответственно,  $A$  и  $B$ . Величины скоростей этих точек известны:  $V_C = V$ ,  $V_A = V_B = 0$ , вследствие отсутствия проскальзывания.

Сначала попытаемся найти вектор угловой скорости шара. Посмотрев сводку основных формул кинематики, замечаем, что линейные скорости точек тела и его угловая скорость, связаны формулой Эйлера (1.15).



Б. Запишем формулу Эйлера для точек  $A$  и  $B$  шара:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + [\vec{\omega}, \vec{AB}], \quad \text{Рис. 1.8.1.}$$

но  $V_A = V_B = 0 \Rightarrow [\vec{\omega}, \vec{AB}] = 0 \Rightarrow$  либо  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{AB}$ , либо  $\vec{\omega} = 0$ . Вектор угловой скорости шара не может равняться нулю, потому что в этом случае из формулы Эйлера следовало бы, что скорости всех точек шара одинаковы, а это не так. Значит  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{AB}$ . Итак, для того чтобы найти вектор угловой скорости шара нам нужно найти одну скалярную величину  $\omega$ . Для ее определения достаточно одного скалярного уравнения. Выпишем еще раз формулу Эйлера, теперь для точек  $A$  и  $C$ :

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + [\vec{\omega}, \vec{AC}]. \quad (1.8.1)$$

Введем подвижный правый трехгранник  $O\xi\eta\zeta$  — ось  $O\zeta$  совпадает с осью цилиндра ( $\vec{e}_\zeta = \vec{e}_{AC}$ ) (точка  $O$  лежит в плоскости, по

которой катается шар), ось  $O\xi$  направлена от точки  $O$  к точке  $A$ . Тогда

$$\overrightarrow{AC} = r\vec{e}_\zeta, \omega\vec{e}_{AB} = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_\zeta\right).$$

Будем для определенности считать, что  $\vec{V}_C = V\vec{e}_\eta$ , и умножим обе части равенства (1.8.1) скалярно на  $\vec{e}_\eta$ . В результате получим:

$$\begin{aligned}(\vec{e}_\eta, \vec{V}_C) &= (\vec{e}_\eta, \vec{V}_A) + (\vec{e}_\eta, [\vec{\omega}, \overrightarrow{AC}]) \Rightarrow \\ V &= \omega r (\vec{e}_\eta, [\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_\zeta, \vec{e}_\zeta]) = -\frac{\omega r}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ \omega &= -\frac{V\sqrt{2}}{r} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{V}{r}(\vec{e}_\xi + \vec{e}_\zeta)\end{aligned}$$

Найти вектор углового ускорения можно было бы, применив формулу Ривальса (1.16), однако для этого необходимо знать векторы ускорения двух точек шара. На первый взгляд, условия задачи не позволяют этого, поэтому попытаемся найти  $\vec{\epsilon}$  другим путем. По определению

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{V}{r}(\vec{e}_\xi + \vec{e}_\zeta) \right) = -\frac{\dot{V}}{r}(\vec{e}_\xi + \vec{e}_\zeta) - \frac{V}{r}\dot{\vec{e}}_\xi.$$

Задача нахождения  $\vec{\epsilon}$  свелась к вычислению двух величин:  $\dot{V}$  и  $\dot{\vec{e}}_\xi$ .

Точка  $C$  движется по окружности и, записав для нее формулу разложения ускорения по осям естественного трехгранника (1.11), получим:

$$\vec{a}_C = \dot{V}\vec{e}_\eta + \frac{V^2}{R-r}(-\vec{e}_\xi) \Rightarrow \dot{V} = \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{V^2}{R-r}\right)^2}.$$

Для определения  $\dot{\vec{e}}_\xi$  воспользуемся формулой Пуассона (1.13)

$$\dot{\vec{e}}_\xi = [\vec{\Omega}, \vec{e}_\xi],$$

где  $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_\zeta$  — угловая скорость трехгранника  $O\xi\eta\zeta$ . Точка  $C$  является одновременно и точкой шара и точкой этого трехгранника и поэтому

$$\begin{aligned}\vec{V}_C &= [\vec{\Omega}, \overrightarrow{OC}] \Rightarrow V\vec{e}_\eta = [\Omega\vec{e}_\zeta, (R-r)\vec{e}_\xi + r\vec{e}_\zeta] \Rightarrow V = \Omega(R-r) \Rightarrow \\ \Omega &= \frac{V}{R-r} \Rightarrow \dot{\vec{e}}_\xi = \frac{V}{R-r}\vec{e}_\eta\end{aligned}$$

Окончательно

$$\vec{\epsilon} = \mp \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{V^2}{R-r}\right)^2}}{r}(\vec{e}_\xi + \vec{e}_\zeta) - \frac{V^2}{r(R-r)}\vec{e}_\eta.$$

Г. Значение вектора  $\ddot{\vec{e}}_\xi$  можно получить другим способом:

$$\begin{aligned}\vec{r}_C &= (R - r)\vec{e}_\xi + r\vec{e}_\zeta, \\ \vec{V}_C &= \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}((R - r)\vec{e}_\xi + r\vec{e}_\zeta) \Rightarrow \\ V\vec{e}_\eta &= (R - r)\dot{\vec{e}}_\xi \Rightarrow \dot{\vec{e}}_\xi = \frac{V}{R - r}\vec{e}_\eta.\end{aligned}$$

Вернемся к вопросу об использовании формулы Ривальса для нахождения вектора углового ускорения. Легко убедиться в том, что скорости точек шара, лежащих на отрезке  $AB$  равны нулю. То же самое можно сказать и о скоростях точек пространства, жестко связанного с шаром, лежащих на прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Это означает, что указанная прямая является мгновенной осью вращения шара (и связанного с ним пространства). При любых положениях шара она пересекает ось  $O\zeta$  в одной и той же точке  $D$ , (см. рис. 1.8.1) поэтому геометрическое место мгновенных осей вращения шара в неподвижном пространстве (неподвижный аксоид) представляет собой прямой круговой конус с вершиной в точке  $D$  и осью, совпадающей с осью цилиндра. Подвижный аксоид (геометрическое место мгновенных осей вращения шара в пространстве, связанном с шаром) также представляет собой прямой круговой конус с вершиной в точке  $D$ , но с осью, проходящей через точки  $D$  и  $C$ . Известно, что движение тела можно представить как качение без проскальзывания подвижного аксоида по неподвижному. Поскольку в рассматриваемой задаче точка  $D$  подвижного конуса остается на месте (следовательно, ее ускорение равно нулю), а ускорение точки  $C$  мы нашли, записав формулу Ривальса для точек  $C$  и  $D$  пространства, связанного с шаром, получим уравнение, в котором единственным неизвестным вектором является  $\vec{e}$  (с учетом того, что вектор угловой скорости нам уже известен).

Спроектировав это векторное уравнение на три неколлинеарных направления, получим три скалярных уравнения для определения трех неизвестных проекций вектора углового ускорения.

#### Задача 1.9.

Прямой круговой конус с углом раствора  $2\alpha$  катается по плоскости без проскальзывания. Линия касания движется по плоскости равномерно и описывает полный круг за время  $T$ . Найти *векторы* угловой скорости и углового ускорения конуса.

Решение.

А. Надо найти какие-нибудь формулы или теоремы, содержащие векторы угловой скорости и ускорения, связанные с условиями задачи. Нам известно, что конус катается по плоскости без проскальзывания. Это означает, что скорости точек конуса лежащих на образующей, касающейся в данный момент плоскости, равны нулю, т.е. эта образующая является мгновенной осью вращения, и, следовательно, вектор угловой скорости направлен вдоль нее.

Больше никаких данных о линейных скоростях и ускорениях точек конуса нет, и потому вряд ли прямое применение формул Эйлера или Ривальса будет продуктивным.

Есть, однако, еще одна теорема, касающаяся поставленного вопроса — *теорема сложения угловых скоростей*. Попробуем ее применить.

Б. Теоремы сложения движений, будь то теоремы сложения скоростей или ускорений для точки, или теорема сложения угловых скоростей для твердого тела, можно применять только при наличии как минимум двух трехгранников — неподвижного и подвижного, причем перемещения подвижного трехгранника должны быть четко определены.

В рассматриваемой задаче свяжем неподвижный трехгранник с плоскостью, по которой катается конус, а подвижный с линией касания конуса и указанной плоскости, точнее, поместим вершину подвижного трехгранника в вершине конуса — точке  $O$  (и относительно конуса и относительно плоскости эта точка неподвижна), ось  $O\xi$  направим по линии касания, ось  $O\zeta$  — перпендикулярно к плоскости, ось  $O\eta$  расположим в плоскости, так чтобы трехгранник  $O\xi\eta\zeta$  был правым. (см. рис.1.9.1)

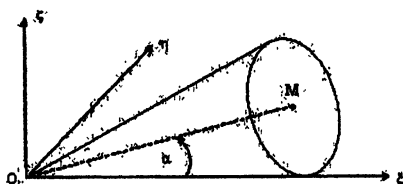


Рис. 1.9.1.

В. Имея два трехгранника, можем применить теорему сложения угловых скоростей

$$\vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{пер} + \vec{\omega}_{отн}, \quad (1.9.1)$$

где  $\vec{\omega}^{abc}$  — абсолютная угловая скорость конуса (угловая скорость конуса по отношению к неподвижному трехграннику),

$\vec{\omega}^{пер}$  — переносная угловая скорость конуса (угловая скорость подвижного трехгранника по отношению к неподвижному трехграннику),

$\vec{\omega}^{отн}$  — относительная угловая скорость конуса (угловая скорость конуса по отношению к трехграннику  $O\xi\eta\zeta$ ).

Посмотрим, что в этом векторном уравнении нам известно, а что — неизвестно. Вектор абсолютной угловой скорости, как уже сказано выше, направлен по оси  $O\xi$ , и, следовательно, может быть представлен в виде

$$\vec{\omega}^{abc} = \omega^{abc} \vec{e}_\xi.$$

Ось  $O\xi$  подвижного трехгранника остается на месте, значит, переносная угловая скорость направлена вдоль этой оси, и, так как, ось  $O\xi$  движется по плоскости равномерно (для определенности будем считать, что ее движение происходит в положительном направлении),

$$\vec{\omega}^{пер} = \omega^{пер} \vec{e}_\zeta = \frac{2\pi}{T} \vec{e}_\zeta.$$

Ось конуса постоянно находится в плоскости  $O\xi\zeta$  и образует постоянный угол с осью  $O\xi$ , т.е. неподвижна относительно трехгранника  $O\xi\eta\zeta$ , следовательно, относительная угловая скорость конуса направлена по его оси (обозначим единичный вектор, направленный вдоль оси конуса  $\vec{e}$ :  $\vec{e} = \cos \alpha \vec{e}_\xi + \sin \alpha \vec{e}_\zeta$ )

$$\vec{\omega}^{отн} = \omega^{отн} \vec{e}.$$

Итак, все три перечисленных вектора лежат в одной плоскости, следовательно, векторное уравнение (1.9.1), эквивалентно системе двух скалярных, которые получатся при проектировании (1.9.1) на два неколлинеарных направления. Решив эту систему мы найдем значения двух неизвестных скалярных величин  $\omega^{abc}$  и  $\omega^{отн}$ .

Прежде чем выписывать систему, заметим, что нас в данной задаче интересует только  $\omega^{abc}$ . Поэтому умножив (1.9.1) скалярно на единичный вектор  $\vec{e}_n = -\sin \alpha \vec{e}_\xi + \cos \alpha \vec{e}_\zeta$ , получим:

$$(\vec{e}_n, \vec{\omega}^{abc}) = (\vec{e}_n, \vec{\omega}^{пер}) + (\vec{e}_n, \vec{\omega}^{отн}) \Rightarrow -\omega^{abc} \sin \alpha = \frac{2\pi}{T} \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\omega^{abc} = -\frac{2\pi}{T} \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow \vec{\omega}^{abc} = -\frac{2\pi}{T} \operatorname{ctg} \alpha \vec{e}_\xi.$$

Для нахождения вектора углового ускорения конуса воспользуемся определением

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{2\pi}{T} \operatorname{ctg} \alpha \vec{e}_\xi \right) = -\frac{2\pi}{T} \operatorname{ctg} \alpha \dot{\vec{e}}_\xi,$$

и заметим, что по формуле Пуассона,

$$\dot{\vec{e}}_\xi = [\vec{\omega}^{\text{пер}}, \vec{e}_\xi] = \frac{2\pi}{T} \vec{e}_\eta \Rightarrow \vec{\varepsilon} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \operatorname{ctg} \alpha \vec{e}_\eta.$$

Г. Нельзя ли все-таки, поскольку речь идет о движении твердого тела, воспользоваться формулами Эйлера и Ривальса? Для этого нужно знать скорости и ускорения точек тела в рассматриваемой задаче.

Обратим внимание на точки конуса, лежащие на его оси. Возьмем точку  $M$ , для которой  $|OM| = r$ . Она постоянно находится в плоскости  $O\xi\zeta$ , и движется по окружности радиуса  $r \cos \alpha$ , расположенной в плоскости, перпендикулярной оси  $O\xi$ . Так как плоскость  $O\xi\zeta$  связана с линией касания конуса и плоскости, она движется равномерно, следовательно скорость точки  $M\xi$  постоянна по величине и направлена по касательной к окружности

$$\vec{V}_M = \frac{2\pi r \cos \alpha}{T} \vec{e}_\eta.$$

Итак, теперь мы знаем скорости двух точек  $O$  и  $M$  конуса, и можем написать формулу Эйлера:

$$\begin{aligned} \vec{V}_M &= \vec{V}_O + [\vec{\omega}^{\text{abc}}, \overrightarrow{OM}] \Rightarrow \\ \frac{2\pi r \cos \alpha}{T} \vec{e}_\eta &= [\omega^{\text{abc}} \vec{e}_\xi, r \cos \alpha \vec{e}_\xi + r \sin \alpha \vec{e}_\zeta] \Rightarrow \omega^{\text{abc}} = -\frac{2\pi}{T} \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Ускорения этих двух точек также известны: точка  $O$  неподвижна и, следовательно, ее ускорение равно нулю, а точка  $M$  движется по окружности с постоянной скоростью и, значит, ее ускорение направлено к центру и равно  $(V_M)^2 / (r \cos \alpha)$  (см. формулу I.11). Заметим, также, что вектор  $\vec{\omega}^{\text{abc}}$  движется в неподвижной плоскости, по которой катается конус, значит, и его производная тоже лежит в этой плоскости, т.е.

$$\varepsilon_\zeta = 0 \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \varepsilon_\xi \vec{e}_\xi + \varepsilon_\eta \vec{e}_\eta.$$

Запишем формулу Ривальса для точек  $O$  и  $M$ :

$$\begin{aligned} \vec{a}_M &= \vec{a}_O + [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{OM}] + [\vec{\omega}^{\text{abc}}, [\vec{\omega}^{\text{abc}}, \overrightarrow{OM}]] \Rightarrow \\ -\frac{(V_M)^2}{r \cos \alpha} \vec{e}_\xi &= [\varepsilon_\xi \vec{e}_\xi + \varepsilon_\eta \vec{e}_\eta, r \cos \alpha \vec{e}_\xi + r \sin \alpha \vec{e}_\zeta] + \end{aligned}$$

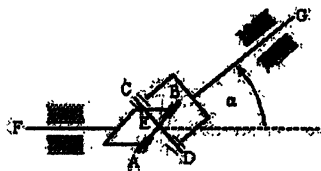


Рис. 1.10.1.

$$\left[-\frac{2\pi}{T} \operatorname{ctg} \alpha \vec{e}_\xi, \left[-\frac{2\pi}{T} \operatorname{ctg} \alpha \vec{e}_\xi, r \cos \alpha \vec{e}_\xi + r \sin \alpha \vec{e}_\zeta\right]\right].$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих единичных векторах в правой и левой частях последнего уравнения, получим:

$$-\frac{(V_M)^2}{r \cos \alpha} = \varepsilon_\eta r \sin \alpha, 0 = -\varepsilon_\xi r \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_\eta \vec{e}_\eta = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \operatorname{ctg} \alpha \vec{e}_\eta.$$

Совпадение полученных разными способами результатов может служить подтверждением их достоверности.

**Задача 1.10.** [3, 24.41]

Для передачи вращения от вала I, вращающегося вокруг неподвижной оси  $FE$  к расположенному с ним в одной плоскости валу II, вращающемуся вокруг неподвижной оси  $EG$  ( $(\vec{e}_{FE}, \vec{e}_{EG}) = \cos \alpha$ , используется шарнир Кардано-Гука, образованный крестовиной и двумя вилками, жестко связанными с валами (см. рис. 1.10.1).

Крестовина представляет собой абсолютно твердое тело, составленное из двух отрезков  $AB$  и  $CD$  одинаковой длины, соединенных серединами под прямым углом ( $(\vec{e}_{AB}, \vec{e}_{CD}) = 0$ ). Крайние точки крестовины  $A, B, C, D$  вставлены в подшипники, закрепленные на концах вилок, так, что при движении крестовина может вращаться относительно каждой из вилок, при этом центр крестовины — точка  $E$  — совпадает с линией пересечения осей  $FE$  и  $EG$ , и  $(\vec{e}_{AB}, \vec{e}_{FE}) = (\vec{e}_{EG}, \vec{e}_{CD})$ . Угловая скорость вала I равна  $\omega_1 \vec{e}_{FE}$ . Найти угловую скорость  $\omega_2$  вала II, как функцию от  $\omega_1$  и угла  $\varphi$  поворота вала I.

**Решение.**

А. Для краткости записи введем обозначения:  $\vec{e}_{EA} = \vec{e}_1(t)$ ,  $\vec{e}_{EC} = \vec{e}_2(t)$ ,  $\vec{e}_{EG} = \vec{e}_\alpha$ .

Введем неподвижный трехгранник  $Exyz$  — ось  $Ez$  перпендикулярна  $FE$  и лежит в плоскости осей  $FE$  и  $EZ$  ( $(\vec{e}_x, \vec{e}_\alpha) = \sin \alpha$ ,

ось  $Ey$  направлена вдоль оси  $FE$  ( $\vec{e}_y = \vec{e}_{FE}$ ),  $\vec{e}_x = [\vec{e}_y, \vec{e}_z]$ . Будем для определенности считать, что  $\omega_1 > 0$ , и, что  $\vec{e}_1(0) = \vec{e}_x$ . Обозначим угол, отсчитываемый в положительном направлении от оси  $Ex$  до вектора  $\vec{e}_1(t)$  через  $\varphi(t)$ . Заметим, что вектор  $\vec{e}_1(t)$  постоянно находится в плоскости  $Ezx$ , а вектор  $\vec{e}_2(t)$  в плоскости  $P$ , перпендикулярной оси  $EG$ . Эта плоскость образует с плоскостью  $Ezx$  угол  $\alpha$ . Вектор  $\vec{e}_2(0)$  лежит на линии пересечения плоскостей  $Eyz$  и  $P$ . Угол между этой линией и вектором  $\vec{e}_2(t)$ , соответствующий повороту вектора  $\vec{e}_1(t)$  на угол  $\varphi(t)$ , обозначим  $\psi(t)$  (см. рис. 1.10.2).

Внимание, проявляемое к поведению частей крестовины, оправдано тем, что она является ключевой частью механизма — если ее убрать, валы могут вращаться независимо друг от друга, при наличии крестовины вращение вала I однозначно определяет вращение вала II.

Б. Выбирая подход к решению задачи, обратим внимание на то что, движение крестовины можно рассматривать как сложное движение — переносное — вместе с валом I, и относительное — относительно трехгранника, жестко связанного с валом I. В этой ситуации можно воспользоваться *теоремой сложения угловых скоростей* (1.19):

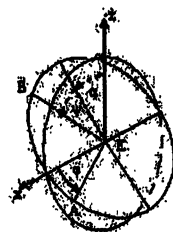


Рис. 1.10.2.

$$\vec{\omega}^{abc} = \vec{\omega}^{пер}(I) + \vec{\omega}^{отн}(I), \quad (1.10.1)$$

где  $\vec{\omega}^{abc}$  — абсолютная угловая скорость крестовины (ее угловая скорость относительно трехгранника  $Exyz$ ),

$\vec{\omega}^{отн}(I)$  — относительная угловая скорость крестовины (ее угловая скорость относительно трехгранника, связанного с валом I),

$\vec{\omega}^{пер}(I)$  — переносная угловая скорость крестовины (угловая скорость трехгранника, связанного с валом I). Уравнение (1.10.1) содержит 4 скалярных неизвестных величины: три проекции вектора  $\vec{\omega}^{abc}$  —  $\omega_x^{abc}, \omega_y^{abc}, \omega_z^{abc}$  и величину  $\lambda$  вектора  $\vec{\omega}^{отн}(I)$ ; направление этого вектора известно: по отношению к трехграннику, связанному с валом I, крестовина может вращаться только вокруг оси  $AB$ , поэтому

$$\vec{\omega}^{отн}(I) = \lambda \vec{e}_1,$$



вектор  $\vec{\omega}^{\text{пер}}(I)$  известен целиком

$$\vec{\omega}^{\text{пер}}(I) = \omega_1 \vec{e}_y \Rightarrow \vec{\omega}^{\text{абс}} = \omega_1 \vec{e}_y + \lambda \vec{e}_1. \quad (1.10.2)$$

Уравнение (1.10.2) позволяет получить систему *трех независимых скалярных уравнений*, что недостаточно для нахождения *четырех* неизвестных. Однако наши рассуждения до сих пор не учитывали наличия вала II. Применяв еще раз теорему сложения угловых скоростей (подвижный трехгранник теперь жестко связан с валом II), получим:

$$\vec{\omega}^{\text{абс}} = \omega_2 \vec{e}_\alpha + \mu \vec{e}_2, \quad (1.10.3)$$

$$(\mu \vec{e}_2 = \vec{\omega}^{\text{отн}}(II), \omega_2 \vec{e}_\alpha = \vec{\omega}^{\text{пер}}(II)).$$

Вектор абсолютной угловой скорости в уравнениях (1.10.2) и (1.10.3) один и тот же. Поэтому приравняв правые части этих уравнений, имеем

$$\omega_1 \vec{e}_y + \lambda \vec{e}_1 = \omega_2 \vec{e}_\alpha + \mu \vec{e}_2. \quad (1.10.4)$$

Уравнение (1.10.4) в принципе решает поставленную задачу, поскольку с его помощью можно получить *три независимых скалярных уравнения* для определения *трех скалярных неизвестных* —  $\lambda, \mu, \omega_2$ .

В. Чтобы получить систему уравнений для нахождения неизвестных, надо умножить уравнение (1.10.4) на три линейно-независимых единичных вектора. Критерием выбора этих векторов (направлений проектирования) можно считать простоту возникающей системы.

В рассматриваемой задаче значения неизвестных  $\lambda$  и  $\mu$  нас, вообще говоря, не интересуют, поэтому хотелось бы иметь *одно* уравнение, в которое входила бы *единственная* неизвестная  $\omega_2$ . Вектор  $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$  перпендикулярен каждому из сомножителей, поэтому умножив скалярно на него правую и левую части уравнения (1.10.4), получим

$$\omega_1 (\vec{e}_y, [\vec{e}_1, \vec{e}_2]) = \omega_2 (\vec{e}_\alpha, [\vec{e}_1, \vec{e}_2]) \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 (\vec{e}_y, [\vec{e}_1, \vec{e}_2])}{(\vec{e}_\alpha, [\vec{e}_1, \vec{e}_2])}.$$

Осталось найти как зависит последнее выражение от угла  $\varphi$ . Запишем векторы  $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_1, \vec{e}_2$  в базисе  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ :

$$\vec{e}_\alpha = 0 \cdot \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y + \sin \alpha \cdot \vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_1 = \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y - \sin \varphi \cdot \vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_2 = \sin \psi \cdot \vec{e}_x - \cos \psi \sin \alpha \cdot \vec{e}_y + \cos \psi \cos \alpha \cdot \vec{e}_z.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 [\vec{e}_1, \vec{e}_2] &= \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y - \sin \varphi \cdot \vec{e}_z, \sin \psi \cdot \vec{e}_x - \\
 &\quad - \cos \psi \sin \alpha \cdot \vec{e}_y + \cos \psi \cos \alpha \cdot \vec{e}_z = \\
 &= -\cos \varphi \cos \psi \sin \alpha \cdot \vec{e}_z - (\cos \varphi \cos \psi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \psi) \vec{e}_y - \\
 &\quad - \sin \varphi \cos \psi \sin \alpha \cdot \vec{e}_x,
 \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
 \omega_2 &= \omega_1 \frac{-(\cos \varphi \cos \psi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \psi) \vec{e}_y}{-\cos \alpha (-\cos \varphi \cos \psi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \psi) \vec{e}_y - \sin \alpha \cos \varphi \cos \psi \sin \alpha} = \\
 &= \omega_1 \left( \frac{\cos \alpha + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi} \right).
 \end{aligned}$$

Чтобы исключить из этого соотношения  $\psi$ , заметим, что

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0 \Rightarrow \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.10.5)$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}.$$

Г. Найденное решение выдерживает простейшую проверку - при  $\alpha = 0$  угловые скорости валов должны быть одинаковы. Вернемся, теперь, к началу решения и обратим внимание на то, что, во-первых оба вала, вращаются вокруг *неподвижных осей*, и, во-вторых,  $\varphi$  и  $\psi$  представляют собой углы поворота этих валов по отношению к *неподвижному* трехграннику, т.е.

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\varphi} \vec{e}_y, \vec{\omega}_2 = \dot{\psi} \vec{e}_\alpha \Rightarrow \omega_1 = \dot{\varphi}, \omega_2 = \dot{\psi}.$$

Значит, для того, чтобы ответить на вопрос задачи, нам достаточно найти связь между  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$ . Но эту связь легко найти, продифференцировав соотношение (1.10.5), которое выполняется в любой момент времени:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\operatorname{tg} \psi) &= \frac{d}{dt}(\cos \alpha \operatorname{tg} \varphi) \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \psi} \dot{\psi} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi} \Rightarrow \\
 \dot{\psi} &= \dot{\varphi} \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi (1 + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы смогли найти решение, используя лишь *определение угловой скорости* тела, вращающегося вокруг *неподвижной* оси, и геометрическое соотношение (1.10.5).

## Глава 2

# Динамика точки

### 1. Перечень II: основные понятия и теоремы динамики материальной точки

Определения основных динамических величин {обозначения:  $m$  — масса точки  $M$  (в рамках классической механики считается постоянной),  $\vec{r}_M$  — радиус-вектор точки  $M$ ):

1. импульс (количество движения) точки  $M$  (вектор):

$$\vec{p} = m\vec{V}_M; \quad (\text{II.1})$$

2. кинетический момент (момент импульса, момент количества движения) точки  $M$  (вектор):

$$\vec{k} = [\vec{r}_M, m\vec{V}_M]; \quad (\text{II.2})$$

3. кинетическая энергия точки  $M$  (скаляр):

$$T = \frac{m(\vec{V}_M, \vec{V}_M)}{2} = \frac{mV_M^2}{2}; \quad (\text{II.3})$$

4. элементарная работа силы  $\vec{F}$  на действительном перемещении  $d\vec{r}_M$  (скаляр):

$$A(d\vec{r}_M) = (\vec{F}, d\vec{r}_M), d\vec{r}_M = \vec{V}_M dt, \quad (\text{II.4})$$

(если  $(\vec{F}, d\vec{r}_M) = dU$ , функция  $U$  называется силовой функцией, а функция  $\Pi = -U$  — потенциальной энергией);

5. момент силы  $\vec{F}$ , действующей на точку  $M$ , относительно точки  $O$  (вектор):

$$mom_O(\vec{F}) = [\vec{r}_M, \vec{F}], \quad (\text{II.5})$$

момент силы  $\vec{F}$ , относительно оси с направляющим вектором  $\vec{e}_{OA}$ , проходящей через начало координат  $O$  (скаляр):

$$mom_{OA}(\vec{F}) = (\vec{e}_{OA}, [\vec{r}_M, \vec{F}]). \quad (\text{II.5}')$$

Материальная точка называется свободной, если ее координаты и проекции скорости могут принимать произвольные значения. Если на свободную точку  $M$  действует заданная сила  $\vec{F}$  (сила называется заданной, если  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_M, \vec{V}_M, t)$  — известная функция), справедливы следующие соотношения:

1. закон изменения импульса (количества движения):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow m\vec{a}_M = \vec{F}; \quad (\text{II.6})$$

2. теорема об изменении кинетического момента (момента импульса, момента количества движения):

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{r}_M, \vec{F}]; \quad (\text{II.7})$$

3. теорема об изменении кинетической энергии:

$$dT = (\vec{F}, d\vec{r}_M). \quad (\text{II.8})$$

Возможны ситуации, когда на координаты и проекции скорости точки наложены ограничения: например, точка должна двигаться по заранее заданной поверхности или кривой. В этом случае говорят, что на точку наложены связи. Связи выражаются в виде уравнений или неравенств, которым должны удовлетворять координаты и проекции скорости точки. Пример: точка  $M$  должна двигаться по неподвижной сфере радиуса  $l$  с центром в начале координат; уравнение связи можно записать в виде:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = l^2,$$

или

$$(\vec{r}_M, \vec{r}_M) = l^2,$$

или

$$\dot{x}_M x_M + \dot{y}_M y_M + \dot{z}_M z_M = 0,$$

или

$$(\dot{\vec{r}}_M, \vec{r}_M) = 0;$$

если точка должна оставаться внутри указанной сферы, уравнение связи будет выглядеть так:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 \leq l^2.$$

Для того чтобы при движении точки под действием заданной силы не нарушалось уравнение связи, необходимо ввести дополнительную силу, называемую *реакцией связи*, которая, обычно, обозначается буквой  $\vec{R}$ . В отличие от заданной силы *величина и направление реакции связи заранее не известны*. При наличии связей основные теоремы динамики точки приобретают вид:

1. закон изменения импульса (количества движения):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{R} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \vec{F} + \vec{R} \Leftrightarrow m\vec{a}_M = \vec{F} + \vec{R}; \quad (\text{II.9})$$

2. теорема об изменении кинетического момента (момента импульса, момента количества движения):

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{r}_M, \vec{F} + \vec{R}]; \quad (\text{II.10})$$

3. теорема об изменении кинетической энергии:

$$dT = (\vec{F} + \vec{R}, d\vec{r}_M). \quad (\text{II.11})$$

Связь называется *идеальной*, если реакция направлена *по нормали* к поверхности или кривой, по которой движется точка (если уравнение связи явно зависит от времени, нормаль строится при фиксированном времени). Соотношения (II.6), (II.7), (II.9) и (II.10) являются векторными. Проектируя их на различные направления, можно получать скалярные уравнения, с помощью которых решаются конкретные задачи динамики точки. Всего с помощью трех теорем в общем случае можно составить *семь скалярных уравнений* (среди них, разумеется, не все будут *независимыми*), что дает возможность выбрать *хорошие* уравнения — уравнения, которые приведут к решению данной задачи наиболее простым способом.

Важным примером *хороших* уравнений являются *первые интегралы*. Первым интегралом уравнений движения называется функция координат и проекций скорости точки, полная производная которой *в силу уравнений движения* тождественно равна нулю (значение этой функции при движении точки вдоль траектории остается постоянным).

Примеры первых интегралов:

а) Пусть выполнены условия:  $\forall t$

$$(i) (\vec{R}, d\vec{r}_M) = 0,$$

$$(ii) (\vec{F}, d\vec{r}_M) = dU.$$

Тогда из теорем (II.8) и (II.11) следует

$$T = U + h \Leftrightarrow T + \Pi = h, (h = \text{const}).$$

Этот первый интеграл называется *интегралом энергии*.

б) Пусть выполнены условия:  $\forall t \quad \exists \vec{e} \quad (\ddot{e} = 0) : (\vec{e}, \vec{F} + \vec{R}) = 0.$

Тогда из теорем (II.6) и (II.9) следует

$$(\vec{p}, \vec{e}) = \text{const.}$$

в) Пусть выполнены условия:  $\forall t \quad \exists \vec{e} \quad (\ddot{e} = 0) :$

$$(\vec{e}, [\vec{r}_M, \vec{F} + \vec{R}]) = 0$$

Тогда из теорем (II.7) и (II.10) следует

$$(\vec{k}, \vec{e}) = \text{const.}$$

Если положить

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_z,$$

то при указанных условиях, проекция радиуса-вектора точки  $M$  на плоскость  $Oxy$  будет за равные времена замечать равные площади, поэтому этот первый интеграл называется *интегралом площадей*.

При проверке выполнения условий существования интеграла площадей полезно помнить, что, если сила *пересекает ось* или *параллельна оси*, ее момент относительно этой оси равен нулю.

## 2. Задачи

### Задача 2.1. [3, 27.59]

Частица  $M$  массы  $m$ , несущая отрицательный электрический заряд  $e$ , попадает в однородное магнитное поле напряженности  $\vec{H}$  со скоростью  $\vec{V}_0$ , перпендикулярной направлению напряженности поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, считая, что на нее действует единственная сила  $\vec{F} = -e[\vec{V}_M, \vec{H}]$ .

Решение.

А. Частица движется в трехмерном пространстве, следовательно, чтобы определить ее положение необходимо знать *три* ее координаты, для нахождения которых надо написать *три* уравнения. Выбирая координаты следует учитывать особенности задачи, в частности, разного рода симметрию. Так, в рассматриваемой задаче из однородности магнитного поля следует, что вектор  $\vec{H}$  постоянен в неподвижном пространстве, поэтому направление одной из осей неподвижного трехгранника (например оси  $Oz$ ) удобно связать с направлением этого вектора так, чтобы

$$\vec{H} = H\vec{\epsilon}_z.$$

Начало координат и направление оси  $Ox$  выберем из соображений простоты записи начальных условий, т.е. будем считать, что при  $t = 0$  частица находится в начале координат и

$$\dot{x}_M = V_0, \quad \dot{y}_M = 0, \quad \dot{z}_M = 0.$$

Ось  $Oy$  после этого определяется однозначно.

Б. Теперь надо написать уравнения движения точки. Понятие "уравнения движения" определено неоднозначно. Дело в том, что при изучении движения точки мы можем использовать уравнения, являющиеся следствиями общих теорем динамики точки (или

каких-либо других теорем). Две из общих теорем являются *векторными*, а одна *скалярной*, следовательно, используя все *три* теоремы мы можем написать *семь скалярных* соотношений. Разумеется, независимых среди этих соотношений будет не больше трех, но мы можем по разному формировать наборы (системы) независимых уравнений. В разных задачах выбор может диктоваться разными критериями, но всегда надо стремиться получить систему, в каком-либо смысле, *хорошую*.

Хорошая система уравнений отличается тем, что быстрее других приводит к решению данной конкретной задачи. Ответить на вопрос, как получить хорошую систему в общем случае вряд ли возможно, однако есть признак хорошего уравнения, годный практически всегда: если можно с помощью одной из общих теорем написать уравнение, в правой части которого стоит нуль, то это *хорошо*! Если при этом в левой части оказывается производная по времени от некоторой величины, то это *дважды хорошо*! В этом случае мы получаем первый интеграл.

В. Исходя из этого "принципа" рассмотрим закон изменения импульса (II.6):

$$m \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \vec{F} \Rightarrow m \frac{d\vec{V}_M}{dt} = -e[\vec{V}_M, \vec{H}] \Rightarrow$$

$$m \frac{d\vec{V}_M}{dt} = -e[\dot{s}_M \vec{e}_s, H \vec{e}_z]. \quad (2.1.1)$$

Анализируя соотношение (2.1.1) можно заметить, что если его правую и левую части умножить скалярно на векторы  $\vec{e}_s$  и  $\vec{e}_z$ , в обоих случаях получится *дважды хорошее* уравнение (используются свойства смешанного произведения трех векторов и формулы (I.11) и (I.3)):

$$m(\vec{e}_s, \frac{d\vec{V}_M}{dt}) = -e(\vec{e}_s, [\dot{s}_M \vec{e}_s, H \vec{e}_z]) \Rightarrow m(\vec{e}_s, \ddot{s}_M \vec{e}_s + \frac{1}{\rho} \dot{s}_M^2 \vec{e}_\nu + 0 \cdot \vec{e}_\beta) = 0 \Rightarrow$$

$$m \ddot{s}_M = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{s}_M) = 0 \Rightarrow \dot{s}_M(t) = \text{const},$$

$$m(\vec{e}_z, \frac{d\vec{V}_M}{dt}) = -e(\vec{e}_z, [\dot{s}_M \vec{e}_s, H \vec{e}_z]) \Rightarrow m(\vec{e}_z, \ddot{x}_M \vec{e}_x + \ddot{y}_M \vec{e}_y + \ddot{z}_M \vec{e}_z) = 0 \Rightarrow$$

$$m \ddot{z}_M = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{z}_M) = 0 \Rightarrow \dot{z}_M(t) = \text{const}.$$

Используя начальные условия, получим

$$\dot{s}_M(t) = \dot{x}_M(0) = V_0$$

$$\dot{z}_M(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} z_M = 0 \Rightarrow z_M = \text{const} = 0$$

т.е. частица движется в плоскости  $Oxy$  с постоянной по величине скоростью.

Чтобы довести решение задачи до конца надо написать еще одно уравнение. Так как траектория частицы плоская, вектор главной нормали  $\vec{e}_\nu$  лежит в этой плоскости. Кроме того, вектор  $\vec{H}$  перпендикулярен к плоскости движения, поэтому умножив (2.1.1) скалярно на  $\vec{e}_\nu$ , с учетом полученных ранее результатов, имеем

$$m(\vec{e}_\nu, \frac{d\vec{V}_M}{dt}) = -e(\vec{e}_\nu, [\dot{s}_M \vec{e}_s, H \vec{e}_z]) \Rightarrow \frac{m}{\rho} V_0^2 = e V_0 H \Rightarrow \rho(t) = \frac{m V_0}{e H}.$$

Таким образом, написав *три скалярных уравнения*, каждое из которых решалось *отдельно*, мы полностью решили задачу о движении частицы при указанных начальных условиях — она движется по окружности радиуса  $\frac{m V_0}{e H}$ , расположенной в плоскости  $Oxy$ , с постоянной по величине скоростью. Осталось определить, где находится центр этой окружности — точка  $C$ . Известно, что если точка движется по окружности с постоянной скоростью, то ее ускорение направлено к центру окружности. Запишем (2.1.1) при  $t = 0$

$$m \frac{d\vec{V}_M}{dt}(0) = -e[V_0 \vec{e}_x, H \vec{e}_z] \Rightarrow m \vec{a}_M(0) = e V_0 H \vec{e}_y,$$

откуда следует, что точка  $C$  имеет координаты

$$x_C = 0, y_C = \frac{m V_0}{e H}, z_C = 0.$$

Г. Легко можно заметить, что теорема об изменении кинетической энергии также позволяет получить первый интеграл:

$$dT = (\vec{F}, d\vec{r}) \Rightarrow dT = (-e[\vec{V}_M, \vec{H}], \vec{V}_M dt) \Rightarrow dT = 0 \Rightarrow \\ T = \text{const} \Rightarrow V_M = \text{const},$$

но такое уравнение мы уже вывели из других соображений, что подтверждает высказанное выше положение: полученные с помощью разных теорем соотношения могут быть зависимы.

Посмотрим, что получится если просто расписать уравнение (2.1.1) в выбранных декартовых координатах:

$$m(\ddot{x}_M \vec{e}_x + \ddot{y}_M \vec{e}_y + \ddot{z}_M \vec{e}_z) = -e[\dot{x}_M \vec{e}_x + \dot{y}_M \vec{e}_y + \dot{z}_M \vec{e}_z, H \vec{e}_z] \Rightarrow \\ m \ddot{x}_M = -e \dot{y}_M H, \quad (2.1.2)$$

$$\ddot{y}_M = e \dot{x}_M H, \quad (2.1.3)$$

$$m \ddot{z}_M = 0. \quad (2.1.4)$$



В отличие от ранее рассмотренного решения, где каждое из выведенных уравнений решалось *отдельно*, мы получили *систему трех* скалярных дифференциальных уравнений для нахождения *трех* скалярных неизвестных. К нашему счастью, уравнение (2.1.4) и в этом случае отделяется, т.е. может быть решено независимо от первых двух. Решая его, с учетом начальных условий, имеем:

$$m\ddot{z}_M = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{z}_M = 0 \Rightarrow \dot{z}_M = \text{const} = 0 \Rightarrow z_M = \text{const} = 0.$$

Оставшиеся два уравнения должны решаться совместно. Заметим, что если перенести все члены этих уравнений в левую часть, их можно переписать в следующем виде ( и получить *дважды хорошие* уравнения):

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_M + eHy_M) = 0 \Rightarrow m\dot{x}_M + eHy_M = \text{const} = mV_0, \quad (2.1.5)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}_M - eHx_M) = 0 \Rightarrow m\dot{y}_M - eHx_M = \text{const} = 0. \quad (2.1.6)$$

Теперь, разрешив уравнения (2.1.5) и (2.1.6) относительно  $\dot{x}_M$  и  $\dot{y}_M$ , и подставив результаты в уравнения (2.1.3) и (2.1.2), получим:

$$m\ddot{x}_M = -eH\left(\frac{eHx_M}{m}\right) \Rightarrow \ddot{x}_M + \left(\frac{eH}{m}\right)^2 x_M = 0, \quad (2.1.7)$$

$$m\ddot{y}_M = eH\left(V_0 - \frac{eHy_M}{m}\right) \Rightarrow \ddot{y}_M + \left(\frac{eH}{m}\right)^2 y_M = \frac{eHV_0}{m}. \quad (2.1.8)$$

Сделав в уравнении (2.1.8) замену переменных

$$\eta_M = y_M - \frac{mV_0}{eH},$$

замечаем, что  $\eta_M$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\eta}_M + \left(\frac{eH}{m}\right)^2 \eta_M = 0, \quad (2.1.9)$$

Общее решение уравнений (2.1.7) и (2.1.9) (они называются уравнениями линейного (гармонического) осциллятора) имеет вид

$$x_M = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \omega = \frac{eH}{m}, \quad (2.1.10)$$

$$\eta_M = C \cos \omega t + D \sin \omega t, \omega = \frac{eH}{m}, \quad (2.1.11)$$

Для нахождения произвольных постоянных используем начальные условия:

$$x_M(0) = 0, \dot{x}_M(0) = V_0,$$

$$\eta_M(0) = -\frac{mV_0}{eH}, \dot{\eta}_M(0) = 0,$$

Подставляя эти значения в выражения (2.1.10) и (2.1.11) (и в соотношения, которые получаются при дифференцировании указанных выражений) имеем

$$0 = A, V_0 = B\omega \Rightarrow x_M = \frac{mV_0}{eH} \sin \omega t, \\ -\frac{mV_0}{eH} = C, 0 = D\omega \Rightarrow \eta_M = -\frac{mV_0}{eH} \cos \omega t \Rightarrow$$

$$y_M = \frac{mV_0}{eH} (1 - \cos \omega t) \Rightarrow$$

$$(x_M)^2 + (y_M - \frac{mV_0}{eH})^2 = \left(\frac{mV_0}{eH}\right)^2,$$

т.е. частица движется по окружности радиуса  $\frac{mV_0}{eH}$  с центром, расположенном в точке  $x = 0, y = \frac{mV_0}{eH}$ .

Первый способ кажется предпочтительнее, поскольку он быстрее приводит к решению поставленной задачи. Второе решение представляется более длинным и менее красивым. Однако, если изменить начальные условия и считать, что скорость частицы в начальный момент образует с вектором  $\vec{H}$  угол  $0 < \alpha < \pi/2$ , то второе решение можно применять практически без изменений (изменится лишь значение постоянных в уравнениях (2.1.5) и (2.1.6)), в то время как первое решение впрямую не проходит: траектория не является плоской, и, значит, чтобы написать проекцию уравнения (2.1.1) на главную нормаль ее надо сначала найти. Это и понятно: чем более подробно в решении задачи учитываются ее конкретные особенности, тем менее может пригодиться это решение при исследовании задач с измененными условиями.

### Задача 2.2.

Найти первую и вторую космические скорости для Земли.

Решение.

А+Б. Прежде всего нужно определить упомянутые в задаче понятия и условия, в которых мы будем эту задачу решать.

Будем считать, что Земля представляет собой шар со сферически симметричным распределением масс, а трехгранник *Стуз* с вершиной *С*, расположенной в центре Земли, и осями *Сх*, *Су*, *Сz* неизменного относительно неподвижных звезд направления, задает инерциальную систему.

Будем, также, считать, что движение тела массы  $m$ , размерами и массой которого можно пренебречь по сравнению с размерами и массой Земли ( т.е. считать его материальной точкой  $M$  ) не влияет на движение Земли.

При этих предположениях задача о движении указанного тела сводится к задаче о движении материальной точки  $M$  под действием силы, задаваемой формулой

$$\vec{F} = -\frac{m\lambda}{(r_M)^2} \vec{e}_r, r_M = |CM|, \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CM}}{|CM|}.$$

Пусть радиус Земли равен  $R$ , а ускорение, сообщаемой указанной силой на поверхности Земли, —  $g_0$ .

Первой космической скоростью называется скорость  $V_1$ , с которой при указанных условиях точка  $M$  совершала бы движение по окружности радиуса  $R$ .

Второй космической скоростью называется минимальная скорость  $V_2$ , которую надо сообщить точке на поверхности Земли, для того чтобы она могла удалиться от Земли на бесконечное расстояние.

В. Итак, движение точки  $M$  относительно трехгранника *Схуз* подчиняется закону изменения импульса:

$$m\vec{a}_M = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a}_M = -\frac{m\lambda}{(r_M)^2} \vec{e}_r. \quad (2.2.1)$$

Это уравнение допускает решение, при котором точка движется по окружности с центром в точке  $C$  с постоянной по величине скоростью. Пусть радиус окружности равен  $R$ . Запишем проекцию уравнения (2.2.1) на нормаль к траектории:

$$m \frac{(V_1)^2}{R} = m \frac{\lambda}{R^2}, \frac{\lambda}{R^2} = g_0 \Rightarrow \frac{(V_1)^2}{R} = g_0 \Rightarrow V_1 = \sqrt{g_0 R}.$$

Для Земли

$$g_0 \approx 9.83 \left( \frac{m}{s^2} \right), R \approx 6378 \cdot 10^3 m \Rightarrow V_1 \approx 7918 \left( \frac{m}{s} \right).$$

Вычисление первой космической скорости облегчает тот факт, что известна траектория, по которой движется точка. В определении второй космической скорости ничего о траектории не говорится, поэтому необходимо более подробно разобраться в свойствах движения при принятых предположениях. Известно, что под действием центральной силы материальная точка движется в неподвижной плоскости, содержащей начальный радиус-вектор  $\vec{r}_M(0)$

и вектор начальной скорости  $\vec{V}_M(0)$ . Если эти векторы не коллинеарны, плоскость определяется однозначно (случай коллинеарности разберем отдельно). Пусть эта плоскость совпадает с плоскостью  $Cxy$ , и пусть  $r_M$  и  $\varphi_M$  полярные координаты точки  $M$  в этой плоскости. Для определения *двух* координат нужны *два* уравнения. Самый простой способ получения уравнений движения - записать закон изменения импульса в проекциях на радиальное и трансверсальное направления. Умножив обе части уравнения (2.2.1) на  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\varphi$ , получим:

$$m(\ddot{r}_M - r_M \dot{\varphi}_M^2) = -\frac{m\lambda}{(r_M)^2},$$

$$m(r_M \ddot{\varphi}_M + 2\dot{r}_M \dot{\varphi}_M) = 0.$$

Одно из этих уравнений даже является *хорошим* в нашей терминологии. Однако, после не слишком обременительных рассуждений, можно вывести гораздо более удачные уравнения. Обратим внимание на примеры первых интегралов, приведенные в заключительной части перечня II: сила, приложенная к точке  $M$  постоянно пересекает ось  $Cz$ , значит имеет место *интеграл площадей*

$$(\vec{k}, \vec{e}_z) = \text{const} \Rightarrow (r_M)^2 \dot{\varphi}_M = c, \quad (2.2.2)$$

кроме того

$$(\vec{F}, d\vec{r}_M) = -\frac{m\lambda}{(r_M)^2} dr_M = d\left(\frac{m\lambda}{r_M}\right),$$

следовательно,

$$dT = d\left(\frac{m\lambda}{r_M}\right) \Rightarrow T - \frac{m\lambda}{r_M} = mh \Rightarrow \frac{1}{2}((\dot{r}_M)^2 + (r_M \dot{\varphi}_M)^2) - \frac{\lambda}{r_M} = h, \quad (2.2.3)$$

и вместо системы двух дифференциальных уравнений, каждое из которых является уравнением *второго* порядка, мы получили систему двух уравнений *первого* порядка и, значит, сумели понизить порядок системы вдвое! Кроме того, разрешив уравнение (2.2.2) относительно  $\dot{\varphi}_M$  и, подставив результат в уравнение (2.2.3), получим соотношение

$$\frac{1}{2}(\dot{r}_M)^2 + \frac{c^2}{2(r_M)^2} - \frac{\lambda}{r_M} = h, \quad (2.2.4)$$

которое удобно исследовать с помощью фазовой плоскости. Введем обозначение

$$\Pi_{\text{эфф}}(r_M) = \frac{c^2}{2(r_M)^2} - \frac{\lambda}{r_M}.$$

Функция  $\Pi_{\text{эфф}}(r_M)$  называется эффективным потенциалом. Используя эту функцию, график которой представлен на рис. 2.2.1, перепишем уравнение (2.2.4) в виде:

$$\dot{r}_M = \pm \sqrt{2(h - \Pi_{\text{эфф}}(r_M))}. \quad (2.2.5)$$

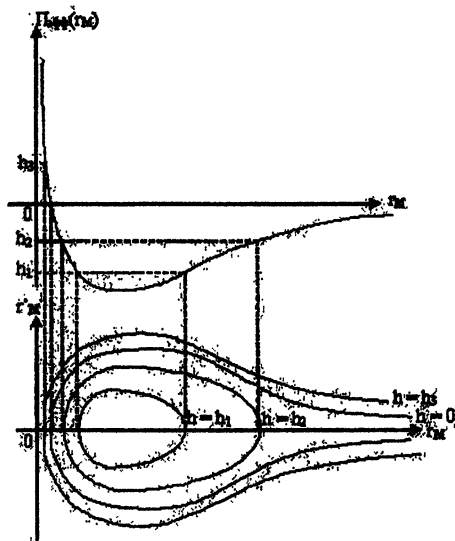


Рис. 2.2.1.

Соотношение (2.2.5) позволяет построить фазовые траектории, изображенные на рис. 2.2.1. Из анализа функции  $\Pi_{\text{эфф}}(r_M)$  и уравнения (2.2.5) вытекает, что первой неограниченной фазовой траектории соответствует значение  $h = 0$ . Но из определения второй космической скорости и уравнения (2.2.3) следует

$$h = \frac{(V_M(0))^2}{2} - \frac{g_0 R^2}{R}, h = 0 \Rightarrow V_2 = \sqrt{2g_0 R} \approx 11198 \left(\frac{m}{s}\right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда начальная скорость направлена по радиусу-вектору. В этой ситуации  $\phi_M(0) = 0$ ,  $c = 0$ , а интеграл энергии принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{(\dot{r}_M)^2}{2} - \frac{g_0 R^2}{r_M} &= \frac{V_M(0)^2}{2} - \frac{g_0 R^2}{R} \Rightarrow \\ \dot{r}_M &= \pm \sqrt{\frac{2g_0 R^2}{r_M} + ((V_M(0))^2 - 2g_0 R)}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Из уравнения (2.2.6) следует

1) если  $((V_M(0))^2 - 2g_0R) > 0$ , то  $\dot{r}_M > 0$  всюду и точка уходит в бесконечность,

2) если  $((V_M(0))^2 - 2g_0R) = 0$ , то уравнение (2.2.6) легко интегрируется и из его решения видно, что точка уходит в бесконечность,

3) если  $((V_M(0))^2 - 2g_0R) < 0$ , то в положении  $r_M = \frac{2g_0R^2}{2g_0R - (V_M(0))^2}$ ,  $\dot{r}_M$  обращается в нуль и дальше точка продвинуться не может,  $r_M$  ограничено.

Таким образом, и в этом случае

$$V_2 = \sqrt{2g_0R}.$$

Г. Используя функцию эффективного потенциала и представление движения точки с помощью фазовой плоскости, можно получить значение не только второй но и первой космической скорости.

Действительно, тому значению энергии, при котором эффективный потенциал имеет минимум, соответствует фазовая траектория, представляющая собой точку. Это означает, что движение материальной точки при указанных значениях параметров (энергии и кинетического момента) происходит по траектории с  $r_M = \text{const}$ , т.е. по окружности. В точке минимума

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_M} \Pi_{\text{эфф}}(r_M) &= \frac{\partial}{\partial r_M} \left( \frac{c^2}{2(r_M)^2} - \frac{\lambda}{r_M} \right) = 0 \Rightarrow \\ -\frac{c^2}{(r_M)^3} + \frac{g_0R^2}{(r_M)^2} &= \frac{g_0R^2}{(r_M)^2} \left( 1 - \frac{1}{r_M} \left( \frac{c^2}{g_0R^2} \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

поэтому, обозначая радиус круговой орбиты  $(r_M)_{\text{кр}}$ , получим:

$$(r_M)_{\text{кр}} = \frac{c^2}{g_0R^2}. \quad (2.2.7)$$

Заметим, что при движении по окружности

$$c = (r_M)_{\text{кр}}(V_M)_{\text{кр}}. \quad (2.2.8)$$

Подставляя (2.2.8) в (2.2.7) имеем:

$$(r_M)_{\text{кр}} = \frac{((r_M)_{\text{кр}}(V_M)_{\text{кр}})^2}{g_0R^2} \Rightarrow ((V_M)_{\text{кр}})^2 = \frac{g_0R^2}{(r_M)_{\text{кр}}}, \quad (2.2.9)$$

что в случае движения по окружности, радиус которой равен радиусу Земли, дает

$$((V_M)_{\text{кр}})^2 = (V_1)^2 = g_0R.$$

Отметим, что при движении по окружности произвольного радиуса

$$(V_M)_{кр} = \text{const} = \frac{2\pi(r_M)_{кр}}{\tau_{кр}}, \quad (2.2.10)$$

где  $\tau_{кр}$  — период обращения точки по окружности. Подставляя (2.2.10) в (2.2.9), получим:

$$\frac{((r_M)_{кр})^3}{(\tau_{кр})^2} = \frac{g_0 R^2}{(2\pi)^2} = \text{const},$$

что представляет собой аналог третьего закона Кеплера.

### Задача 2.3.

Написать уравнения движения математического маятника.

Решение.

А+Б. Математическим маятником называется модель, представляющая собой материальную точку, которая может двигаться под действием силы тяжести по гладкой неподвижной окружности, расположенной в вертикальной плоскости. Гладкость окружности означает, в данном случае, что реакция направлена по нормали к ней. Используя это обстоятельство, запишем реакцию в виде:

$$\vec{R} = N\vec{e}_\nu,$$

где  $\vec{e}_\nu$  — единичный вектор главной нормали к окружности.

Пусть точка  $O$  является центром окружности, ось  $Oz$  направим вертикально вниз, ось  $Ox$  — вправо. Направление отсчета угла  $\varphi$  указано стрелкой (см. рис. 2.3.1).

Будем считать, что радиус окружности равен  $l$ .

Как уже отмечалось в задаче 2.1 понятие "уравнения движения" определено неоднозначно. В широком смысле — уравнения движения — это любой набор уравнений, позволяющий найти координаты точки как функции времени и начальных условий. Если на точку наложены связи,

эти уравнения могут в том или ином виде содержать реакцию, что увеличивает число неизвестных и, тем самым, усложняет решение задачи. Поэтому, если по условию задачи нахождение реакции не требуется, надо постараться так составить уравнения, чтобы они зависели бы только от координат точки.

В рассматриваемой задаче, положение точки  $M$  можно определить, задав одну координату — угол  $\varphi_M$ . Значит, для того чтобы

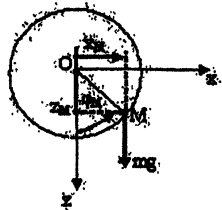


Рис. 2.3.1.

описать движение маятника, нам достаточно *одного* уравнения, содержащего *единственную* неизвестную функцию  $\varphi_M(t)$ .

В. С целью получения уравнения движения математического маятника рассмотрим теоремы II.9-II.11.

а) Закон изменения импульса (количества движения) II.9:

$$m\vec{a}_M = \vec{F} + \vec{R}.$$

В нашем случае

$$\vec{F} = mg\vec{e}_z, \quad (2.3.1)$$

$$m\vec{a}_M = mg\vec{e}_z + N\vec{e}_\nu \quad (2.3.3)$$

и, чтобы получить соотношение, не содержащее неизвестную величину  $N$ , нам надо умножить обе части уравнения (2.3.3) скалярно на единичный вектор, перпендикулярный  $\vec{e}_\nu$ . Таким вектором является, например,  $\vec{e}_\tau$ . В результате после умножения получим:

$$m(\vec{a}_M, \vec{e}_\tau) = mg(\vec{e}_z, \vec{e}_\tau). \quad (2.3.4)$$

Формула (I.11) дает

$$(\vec{a}_M, \vec{e}_\tau) = \ddot{s}_M, \quad (2.3.5)$$

кроме того, для точки движущейся по окружности,

$$s_M = l\varphi_M, \quad (2.3.6)$$

и

$$\vec{e}_\tau = \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z = -\sin \varphi_M \vec{e}_\tau - \cos \varphi_M \vec{e}_\nu \quad (2.3.7).$$

Подставив в (2.3.4) последовательно выражения (2.3.5), (2.3.6) и (2.3.7) получим:

$$ml\ddot{\varphi}_M = -mgl \sin \varphi_M \Rightarrow \ddot{\varphi}_M + \frac{g}{l} \sin \varphi_M = 0. \quad (2.3.8)$$

Уравнение (2.3.8) называется уравнением движения математического маятника.

б) Теорема об изменении кинетического момента точки (II.10):

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{r}_M, \vec{F} + \vec{R}]. \quad (2.3.9)$$

Поскольку речь идет о движении по окружности

$$\vec{r}_M = l\vec{e}_r, \vec{V}_M = l\dot{\varphi}_M \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\nu = -\vec{e}_\tau. \quad (2.3.10)$$

Подставляя в (2.3.9) выражения (2.3.1), (2.3.2), (2.3.10) и учитывая, что репер  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\nu)$  — правый, получим:

$$\frac{d}{dt} [l\vec{e}_r, ml\dot{\varphi}_M \vec{e}_\varphi] = [l\vec{e}_r, -mg(\sin \varphi_M \vec{e}_\varphi + \cos \varphi_M \vec{e}_\tau) - N\vec{e}_\tau] \Rightarrow$$



$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}_M\vec{e}_y) = -mgl\sin\varphi_M\vec{e}_y \Rightarrow \ddot{\varphi}_M + \frac{g}{l}\sin\varphi_M = 0,$$

и мы снова получили уравнение движения математического маятника.

в) Теорема об изменении кинетической энергии (II.11):

$$dT = (\vec{F} + \vec{R}, d\vec{r}_M), \quad (2.3.11)$$

для окружности

$$d\vec{r}_M = l d\varphi_M \vec{e}_\varphi.$$

Учитывая (2.3.1), (2.3.2), (2.3.7), (2.3.10), получим:

$$\begin{aligned} (\vec{F} + \vec{R}, d\vec{r}_M) &= (-mg(\sin\varphi_M\vec{e}_\varphi - \cos\varphi_M\vec{e}_r) - N\vec{e}_r, l d\varphi_M \vec{e}_\varphi) = \\ &= -mgl\sin\varphi_M d\varphi_M = d(mgl\cos\varphi_M) \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} dT &= d(mgl\cos\varphi_M) \Rightarrow \int_{T(0)}^T dT = \int_{\varphi_M(0)}^{\varphi_M} d(mgl\cos\varphi_M) \Rightarrow \\ T - T(0) &= mgl(\cos\varphi_M - \cos\varphi_M(0)), \\ \frac{m(l\dot{\varphi}_M)^2}{2} - \frac{m(l\dot{\varphi}_M(0))^2}{2} &= mgl(\cos\varphi_M - \cos\varphi_M(0)), \\ \varphi_M &= \pm \sqrt{(\dot{\varphi}_M(0))^2 + 2\frac{g}{l}(\cos\varphi_M - \cos\varphi_M(0))}. \quad (2.3.12) \end{aligned}$$

Уравнение (2.3.12) также как уравнение (2.3.8) позволяет найти движение маятника, и в этом смысле тоже является уравнением движения.

Г. Найдем связь между уравнениями (2.3.8) и (2.3.12). Заметим, что уравнение (2.3.8) не содержит первой производной, поэтому умножив обе его части на  $\dot{\varphi}_M$ , получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_M \dot{\varphi}_M + \frac{g}{l} \dot{\varphi}_M \sin\varphi_M &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\varphi}_M^2}{2} - \frac{g}{l} \cos\varphi_M \right) = 0 \Rightarrow \\ \frac{\dot{\varphi}_M^2}{2} - \frac{g}{l} \cos\varphi_M &= \frac{\dot{\varphi}_M(0)^2}{2} - \frac{g}{l} \cos\varphi_M(0). \end{aligned}$$

Разрешив последнее уравнение относительно  $\dot{\varphi}_M$ , получим уравнение (2.3.12). Проведенные рассуждения говорят о том, что оно является следствием уравнения (2.3.8).

Таким образом в данном случае любая из трех общих теорем позволяет получить *хорошее* уравнение. В заключение приведем

пример "плохих" уравнений движения математического маятника. Запишем закон изменения импульса в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oz$ :

$$m(\ddot{a}_M, \ddot{e}_x) = mg(\ddot{e}_x, \ddot{e}_x) + N(\ddot{e}_\nu, \ddot{e}_x) \Rightarrow m\ddot{x}_M = -N \frac{x_M}{l}, \quad (2.3.13)$$

$$m(\ddot{a}_M, \ddot{e}_z) = mg(\ddot{e}_z, \ddot{e}_z) + N(\ddot{e}_\nu, \ddot{e}_z) \Rightarrow m\ddot{z}_M = mg - N \frac{z_M}{l}. \quad (2.3.14)$$

Уравнения (2.3.13) и (2.3.14) совместно с уравнением связи

$$(x_M)^2 + (z_M)^2 = l^2,$$

образуют систему уравнений, в принципе, позволяющую при заданных начальных условиях найти координаты маятника как функции времени и начальных условий. Однако, понятно, что решать систему *трех* уравнений с *тремя* неизвестными  $(x_M, z_M, N)$  сложнее, чем одно уравнение (2.3.8) или (2.3.12) с одной неизвестной функцией.

#### Задача 2.4.

Угол отклонения математического маятника длины  $l$  и массы  $m$  от вертикали в начальный момент равен  $\pi/2$ , а скорость равна нулю. Найти величину реакции связи в момент, когда угол отклонения будет равен  $\pi/4$ .

Решение.

А. Введем координаты так, как это сделано в задаче 2.3. Из определения математического маятника следует, что

$$\vec{R} = N\vec{e}_\nu.$$

Ответить на поставленный вопрос мы сможем, зная функцию  $N(\varphi_M)$ .

Б. Чтобы найти реакцию, надо для начала написать какое-нибудь уравнение ее содержащее. Рассматривая общие теоремы динамики точки при наличии связи, замечаем, что реакция входит в каждую из них, однако закон изменения импульса содержит реакцию наиболее простым образом. Поэтому попытаемся воспользоваться для решения задачи этим законом.

В. Итак запишем закон изменения импульса (II.9):

$$m\ddot{a}_M = \vec{F} + \vec{R} \Rightarrow \vec{R} = m\ddot{a}_M - \vec{F}.$$

В рассматриваемой задаче

$$\vec{F} = mg\vec{e}_z, \vec{R} = N\vec{e}_\nu,$$

поэтому

$$N\vec{e}_\nu = m\ddot{a}_M - mg\vec{e}_z. \quad (2.4.1)$$

Умножив обе части уравнения (2.4.1) скалярно на  $\vec{e}_\nu$ , получим:

$$N = m(\vec{a}_M, \vec{e}_\nu) - mg(\vec{e}_z, \vec{e}_\nu), \quad (2.4.2)$$

$$\vec{e}_z = -\cos \varphi_M \vec{e}_\nu - \sin \varphi_M \vec{e}_\tau \Rightarrow N = m(\vec{a}_M, \vec{e}_\nu) + mg \cos \varphi_M,$$

и задача свелась к нахождению величины  $m(\vec{a}_M, \vec{e}_\nu)$  как функции  $\varphi_M$ .

Запишем ускорение в проекциях на оси естественного трехгранника. Поскольку точка движется по окружности (используем уравнение связи:  $\rho = \text{const} = l$ ):

$$\vec{a}_M = \ddot{s}_M \vec{e}_\tau + \frac{(\dot{s}_M)^2}{\rho} \vec{e}_\nu \Rightarrow m(\vec{a}_M, \vec{e}_\nu) = \frac{mV_M^2}{l}, \quad (2.4.3)$$

т.е., чтобы решить поставленную задачу, нужно найти  $V_M^2(\varphi_M)$ . Возвращаясь к общим теоремам динамики, видим, что теорема об изменении кинетической энергии (П.11) дает возможность определить  $V_M^2$ :

$$dT = (\vec{F} + \vec{R}, d\vec{r}_M) \Rightarrow d\left(\frac{mV_M^2}{2}\right) = (\vec{F} + \vec{R}, d\vec{r}_M).$$

Более того, поскольку

$$1) (\vec{R}, d\vec{r}_M) = 0,$$

$$2) (\vec{F}, d\vec{r}_M) = d(mgz_M) = d(mgl \cos \varphi_M),$$

имеет место интеграл энергии:

$$\frac{mV_M^2}{2} - \frac{mV_M^2}{2}(0) = mgl \cos \varphi_M - mgl \cos \varphi_M(0). \quad (2.4.4)$$

Подставляя выражения (2.4.3) и (2.4.4) в (2.4.2) получим:

$$N = 3mg \cos \varphi_M,$$

что в точке  $\varphi_M = \pi/4$  дает

$$N = \frac{3\sqrt{2}}{2} mg.$$

Г. Важно отметить, что невозможно решить задачу о движении точки при наличии связи, не используя в том или ином виде уравнение связи. В данном случае мы сделали это трижды: первый раз, когда записали

$$\vec{e}_z = -\cos \varphi_M \vec{e}_\nu - \sin \varphi_M \vec{e}_\tau \Rightarrow \vec{e}_\nu = -\vec{e}_\tau,$$

что характерно *только для окружности*, второй раз, считая, что радиус кривизны траектории точки *постоянен*, и, наконец, третий раз, применив в теореме об изменении кинетической энергии соотношение

$$z_M = l \cos \varphi_M.$$

### Задача 2.5. [4, 2.30]

Материальная точка  $M$  массы  $m$  подвешена с помощью невесомой нерастяжимой гибкой нити длины  $l$  в неподвижной точке  $O$  и может двигаться в неподвижной вертикальной плоскости  $Ozx$ ; ось  $Oz$  направлена вертикально вниз, ось  $Ox$  — вправо.

В начальный момент  $z_M(0) = l$ ,  $x_M(0) = 0$  и  $\vec{V}_M(0) = V_0 \vec{e}_x$ . Какова должна быть величина скорости  $V_0$ , чтобы:

а) точка  $M$  постоянно оставалась на окружности, вращаясь вокруг точки  $O$ ;

б) точка  $M$  в некоторый момент времени сошла с окружности;

в) точка  $M$  оставаясь на окружности совершала бы колебания, относительно точки  $z_M = l$ ,  $x_M = 0$ ?

Решение.

А. Прежде всего выясним, чем поставленная задача отличается от аналогичной задачи для математического маятника.

Уравнения связи для математического маятника (см. задачу 2.3) имеют вид:

$$z_M^2 + x_M^2 = l^2,$$

$$y_M = 0,$$

и реакция направлена по нормали к окружности :

$$\vec{R} = N \vec{e}_\nu,$$

( $\vec{e}_\nu$  — единичный вектор главной нормали к окружности) причем величина  $N$  может положительной, отрицательной или равняться нулю. Такая связь называется удерживающей или двухсторонней (точка не может сойти с окружности). Если связь осуществляется с помощью нити (нить может сминаться, но не может растягиваться), то ее уравнения выглядят следующим образом:

$$z_M^2 + x_M^2 \leq l^2,$$

$$y_M = 0,$$

что означает, что точка  $M$  может двигаться по окружности или внутри области, ограниченной этой окружностью. Если точка находится на окружности, то

$$\vec{R} = N \vec{e}_\nu,$$

причем

$$N \geq 0.$$

Если же точка сошла с окружности, то  $N = 0$ . Такая связь называется неудерживающей или односторонней.

Пока точка  $M$  находится на окружности, она движется под действием двух сил – силы тяжести  $\vec{F} = mg\vec{e}_z$  и реакции  $\vec{R} = N\vec{e}_\nu$ , и для задания ее положения достаточно одной координаты, например, угла  $\varphi_M$ .

При сходе с окружности точка  $M$  движется в вертикальной плоскости под действием *только* силы тяжести; для описания ее движения необходимы две координаты.

Б. План решения поставленной задачи: *достаточным* условием того, что точка  $M$  постоянно остается на окружности является выполнение неравенства (нить все время натянута):

$$N > 0, \forall \varphi_M. \quad (2.5.0)$$

Поэтому для решения задачи (а) надо, считая, что точка движется по окружности, найти натяжение нити, как функцию  $\varphi_M$  и  $V_0$ , и используя найденное выражение, определить при каких значениях имеет место (2.5.0).

*Необходимым* условием схода точки  $M$  с окружности является обращение реакции в нуль в некоторой точке. *Необходимым и достаточным* условием схода точки  $M$  со связи является обращение реакции в нуль в некоторой точке с последующим изменением ее знака (значение реакции вычисляется в предположении, что точка движется по окружности). Таким образом для решения задачи (б) надо найти множество значений  $V_0$ , для которых выполняется *необходимое и достаточное* условие схода со связи.

Говоря о колебаниях точки  $M$  на окружности, мы, очевидно, должны предположить, что в *крайних положениях* ее скорость должна обращаться в нуль. Значит для решения задачи (в) необходимо найти точки, в которых *несмотря на обращение скорости в нуль не происходит схода с окружности*.

В. Итак, для решения всех поставленных задач нужно найти выражение реакции, как функции от  $\varphi_M$  и  $V_0$ , и затем анализировать это выражение. Как уже отмечалось, реакцию удобнее всего находить из закона изменения импульса (П.9):

$$m\vec{a}_M = \vec{F} + \vec{R} \Rightarrow \vec{R} = m\vec{a}_M - \vec{F} \Rightarrow N\vec{e}_\nu = m\vec{a}_M - mg\vec{e}_z. \quad (2.5.1)$$

Умножив обе части уравнения (2.5.1) скалярно на  $\vec{e}_\nu$ , получим:

$$N = m(\vec{a}_M, \vec{e}_\nu) - mg(\vec{e}_z, \vec{e}_\nu),$$

что, при условии движения точки  $M$  по окружности, дает:

$$N = m \frac{(V_M)^2}{l} + mg \cos \varphi_M. \quad (2.5.2)$$

При вышеупомянутом условии для нахождения  $(V_M)^2$  можно воспользоваться интегралом энергии (см. задачи 2.3, 2.4):

$$m \frac{(V_M)^2}{2} - m \frac{(V_M)^2}{2}(0) = mgl(\cos \varphi_M - \cos \varphi_M(0)). \quad (2.5.3)$$

Подставляя в (2.5.3) начальные условия ( $\cos \varphi_M(0) = 0$ ,  $V_M(0) = V_0$ ), имеем:

$$\begin{aligned} m \frac{(V_M)^2}{2} - m \frac{(V_0)^2}{2} &= mgl(\cos \varphi_M - 1) \Rightarrow \\ (V_M)^2(\varphi_M, V_0) &= (V_0)^2 + 2gl(\cos \varphi_M - 1). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Формула (2.5.2) с учетом (2.5.4) дает

$$N(\varphi_M, V_0) = m \frac{(V_0)^2}{l} + mg(3 \cos \varphi_M - 2). \quad (2.5.5)$$

При заданном значении  $V_0$  величина реакции  $N(\varphi_M, V_0)$  является функцией  $\varphi_M$  и, как легко видеть из выражения (2.5.5), достигает минимума в точке  $\varphi_M = \pi$ :

$$\min_{\varphi_M} N(\varphi_M, V_0) = N(\pi, V_0) = m \frac{(V_0)^2}{l} - 5mg. \quad (2.5.6)$$

Из (2.5.5) и (2.5.6) следует, что если

$$(V_0)^2 > 5gl,$$

то

$$N(\varphi_M, V_0) > 0, \forall \varphi_M,$$

$$(V_M)^2(\varphi_M, V_0) > 0, \forall \varphi_M,$$

т.е. нить остается натянутой при любом  $\varphi_M$ , скорость нигде в нуль не обращается, значит  $\dot{\varphi}_M$  сохраняет знак, и точка  $M$  при таких начальных условиях, действительно, будет описывать полную окружность.

Остается, однако, вопрос: а что будет при  $(V_0)^2 = 5gl$ ? В этом случае

$$N(\pi, \sqrt{5gl}) = 0, N(\varphi_M, \sqrt{5gl}) > 0, \forall \varphi_M \neq \pi,$$

$$(V_M)^2(\varphi_M, \sqrt{5gl}) > 0, \forall \varphi_M,$$

т.е. реакция в верхней точке окружности обращается в нуль, но во всех остальных точках окружности она положительна. Кроме того, скорость при указанном начальном значении нигде в нуль не

обращается, поэтому и в этом случае вращение не прерывается. Таким образом, ответ на вопрос (а) имеет вид

$$(V_0)^2 \geq 5gl.$$

Посмотрим теперь, что будет происходить с точкой  $M$ , когда выполняется неравенство

$$(V_0)^2 < 5gl.$$

Положим

$$(V_0)^2 = (5 - \lambda)gl, \quad 0 < \lambda \leq 5,$$

и подставим это выражение в формулы (2.5.4) и (2.5.5)

$$(V_M)^2(\varphi_M, \lambda) = gl(3 - \lambda) + 2gl \cos \varphi_M, \quad (2.5.7)$$

$$N(\varphi_M, \lambda) = mg(3 - \lambda) + 3mg \cos \varphi_M. \quad (2.5.8)$$

Рассмотрим сначала случай  $0 < \lambda < 3$ . Найдем положение  $(\varphi_M)^*$ , в котором  $N((\varphi_M)^*, \lambda) = 0$ :

$$\cos(\varphi_M)^* = -\frac{3 - \lambda}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < (\varphi_M)^* < \pi. \quad (2.5.9)$$

Анализируя формулы (2.5.7) и (2.5.8) с учетом (2.5.9) получим:

$$N(\varphi_M, \lambda) \geq 0, 0 \leq \varphi_M \leq (\varphi_M)^*; N(\varphi_M, \lambda) < 0, (\varphi_M)^* < \varphi_M < \pi, \quad (2.5.10)$$

$$(V_M)^2(\varphi_M, \lambda) > 0, 0 \leq \varphi_M \leq (\varphi_M)^*. \quad (2.5.11)$$

Поскольку при осуществлении связи с помощью *невесомой нерастяжимой гибкой нити* величина реакции  $N(\varphi_M, \lambda)$  менять знак не может, соотношения (2.5.10), (2.5.11) свидетельствуют о том, что в положении  $\varphi_M = (\varphi_M)^*$  произойдет сход точки  $M$  со связи.

Теперь изучим случай  $3 < \lambda \leq 5$ . Найдем положение  $(\varphi_M)^{**}$ , в котором  $N((\varphi_M)^{**}, \lambda) = 0$ :

$$\cos(\varphi_M)^{**} = \frac{\lambda - 3}{3} \Rightarrow \arccos\left(\frac{\lambda - 3}{3}\right) \leq \varphi_M^{**} < \frac{\pi}{2}.$$

Надо, однако, заметить, что

$$(V_M)^2((\varphi_M)^{**}, \lambda) = gl(3 - \lambda) + 2gl \frac{(\lambda - 3)}{3} = -gl \frac{\lambda - 3}{3} < 0,$$

т.е. при указанных значениях  $\lambda$ , точка  $M$  в положение  $\varphi_M = (\varphi_M)^{**}$  попасть не может. Найдем значение угла  $\varphi_M = (\varphi_M)^{***}$ , при котором скорость точки обращается в нуль:

$$(V_M)^2((\varphi_M)^{***}, \lambda) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi_M)^{***} = \frac{\lambda - 3}{2} \Rightarrow (\varphi_M)^{***} < (\varphi_M)^{**}$$

$$0 < \varphi_M < (\varphi_M)^{***} \Rightarrow (V_M)^2(\varphi_M, \lambda) > 0.$$

Записав в момент остановки уравнение движения математического маятника (см. задачу 2.3), получим:

$$\ddot{\varphi}_M = -\frac{g}{l} \sin(\varphi_M)^{***} < 0,$$

откуда следует, что после остановки величина  $\dot{\varphi}_M$  меняет знак и удовлетворяет уравнению (интеграл энергии):

$$\dot{\varphi}_M = -\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi_M - \cos(\varphi_M)^{***})},$$

из которого видно, что следующая остановка произойдет в положении  $\varphi_M = -(\varphi_M)^{***}$ , и вторая производная в этом положении будет определяться соотношением

$$\ddot{\varphi}_M = -\frac{g}{l} \sin(-\varphi_M)^{***}) > 0,$$

значит точка  $M$  при этих условиях будет совершать колебания с амплитудой  $(\varphi_M)^{***}$ .

При этом на множестве:

$$-(\varphi_M)^{***} \leq \varphi_M \leq (\varphi_M)^{***}$$

$$\cos \varphi_M \geq \cos(\varphi_M)^{***} \Rightarrow \cos \varphi_M \geq \frac{\lambda - 3}{2} \Rightarrow$$

$$N(\varphi_M, \lambda) \geq mg \frac{\lambda - 3}{2} > 0,$$

т.е. натяжение нити при колебаниях не обращается в нуль.

Осталось разобрать случай  $\lambda = 3$ . При этом значении

$$(\varphi_M)^{**} = (\varphi_M)^{***} = \frac{\pi}{2}, N\left(\frac{\pi}{2}, 3\right) = 0, (V_M)^2\left(\frac{\pi}{2}, 3\right) = 0$$

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_M < \frac{\pi}{2} \Rightarrow N(\varphi_M, 3) > 0, (V_M)^2(\varphi_M, 3) > 0.$$

Теперь мы можем ответить на вопрос (б):

$$2 < (V_0)^2 < 5,$$

и на вопрос (в):

$$0 < (V_0)^2 \leq 2.$$

Г. Что будет с точкой  $M$  после того, как она сошла со связи? Она будет перемещаться под действием силы тяжести внутри области, ограниченной окружностью радиуса  $l$ , с центром в точке  $O$ . Как известно, ее траектория будет представлять собой параболу, и рано или поздно точка, двигаясь по этой параболе, попадет на упомянутую выше окружность, т.е. на связь. Если в момент прихода



на связь, скорость точки направлена по касательной к окружности, то для исследования последующего движения нужно просто повторить рассуждения, проведенные выше. Если же в указанный момент скорость точки образует *ненулевой* угол с окружностью, для решения задачи о последующем движении необходимо рассмотреть дополнительные положения, определяющие характер взаимодействия точки со связью в момент контакта (например, воспользоваться теорией удара).

Задача 2.6. [3, 28.14]

Шарик  $M$  массы  $m$ , привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити втягивают с постоянной скоростью  $V^*$  в отверстие, сделанное в плоскости.

Определить движение шарика и натяжение нити, если известно, что в начальный момент нить натянута, расстояние между шариком и отверстием равно  $r_0$ , а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна  $V_0$ .

Решение.

А. Разберемся с силами действующими на шарик. Во-первых это сила тяжести, поскольку сказано, что движение происходит в горизонтальной плоскости. Во вторых реакция связи, которая складывается из натяжения нити и реакции плоскости.

Обозначим точку плоскости, совпадающую с отверстием через  $O$ , ось, проходящую через эту точку и перпендикулярную плоскости движения —  $Oz$ , расстояние между шариком и отверстием —  $r_M$ , угол между начальным и текущим положениями радиус-вектора шарика —  $\varphi_M$ , величину натяжения нити —  $S$ , величину нормальной составляющей реакции плоскости —  $N$ . Тогда для заданной силы получим выражение

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z, \quad (2.6.1)$$

для реакции связи (с учетом того, что натяжение нити направлено вдоль нити, а реакция *гладкой* плоскости вдоль оси  $Oz$ )

$$\vec{R} = S\vec{e}_r + N\vec{e}_z. \quad (2.6.2)$$

Б. В предлагаемой задаче нужно определить движение шарика и натяжение нити. Поскольку реакцию связи можно вычислить, только если известно движение точки, желательно, сначала найти движение.

Шарик движется в плоскости, следовательно, его положение задается двумя координатами  $r_M, \varphi_M$ , однако по условию задачи он

привязан к нити, которую с постоянной скоростью  $V^*$  втягивают в отверстие  $O$ , сделанное в плоскости, т.е.

$$\dot{r}_M = -V^* \Rightarrow r_M = r_0 - V^*t. \quad (2.6.3)$$

Уравнение (2.6.3) представляет собой *уравнение связи*, определяющее изменение координаты шарика  $r_M$ , значит, неизвестной остается *одна* координата  $\varphi_M$ , для нахождения которой достаточно *одного* уравнения, но только такого, которое не содержало бы других *неизвестных* величин, в частности, *реакций* связи.

В. Последовательно анализируя общие теоремы динамики точки при наличии связей с учетом соотношений (2.6.1) и (2.6.2) можно заметить, что если спроектировать уравнение (II.9) на перпендикуляр к радиусу-вектору можно получить *хорошее* уравнение:

$$m(\ddot{a}_M, \vec{e}_\varphi) = (\vec{F} + \vec{R}, \vec{e}_\varphi) \Rightarrow r_M \ddot{\varphi}_M + 2\dot{r}_M \dot{\varphi}_M = 0. \quad (2.6.4)$$

Переходя к теореме об изменении кинетического момента точки, стоит обратить внимание на то, что *все* силы, приложенные к шару (и заданные и реакции связи) *или пересекают ось Oz или параллельны ей*, откуда следует

$$(\vec{e}_z, \frac{d\vec{k}}{dt}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{e}_z, \vec{k}) = 0 \quad (\text{дважды хорошее уравнение}) \Rightarrow$$

$$(\vec{e}_z, [\vec{r}_M, m\vec{v}_M]) = \text{const} \Rightarrow (r_M)^2 \dot{\varphi}_M = r_0 V_0. \quad (2.6.5)$$

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии не удастся получить соотношение не содержащее реакции связи, поскольку

$$(\vec{R}, d\vec{r}_M) = S dr_M \neq 0.$$

Решать уравнение (2.6.5) приятнее, чем уравнение (2.6.4), поскольку оно *первого* порядка и легко разрешается относительно  $\dot{\varphi}_M$ :

$$\dot{\varphi}_M = \frac{r_0 V_0}{(r_M)^2} \Rightarrow \dot{\varphi}_M = \frac{r_0 V_0}{(r_0 - V^*t)^2} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\varphi_M} d\varphi_M = r_0 V_0 \int_0^t \frac{dt}{(r_0 - V^*t)^2} \Rightarrow$$

$$\varphi_M = \frac{V_0 t}{r_0 - V^*t}.$$

Для определения реакции воспользуемся законом изменения импульса (II.9):

$$m\ddot{a}_M = \vec{F} + \vec{R} \Rightarrow \vec{R} = m\ddot{a}_M - \vec{F} \Rightarrow$$

$$S\vec{e}_s + N\vec{e}_z = m\ddot{a}_M + mg\vec{e}_z. \quad (2.6.6)$$

Чтобы найти  $S$ , умножим обе части равенства (2.6.6) скалярно на  $\vec{e}_r$ . В результате, учитывая формулу разложения ускорения в полярных координатах, (2.6.3) и (2.6.5), получим:

$$S = (m\vec{a}_M, \vec{e}_r) \Rightarrow S = -\frac{m(r_0 V_0)^2}{(r_0 - V^* t)^3}.$$

Г. Знак минус в последней формуле означает, что реакция нити направлена к точке  $O$ , что соответствует смыслу задачи. Заметим, что решить задачу можно было и с помощью уравнения (2.6.4), если умножить обе его части на  $r_M$ :

$$m((r_M)^2 \ddot{\varphi}_M + 2r_M \dot{r}_M \dot{\varphi}_M) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}((r_M)^2 \dot{\varphi}_M) = 0 \Rightarrow (r_M)^2 \dot{\varphi}_M = \text{const.}$$

и мы пришли к тому же уравнению, которое получили с помощью теоремы об изменении кинетического момента.

Можно предложить еще один способ интегрирования уравнения (2.6.4) (при условии  $r_M \neq 0, \dot{\varphi}_M \neq 0$ ):

$$(r_M) \ddot{\varphi}_M + 2\dot{r}_M \dot{\varphi}_M = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{\varphi}_M}{\dot{\varphi}_M} + 2\frac{dr_M}{r_M} = 0 \Rightarrow$$

$$d \ln \dot{\varphi}_M + d \ln (r_M)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$d \ln ((r_M)^2 \dot{\varphi}_M) = 0 \Rightarrow \ln ((r_M)^2 \dot{\varphi}_M) = \text{const} \Rightarrow (r_M)^2 \dot{\varphi}_M = \text{const.}$$

### Задача 2.7.

Сферический маятник (материальная точка  $M$  массы  $m$ , которая движется под действием силы тяжести  $mg$  по неподвижной гладкой сфере радиуса  $r$ ) находится в начальный момент на высоте  $h_M(0) = r/2$  над нижней точкой сферы. Вектор начальной скорости маятника лежит в горизонтальной плоскости и величина его равна  $\sqrt{gr}$ . Найти  $\max h_M(t)$  и  $\min h_M(t)$  при указанных начальных условиях.

Решение.

А. Введем неподвижный трехгранник  $Oxyz$  с вершиной в центре сферы, направив ось  $Oz$  по вертикали вниз. Будем считать, что  $\vec{V}_M(0) = \sqrt{gr}\vec{e}_y$ . Положение точки  $M$  на поверхности сферы полностью определяется двумя координатами:  $\vartheta_M$  и  $\varphi_M$  (см. рис. 2.7.1).

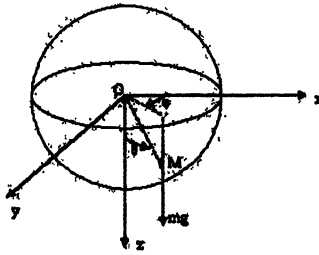


Рис. 2.7.1.

Б. В рассматриваемой задаче на точку  $M$  действуют две силы: сила тяжести

$$\vec{F} = mg\vec{e}_z$$

и реакция связи

$$\vec{R} = N\vec{e}_n,$$

где  $\vec{e}_n$  единичный вектор нормали к сфере. Чтобы ответить на вопрос задачи надо знать движение точки, т.е. надо знать, как меняются ее координаты с течением времени. Для того чтобы найти две координаты, надо иметь два уравнения, которые не содержали бы других неизвестных помимо координат.

Итак, для начала, наша задача состоит в том, чтобы написать два уравнения, не содержащих реакции связи.

В. В поисках таких уравнений можно последовательно анализировать общие теоремы динамики точки при наличии связей, а можно ускорить процедуру анализа, заметив следующие особенности задачи:

1) сила тяжести параллельна оси  $Oz$ , а реакция постоянно пересекает эту ось - значит проекция кинетического момента точки на эту ось сохраняется

$$\begin{aligned} (\vec{e}_z, \frac{d\vec{k}}{dt}) &= (\vec{e}_z, [\vec{r}_M, \vec{F} + \vec{R}]) \Rightarrow (\vec{e}_z, \frac{d\vec{k}}{dt}) = 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(\vec{e}_z, \vec{k}) &= 0 \Rightarrow \frac{dk_z}{dt} = 0 \Rightarrow k_z = const, \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

2) работа реакции связи на элементарном действительном перемещении равна нулю (вектор скорости лежит в плоскости, касательной к сфере, а реакция направлена по нормали к ней)

$$(\vec{R}, d\vec{r}_M) = (N\vec{e}_n, \vec{V}_M dt) = 0,$$

а сила тяжести имеет силовую функцию

$$(\vec{F}, d\vec{r}_M) = (mg\vec{e}_z, dx_M\vec{e}_x + dy_M\vec{e}_y + dz_M\vec{e}_z) = mgdz_M = d(mgz_M)$$

значит, имеет место интеграл энергии

$$T - mgz_M = T(0) - mgz_M(0). \quad (2.7.2)$$

Уравнения (2.7.1) и (2.7.2), в принципе, решают задачу о движении сферического маятника. Однако, чтобы получить ответ на конкретный вопрос надо выразить полученные соотношения через координаты.

Для сферического маятника ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$  — правый репер):

$$\vec{V}_M = 0 \cdot \vec{e}_r + r\dot{\vartheta}_M\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta_M\dot{\varphi}_M\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{e}_z = \cos\vartheta_M\vec{e}_r - \sin\vartheta_M\vec{e}_\vartheta,$$

$$\vec{r}_M = r\vec{e}_r,$$

$$k_z = (\vec{e}_z, \vec{k}) = (\vec{e}_z, [\vec{r}_M, m\vec{V}_M]) =$$

$$(\cos\vartheta_M\vec{e}_r - \sin\vartheta_M\vec{e}_\vartheta, m[r\vec{e}_r, r\dot{\vartheta}_M\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta_M\dot{\varphi}_M\vec{e}_\varphi]) \Rightarrow$$

$$k_z = m(r\sin\vartheta_M)^2\dot{\varphi}_M,$$

$$z_M = r\cos\vartheta_M,$$

$$T = \frac{m(V_M)^2}{2} = \frac{m}{2} \left( (r\dot{\vartheta}_M)^2 + (r\dot{\varphi}_M \sin\vartheta_M)^2 \right)$$

Подставляя полученные выражения и заданные начальные условия в уравнения (2.7.1) и (2.7.2) имеем:

$$m(r\sin\vartheta_M)^2\dot{\varphi}_M = mr\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{gr} \Rightarrow \dot{\varphi}_M = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{g}{r\sin^2\vartheta_M}}, \quad (2.7.3)$$

$$\frac{m}{2} \left( (r\dot{\vartheta}_M)^2 + (r\dot{\varphi}_M \sin\vartheta_M)^2 \right) - mgr\cos\vartheta_M =$$

$$= \frac{m(V_M(0))^2}{2} - mgr\cos\vartheta_M(0) \Rightarrow$$

$$\frac{m}{2} \left( (r\dot{\vartheta}_M)^2 + (r\dot{\varphi}_M \sin\vartheta_M)^2 \right) - mgr\cos\vartheta_M = 0. \quad (2.7.4)$$

Высота маятника над нижней точкой сферы определяется формулой:

$$h_M = r(1 - \cos\vartheta_M)$$

В тех положениях, где эта величина принимает максимальное или минимальное значение, должно выполняться условие:

$$\dot{h}_M = 0 \Rightarrow r\dot{\vartheta}_M \sin\vartheta_M = 0 \Rightarrow \dot{\vartheta}_M = 0,$$

( $\sin \vartheta_M \neq 0$  так как постоянная интеграла площадей (см. уравнение 2.7.3) отлична от нуля).

Учитывая последнее условие и подставляя (2.7.3) в (2.7.4), получим уравнение для определения значения угла  $\vartheta_M$  в искомых точках:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{g}{r \sin^2 \vartheta_M}} \sin \vartheta_M \right)^2 - mgr \cos \vartheta_M &= 0 \Rightarrow \\ \frac{3}{8 \sin^2 \vartheta_M} - \cos \vartheta_M &= 0 \Rightarrow \\ \frac{3}{8} - \cos \vartheta_M (1 - \cos^2 \vartheta_M) &= 0 \Rightarrow \left( \cos^3 \vartheta_M - \frac{1}{8} \right) - \left( \cos \vartheta_M - \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow \\ \left( \cos \vartheta_M - \frac{1}{2} \right) \left( \cos^2 \vartheta_M + \frac{1}{2} \cos \vartheta_M - \frac{3}{4} \right) &= 0 \quad (2.7.5) \end{aligned}$$

Выпишем решения уравнения (2.7.5):

$$\begin{aligned} 1) \quad \left( \cos \vartheta_M - \frac{1}{2} \right) &= 0, \\ \cos(\vartheta_M)_1 &= \frac{1}{2} \Rightarrow (h_M)_1 = \frac{r}{2}; \\ 2) \quad \left( \cos^2 \vartheta_M + \frac{1}{2} \cos \vartheta_M - \frac{3}{4} \right) &= 0, \\ a) \quad \cos(\vartheta_M)_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} \Rightarrow (h_M)_2 = r \frac{5 - \sqrt{13}}{4}; \\ b) \quad \cos(\vartheta_M)_3 &= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}, \text{ этот корень не годится, так как} \\ & \left| -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4} \right| > 1. \end{aligned}$$

Поскольку  $5 > \sqrt{13} > 3$

$$\begin{aligned} (h_M)_1 &= \frac{r}{2} = \max h_M, \\ (h_M)_2 &= r \frac{5 - \sqrt{13}}{4} = \min h_M. \end{aligned}$$

**Задача 2.8.** [3, 31.23]

Точка  $M$  массы  $m$  движется по гладкой поверхности полусферического купола радиуса  $R$ . Считая, что на точку действует сила

тяжести, параллельная оси  $Oz$ , зная, что в начальный момент направление скорости точки было произвольным, величина скорости равнялась  $V_0$ , и она находилась на высоте  $h_0$  от основания купола, определить давление точки на купол, когда она будет на высоте  $h$  от основания купола.

Решение.

А. Неподвижный трехгранник изображен на рис. 2.8.1.

На точку действуют две силы: заданная сила

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z,$$

и реакция связи, направленная согласно условию задачи (поверхность купола гладкая) по нормали к поверхности

$$\vec{R} = N\vec{e}_n,$$

где  $\vec{e}_n$  — внешняя нормаль к сфере.

Уравнение связи:

$$(x_M)^2 + (y_M)^2 + (z_M)^2 = R^2$$

Б. Давление точки на купол равно по величине и противоположно по направлению реакции купола, поэтому для определения давления нам достаточно найти реакцию. Поскольку направление реакции известно, задача сводится к нахождению одной скалярной величины.

Для нахождения величины реакции удобнее всего воспользоваться законом изменения импульса, так как он содержит реакцию в наиболее простом по сравнению с другими теоремами виде.

В. Запишем закон изменения импульса:

$$m\vec{a}_M = \vec{F} + \vec{R} \Rightarrow m\vec{a}_M = -mg\vec{e}_z + N\vec{e}_n \Rightarrow N\vec{e}_n = m\vec{a}_M + mg\vec{e}_z. \quad (2.8.1)$$

Для вычисления реакции умножим обе части уравнения (2.8.1) скалярно на  $\vec{e}_n$

$$N = m(\vec{a}_M, \vec{e}_n) + mg(\vec{e}_z, \vec{e}_n). \quad (2.8.2)$$

Заметим, что для сферы

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{r}_M}{R} = \frac{x_M}{R}\vec{e}_x + \frac{y_M}{R}\vec{e}_y + \frac{z_M}{R}\vec{e}_z,$$

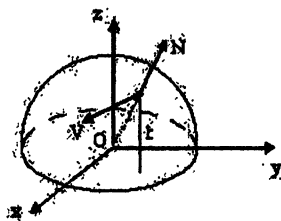


Рис. 2.8.1.

поэтому

$$mg(\vec{e}_z, \vec{e}_n) = mg \frac{z_M}{R} = mg \frac{h}{R}, \quad (2.8.3)$$

и для того, чтобы решить поставленную задачу нам осталось найти  $(\vec{a}_M, \vec{e}_n)$  как функцию  $h$ . Записав указанное скалярное произведение в декартовых координатах, получим

$$(\vec{a}_M, \vec{e}_n) = \ddot{x}_M \frac{x_M}{R} + \ddot{y}_M \frac{y_M}{R} + \ddot{z}_M \frac{z_M}{R},$$

что наталкивает на мысль дважды продифференцировать уравнение связи:

$$\frac{d}{dt}((x_M)^2 + (y_M)^2 + (z_M)^2 = R^2) \Rightarrow x_M \dot{x}_M + y_M \dot{y}_M + z_M \dot{z}_M = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(x_M \dot{x}_M + y_M \dot{y}_M + z_M \dot{z}_M = 0) \Rightarrow$$

$$\dot{x}_M \dot{x}_M + \dot{y}_M \dot{y}_M + \dot{z}_M \dot{z}_M + x_M \ddot{x}_M + y_M \ddot{y}_M + z_M \ddot{z}_M = 0.$$

Поделив последнее соотношение на  $R$  имеем:

$$(\vec{a}_M, \vec{e}_n) = -\frac{(V_M)^2}{R} \quad (2.8.4)$$

Мы получили соотношение, которое можно сформулировать в виде теоремы:

*При движении точки  $M$  по сфере радиуса  $R$ , проекция ускорения на нормаль к сфере всегда направлена внутрь сферы и равна по величине  $(V_M)^2/R$ .*

Это выражение иногда пытаются получить, используя формулу разложения ускорения по осям репера Френе, что неверно, так как, в общем случае, главная нормаль к траектории точки и нормаль к поверхности, на которой эта траектория лежит, не совпадают.

Итак, задача свелась к нахождению зависимости  $(V_M)^2$  от  $z$ .

Из числа общих теорем наиболее подходящей для решения этой проблемы представляется теорема об изменении кинетической энергии. Заметив, что

$$1) (\vec{F}, d\vec{r}_M) = -mgdz_M = d(mgz_M),$$

$$2) \vec{R}, d\vec{r}_M) = (N\vec{e}_n, \vec{V}_M dt) = 0,$$

можем записать интеграл энергии:

$$T - T(0) = mgz_M(0) - mgz_M \Rightarrow \frac{(V_M)^2}{2} - \frac{(V_0)^2}{2} = mgh_0 - mgh \Rightarrow$$

$$\frac{(V_M)^2}{R} = \frac{(V_0)^2}{R} + 2mg \frac{h_0 - h}{R}. \quad (2.8.5)$$



Подставляя (2.8.3), (2.8.4) и (2.8.5) в (2.8.2) получим:

$$N = \frac{mg}{R} \left( 3h - 2h_0 - \frac{(V_0)^2}{g} \right). \quad (2.8.6)$$

Г. Стоит заметить, что формула (2.8.6) получена в предположении, что уравнение связи имеет вид

$$(x_M)^2 + (y_M)^2 + (z_M)^2 = R^2.$$

Если же связь задается соотношением

$$(x_M)^2 + (y_M)^2 + (z_M)^2 \geq R^2,$$

т.е. точка может сваливаться с купола, то формула (2.8.6) остается справедливой только для тех значений  $h$ , где

$$\frac{mg}{R} \left( 3h - 2h_0 - \frac{(V_0)^2}{g} \right) \geq 0.$$

### Задача 2.9. [3, 31.26]

Точка  $M$  массы  $m$  движется по гладкой поверхности прямого кругового конуса, угол раствора которого  $2\alpha = \pi/2$ , под влиянием силы отталкивания от вершины  $O$ , пропорциональной расстоянию:  $\vec{F} = c\vec{OM}$ .

В начальный момент точка  $M$  находится в положении  $A$ , расстояние  $OA$  равно  $a$ . Начальная скорость равна  $V_0$  и направлена перпендикулярно оси конуса. Считая  $\vec{F}$  единственной заданной силой, действующей на точку, определить её движение, при условии, что

$$c = 1, m = 1, a = 2, V_0 = 2.$$

Решение .

А. Точка движется по *заданной* поверхности, ее положение можно определить с помощью *двух* координат и, значит, для нахождения этих *двух* координат надо написать *два* уравнения. В рассматриваемой задаче для описания движения точки удобно воспользоваться цилиндрическими координатами  $\varrho_M, \varphi_M, z_M$  (ось  $Oz$  совпадает с осью конуса). Среди *трех* выбранных координат *независимых* только *две*, т.к. в силу уравнения связи  $\varrho_M = z_M$ .

На точку действуют две силы: *заданная* сила  $\vec{F} = c\vec{OM}$  и *реакция связи* (по условию задачи, поверхность конуса гладкая)  $\vec{R} = N\vec{e}_n$ , где  $\vec{e}_n$  — единичный вектор нормали к поверхности конуса.

Б. Итак, нам надо написать два уравнения не содержащих реакции  $N$ . Анализируя общие теоремы динамики точки при наличии

связей, нетрудно заметить, что умножив обе части соотношения (II.9) на  $\vec{e}_{OM}$  и  $\vec{e}_\varphi$  мы получим желаемое:

$$\begin{aligned} m(\vec{a}_M, \vec{e}_{OM}) &= (\vec{F}, \vec{e}_{OM}) + (\vec{R}, \vec{e}_{OM}) \Rightarrow \\ m(\vec{a}_M, \vec{e}_{OM}) &= (c\vec{OM}, \vec{e}_{OM}) + (N\vec{e}_n, \vec{e}_{OM}) \Rightarrow \\ m(\vec{a}_M, \vec{e}_{OM}) &= c|OM|. \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

$$(m\vec{a}_M, \vec{e}_\varphi) = (\vec{F}, \vec{e}_\varphi) + (\vec{R}, \vec{e}_\varphi) \Rightarrow (m\vec{a}_M, \vec{e}_\varphi) = 0 \quad (2.9.2)$$

Однако, прежде чем расписывать уравнения (2.9.1) и (2.9.2) в координатах, посмотрим нельзя ли найти более простые уравнения, в частности, нет ли в этой задаче первых интегралов. Действительно, обе силы (и заданная и реакция связи) постоянно пересекают неподвижную ось  $Oz$  и, следовательно, имеет место интеграл площадей

$$k_z = \text{const} \quad (2.9.3)$$

Кроме того,

1)  $(\vec{R}, d\vec{r}_M) = (N\vec{e}_n, \vec{V}_M dt) = 0$  ( $\vec{V}_M$  лежит в плоскости, касательной к конусу),

2)  $(\vec{F}, d\vec{r}_M) = (c\vec{OM}, d\vec{r}_M) = (c\vec{r}_M, d\vec{r}_M) = d\frac{c(r_M, r_M)}{2} = d\frac{c(r_M)^2}{2}$ , т.е. имеет место интеграл энергии

$$T - T(0) = \frac{c(r_M)^2}{2} - \frac{c(r_M)^2}{2}(0) \quad (2.9.4)$$

Порядок системы дифференциальных уравнений (2.9.3) и (2.9.4) равен двум, в то время как порядок системы, состоящей из уравнений (2.9.1) и (2.9.2) — *четырем*, поэтому для нахождения движения точки  $M$  предпочтительнее использовать систему, упомянутую первой.

В. Распишем уравнения (2.9.3) и (2.9.4) в координатах  $\varrho_M, \varphi_M$ , учитывая заданные значения параметров и начальных условий:

$$\begin{aligned} k_z &= m(\varrho_M)^2 \dot{\varphi}_M \Rightarrow m(\varrho_M)^2 \dot{\varphi}_M = m(\varrho_M(0))^2 \dot{\varphi}_M(0) \Rightarrow \\ (\varrho_M)^2 \dot{\varphi}_M &= \frac{a}{\sqrt{2}} V_0 \Rightarrow \\ (\varrho_M)^2 \dot{\varphi}_M &= 2\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (2.9.5)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m(V_M)^2}{2}, \quad (V_M)^2 = (\dot{\varrho}_M)^2 + (\varrho_M \dot{\varphi}_M)^2 + (\dot{z}_M)^2 = \\ &= 2(\dot{\varrho}_M)^2 + (\varrho_M \dot{\varphi}_M)^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{2}(2(\dot{\varrho}_M)^2 + (\varrho_M \dot{\varphi}_M)^2) &- \frac{(V_0)^2}{2} = \frac{c(r_M)^2}{2} - \frac{ca^2}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(2(\dot{\varrho}_M)^2 + (\varrho_M \dot{\varphi}_M)^2) = (\varrho_M)^2. \quad (2.9.6)$$

Разрешая уравнение (2.9.5) относительно  $\dot{\varphi}_M$  и подставляя результат в уравнение (2.9.6), получим :

$$(\dot{\varrho}_M)^2 + \frac{4}{(\varrho_M)^2} = (\varrho_M)^2 \Rightarrow \dot{\varrho}_M = \pm \sqrt{(\varrho_M)^2 - \frac{4}{(\varrho_M)^2}}. \quad (2.9.7)$$

Для решения получившегося уравнения нужно выбрать знак перед квадратным корнем. Выбор этот затрудняется тем обстоятельством, что  $\dot{\varrho}_M(0) = 0$ . Чтобы, тем не менее, решить эту проблему разложим  $\dot{\varrho}_M(t)$  в ряд Маклорена при малых значениях  $t$ :

$$\dot{\varrho}_M(t) = \dot{\varrho}_M(0) + t\ddot{\varrho}_M(0) + \dots$$

Из этой формулы следует, что при малых  $t$  знак  $\dot{\varrho}_M(t)$  совпадает со знаком  $\ddot{\varrho}_M(0)$ , и наша задача теперь состоит в том, чтобы определить знак  $\ddot{\varrho}_M(0)$ .

Заметим, что для рассматриваемого конуса  $\varrho_M = r_M/\sqrt{2}$ , следовательно,  $\ddot{\varrho}_M$  и  $\ddot{r}_M$  имеют один и тот же знак, распишем уравнение (2.9.1), используя формулу ускорения в сферических координатах и то, что при движении по конусу  $\vartheta_M = \alpha$ ,  $\dot{\vartheta}_M = 0$ :

$$\begin{aligned} m(\ddot{r}_M - r_M \dot{\varphi}_M^2 \cos^2 \vartheta_M) &= cr_M \Rightarrow \\ m\ddot{r}_M &= mr_M \dot{\varphi}_M^2 \cos^2 \vartheta_M + cr_M > 0, \quad \forall t \\ \Rightarrow \ddot{\varrho}_M(t) &> 0, \quad \forall t. \end{aligned}$$

следовательно, в формуле (2.9.7) надо выбрать знак "плюс":

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}_M &= \sqrt{(\varrho_M)^2 - \frac{4}{(\varrho_M)^2}} \Rightarrow \frac{d\varrho_M}{\sqrt{(\varrho_M)^2 - \frac{4}{(\varrho_M)^2}}} = 2dt \Rightarrow \\ d \frac{\left(\frac{(\varrho_M)^2}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{(\varrho_M)^2}{2}\right)^2 - 1}} &= 2dt. \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

В уравнении (2.9.8) сделаем замену переменных

$$\frac{(\varrho_M)^2}{2} = \text{ch } x$$

и заметим, что при заданных начальных условиях  $x(0) = 0$ . Тогда уравнение (2.9.8) принимает вид:

$$\frac{d \text{ch } x}{\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}} = 2dt \Rightarrow \frac{\text{sh } x dx}{\text{sh } x} = 2dt \Rightarrow$$

$$dx = 2dt \Rightarrow \int_0^x dx = 2 \int_0^t dt \Rightarrow x = 2t \Rightarrow (\varrho_M)^2 = 2 \operatorname{ch} t \Rightarrow$$

$$(\varrho_M)^2 = e^{2t} + e^{-2t}. \quad (2.9.9)$$

Подставив выражение (2.9.9) в соотношение (2.9.5), получим уравнение для определения  $\varphi_M(t)$ :

$$d\varphi_M = \frac{2\sqrt{2}dt}{e^{2t} + e^{-2t}} \Rightarrow d\varphi_M = \frac{\sqrt{2}de^{2t}}{1 + (e^{2t})^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi_M} d\varphi_M = \int_1^{e^{2t}} d \operatorname{arctg} x \Rightarrow \frac{\varphi_M}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(e^{2t}) - \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_M}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t}. \quad (2.9.10)$$

Г. Интересно отметить, что несмотря на то, что  $\dot{\varphi}_M > 0, \forall t$  (см. уравнение (2.9.5)), точка  $M$  при движении не сделает *ни одного полного оборота* вокруг оси  $Oz$ . В самом деле, из формулы (2.9.10) следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_M(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

### Задача 2.10.

Материальная точка  $M$  массы  $m$  движется внутри трубки, изогнутой в форме окружности радиуса  $l$ . Трубка вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижного вертикального диаметра  $AB$ .

В начальный момент точка  $M$  находится на конце горизонтального диаметра трубки и ее скорость относительно трубки равна нулю.

Пренебрегая толщиной трубки и считая ее внутреннюю поверхность гладкой, найти скорость точки  $M$  относительно трубки в момент, когда она окажется в самой нижней точке трубки.

Решение.

А. Поскольку толщиной трубки можно пренебречь, будем считать, что по отношению к неподвижному пространству точка  $M$  движется по неподвижной сфере. Положение точки на поверхности определяется двумя координатами. В рассматриваемой задаче такими координатами могут служить: угол  $\varphi$  поворота плоскости трубки, отсчитываемый от неподвижной вертикальной плоскости, содержащей прямую  $AB$ , и угол  $\alpha_M$ , определяющий отклонение

точки  $M$  от вертикали (см. рис. 2.10.1). По условию, трубка вращается с постоянной угловой скоростью, т.е.

$$\dot{\varphi} = \omega \Rightarrow \varphi = \varphi(0) + \omega t. \quad (2.10.0)$$

Соотношение (2.10.0) представляет собой *уравнение связи*, причем *связи, явно зависящей от времени* при наличии подобной связи следует быть аккуратным, применяя теорему об изменении кинетической энергии). На оставшуюся координату  $\alpha_M$  и ее производную по времени никаких ограничений (кроме связанных с ее определением) не наложено, поэтому можно сказать, что рассматриваемая система имеет *одну степень свободы*.

Точка  $M$  движется под действием двух сил: заданной силы  $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$  и реакции связи  $\vec{R}$ , лежащей в плоскости перпендикулярной к трубке.

Б. Для того, чтобы ответить на вопрос задачи нужно знать скорость точки, как функцию ее положения. Так как система имеет *одну степень свободы*, для определения ее движения достаточно *одного уравнения*, содержащего *одну неизвестную функцию* — координату  $\alpha_M$ , т.е. в искомое уравнение ни в каком виде не должна входить *реакция связи*, поскольку *реакция связи — величина неизвестная*.

С целью получения такого уравнения проанализируем общие теоремы динамики точки (П.9)–(П.11).

Поскольку реакция по условию перпендикулярна к трубке

$$\vec{R} = R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_\nu \vec{e}_\nu, \quad (2.10.1)$$

( $\vec{e}_\varphi$  — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости трубки,  $\vec{e}_\nu$  — единичный вектор главной нормали трубки) умножив обе части соотношения (П.9) (закон изменения импульса) скалярно на единичный вектор  $\vec{e}_\alpha$ , касательный к трубке, получим то, что нужно — уравнение не содержащее реакции:

$$(m\vec{a}_M, \vec{e}_\alpha) = (\vec{F}, \vec{e}_\alpha) + (\vec{R}, \vec{e}_\alpha) \Rightarrow (m\vec{a}_M, \vec{e}_\alpha) = -mg(\vec{e}_z, \vec{e}_\alpha). \quad (2.10.2)$$

Уравнения (2.10.2) достаточно, чтобы найти движение точки  $M$ , можно, однако, посмотреть нельзя ли получить подобные уравнения, используя другие общие теоремы.

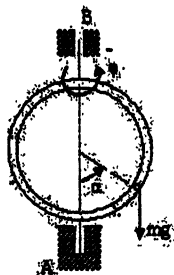


Рис. 2.10.1

Используя правый репер  $(\vec{e}_\nu, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_\varphi)$  и соотношение  $\vec{e}_z = \cos \alpha_M \vec{e}_\nu + \sin \alpha_M \vec{e}_\alpha$ , запишем момент сил, действующих на точку  $M$ :

$$[\vec{r}_M, \vec{F} + \vec{R}] = [-l\vec{e}_\nu, -mg\vec{e}_z + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_\nu\vec{e}_\nu] = \\ mgl(\vec{e}_\nu, \vec{e}_z) + lR_\varphi\vec{e}_\alpha = mgl \sin \alpha_M \vec{e}_\varphi + lR_\varphi\vec{e}_\alpha, \quad (2.10.3)$$

и элементарную работу этих сил на действительном перемещении точки:

$$(\vec{F} + \vec{R}, d\vec{r}_M) = (-mg\vec{e}_z + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_\nu\vec{e}_\nu, \vec{V}_M dt).$$

Введя подвижный трехгранник, жестко связанный с трубкой, и воспользовавшись теоремой сложения скоростей, имеем:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_M^{\text{пер}} + \vec{V}_M^{\text{отн}}, \quad \vec{V}_M^{\text{пер}} = (l \sin \alpha_M) \omega \vec{e}_\varphi, \quad \vec{V}_M^{\text{отн}} = l \dot{\alpha}_M \vec{e}_\alpha,$$

т.е.

$$(\vec{F} + \vec{R}, d\vec{r}_M) = (-mg\vec{e}_z + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_\nu\vec{e}_\nu, (l \sin \alpha_M) \omega dt \vec{e}_\varphi + l d\alpha_M \vec{e}_\alpha) = \\ -mgl \sin \alpha_M d\alpha + R_\varphi (l \sin \alpha_M) \omega dt. \quad (2.10.4)$$

Из соотношения (2.10.3) вытекает, что если мы умножим правую и левую части выражения (II.10) на единичные векторы  $\vec{e}_\varphi$  или  $\vec{e}_\nu$ , то получим уравнения, не содержащие проекций реакции:

$$(\vec{e}_\varphi, \frac{d\vec{k}}{dt}) = mgl \sin \alpha_M, \quad (2.10.5)$$

$$(\vec{e}_\nu, \frac{d\vec{k}}{dt}) = 0. \quad (2.10.6)$$

Поскольку, вообще говоря,  $R_\varphi \neq 0$  из формулы (2.10.4) следует, что в данной задаче получить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии уравнение, не содержащее реакции, невозможно. Стоит обратить внимание на следующий факт: если уравнение связи явно зависит от времени, работа реакции на действительном перемещении (даже в случае идеальности связи), вообще говоря, не равна нулю.

В. Теперь нам нужно в явной форме выписать уравнения (2.10.2), (2.10.5), (2.10.6) и выбрать из них одно, наиболее подходящее для решения поставленной задачи. Начнем с уравнения (2.10.2).

Используя трехгранник, жестко связанный с трубкой, запишем теорему сложения ускорений:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\text{пер}} + \vec{a}_M^{\text{отн}} + \vec{a}_M^{\text{кор}},$$

$$\vec{a}_M^{\text{пер}} = (l \sin \alpha_M) \omega^2 \sin \alpha_M \vec{e}_\nu - (l \sin \alpha_M) \omega^2 \cos \alpha_M \vec{e}_\alpha,$$

$$\vec{a}_M^{\text{отн}} = l \ddot{\alpha}_M \vec{e}_\alpha + l (\dot{\alpha}_M)^2 \vec{e}_\nu,$$

$$\vec{a}_M^{\text{кор}} = 2[\omega \vec{e}_z, \vec{V}_M^{\text{отн}}] = \lambda \vec{e}_\varphi \Rightarrow$$

$$(\vec{a}_M, \vec{e}_\alpha) = l \ddot{\alpha}_M - (l \sin \alpha_M) \omega^2 \cos \alpha_M. \quad (2.10.7)$$

Подставляя (2.10.7) в (2.10.2) и сокращая на  $ml$  получим:

$$\ddot{\alpha}_M - \omega^2 \sin \alpha_M \cos \alpha_M = -\frac{g}{l} \sin \alpha_M. \quad (2.10.8)$$

Посмотрим, во что преобразуются соотношения (2.10.5) и (2.10.6). Соотношение (2.10.6) выглядит более привлекательным (оно *хорошее* по нашей терминологии), поэтому начнем с него:

$$(\vec{e}_\nu, \frac{d\vec{k}}{dt}) = (\vec{e}_\nu, [\vec{r}_M, \vec{F} + \vec{R}]) = (\vec{e}_\nu, [-l\vec{e}_\nu, \vec{F} + \vec{R}]) \equiv 0,$$

т.е. уравнение (2.10.6) представляет собой тождество  $0 \equiv 0$ .

Трансформируем левую часть уравнения (2.10.5):

$$(\vec{e}_\varphi, \frac{d\vec{k}}{dt}) = (\vec{e}_\varphi, [\vec{r}_M, m\vec{a}_M]) = m(\vec{e}_\varphi, [\vec{r}_M, \vec{a}_M^{\text{пер}} + \vec{a}_M^{\text{отн}} + \vec{a}_M^{\text{кор}}]).$$

Подставив сюда  $\vec{r}_M = -l\vec{e}_\nu$  и выписанные выше выражения для переносного, относительного и кориолисова ускорений (используя свойства векторного и смешанного произведения векторов), получим:

$$(\vec{e}_\varphi, \frac{d\vec{k}}{dt}) = -ml^2 \ddot{\alpha}_M + ml^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Последнее равенство позволяет записать (2.10.5) в виде:

$$\begin{aligned} -ml^2 \ddot{\alpha}_M + ml^2 \omega^2 \sin \alpha_M \cos \alpha_M &= mgl \sin \alpha_M \Rightarrow \\ \ddot{\alpha}_M - \omega^2 \sin \alpha_M \cos \alpha_M &= -\frac{g}{l} \sin \alpha_M. \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

Совпадение уравнений (2.10.8) и (2.10.9) может служить подтверждением правильности проводившихся вычислений.

Теперь можно приступить к решению поставленной задачи. Уравнение (2.10.8) не зависит от первой производной, поэтому после умножения обеих частей этого уравнения на  $\dot{\alpha}_M$ , его можно проинтегрировать:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_M \ddot{\alpha}_M - \omega^2 \dot{\alpha}_M \sin \alpha_M \cos \alpha_M &= -\frac{g}{l} \dot{\alpha}_M \sin \alpha_M \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\alpha}_M^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cos^2 \alpha_M - \frac{g}{l} \cos \alpha_M \right) &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\dot{\alpha}_M^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cos^2 \alpha_M - \frac{g}{l} \cos \alpha_M = \text{const.}$$

С учетом заданных начальных условий, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}_M^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cos^2 \alpha_M - \frac{g}{l} \cos \alpha_M &= 0 \Rightarrow \\ \dot{\alpha}_M &= -\sqrt{\frac{2g}{l} \cos \alpha_M \left(1 - \frac{\omega^2 l}{2g} \cos \alpha_M\right)}. \end{aligned} \quad (2.10.10)$$

Выбор знака перед квадратным корнем, определяется рассуждениями подобными тем, которые были проведены в аналогичных обстоятельствах в задаче (2.9).

Требуется определить скорость точки  $M$  относительно трубки в самой нижней ее точке. В этом положении  $\alpha_M = 0$ , поэтому

$$\dot{V}_M^{\text{отн}}|_{\alpha_M=0} = l\dot{\alpha}_M|_{\alpha_M=0} = -l\sqrt{\frac{2g}{l} \left(1 - \frac{\omega^2 l}{2g}\right)}. \quad (2.10.11)$$

Формула (2.10.11) означает, что если выполняется неравенство

$$\frac{\omega^2 l}{2g} < 1,$$

точка  $M$  опустится до положения  $\alpha_M = 0$  и ее скорость в этом положении будет определяться указанной формулой. Если же справедливо неравенство

$$\frac{\omega^2 l}{2g} > 1,$$

то в положении  $\alpha_M = \alpha_M^* (\cos \alpha_M^* = \frac{2g}{\omega^2 l})$  относительная скорость точки  $M$  обратится в нуль после чего она начнет двигаться по трубке вверх (доказать это утверждение самостоятельно).

Г. Мы получили уравнение, с помощью которого решили задачу, двумя различными способами. Можно предложить еще один подход, позволяющий получить то же самое уравнение. Этот подход связан с теорией движения материальной точки относительно *неинерциальной системы*. В самом деле, мы с самого начала можем рассматривать движение точки  $M$  *относительно подвижного трехгранника*, жестко связанного с трубкой. Поскольку этот трехгранник вращается относительно Земли (а трехгранник, связанный с Землей, в рамках данной задачи мы рассматриваем как инерциальный) пространство с ним связанное *не является инерциальным*, и записывая закон изменения импульса материальной точки относительно этого пространства, мы к силам, действующим на точку



в инерциальном пространстве, должны добавить две силы инерции – силу инерции от переносного ускорения и силу инерции от ускорения Кориолиса, т. е. в рассматриваемой задаче этот закон будет иметь вид:

$$m\vec{a}_M^{\text{отн}} = -mg\vec{e}_z + \vec{R} + (-m\vec{a}_M^{\text{пер}}) + (-m\vec{a}_M^{\text{кор}}). \quad (2.10.12)$$

Легко видеть, что умножив скалярно обе части соотношения (2.10.12) на единичный вектор  $\vec{e}_\alpha$  и сократив на  $ml$ , мы получим уравнение (2.10.8), в котором один из членов перенесен из правой части в левую.

## Глава 3

# Динамика системы материальных точек

### 1. Перечень III: основные понятия и теоремы динамики системы материальных точек

#### 1.1. Определения и формулы для вычисления основных динамических величин.

Основные динамические величины, определяемые для системы материальных точек, являются величинами *аддитивными*, т.е., масса  $M$ , количество движения (импульс)  $\vec{P}$ , кинетический момент (момент количества движения)  $\vec{K}_O$ , кинетическая энергия  $T$  системы равны суммам соответствующих величин, определенных для материальных точек, включенных в систему.

Пусть  $m_i, i = 1, 2, \dots, N$  — масса  $i$ -той точки системы, а ее радиус-вектор и скорость относительно некоторого трехгранника  $Oxyz$  равны, соответственно,  $\vec{r}_i$  и  $\vec{V}_i$ . Тогда

$$M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (\text{III.1})$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i, \quad (\text{III.2})$$

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{V}_i], \quad (\text{III.3})$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{V}_i, \vec{V}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2. \quad (\text{III.4})$$

*Центром масс* системы материальных точек называется точка  $C$ , радиус-вектор которой определяется формулой:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (\text{III.5})$$

Подвижный трехгранник  $C\xi\eta\zeta$  с началом в точке  $C$  и осями, параллельными осям неподвижного (инерциального) трехгранника

*Отуз*, называется *трехгранником Кёнига*. Пусть  $\vec{r}_C = \vec{V}_C$  — скорость центра масс системы,  $\vec{\rho}_i, \dot{\vec{\rho}}_i$  — радиус-вектор и скорость  $i$ -той точки относительно *трехгранника Кёнига*. Для вычисления основных динамических величин системы удобно использовать *формулы Кёнига*:

$$\vec{P} = M\vec{V}_C, \quad (\text{III.6})$$

$$\vec{K}_O = [\vec{r}_C, \vec{V}_C] + \vec{K}_C, \quad \left( \vec{K}_C = \sum_{i=1}^N [\vec{\rho}_i, m_i \dot{\vec{\rho}}_i] \right), \quad (\text{III.7})$$

$$T = \frac{1}{2} M (V_C)^2 + T_C, \quad \left( T_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{\rho}}_i, \dot{\vec{\rho}}_i) \right). \quad (\text{III.8})$$

Если рассматриваемая система представляет собой *абсолютно твердое тело*, то

$$\vec{K}_C = \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i \vec{e}_i, \quad T_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2. \quad (\text{III.9})$$

где  $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$  — орты главных осей эллипсоида инерции, построенного в центре масс тела,  $J_i, i = 1, 2, 3$  — моменты инерции относительно этих осей,  $\omega_i, i = 1, 2, 3$  — проекции вектора угловой скорости тела на указанные оси.

При вращении твердого тела вокруг *неподвижной* оси  $Oz$  можно использовать формулы

$$K_z = J_z \omega, \quad T = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (\text{III.10})$$

$K_z$  — проекция кинетического момента тела на ось  $Oz$ ,  $J_z$  — момент инерции тела относительно оси  $Oz$ ,  $\omega$  — угловая скорость тела.

Если тело совершает *плоско-параллельное* движение (параллельно плоскости  $Oxz$ ), формула Кёнига для кинетической энергии приобретает вид:

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_\eta \omega^2, \quad (\text{III.11})$$

$J_\eta$  — момент инерции тела относительно оси  $C\eta$ , перпендикулярной плоскости  $Oxz$ .

При вычислении моментов инерции бывает полезна теорема Гюйгенса-Штейнера:

моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, связаны соотношением

$$J = J_C + M d^2, \quad (\text{III.12})$$

где  $J_C$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс,  $J$  — момент инерции относительно произвольной оси, параллельной первой,  $M$  — масса всей системы,  $d$  — расстояние между осями.

## 1.2. Общие теоремы динамики системы материальных точек ([6],[7],[9]) .

Под системой материальных точек понимают, обычно, некоторое *выделенное* множество материальных точек, движение которых надо изучить в рамках поставленной задачи.

Силы, действующие на материальные точки, *принадлежащие* системе, со стороны точек *не принадлежащих* системе, называются *внешними*.

Сумма заданных *внешних* сил, приложенных к  $k$ -той точке системы обозначается  $\vec{F}_k^{(e)}$ .

Силы, возникающие в результате *взаимодействия* материальных точек системы, называются *внутренними*.

Сумма заданных *внутренних* сил, приложенных к  $k$ -той точке системы, обозначается  $\vec{F}_k^{(i)}$ .

Связи, наложенные на систему и допускающие *произвольное виртуальное перемещение* всей системы как *твердого тела*, называются *внутренними*. Остальные связи называются *внешними*. Сумма реакций *внутренних* связей, приложенных к  $k$ -той точке системы обозначается  $\vec{R}_k^{(i)}$ . Сумма реакций *внешних* связей, приложенных к  $k$ -той точке системы обозначается  $\vec{R}_k^{(e)}$ .

Теоремы, приведенные ниже, *справедливы* в рамках классической механики для *любых* систем, при *любых* действующих силах и *любых* связях, наложенных на систему.

Теорема об изменении количества движения (импульса) системы:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right). \quad (\text{III.13})$$

Теорема о движении центра масс системы:

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right). \quad (\text{III.14})$$

Теорема об изменении кинетического момента системы в *абсо-*

лотном движении:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^N \left[ \vec{r}_k, \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right]. \quad (\text{III.15})$$

Теорема об изменении кинетического момента системы в движении относительно трехгранника Кёнига:

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \sum_{k=1}^N \left[ \vec{\rho}_k, \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right]. \quad (\text{III.16})$$

Теорема об изменении кинетической энергии в абсолютном движении:

$$dT = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)} + \vec{R}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right). \quad (\text{III.17})$$

Перечисленные теоремы будем называть *общими теоремами динамики системы материальных точек* (кратко: *общими теоремами динамики*).

*Уравнения плоско-параллельного движения твердого тела* ( $M$  — масса тела,  $x_C, z_C$  — координаты центра масс тела,  $J_\eta$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела и перпендикулярной плоскости  $Oxz$ ,  $\varphi$  — угол между фиксированной в теле прямой, параллельной плоскости  $Oxz$ , и положительным направлением оси  $Ox$ ):

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)}, \vec{e}_x \right), \quad (\text{III.18})$$

$$M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)}, \vec{e}_z \right), \quad (\text{III.19})$$

$$J_\eta \ddot{\varphi} = \left( \sum_{k=1}^N \left[ \vec{\rho}_k, \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right], \vec{e}_\eta \right); \quad (\text{III.20})$$

добавляя к этим уравнениям уравнения внешних связей, наложенных на твердое тело, можно получить замкнутую систему уравнений, позволяющую найти движение тела и реакции связей.

**1.3. Некоторые сведения о связях.** Как правило, связи, наложенные на систему, могут быть представлены в виде линейных по скоростям соотношений.

Обозначим через  $\mu$  матрицу-столбец, элементами которой являются выписанные по порядку  $3N$  координат точек системы, через

$A = ||a_{ij}(\mu, t)||$  матрицу размера  $(l, 3N)$ , элементы которой являются функциями  $\mu$  и  $t$ , и через  $b(\mu, t)$  — столбец, имеющий  $l$  элементов, зависящих от  $\mu$  и  $t$ . Тогда уравнения связи могут быть записаны в виде:

$$A\dot{\mu} + b = 0 \Leftrightarrow A d\mu + b dt = 0. \quad (C1)$$

Вектор-столбец  $d\mu$  и соответствующий ему набор векторов  $d\vec{r}_k, k = 1, 2, \dots, N$  называется *действительным перемещением системы*.

Связи называются *независимыми*, если ранг матрицы  $A$  равен  $l$ .

Любой вектор-столбец  $\delta\mu$  (соответственно любой набор векторов  $\delta\vec{r}_k, k = 1, 2, \dots, N$ ), с компонентами, удовлетворяющими системе уравнений

$$A\delta\mu = 0, \quad (C2)$$

называется *виртуальным перемещением системы* (соответственно  $\delta\vec{r}_k, k = 1, 2, \dots, N$  — виртуальное перемещение  $k$ -той точки).

Число компонент вектора-столбца  $\delta\mu$ , которые могут принимать произвольные значения, называется *числом степеней свободы* механической системы; если связи независимы это число равно  $(3N - l)$ .

Обозначим множество всех векторов-столбцов, удовлетворяющих условию (C2) (*множество виртуальных перемещений*), через  $\{V\}$ . Тогда

$$b = 0 \Rightarrow d\mu \in \{V\}, \quad (C3)$$

что в словесном выражении звучит так:

если  $b = 0$ , *действительное перемещение* принадлежит *множеству виртуальных*.

При решении конкретных задач, в большинстве случаев, радиусы-векторы отдельных точек системы относительно *неподвижного* трехгранника могут быть представлены как функции набора *независимых* параметров (*обобщенных координат*) —  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n), n \leq 3N$ :

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q), k = 1, 2, \dots, N. \quad (C4)$$

В этом случае действительные перемещения подчиняются условиям

$$d\vec{r}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j dt, k = 1, 2, \dots, N. \quad (C5)$$

( $\dot{q}_j, j = 1, 2, \dots, n$  являются решениями соответствующих уравнений движения), а виртуальные — соотношениям

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, k = 1, 2, \dots, N, \quad (C6)$$

где все  $\delta q_j$  могут принимать независимые произвольные значения. Поэтому в описанной ситуации действительные перемещения принадлежат к множеству виртуальных.

Если связи, наложенные на систему, зависят от времени, то, вообще говоря,

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q, t), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (C7)$$

и, следовательно,

$$d\vec{r}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (C8)$$

в то время как, по определению,

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (C9)$$

т.е. в этом случае, действительные перемещения не входят в множество виртуальных.

Системы и связи, для которых возможно представление (C4) или (C7), называются голономными.

Для голономных систем число независимых обобщенных координат  $q_j$  и число независимых вариаций  $\delta q_j$  совпадают.

Примеры.

Предположим, что частица (материальная точка)  $M$  может двигаться только по сфере радиуса  $R$  с центром в начале координат  $O$ . Тогда ее декартовы координаты должны удовлетворять соотношению (уравнению связи)

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = R^2. \quad (E1)$$

Так как соотношение (E1) выполняется в любой момент времени, его можно продифференцировать. В результате дифференцирования получим уравнение связи, наложенной на точку  $M$ , в дифференциальной форме:

$$x_M \dot{x}_M + y_M \dot{y}_M + z_M \dot{z}_M = 0 \Leftrightarrow x_M dx_M + y_M dy_M + z_M dz_M = 0. \quad (E2)$$

В этом случае  $A = (x_M, y_M, z_M)$ ,  $d\mu = (dx_M, dy_M, dz_M)^T$ ,  $((\cdot)^T$  — символ транспонирования),  $b = 0$ .

Уравнение для виртуальных перемещений имеет вид

$$x_M \delta x_M + y_M \delta y_M + z_M \delta z_M = 0. \quad (E3)$$

Если для описания движения точки использовать сферические координаты (см. рис.2):  $\mu = (r_M, \varphi_M, \vartheta_M)^T$ , то уравнение связи запишется так:

$$r_M = R,$$

дифференциальная форма будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{r}_M = 0 \Leftrightarrow dr_M = 0, \quad (E4)$$

соответственно

$A = (1, 0, 0), b = 0, \delta\mu = (\delta r_M, \delta\varphi_M, \delta\vartheta_M)^T \Rightarrow A\delta\mu = \delta r_M$ ,  
следовательно, виртуальные перемещения, удовлетворяют уравнению

$$\delta r_M = 0. \quad (E5)$$

Уравнения (E2),(E3),(E4),(E5) показывают, что при указанной связи *действительное перемещение* принадлежит *множеству виртуальных*.

Пусть теперь центр сферы  $O_1$ , по которой движется частица смещается вдоль оси  $Ox$  по закону  $x_{O_1} = f(t)$ . Запишем уравнение связи в декартовых координатах

$$(x_M - f(t))^2 + y_M^2 + z_M^2 = R^2. \quad (E6)$$

Продифференцируем (E6)

$$(x_M - f(t))\left(\dot{x}_M - \frac{df}{dt}\right) + y_M\dot{y}_M + z_M\dot{z}_M = 0 \Rightarrow$$

$$(x_M - f(t))dx_M + y_Mdy_M + z_Mdz_M + (x_M - f(t))\frac{df}{dt}dt = 0 \Rightarrow$$

$$Ad\mu + bdt = 0, \quad (E7)$$

где  $A = ((x_M - f(t)), y_M, z_M), b = (x_M - f(t))\frac{df}{dt}$ .

Виртуальные перемещения, *по определению*, должны удовлетворять соотношению

$$A\delta\mu = 0. \quad (E8)$$

Сравнение уравнений (E7) и (E8) позволяет сделать вывод, что если на точку наложена связь (E6), *действительные перемещения* не принадлежат множеству  $\{V\}$ .

Если рассматривается движение твердого тела, то в качестве компонент вектора-столбца  $\mu$  следует брать вектор обобщенных координат. Пусть, например, шар радиуса  $R$  катится без проскальзывания по плоскости. Будем считать, что оси  $Ox$  и  $Oy$  неподвижного трехгранника лежат в указанной плоскости, а ось  $Oz$  — перпендикулярна ей. Определим положение шара, задавая координаты его центра  $C - (x_C, y_C, z_C)$ , и углы Эйлера  $(\vartheta, \psi, \varphi)$  поворота подвижного трехгранника  $C\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  (см. рис. 2), жестко связанного с шаром,



относительно трехгранника  $C\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ . Запишем уравнения связей, наложенных на шар:

$$1) \quad z_C = R, dz_C = 0, \quad (E9)$$

– шар движется по плоскости ;

2) Обозначим точку шара, которой он касается плоскости, буквой  $A$ . Тогда условие отсутствия проскальзывания примет вид:

$$V_A = 0.$$

Но по формуле Эйлера (см. формулы I.14, I.15)

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= \vec{V}_C + [\vec{\omega}, \vec{CA}] \Rightarrow \vec{V}_C + [\vec{\omega}, \vec{CA}] = 0 \Rightarrow \\ &\dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{y}_C \vec{e}_y + [\dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\vartheta} \vec{e}_{ON} + \dot{\varphi} \vec{e}_3, -R \vec{e}_x] = 0 \end{aligned}$$

$\vec{e}_{ON} = \cos \psi \vec{e}_x + \sin \psi \vec{e}_y \vec{e}_3 = \sin \vartheta \sin \psi \vec{e}_x - \sin \vartheta \cos \psi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z$ ,  
поэтому в координатной форме получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C + R(\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi) &= 0 \Rightarrow \\ \dot{x}_C + R(\sin \vartheta \cos \psi d\varphi - \sin \psi d\vartheta) &= 0, \end{aligned} \quad (E10)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_C - R(\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi) &= 0 \Rightarrow \\ \dot{y}_C - R(\sin \vartheta \sin \psi d\varphi + \cos \psi d\vartheta) &= 0, \end{aligned} \quad (E11)$$

Представим совокупность уравнений (E10), (E11), (E9) в матричном виде ( $\mu = (x_C, y_C, z_C, \vartheta, \psi, \varphi)^T$ )

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -R \sin \psi & 0 & R \sin \vartheta \cos \psi \\ 0 & 1 & 0 & -R \cos \psi & 0 & -R \sin \vartheta \sin \psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\mu = 0 \Rightarrow \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -R \sin \psi & 0 & R \sin \vartheta \cos \psi \\ 0 & 1 & 0 & -R \cos \psi & 0 & -R \sin \vartheta \sin \psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = 0 \Rightarrow \\ &A \delta \mu = 0. \end{aligned} \quad (E12)$$

Поскольку  $b=0$ , действительное перемещение шара принадлежит множеству виртуальных; кроме того, легко видеть, что ранг матрицы  $A$  равен 3, значит число степеней свободы шара, катящегося по плоскости без проскальзывания, равно  $6 - 3 = 3$ .

При качении шара по плоскости без проскальзывания 5 координат —  $(x_C, y_C, \vartheta, \psi, \varphi)$  могут принимать произвольные значения, однако в силу (E12) среди вариаций координат независимых только 3.

Такое положение является следствием неинтегрируемости системы уравнений (E10), (E11). Связи, обладающие подобным свойством, называются *неголономными*.

#### 1.4. Теоремы динамики для систем с идеальными связями ([7],[8],[9],[10]) .

Связи, наложенные на систему, называются *идеальными*, если в *каждый* момент времени выполняется условие

$$\sum_{k=1}^N \left( \vec{R}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(i)}, \delta \vec{r}_k \right) = 0, \forall t, \forall \delta \mu \in \{V\}. \quad (\text{III.21})$$

(При решении конкретных задач, если в условии явно не оговорено наличие какого либо вида *трения*, будем считать связи идеальными.)

Для систем с идеальными связями справедливо *общее уравнение динамики*:

$$\sum_{k=1}^N \left( m_k \ddot{\vec{r}}_k - \vec{F}_k^{(e)} - \vec{F}_k^{(i)}, \delta \vec{r}_k \right) = 0, \forall t, \forall \delta \mu \in \{V\}. \quad (\text{III.22})$$

Все нижеследующие *теоремы* являются *следствиями* общего уравнения динамики, и в последующем тексте будут называться *специальными теоремами динамики*, поскольку в отличие от *общих теорем* требуют при применении *проверки выполнения определенных условий*.

**Теорема об изменении количества движения:**

Если справедливо (III.21) и  $\exists \vec{e}_x (\vec{e}_x = 0)$ , такой, что  $\forall t, k, \lambda, \delta \vec{r}_k = \lambda \vec{e}_x \in \{V\}$ , то

$$\frac{d(\vec{P}, \vec{e}_x)}{dt} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)}, \vec{e}_x \right). \quad (\text{III.23})$$

Словесная формулировка: если связи, наложенные на систему, — *идеальные*, и в *каждый* момент времени допускают *поступательное* перемещение системы как *твердого тела*, параллельно некоторому *неизменному* направлению, то производная по времени от *проекции импульса системы на это направление* равна сумме *проекций всех внешних заданных сил* на это направление.

**Теорема о движении центра масс:**

Если справедливо (III.21) и  $\exists \vec{e}_x (\vec{e}_x = 0)$ , такой, что  $\forall t, k, \lambda, \delta \vec{r}_k = \lambda \vec{e}_x \in \{V\}$ , то

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)}, \vec{e}_x \right). \quad (\text{III.24})$$

Словесная формулировка аналогична предыдущей.

**Теорема об изменении кинетического момента в абсолютном движении:**

Если справедливо (III.21),  $\exists$  точка  $A$  и  $\vec{e}_z(\dot{\vec{r}}_A = 0, \dot{\vec{e}}_z = 0)$ , такие, что  $\forall t, k, \lambda, \quad \delta \vec{r}_k = [\lambda \vec{e}_z, \vec{r}_k - \vec{r}_A] \in \{V\}$ , то

$$\frac{d(\vec{K}_A, \vec{e}_z)}{dt} = \left( \sum_{k=1}^N [\vec{r}_k - \vec{r}_A, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_z \right), \quad \left( \vec{K}_A = \sum_{k=1}^N [\vec{r}_k - \vec{r}_A, m_k \vec{V}_k] \right). \quad (\text{III.25})$$

Словесная формулировка: если связи, наложенные на систему, — идеальные, и в каждый момент времени допускают вращение системы как твердого тела вокруг некоторой неподвижной оси, то производная по времени от проекции кинетического момента системы на эту ось равна сумме моментов внешних заданных сил относительно этой оси.

Теорема об изменении кинетического момента системы в движении по отношению к трехграннику Кёнига:

Если справедливо (III.21) и  $\exists \vec{e}_\zeta(\dot{\vec{e}}_\zeta = 0)$ , такой, что  $\forall t, k, \lambda, \quad \delta \vec{r}_k = [\lambda \vec{e}_\zeta, \vec{r}_k] \in \{V\}$ , то

$$\frac{d(\vec{K}_C, \vec{e}_\zeta)}{dt} = \left( \sum_{k=1}^N [\vec{r}_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_\zeta \right). \quad (\text{III.26})$$

Словесная формулировка получается из предыдущей заменой неподвижной оси на ось, неизменного направления, проходящую через центр масс и кинетического момента системы в абсолютном движении на кинетический момент системы в движении относительно трехгранника Кёнига.

Теорема об изменении кинетической энергии:

Если справедливо (III.21) и  $\forall t, \quad d\mu \in \{V\}$ , то

$$dT = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right). \quad (\text{III.27})$$

Словесная формулировка: если связи, наложенные на систему, — идеальные, и в каждый момент времени действительное перемещение принадлежит множеству виртуальных, то дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех (внешних и внутренних) заданных сил на действительном перемещении системы.

## 2. Задачи

Предварительные замечания.

В "Перечне III" изложены два ряда теорем, позволяющих составлять *уравнения движения* системы материальных точек. Отметим особенности применения теорем, принадлежащих к каждому из наборов.

Важным преимуществом теорем III.13 - III.17 является то, что *все* они в рамках классической механики справедливы для систем *произвольного состава*, на которые наложены *любые* связи и действуют *любые* силы. Однако прежде чем применить любую из этих теорем *необходимо ввести реакции связей*, что в некоторых случаях бывает непросто.

Напротив, теоремы III.23 - III.27, справедливы лишь для *некоторых систем*, и, прежде чем их применять *необходимо проверить выполнение определенных условий*, но зато, если эти условия соблюдены, можно писать соответствующие соотношения, *не вводя реакции связей и даже не думая о них*.

### Задача 3.1.

Однородный круглый диск радиуса  $r$  и массы  $M$  движется в неподвижной вертикальной плоскости, скатываясь без проскальзывания по наклонной прямой, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом.

Определить ускорение центра диска.

Решение.

А. Введем координатный трехгранник  $Oxyz$ : точка  $O$  — фиксированная точка прямой, по которой катится диск, оси  $Ox$  и  $Oz$  направлены так, как указано на рис.3.1.1, ось  $Oy$  образует с ними *правую* тройку. Обозначим через  $x_c, z_c$  координаты геометрического центра диска. По условию  $z_c = r$ .

Определим силы, действующие на диск. Из условия, что диск движется в неподвижной *вертикальной* плоскости, следует, что движение происходит в поле сил тяжести. Сила тяжести  $Mg$  приложена в центре тяжести, который, вследствие *однородности* диска, совпадает с геометрическим центром.

Поскольку никаких конкретных указаний о свойствах связей, наложенных на систему нет, будем считать их *идеальными*. В этом случае реакция связей сводится к одной силе  $\vec{R}_A$ , приложенной к диску в точке  $A$  контакта диска и прямой ( $\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{e}_x + R_{Az}\vec{e}_z, R_{Ax}, R_{Az}$  — неизвестные величины;

у изображенной на рис.3.1.1 реакции, проекции на обе оси положительны — так это или не так, заранее не известно (*действительные* значения этих проекций мы узнаем только после того, как решим задачу о движении системы), однако, при *составлении* урав-

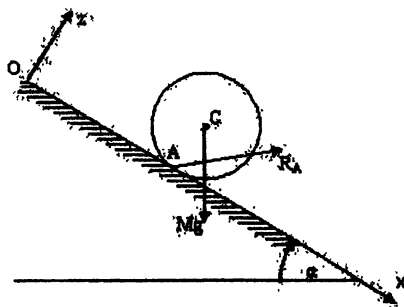


Рис. 3.1.1.

нений движения, чтобы избежать путаницы со знаками, удобно считать, что все неизвестные величины имеют положительное значение (а не гадать, куда направлен тот или другой вектор на самом деле).

Таким образом, в рассматриваемой задаче есть три скалярных неизвестных величины:  $x_C, R_{Ax}, R_{Az}$ .

Б. Для нахождения *трех* неизвестных надо иметь *три* уравнения. При рассмотрении "Перечня III" замечаем *три* уравнения плоско-параллельного движения твердого тела:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum_{k=1}^N (\vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)}, \vec{e}_x), \\ M\ddot{z}_C &= \sum_{k=1}^N (\vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)}, \vec{e}_z), \\ J_\eta \ddot{\varphi} &= \left( \sum_{k=1}^N [\vec{e}_k, \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)}], \vec{e}_\eta \right); \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

В. В рассматриваемой задаче

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)} &= M\vec{g} = Mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z), \\ \sum_{k=1}^N \vec{R}_k^{(e)} &= R_{Ax} \vec{e}_x + R_{Az} \vec{e}_z, \\ \sum_{k=1}^N [\vec{e}_k, \vec{F}_k^{(e)}] &= [\vec{e}_C, M\vec{g}] = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^N [\vec{\rho}_k, \vec{R}_k^{(e)}] = [\vec{\rho}_A, \vec{R}_A] = -r R_{Ax} \vec{e}_\eta,$$

$$J_\eta = \frac{Mr^2}{2}$$

поэтому указанные уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= Mg \sin \alpha + R_{Ax}, \\ 0 &= -Mg \cos \alpha + R_{Az}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\frac{Mr^2}{2} \ddot{\varphi} = -r R_{Ax}.$$

Получившаяся система *трех* уравнений содержит *четыре* неизвестных: кроме трех ранее отмеченных  $x_C, R_{Ax}, R_{Az}$ , появилась *новая* неизвестная величина  $\varphi$ . Однако переходя от системы (3.1.1) к системе (3.1.2) мы учли лишь *одно* уравнение связи:  $x_C = r$ , между тем, по условию задачи диск катится без проскальзывания, и, следовательно,  $x_C$  и  $\varphi$  не могут быть независимыми. Чтобы определить зависимость между ними, запишем *формулу Эйлера* (см. "Перечень I", формула (I.15)):

$$\begin{aligned} \vec{V}_C &= \vec{V}_A + [\vec{\omega}, \vec{AC}], \vec{V}_C = \dot{x}_C \vec{e}_x, \vec{V}_A = 0, \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_y, \vec{AC} = r \vec{e}_x \Rightarrow \\ \dot{x}_C &= r \dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r} \end{aligned}$$

Исключая из (3.1.2) с помощью найденной зависимости *неизвестную*  $\ddot{\varphi}$ , получим *замкнутую* систему *трех* уравнений относительно *трех* неизвестных:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= Mg \sin \alpha + R_{Ax}, \\ 0 &= -Mg \cos \alpha + R_{Az}, \\ \frac{M}{2} \ddot{x}_C &= -R_{Ax}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Решая (3.1.3) найдем:

$$\ddot{x}_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha, R_{Ax} = -M \frac{1}{3} g \sin \alpha, R_{Az} = Mg \cos \alpha.$$

Г. Используя уравнения плоско-параллельного движения твердого тела и уравнения связи, мы нашли все неизвестные величины, фигурирующие в рассматриваемой задаче. Однако поставленный вопрос требует определения только ускорения центра масс. Нельзя ли найти *одно* уравнение, позволяющее определить эту

неизвестную? Ясно, что это уравнение никоим образом не должно зависеть от реакции связи. Анализируя с этих позиций "Перечень III" замечаем, что применима теорема III.27: действительно, мы предположили, что связи наложенные на систему *идеальные*; кроме того

$$\mu = (z_C, x_C, \varphi)^T, dz_C = 0, dx_C - r d\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r \end{pmatrix}, b = 0 \Rightarrow$$

$$d\mu \in \{V\}, \quad (\text{см. C3})$$

(система имеет одну степень свободы, в качестве обобщенной координаты можно выбрать  $x_C$ ).

Указанная теорема позволяет написать уравнение, решающее поставленную задачу:

$$dT = \sum_{k=1}^N (\vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k)$$

В нашем случае:

$$T = \frac{1}{2} MV_C^2 + \frac{1}{2} J_\eta \omega^2 = \frac{1}{2} M(\dot{x}_C)^2 + \frac{1}{2} \frac{Mr^2}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} M(\dot{x}_C)^2,$$

$$\sum_{k=1}^N (\vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k) = Mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z, dx_C \vec{e}_x) = Mg \sin \alpha dx_C$$

следовательно

$$d\left(\frac{3}{4} M(\dot{x}_C)^2\right) = Mg \sin \alpha dx_C \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} M \dot{x}_C \ddot{x}_C dt = Mg \sin \alpha \dot{x}_C dt \Rightarrow \ddot{x}_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

**Выводы:** хотя в задаче речь идет о плоско-параллельном движении твердого тела и применение уравнений (3.1.1) вполне оправдано, их использование приводит к необходимости решения системы *трех* уравнений с *тремя* неизвестными (фактически, даже *четырь*х уравнений с *четырьмя* неизвестными); в то же время более внимательный анализ условий задачи и "Перечня III" показывает, что существует путь, позволяющий при решении данной конкретной задачи обойтись *одним* уравнением.

Задача 3.2. [3, 39.15]

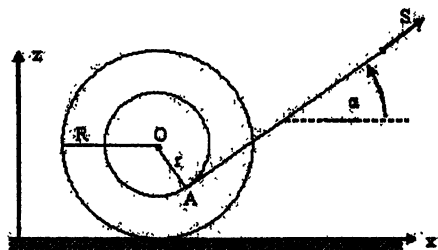


Рис. 3.2.1.

На барабан радиуса  $r$  однородного катка массы  $M$  и радиуса  $R > r$ , лежащего на горизонтальном полу, намотана невесомая нерастяжимая нить, к которой приложена сила  $\vec{S}$  под углом  $\alpha$  к горизонту (см.рис. 3.2.1). Радиус инерции катка относительно его оси равен  $\rho$ .

В начальный момент каток покоится, а затем катится по полу без проскальзывания.

Найти закон движения оси катка.

Решение.

А+Б. Будем считать, что движение катка является плоско-параллельным. Из однородности катка вытекает, что его центр масс (пусть это будет точка  $O$ ) лежит на геометрической оси. При плоско-параллельном, без проскальзывания, движении твердого тела его положение можно задать одной координатой, например,  $x_O$ . Для нахождения *одной* неизвестной достаточно *одного* уравнения, только это уравнение не должно содержать других неизвестных величин, например, реакций связи.

В. Повторяя рассуждения пункта (Г) задачи (3.1), приходим к выводу о возможности применения теоремы (III.27) об изменении кинетической энергии:

$$dT = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right).$$

В рассматриваемой задаче заданными силами являются сила тяжести и сила  $\vec{S}$ , приложенная к нити. Сила тяжести приложена в центре тяжести  $O$ ; что касается силы  $\vec{S}$ , то поскольку нить *невесомая*, ее натяжение в точках не соприкасающихся с барабаном по величине равно  $|\vec{S}|$ , следовательно, можно считать силу  $\vec{S}$ , прило-



женной в точке  $A$  схода нити с барабана:

$$dT = (M\vec{g}, d\vec{r}_O) + (\vec{S}, d\vec{r}_A). \quad (3.2.1)$$

В соответствии с формулой (III.11):

$$T = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}J_\eta\omega^2, V_C = \dot{x}_O, \omega = \frac{\dot{x}_O}{R} \text{ (см. задачу 3.1), } J_\eta = M\rho^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_O^2 \left(1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right).$$

Подсчитаем элементарную работу заданных сил на действительном перемещении системы:

$$\begin{aligned} M\vec{g} &= -Mg\vec{e}_z, d\vec{r}_O = dx_O\vec{e}_x, \Rightarrow (M\vec{g}, d\vec{r}_O) = 0, \\ \vec{S} &= S\cos\alpha\vec{e}_x + S\sin\alpha\vec{e}_z, d\vec{r}_A = (\vec{V}_O + [\vec{\omega}, \vec{OA}])dt \Rightarrow \\ d\vec{r}_A &= dx_O\vec{e}_x + \left[\frac{dx_O}{R}\vec{e}_y, r\sin\alpha\vec{e}_x - r\cos\alpha\vec{e}_z\right] = \\ &= dx_O\left(1 - \frac{r}{R}\cos\alpha\right)\vec{e}_x - dx_O\frac{r}{R}\sin\alpha\vec{e}_z \Rightarrow \\ (\vec{S}, d\vec{r}_A) &= Sdx_O\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right). \end{aligned}$$

Подставив результаты в выражение (3.2.1), получим:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}M\dot{x}_O^2\left(1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right)\right) &= Sdx_O\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right), \\ d\left(\frac{1}{2}M\dot{x}_O^2\left(1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right)\right) &= M\dot{x}_O\ddot{x}_O\left(1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right)dt, dx_O = \dot{x}_Odt \Rightarrow \\ \dot{x}_O\left(M\ddot{x}_O\left(1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right) - S\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)\right) &= 0, \dot{x}_O \neq 0 \Rightarrow \\ \ddot{x}_O &= \frac{S(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{\left(1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что в начальный момент каток покоился, и полагая  $x_O(0) = 0$ , найдем

$$x_O(t) = \frac{S(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{\left(1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right)} \frac{t^2}{2}. \quad (3.2.2)$$

Отметим, что полученный результат справедлив при условии, что каток не отрывается от пола. Из формулы (3.2.2) следует интересный факт: в зависимости от знака выражения

$$\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)$$

каток будет двигаться вправо или влево по оси  $x$ . Это явление можно наблюдать, пытаясь подтянуть к себе за нитку упавшую на пол катушку: в зависимости от того под каким углом к полу направлена нитка, катушка будет приближаться или "убегать".

**Задача 3.3.** [3, 48.18]

Концы однородного стержня  $AB$  массы  $M$  и длины  $2l$  скользят по неподвижной гладкой горизонтальной окружности радиуса  $R$ ,  $R > l$ . По стержню движется частица (материальная точка)  $G$  массы  $m$  с относительной скоростью  $V = at$ ,  $a = \text{const}$ . При  $t = 0$  стержень покоится, а  $G$  находится в его середине. Найти закон движения стержня, определяя его положение углом  $\vartheta$  (см. рис. 3.3.1).

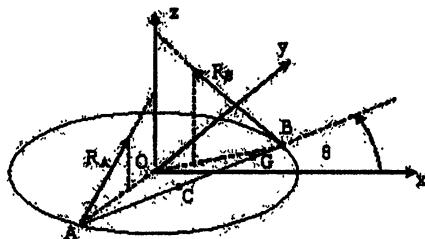


Рис. 3.3.1.

**Решение.**

А. В качестве системы будем рассматривать совокупность частицы и стержня. Чтобы полностью определить положение системы, нужно задать положение стержня ( для этого достаточно указать значение угла  $\vartheta$  ) и положение частицы на стержне. Пусть  $\xi_G$  — координата частицы на стержне, отсчитываемая от середины стержня  $C$ , в направлении точки  $B$ . Тогда в соответствии с условием задачи

$$\dot{\xi}_G = V = at \Rightarrow \xi_G = \frac{at^2}{2}. \quad (3.3.1)$$

Соотношение (3.3.1) представляет собой *уравнение связи*, наложенной на систему. Таким образом, из двух координат, определяющих положение системы, произвольно меняться может только одна, т.е. рассматриваемая система имеет *одну* степень свободы, и, следовательно, для того чтобы описать ее движение достаточно *одного* уравнения.

Определим, теперь, силы действующие на систему. Задачными внешними силами в данном случае являются силы тяжести части-

цы и стержня. Кроме того на стержень действуют реакции *внешней* связи, приложенные в точках  $A$  и  $B$  и реакция внутренней связи (3.3.1), приложенная в той точке стержня, где в данный момент находится  $G$ . Равная по величине и противоположная по направлению реакция приложена к частице.

Б. Анализируя условия задачи, можно заметить, что все внешние силы либо пересекают ось  $Oz$  неподвижного трехгранника (реакции  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$  *внешней* связи, вследствие гладкости окружности, лежат в плоскостях, содержащих ось  $Oz$  и точки  $A$  и  $B$  соответственно), либо параллельны ей (силы тяжести) и, следовательно, сумма моментов *всех внешних* сил, приложенных к системе, относительно этой оси равна нулю.

Поэтому, умножив скалярно обе части соотношения III.15 (теорема об изменении кинетического момента системы в абсолютном движении) на *постоянный* вектор  $\vec{e}_z$ , получим:

$$(\vec{e}_z, \frac{d\vec{K}_O}{dt}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{e}_z, \vec{K}_O) = 0 \Rightarrow \frac{dK_{Oz}}{dt} = 0 \Rightarrow K_{Oz} = \text{const.} \quad (3.3.2)$$

Как сказано выше, система имеет одну степень свободы, поэтому уравнение (3.3.2), *в принципе*, решает задачу.

В. Чтобы довести решение поставленной задачи до конца, нужно выразить  $K_{Oz}$  через  $\vartheta$  и  $\dot{\vartheta}$ , и решить получившееся дифференциальное уравнение.

Проекция кинетического момента системы на ось  $Oz$ , так же как и вектор кинетического момента, является величиной *аддитивной*, т.е. складывается из проекций на ось  $Oz$  кинетических моментов стержня  $K_{Oz}(\text{ст})$  и частицы  $K_{Oz}(G)$ :

$$K_{Oz} = K_{Oz}(\text{ст}) + K_{Oz}(G). \quad (3.3.3)$$

Вследствие наложенной связи, движение стержня представляет собой *вращение* вокруг *неподвижной* оси  $Oz$ , поэтому для вычисления  $K_{Oz}(\text{ст})$  можно воспользоваться одной из формул (III.10):

$$K_{Oz}(\text{ст}) = J_{Oz}\omega.$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера (III.12)

$$J_{Oz} = \frac{Ml^2}{3} + M(R^2 - l^2).$$

При выбранном направлении отсчета координаты  $\vartheta$

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\vec{e}_z,$$

поэтому

$$K_{Oz}(\text{ст}) = \left( \frac{Ml^2}{3} + M(R^2 - l^2) \right) \dot{\vartheta}. \quad (3.3.4)$$

Для вычисления  $K_{Oz}(G)$  воспользуемся определением этой величины:

$$K_{Oz}(G) = [\vec{r}_G, m\vec{V}_G, \vec{e}_z]. \quad (3.3.5)$$

Введя правый подвижный трехгранник  $C\xi\eta\zeta$  ( $\vec{e}_\xi = \vec{e}_{CB}$ ,  $\vec{e}_\zeta = \vec{e}_z$ ), жестко связанный со стержнем, найдем по теореме сложения скоростей:

$$\begin{aligned} \vec{V}_G &= \vec{V}_G^{\text{пер}} + \vec{V}_G^{\text{отн}}, \quad \vec{V}_G^{\text{отн}} = \dot{\xi}_G \vec{e}_\xi, \\ \vec{V}_G^{\text{пер}} &= \left( \sqrt{R^2 + \xi_G^2} \right) \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

( $\vec{e}_\vartheta$  — единичный вектор, перпендикулярный  $\vec{OG}$  и направленный в сторону возрастания  $\vartheta$ ). Поскольку

$$\vec{r}_G = \xi_G \vec{e}_\xi - \sqrt{R^2 - l^2} \vec{e}_\eta,$$

подставляя в (3.3.5) выражения (3.3.6), получим:

$$K_{Oz}(G) = m \left( \left[ \xi_G \vec{e}_\xi - \left( \sqrt{R^2 - l^2} \right) \vec{e}_\eta, \dot{\xi}_G \vec{e}_\xi + \left( \sqrt{R^2 + \xi_G^2} \right) \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta \right], \vec{e}_z \right).$$

Обозначим угол между векторами  $\vec{OC}$  и  $\vec{OG}$  через  $\alpha$ . Тогда

$$\begin{aligned} \vec{e}_\vartheta &= \cos \alpha \vec{e}_\xi + \sin \alpha \vec{e}_\eta, \\ \sqrt{R^2 + \xi_G^2} \cos \alpha &= \sqrt{R^2 - l^2}, \quad \sqrt{R^2 + \xi_G^2} \sin \alpha = \xi_G, \end{aligned}$$

и (вследствие свойств смешанного произведения трех векторов)

$$K_{Oz}(G) = m (\xi_G^2 + (R^2 - l^2)) \dot{\vartheta} + m \left( \sqrt{R^2 - l^2} \right) \dot{\xi}_G. \quad (3.3.7)$$

Используя (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.7) и начальные условия, из (3.3.2) имеем:

$$\left( \frac{Ml^2}{3} + (M + m)(R^2 - l^2) + m \left( \frac{at^2}{2} \right)^2 \right) \dot{\vartheta} + m \left( \sqrt{R^2 - l^2} \right) at = 0.$$

Получившееся дифференциальное уравнение допускает разделение переменных и легко интегрируется:

$$d\vartheta = - \frac{\sqrt{R^2 - l^2} d\left(\frac{at^2}{2}\right)}{R^2 - l^2 + \frac{M}{m}(R^2 - \frac{2}{3}l^2) + \left(\frac{at^2}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = \sqrt{\frac{R^2 - l^2}{R^2 - l^2 + \frac{M}{m}(R^2 - \frac{2}{3}l^2)}} \arctg \left( \frac{at^2}{2\sqrt{R^2 - l^2 + \frac{M}{m}(R^2 - \frac{2}{3}l^2)}} \right).$$

Г. Связи, наложенные на систему, *идеальные*, и в каждый момент времени *допускают* вращение системы как твердого тела вокруг оси  $Oz$ , поэтому можно применить теорему (III.24), и, не вникая в подробности того, как устроены реакции, записать (поскольку момент заданных сил относительно оси  $Oz$  равен нулю) сразу:

$$(\vec{e}_z, \frac{d\vec{K}_O}{dt}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{e}_z, \vec{K}_O) = 0 \Rightarrow \frac{dK_{Oz}}{dt} = 0 \Rightarrow K_{Oz} = \text{const}.$$

Стоит обратить внимание на специфическую особенность этой системы. Уравнение связи имеет вид (3.3.1), следовательно, *действительные* перемещения *не* принадлежат *множеству возможных* (см. (C7), (C8), (C9)) и применять теорему (III.27) нельзя. Попытавшись применить теорему (III.17) (обозначим реакцию связи (3.3.1), приложенную к частице  $\vec{R}_G(G)$ , а реакцию той же связи, приложенную к стержню  $\vec{R}_G(ст)$ ,  $\vec{R}_G(ст) = -\vec{R}_G(G)$ ) получим:

$$dT = (M\vec{g}, d\vec{r}_C) + (m\vec{g}, d\vec{r}_G) + (\vec{R}_A, d\vec{r}_A) + (\vec{R}_B, d\vec{r}_B) + (\vec{R}_G(G), d\vec{r}_G) + (\vec{R}_G(ст), d\vec{r}_G(ст))$$

$$(M\vec{g}, d\vec{r}_C) = 0, (m\vec{g}, d\vec{r}_G) = 0, (\vec{R}_A, d\vec{r}_A) = 0, (\vec{R}_B, d\vec{r}_B) = 0,$$

$$\begin{aligned} (\vec{R}_G(G), d\vec{r}_G) + (\vec{R}_G(ст), d\vec{r}_G(ст)) &= (\vec{R}_G(G), d\xi_G \vec{e}_\xi + \\ &+ (\sqrt{R^2 + \xi_G^2} d\vartheta \vec{e}_\vartheta) - (\vec{R}_G(G), \sqrt{R^2 + \xi_G^2} d\vartheta \vec{e}_\vartheta)) = \\ &= (\vec{R}_G(G), d\xi_G \vec{e}_\xi) \Rightarrow dT = (\vec{R}_G(G), d\xi_G \vec{e}_\xi) \neq 0, \end{aligned}$$

т.е., элементарная работа реакции не равна нулю и неизвестна. Указанная особенность приводит к тому, что для рассмотренной системы (и для систем подобных ей, в том смысле, связи, на них наложенные зависят от времени) *интеграл энергии*, как правило, не имеет места.

**Задача 3.4.** [2, 809]

Доска массы  $M$  лежит на двух одинаковых катках массы  $m$  каждый, которые могут катиться *без проскальзывания* по горизонтальной плоскости. На доску действует горизонтальная сила  $\vec{Q}$ , приложенная в точке  $K$ .

Найти ускорение доски, если известно, что *проскальзывания* между доской и катками *нет*.

Катки считать однородными круглыми дисками.

Решение.

А. Свяжем с плоскостью неподвижный трехгранник  $Oxyz$  (см. рис.3.4.1). Рассмотрим в качестве системы совокупность доски и двух катков. Доска при указанных в задаче условиях перемещается параллельно горизонтальной плоскости и ее положение можно определить, задав координату одной из ее точек. Пусть  $x_1$  — координата центра масс доски, точки  $C_1$  (чтобы решить задачу, надо найти  $\ddot{x}_1$ ).

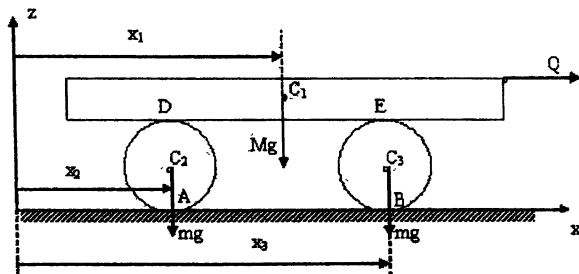


Рис. 3.4.1.

Поскольку катки не проскальзывают относительно неподвижной плоскости, положение каждого из них можно задать с помощью одной координаты (см. задачу 3.2.1, п. Г). Обозначим  $x_2$  и  $x_3$  соответственно координаты центров масс катков  $C_2$  и  $C_3$ .

Обобщенные координаты  $x_1, x_2, x_3$  ( $\mu = (x_1, x_2, x_3)^T$ ) позволяют определить положение системы, однако не являются *независимыми*, так как между доской и катками отсутствует проскальзывание. Это условие означает, что скорость верхней точки каждого из катков равна скорости доски, в свою очередь эта скорость равна удвоенной скорости центра масс соответствующего катка, поскольку точки  $A$  и  $B$  являются мгновенными центрами скоростей катков (см. "Перечень I", п. 2), т.е.

$$\dot{x}_1 = 2\dot{x}_2, \quad \dot{x}_1 = 2\dot{x}_3 \Rightarrow dx_1 - 2dx_2 = 0, \quad dx_1 - 2dx_3 = 0 \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = 0, \quad (3.4.1)$$

следовательно, система имеет *одну* степень свободы и *действительные* перемещения *принадлежат множеству виртуальных* (см. "Перечень III", п.3). В качестве единственной обобщенной координаты выберем  $x_1$ .

Б. Проведенные рассуждения и анализ перечня *специальных* теорем показывают, во-первых, что для решения задачи достаточно *одного* уравнения, содержащего  $x_1$ , и, во-вторых, что такое уравнение можно получить применив теорему III.27

$$dT = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right). \quad (3.4.2)$$

В. В рассматриваемой задаче

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где  $T_1$  — кинетическая энергия доски,  $T_2, T_3$  — кинетическая энергия катков,

$$\sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right) =$$

$$(M\vec{g}, d\vec{r}_{C_1}) + (m\vec{g}, d\vec{r}_{C_2}) + (m\vec{g}, d\vec{r}_{C_3}) + (\vec{Q}, d\vec{r}_K) = Qdx_1. \quad (3.4.3)$$

Для вычисления кинетической энергии воспользуемся формулой (III.11):

$$T = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}J_\eta\omega^2.$$

Так как доска движется поступательно

$$T_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2, \quad (3.4.4)$$

для катков (см. задачу 3.1)

$$T_2 = \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2, T_3 = \frac{3}{4}m\dot{x}_3^2.$$

Используя уравнение связи (3.4.1), получим

$$T_2 = T_3 = \frac{3}{16}m\dot{x}_1^2. \quad (3.4.5)$$

Подставляя в (3.4.2) значения (3.4.3), (3.4.4), (3.4.5) имеем:

$$d \left( \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + 2 \cdot \frac{3}{16}m\dot{x}_1^2 \right) = Qdx_1 \Rightarrow$$

$$(M + \frac{3}{4}m)\ddot{x}_1 = Q \Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{Q}{(M + \frac{3}{4}m)}.$$

Г. При решении задачи использовалось предположение об идеальности связей. Применение других *специальных* теорем динамики в данном случае невозможно, ввиду того, что ни для одной из них не выполняются соответствующие условия.

Можно решить эту задачу с помощью *общих* теорем, однако перед их применением *необходимо* ввести реакции связей в точках  $A, B, D, E$  и учитывать их при написании уравнений, что увеличивает число неизвестных, и, тем самым, усложняет процесс решения.

### Задача 3.5. [3, 43.4]

Однородный стержень длины  $2l$  и массы  $m$  под действием силы тяжести скользит концами  $A$  и  $B$  по вертикальной стене и горизонтальному полу соответственно, оставаясь в неподвижной вертикальной плоскости, перпендикулярной стене. Стена и пол — гладкие. В начальный момент стержень был неподвижен и составлял угол  $\varphi_0$  с горизонталью. Определить угловую скорость стержня и реакции в точках  $A$  и  $B$  как функции угла  $\varphi$ . При каком значении  $\varphi$  стержень отойдет от стены?

Решение.

А. Направим оси неподвижного трехгранника  $Ox$  и  $Oz$  горизонтально (по полу) и вертикально (по стене).

До тех пор пока концы стержня касаются стены и пола, его положение полностью определяется углом  $\varphi$ , и, следовательно, чтобы найти движение стержня, достаточно *одно-*

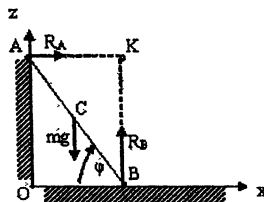


Рис. 3.5.1.

го уравнения, не содержащего реакций. Поскольку стержень однородный, его центр масс совпадает с точкой  $C$  — серединой стержня. *Заданной* внешней силой является сила тяжести  $m\vec{g}$ , реакции внешних связей  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$  направлены по нормали к стене и полу соответственно.

Б. 1) Связи наложенные на систему — *идеальные*, *действительные* перемещения принадлежат к *множеству виртуальных* (см. (C4), (C5), (C6)) поэтому для получения уравнения движения



можно воспользоваться теоремой (III.27):

$$dT = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right). \quad (3.5.1)$$

2) Уравнения для определения реакций можно получить, записав любую из *общих* теорем, однако самые простые уравнения получатся, если взять теорему о движении центра масс:

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right). \quad (3.5.2)$$

3) Наконец, *необходимым* условием отхода стержня от стены является обращение в ноль реакции в точке А.

В.1) Для вычисления кинетической энергии стержня используем формулу (III.11):

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_\eta \omega^2.$$

Так как в условиях задачи

$$x_C = l \cos \varphi, z_C = l \sin \varphi,$$

квадрат скорости центра масс будет равен

$$V_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2 = l^2 \dot{\varphi}^2.$$

(Используя то, что точка К является *мгновенным центром скоростей* стержня и что фигура *ОАКВ* представляет собой прямоугольник, можно сразу записать  $V_C = l\dot{\varphi}$ ). Поскольку для стержня  $J_\eta = ml^2/3$  и  $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_y$ , окончательно получим:

$$T = \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Подсчитаем теперь работу заданных сил:

$$\sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right) = (m\vec{g}, d\vec{r}_C),$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{e}_z, d\vec{r}_C = d(l \cos \varphi \vec{e}_x + l \sin \varphi \vec{e}_z) =$$

$$-l \sin \varphi d\varphi \vec{e}_x + l \cos \varphi d\varphi \vec{e}_z \Rightarrow (m\vec{g}, d\vec{r}_C) = -mgl \cos \varphi d\varphi.$$

Таким образом,

$$d \left( \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 \right) = -mgl \cos \varphi d\varphi \Rightarrow d \left( \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 \right) = d(-mgl \sin \varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 = -mgl \sin \varphi + h$$

Подстановка начальных условий дает:

$$\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 = mgl(\sin \varphi_0 - \sin \varphi). \quad (3.5.3)$$

2) Теорема (3.5.2) в рамках рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{V}_C}{dt} &= -mg\vec{e}_z + R_A\vec{e}_x + R_B\vec{e}_z \Rightarrow \\ R_A &= \left( m \frac{d\vec{V}_C}{dt}, \vec{e}_x \right), R_B = mg + \left( m \frac{d\vec{V}_C}{dt}, \vec{e}_z \right) \Rightarrow \\ R_A &= m\ddot{x}_C, R_B = mg + m\ddot{z}_C, \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

$$x_C = l \cos \varphi \Rightarrow \dot{x}_C = -l\dot{\varphi} \sin \varphi \Rightarrow \ddot{x}_C = -l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \quad (3.5.5)$$

$$z_C = l \sin \varphi \Rightarrow \dot{z}_C = l\dot{\varphi} \cos \varphi \Rightarrow \ddot{z}_C = l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad (3.5.6)$$

Чтобы найти  $\ddot{\varphi}$  как функцию от  $\varphi$ , продифференцируем (3.5.3)

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4l} \cos \varphi. \quad (3.5.7)$$

Подставив (3.5.5), (3.5.6) и (3.5.7) в (3.5.4), найдем:

$$R_A = \frac{9}{4}mg \cos \varphi (\sin \varphi - \frac{2}{3} \sin \varphi_0), \quad (3.5.8)$$

$$R_B = mg(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)). \quad (3.5.9)$$

3) Как можно заметить из выражения (3.5.8) обращение  $R_A$  в нуль произойдет в точке  $\varphi^*$ , определяемой соотношением

$$\sin \varphi^* = \frac{2}{3} \sin \varphi_0.$$

Однако утверждать, что в этой точке стержень действительно отойдет от стены мы пока не имеем права, поскольку, вообще говоря, возможна ситуация, когда *реакция обратившись в нуль в какой-то момент времени в следующий момент снова станет положительной* (см. задачу 2.5).

Чтобы рассеять сомнения, проанализируем поведение угловой скорости стержня. Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (3.5.3), получим:

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{3g}{2l}(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)},$$

(если бы угловая скорость была положительной, то сразу после начала движения подкоренное выражение стало бы отрицательным,

т.е. задача не имела бы действительного решения). Значит угол  $\varphi$  монотонно убывает, и из выражения (3.5.8) следует

$$\varphi^* > \varphi \geq 0 \Rightarrow R_A < 0. \quad (3.5.10)$$

Надо отметить, что приведенное выше решение задачи получено в предположении, что стержень *все время* касается стены и пола. Поэтому неравенство (3.5.10) означает, что если это предположение справедливо, то после прохождения точки  $\varphi = \varphi^*$  реакция меняет знак, чего быть не может, так как связь по условию *односторонняя*. Следовательно, при указанном значении угла стержень действительно отойдет от стены.

Чтобы картина движения окончательно прояснилась, надо понять, как ведет себя  $R_B$ . Пусть  $t^*$  обозначает момент времени, когда значение угла  $\varphi$  становится равным  $\varphi^*$ :

$$\varphi(t^*) = \varphi^*.$$

Анализируя правую часть выражения (3.5.9), можно заметить, что

$$1 - \frac{3}{4} \cos^2 \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) = \frac{1}{4} + \sin \varphi \left( \frac{9}{4} \sin \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi_0 \right).$$

На интервале  $0 \leq t \leq t^*$ , вследствие монотонного уменьшения угла  $\varphi$ ,

$$\sin \varphi \geq \sin \varphi^* = \frac{2}{3} \sin \varphi_0 \Rightarrow \left( \frac{9}{4} \sin \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi_0 \right) \geq 0,$$

поэтому на указанном интервале

$$R_B > 0,$$

т.е. точка  $B$  стержня постоянно касается пола.

Г. Ответ на вопрос о том, что происходит со стержнем после отхода точки  $A$  от стены, получим, решив задачу (3.6).

**Задача 3.6.** [3, 43.5]

В условиях задачи (3.5) найти угловую скорость стержня в момент падения на пол.

Решение. А. При решении предыдущей задачи показано, что, при  $t > t^*$ , точка  $A$  стержня не касается стены, в то время как точка  $B$  не отрывается от пола. Поэтому при движении стержня на интервале времени  $t^* < t < \hat{t}$  ( $\hat{t}$  — момент падения стержня на пол) его положение определяется двумя координатами, в качестве которых можно взять  $x_C$  и  $\varphi$ ; при этом  $x_C$  уже не определяется формулой  $x_C = l \cos \varphi$ , как в задаче 3.5, а может принимать произвольные значения, удовлетворяющие неравенству:

$$x_C > l \cos \varphi. \quad (3.6.1)$$

Б. Поскольку система теперь имеет две степени свободы, для нахождения ее движения надо написать два уравнения, не содержащие других неизвестных кроме координат. Это означает, что искать подходящие теоремы следует среди специальных теорем динамики.

На рассматриваемом интервале связи, наложенные на стержень являются идеальными и в каждый момент времени допускают его поступательное перемещение вдоль оси  $Ox$ , т.е. можно воспользоваться одной из теорем – (III.23) или (III.24). Кроме того, действительные перемещения принадлежат множеству виртуальных, поэтому справедлива теорема (III.27).

Указанные теоремы не содержат реакций связей и, следовательно, позволяют решить любую задачу о движении стержня в сожившихся условиях.

В. Запишем теорему (III.24)

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)}, \vec{e}_x \right), \quad (3.6.2)$$

в нашем случае  $M = m$ ,  $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)} = -mg\vec{e}_z$ , поэтому (3.6.2) принимает вид:

$$m\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = const. \quad (3.6.3)$$

Кинетическую энергию найдем по формуле (III.11) ( $x_C \neq l \cos \varphi$ , но  $z_C = l \sin \varphi$ ):

$$T = \frac{m(\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2)}{2} + \frac{ml^2}{6}\dot{\varphi}^2 = \frac{m\dot{x}_C^2}{2} + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \varphi \right) \quad (3.6.4)$$

Выражение для работы заданных сил сохраняется:

$$(m\vec{g}, d\vec{r}_C) = -mgl \cos \varphi d\varphi. \quad (3.6.5)$$

Поэтому с учетом (3.6.3), (3.6.4) и (3.6.5) теорема (III.27) примет вид:

$$\begin{aligned} d \left( \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \varphi \right) \right) &= -mgl \cos \varphi d\varphi \Rightarrow \\ \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \varphi \right) - \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2(t^*) \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \varphi(t^*) \right) &= \\ &= mgl(\sin \varphi(t^*) - \sin \varphi) \Rightarrow \\ \dot{\varphi}^2 &= \frac{2g(\sin \varphi(t^*) - \sin \varphi) + l\dot{\varphi}^2(t^*)\left(\frac{4}{3} - \sin^2 \varphi(t^*)\right)}{l\left(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi\right)} \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Учитывая, что

$$\sin \varphi(t^*) = \frac{2}{3} \sin \varphi_0, \quad (3.6.7)$$

$$\dot{\varphi}^2(t^*) = \frac{g \sin \varphi_0}{2l}, \quad (3.6.8)$$

$$\varphi(\hat{t}) = 0,$$

окончательно, получим:

$$\dot{\varphi}^2(\hat{t}) = \frac{3g}{2l} \sin \varphi_0 \left( 1 - \frac{1}{9} \sin \varphi_0 \right). \quad (3.6.9)$$

Г. Если какое-либо соотношение возникает в результате достаточно длинной цепочки выкладок, стоит проследить, чтобы оно удовлетворяло, по крайней мере, простейшим необходимым условиям, например, обе части полученной формулы должны быть одного знака и одинаковой размерности. Легко видеть, что выражение (3.6.9) подобную проверку выдерживает.

Надо, однако, вспомнить, что (3.6.9) получено в предположении, что на интервале  $t^* < t < \hat{t}$  выполняются условия: точка  $A$  не касается стены, а точка  $B$  не отрывается от пола, т.е.

$$x_A(t) > 0, \quad (3.6.10)$$

$$R_B(t) > 0. \quad (3.6.11)$$

Очевидно, что

$$x_A = x_C - l \cos \varphi,$$

и

$$\dot{x}_A(t^*) = 0,$$

поэтому для справедливости (3.6.10) достаточно, чтобы

$$\ddot{x}_A > 0, \forall t \in (t^*, \hat{t}).$$

На интервале  $(t^*, \hat{t})$ , вследствие (3.6.3)

$$\ddot{x}_A = l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \quad (3.6.12)$$

Для того чтобы найти  $\ddot{\varphi}$  продифференцируем соотношение (3.6.6), обозначив для удобства сумму постоянных членов в числителе правой части через  $\alpha$ :

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 2\dot{\varphi} \left( \frac{-g \cos \varphi}{l(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi)} + \frac{(a - 2g \sin \varphi) \cos \varphi \sin \varphi}{l(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi)^2} \right),$$

$$\dot{\varphi} \neq 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{-g \cos \varphi}{l(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi)} + \frac{(a - 2g \sin \varphi) \cos \varphi \sin \varphi}{l(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi)^2}. \quad (3.6.13)$$

Подставляя (3.6.6) и (3.6.13) в (3.6.12) найдем:

$$\ddot{x}_A = \frac{\cos \varphi}{\left(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi\right)} \left( -g \sin \varphi + \frac{(a - 2g \sin \varphi) \sin^2 \varphi}{\left(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi\right)} + a - 2g \sin \varphi \right) =$$

$$\frac{\cos \varphi}{\left(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi\right)^2} \left( \frac{4}{3} a - 4g \sin \varphi + g \sin^3 \varphi \right).$$

После подстановки в  $a$  значений (3.6.7) и (3.6.8) получим:

$$a = g(2 \sin \varphi_0 - \frac{2}{9} \sin^3 \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\forall \varphi \in (0, \varphi^*), \quad \ddot{x}_A(t) = \frac{g \cos \varphi}{\left(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi\right)^2} \left( \frac{4}{3} (2 \sin \varphi_0 - \frac{2}{9} \sin^3 \varphi_0) - 4 \sin \varphi + \sin^3 \varphi \right) =$$

$$\frac{g \cos \varphi}{\left(\frac{1}{3} + \cos^2 \varphi\right)^2} \left( \frac{2}{3} \sin \varphi_0 - \sin \varphi \right) \cdot \left( 4 - \left( \frac{4}{9} \sin^2 \varphi_0 + \frac{2}{3} \sin \varphi_0 \sin \varphi + \sin^2 \varphi \right) \right) > 0,$$

т.е. неравенство (3.6.10) в указанной области справедливо.

Проверим теперь неравенство (3.6.11). Для нахождения реакции воспользуемся теоремой (III.14) (о движении центра масс):

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right).$$

В рассматриваемой задаче имеем:

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = -mg\vec{e}_z + R_B\vec{e}_z \Rightarrow R_B = mg + \left( M \frac{d\vec{V}_C}{dt}, \vec{e}_z \right) \Rightarrow$$

$$R_B = mg + m\ddot{z}_C \Rightarrow R_B = mg + ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi). \quad (3.6.14)$$

Подставляя в (3.6.14) найденные выражения для  $\ddot{\varphi}$  и  $\dot{\varphi}^2$  получим:

$$R_B = m \left( g + l \cos \varphi \left( \frac{-g \cos \varphi}{l \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \varphi \right)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(a - 2g \sin \varphi) \cos \varphi \sin \varphi}{l \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \varphi \right)^2} \right) - l \sin \varphi \frac{a - 2g \sin \varphi}{l \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \varphi \right)} \right) =$$

$$= \frac{m}{3 \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \varphi \right)^2} \left( g \left( \frac{4}{3} + \sin^2 \varphi \right) - a \sin \varphi \right),$$

$$\left( g \left( \frac{4}{3} + \sin^2 \varphi \right) - a \sin \varphi \right) =$$

$$= \frac{4}{3} g \left( 1 - \frac{3}{2} \sin \varphi_0 \sin \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi + \frac{1}{6} \sin^3 \varphi_0 \sin \varphi \right) > 0,$$

вследствие того, что в области  $(0, \varphi^*)$

$$\sin \varphi < \frac{2}{3} \sin \varphi_0,$$

и, значит,

$$1 - \frac{3}{2} \sin \varphi_0 \sin \varphi > 0.$$

Таким образом неравенство (3.6.11) тоже справедливо, и, теперь, с уверенностью можно утверждать, что соотношение (3.6.9) является решением поставленной задачи.

### Задача 3.7. [3, 39.17]

Однородный стержень  $AB$  массы  $m$  подвешен горизонтально в точке  $O$  с помощью двух нерастяжимых нитей одинаковой с ним длины  $2l$ . Определить натяжение одной из нитей в момент обрыва другой (например, нити  $OB$ ).

Решение.

А. В процессе решения этой задачи из-за необычности формулировки часто возникают трудности. Главная трудность заключается в расшифровке слов "натяжение нити  $OA$  в момент обрыва нити  $OB$ ". Если обозначить момент обрыва  $t^*$ , то выражение "найти натяжение нити  $OA$  в момент  $t^* + 0$ "

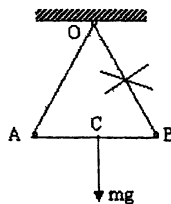


Рис. 3.7.1.

$$(t^* + 0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (t^* + \varepsilon), \varepsilon > 0)$$

является более точной формулировкой поставленной задачи.

Второе обстоятельство, на которое нужно обратить внимание, заключается в том, что все силы действующие на систему до и после обрыва нити  $OB$  *конечны*, поэтому *состояния* (положения и скорости всех ее точек) системы в моменты  $(t^* - 0)$  (определяется аналогично моменту  $(t^* + 0)$ ) и  $(t^* + 0)$  одинаковы (различны только *ускорения*!), в частности, скорости всех точек стержня в момент  $(t^* + 0)$  равны нулю.

После этих разъяснений, должно быть понятно, что мы имеем дело с достаточно стандартной ситуацией. Действительно, нужно определить натяжение нити, т.е. *реакцию связи*. Чтобы найти реакцию связи, *необходимо* знать *движение* системы.

Для этого, сначала, надо определить число степеней свободы системы, выбрать обобщенные координаты, написать уравнения дви-

жения и с помощью этих уравнений найти значения величин, которые позволят вычислить значение реакции в заданном состоянии системы. Будем считать, что после обрыва нити стержень остается в плоскости  $Oxz$ .

Обозначим искомую реакцию  $\vec{R}_A$ , а углы, которые образуют с вертикалью  $Oz$  нить  $OA$  и стержень, соответственно,  $\alpha$  и  $\varphi$  (см. рис.3.7.2).

Эти углы однозначно определяют положение системы и, значит, могут быть выбраны в качестве обобщенных координат. На сами углы и скорости их изменения не наложено никаких ограничений, следовательно, система имеет две степени свободы.

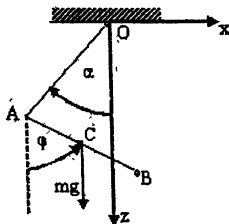


Рис. 3.7.2.

Б. Для определения реакции воспользуемся теоремой о движении центра масс (III.14), поскольку именно в этой теореме реакция присутствует в наиболее простом виде:

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right).$$

В. В рассматриваемой задаче имеем:

$$m \frac{d\vec{V}_C}{dt} = mg\vec{e}_z + R_A \vec{e}_{AO} \Rightarrow R_A \vec{e}_{AO} = m \frac{d\vec{V}_C}{dt} - mg\vec{e}_z \Rightarrow$$

$$R_A \vec{e}_{AO} = m(\ddot{x}_C \vec{e}_x + \ddot{z}_C \vec{e}_z) - mg\vec{e}_z, \quad (3.7.1)$$

т.е. для того, чтобы найти реакцию в некоторый момент времени нам надо знать в этот момент времени  $\ddot{x}_C$  и  $\ddot{z}_C$ . Для продолжения решения удобно выразить  $\ddot{x}_C$  и  $\ddot{z}_C$  через обобщенные координаты и их производные. Нужные выражения получим, продифференцировав дважды уравнения связи:

$$x_C = -2l \sin \alpha + l \sin \varphi \Rightarrow \dot{x}_C = -2l\dot{\alpha} \cos \alpha + l\dot{\varphi} \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_C = -2l\ddot{\alpha} \cos \alpha + 2l\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad (3.7.2)$$

$$z_C = 2l \cos \alpha + l \cos \varphi \Rightarrow \dot{z}_C = -2l\dot{\alpha} \sin \alpha - l\dot{\varphi} \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\ddot{z}_C = -2l\ddot{\alpha} \sin \alpha - 2l\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - l\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \quad (3.7.3)$$

Используя выражения (3.7.2), (3.7.3) и то, что

$$\alpha(t^* + 0) = \pi/6, \dot{\alpha}(t^* + 0) = 0, \varphi(t^* + 0) = \pi/2, \dot{\varphi}(t^* + 0) = 0,$$



запишем (3.7.1) в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oz$  при  $t = t^* + 0$ :

$$\frac{1}{2}R_A(t^* + 0) = -m\sqrt{3}\ddot{\alpha}(t^* + 0), \quad (3.7.4)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}R_A(t^* + 0) = -m\ddot{\alpha}(t^* + 0) - ml\ddot{\varphi}(t^* + 0) - mg. \quad (3.7.5)$$

Добавим к получившимся уравнениям, уравнение (III.20) (третье из уравнений плоско-параллельного движения твердого тела), которое в указанный момент принимает вид :

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}(t^* + 0) = -l\frac{\sqrt{3}}{2}R_A(t^* + 0). \quad (3.7.6)$$

Уравнения (3.7.4), (3.7.5), (3.7.6) образуют систему линейных алгебраических (не дифференциальных!) уравнений относительно трех неизвестных —  $R_A(t^* + 0)$ ,  $\ddot{\alpha}(t^* + 0)$ ,  $\ddot{\varphi}(t^* + 0)$ . Решив эту систему, найдем

$$R_A = \frac{2\sqrt{3}}{13}mg.$$

Г. Заметим, что три уравнения, которыми мы воспользовались при решении задачи, представляют собой, по существу, уравнения плоско-параллельного движения твердого тела.

Можно упростить решение задачи, воспользовавшись для нахождения  $\frac{d\vec{V}_C}{dt}$  теоремой сложения ускорений. Пусть начало поступательно движущегося трехгранника совпадает с точкой  $A$  стержня. Кориолисово ускорение точки  $C$  равно нулю, с учетом начальных условий

$$\vec{a}_C^{\text{пер}}(t^* + 0) = 2l\ddot{\alpha}(t^* + 0)\vec{e}_\alpha,$$

$$\vec{a}_C^{\text{отн}}(t^* + 0) = l\ddot{\varphi}(t^* + 0)\vec{e}_z,$$

следовательно, уравнение (3.7.1) преобразуется в

$$R_A(t^* + 0)\vec{e}_{AO} = m(2l\ddot{\alpha}(t^* + 0)\vec{e}_\alpha + l\ddot{\varphi}(t^* + 0)\vec{e}_z) - mg\vec{e}_z. \quad (3.7.7)$$

Умножив обе части (3.7.7) скалярно на  $\vec{e}_{AO}$  получим:

$$R_A(t^* + 0) = -m\frac{\sqrt{3}}{2}(l\ddot{\varphi}(t^* + 0) - g). \quad (3.7.8)$$

Система двух уравнений (3.7.6) и (3.7.8) позволяет найти две неизвестных величины —  $R_A(t^* + 0)$  и  $\ddot{\varphi}(t^* + 0)$ .

Результат:

$$R_A = \frac{2\sqrt{3}}{13}mg.$$

Совпадение ответов является свидетельством того, что задача решена правильно.

**Задача 3.8.** [4, 2.117]

Клин массы  $M$  с углом при вершине  $\alpha$  может скользить без трения по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. По горизонтальной стороне  $AB$  клина может катиться без проскальзывания однородный круглый цилиндр радиуса  $r$  и массы  $m$ . Найти реакцию наклонной плоскости.

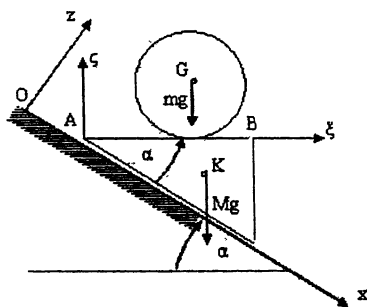


Рис. 3.8.1.

**Решение.**

А. Направим ось  $Ox$  неподвижного трехгранника вдоль наклонной плоскости, а ось  $Oz$  — перпендикулярно к ней. Будем рассматривать в качестве системы совокупность клина и цилиндра. Внешними заданными силами в этом случае будут силы тяжести клина и цилиндра, приложенные в соответствующих центрах тяжести —  $K$  и  $G$ . Других заданных сил нет. Суммарная реакция внешней связи (наклонной плоскости) направлена по оси  $Oz$ , и может быть обозначена  $N\vec{e}_z$ . Реакции внутренних связей приложены в точках контакта клина и цилиндра, одинаковы по величине и направлены в противоположные стороны.

Выбирая обобщенные координаты полезно учесть то, что цилиндр совершает сложное движение (в смысле теоремы сложения скоростей) — переносное, вместе с клином, и относительное, по отношению к клину. Координаты  $x_A$  и  $\xi_G$  (см. рис.3.8.1) учитывают указанные особенности системы и однозначно определяют ее положение; сами координаты и их производные независимы. Значит система имеет две степени свободы, и действительные перемещения принадлежат множеству виртуальных (см. С4, С5, С6).

Б. Реакция внешних связей входит, вообще говоря, во все *общие* теоремы динамики, однако, непосредственно (не в качестве множителя в векторном или скалярном произведении) она содержится в теореме об изменении импульса и теореме о движении центра масс системы. Поскольку система состоит из двух тел, удобнее воспользоваться теоремой (III.13) (об изменении импульса системы):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right).$$

В данном случае

$$\begin{aligned} \vec{P} &= M\vec{V}_K + m\vec{V}_G, \\ \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)} &= M\vec{g} + m\vec{g}, \\ \sum_{k=1}^N \vec{R}_k^{(e)} &= N\vec{e}_z. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M\vec{V}_K + m\vec{V}_G) &= M\vec{g} + m\vec{g} + N\vec{e}_z \Rightarrow \\ N\vec{e}_z &= M \frac{d\vec{V}_K}{dt} + m \frac{d\vec{V}_G}{dt} - (M + m)\vec{g}. \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

Значит для того чтобы определить реакцию плоскости, нам надо найти ускорения центров масс клина и цилиндра.

Для описания движения системы с двумя степенями свободы необходимо составить два уравнения, содержащих только обобщенные координаты и их производные. Этого можно достигнуть, воспользовавшись *специальными* теоремами динамики. Легко видеть, что связи наложенные на систему в любой момент времени допускают поступательное перемещение системы, как твердого тела, вдоль оси  $Ox$ , поэтому справедлива теорема (III.23):

$$\frac{d(\vec{P}, \vec{e}_x)}{dt} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)}, \vec{e}_x \right), \quad (3.8.2)$$

кроме того, как сказано выше, *действительные* перемещения принадлежат множеству возможных, следовательно, применима теорема (III.27):

$$dT = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right). \quad (3.8.3)$$

Уравнения (3.8.2) и (3.8.3) позволяют решить любую задачу о *движении* рассматриваемой системы, в том числе и сформулированную выше, однако, прежде, надо представить все входящие в них величины в виде функций от обобщенных координат и их производных.

В. Заметим, что в рассматриваемой задаче

$$\vec{V}_K = \dot{x}_K \vec{e}_x,$$

и по теореме сложения скоростей (подвижный трехгранник жестко связан с клином)

$$\vec{V}_G = \dot{x}_K \vec{e}_x + \dot{\xi}_G \vec{e}_\xi,$$

поэтому уравнение (3.8.2) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M\dot{x}_K + m(\dot{x}_K + \dot{\xi}_G(\vec{e}_\xi, \vec{e}_x))) &= (M + m)(\vec{g}, \vec{e}_x) \Rightarrow \\ (M + m)\ddot{x}_K + m\ddot{\xi}_G \cos \alpha &= (M + m)g \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии клина  $T_K$  и кинетической энергии цилиндра  $T_G$ :

$$T = T_K + T_G.$$

Так как клин движется *поступательно*

$$T_K = \frac{M\dot{x}_K^2}{2}. \quad (3.8.5)$$

Кинетическую энергию цилиндра найдем по формуле (III.11):

$$T = \frac{m(\vec{V}_G, \vec{V}_G)}{2} + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \omega^2.$$

Для нахождения угловой скорости цилиндра воспользуемся формулой Эйлера (I.15) и тем обстоятельством, что цилиндр относительно клина не проскальзывает. Пусть  $A_K$  и  $A_G$  точки соприкосновения клина и цилиндра, тогда отсутствие проскальзывания означает, что

$$\vec{V}_{A_K} = \vec{V}_{A_G}, (\vec{V}_{A_K} = \vec{V}_K = \dot{x}_K \vec{e}_x),$$

и по формуле Эйлера, примененной к точкам  $G$  и  $A_G$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_{A_G} + [\vec{\omega}, \overrightarrow{A_G G}] \Rightarrow$$

$$\dot{x}_K \vec{e}_x + \dot{\xi}_G \vec{e}_\xi = \dot{x}_K \vec{e}_x + [\omega \vec{e}_y, r \vec{e}_\xi] \Rightarrow \dot{\xi}_G = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{\dot{\xi}_G}{r}.$$

Таким образом

$$T_G = \frac{m}{2}(\dot{x}_K \vec{e}_x + \dot{\xi}_G \vec{e}_\xi, \dot{x}_K \vec{e}_x + \dot{\xi}_G \vec{e}_\xi) + \frac{m}{4} \dot{\xi}_G^2 \Rightarrow$$

$$T_G = \frac{m}{2}(\dot{x}_K^2 + \frac{3}{2}\dot{\xi}_G^2 + 2\dot{x}_K\dot{\xi}_G \cos \alpha). \quad (3.8.6)$$

Подсчитаем элементарную работу заданных сил:

$$\sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right) = (M\vec{g}, d\vec{r}_K) + (m\vec{g}, d\vec{r}_G).$$

Но

$$\vec{g} = g \sin \alpha \vec{e}_x - g \cos \alpha \vec{e}_z = -g\vec{e}_\zeta,$$

$$d\vec{r}_K = dx_K \vec{e}_x,$$

$$d\vec{r}_G = dx_K \vec{e}_x + d\xi_G \vec{e}_\xi,$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right) = (M + m)g \sin \alpha dx_K. \quad (3.8.7)$$

После подстановки (3.8.5), (3.8.6), (3.8.7) в (3.8.3) имеем:

$$d \left( \frac{M+m}{2} \dot{x}_K^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{3}{2} \dot{\xi}_G^2 + 2\dot{x}_K \dot{\xi}_G \cos \alpha \right) \right) = \\ = (M + m)g \sin \alpha dx_K. \quad (3.8.8)$$

Поскольку

$$d(\dot{x}_K^2) = 2\dot{x}_K(\ddot{x}_K dt) = 2\ddot{x}_K(\dot{x}_K dt) = 2\ddot{x}_K dx_K,$$

и, соответственно,

$$d(\dot{\xi}_G^2) = 2\ddot{\xi}_G d\xi_G,$$

$$d(\dot{x}_K \dot{\xi}_G) = \ddot{x}_K d\xi_G + \ddot{\xi}_G d\xi_K,$$

то, соотношение (3.8.8) можно представить в виде:

$$dx_K \left( (M + m)\ddot{x}_K + m\ddot{\xi}_G - (M + m)g \sin \alpha \right) + \\ + d\xi_G \cdot m \left( \frac{3}{2} \ddot{\xi}_G + \ddot{x}_K \cos \alpha \right) = 0. \quad (3.8.9)$$

Коэффициент при  $dx_K$  обращается в нуль в силу уравнения (3.8.4),  $d\xi_G \neq 0$  (другое предположение означало бы наложение дополнительной связи, что противоречит условиям задачи), поэтому (3.8.9) сводится к уравнению

$$\frac{3}{2} \ddot{\xi}_G + \ddot{x}_K \cos \alpha = 0, \quad (3.8.10)$$

Решив систему уравнений (3.8.4), (3.8.10), найдем

$$\ddot{x}_K = \frac{3(M+m)g \sin \alpha}{3M+m(1+\sin^2 \alpha)}, \quad (3.8.11)$$

$$\ddot{\xi}_G = -\frac{(M+m)g \sin 2\alpha}{3M+m(1+\sin^2 \alpha)} \quad (3.8.12)$$

Осталось сделать последний шаг, чтобы найти реакцию плоскости. Умножив обе части соотношения (3.8.1) скалярно на  $\vec{e}_z$

$$N = M \left( \frac{d\vec{V}_K}{dt}, \vec{e}_z \right) + m \left( \frac{d\vec{V}_G}{dt}, \vec{e}_z \right) - (M+m)(\vec{g}, \vec{e}_z),$$

подставив вместо векторов скорости их выражения через обобщенные координаты и воспользовавшись формулами (3.8.11), (3.8.12), получим:

$$N = -m \frac{(M+m)g \sin 2\alpha}{3M+m(1+\sin^2 \alpha)} (\vec{e}_\xi, \vec{e}_z) + (M+m)(\vec{e}_\zeta, \vec{e}_z) \Rightarrow$$

$$N = \frac{(3M+m)(M+m)g \cos \alpha}{3M+m(1+\sin^2 \alpha)}. \quad (3.8.13)$$

Г. Выражение в правой части формулы (3.8.13) положительно и имеет размерность силы, как и должно быть, т.е. найденный ответ, по крайней мере, простейшую проверку выдерживает.

### Задача 3.9. [3, 43.13]

На боковой поверхности круглого однородного цилиндра с вертикальной осью, вокруг которой он может вращаться без трения, вырезан желоб в форме винтовой линии.

В начальный момент цилиндр покоится; в верхнюю точку желоба с нулевой скоростью опускают шарик, который под действием силы тяжести начинает двигаться по желобу.

Пренебрегая размерами шарика, найти угловую скорость цилиндра в тот момент, когда шарик окажется в нижней точке желоба, если известно, что желоб гладкий, радиус цилиндра  $R$ , масса  $M$ , масса шарика  $m$ , угол наклона винтовой линии к горизонту равен  $\alpha$  и она делает по поверхности цилиндра  $n$  оборотов.

Решение.

А. Выберем неподвижный трехгранник так, как указано на рис. 3.9.1. Системой будем считать совокупность цилиндра и шарика. При определении обобщенных координат учтем, что шарик совершает сложное движение — *переносное* (вместе с цилиндром), и *относительное* (по отношению к цилиндру). В соответствии с

этим, пусть  $\varphi$  обозначает угол поворота цилиндра вокруг оси  $Oz$ , а  $s$  — длину дуги желоба от верхней точки до положения шарика в текущий момент. Эти две величины могут принимать *независимые* друг от друга значения, их задание *однозначно* определяет положение системы, следовательно, система имеет *две* степени свободы и *действительные* перемещения принадлежат *множеству виртуальных* (см. С4, С5, С6). Искомая угловая скорость цилиндра в этом случае выражается следующим образом

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z.$$

Шарик будем считать материальной точкой и обозначать его положение буквой  $G$ .

Заданными силами являются силы тяжести цилиндра и шарика. Реакции *внешних* связей сводятся к реакциям в точках  $A$  и  $B$  закрепления оси цилиндра. Реакции *внутренних* связей (одинаковые по величине и противоположные по направлению) приложены к шарiku и цилиндру (в точке, где находится шарик). Условия задачи позволяют считать связи, наложенные на систему, идеальными.

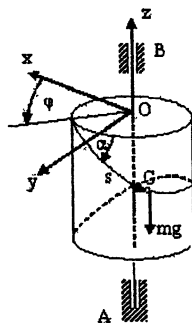


Рис. 3.9.1.

Б. Система имеет *две* степени свободы, поэтому если удастся написать *два* уравнения с помощью *специальных* теорем динамики, можно надеяться, что поставленная задача будет решена.

В любой момент времени связи *допускают* поворот системы, как твердого тела (т.е. цилиндра с "прилипшим" шариком) вокруг оси  $Oz$ , следовательно можно воспользоваться теоремой (III.25)

$$\frac{d(\vec{K}_O, \vec{e}_z)}{dt} = \left( \sum_{k=1}^N [\vec{r}_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_z \right).$$

Но в данном случае *все заданные* силы (силы тяжести) параллельны оси  $Oz$ , поэтому их момент относительно этой оси равен нулю, и мы получаем *дважды хорошее* уравнение (справа ноль, слева полная производная по времени от некоторой величины):

$$\frac{d(\vec{K}_O, \vec{e}_z)}{dt} = 0 \Rightarrow (\vec{K}_O, \vec{e}_z) = \text{const.} \quad (3.9.1)$$

Как указано выше, *действительные* перемещения принадлежат множеству *виртуальных*, следовательно выполнены условия, достаточные для применения теоремы (III.27) об изменении кинетической энергии:

$$dT = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right).$$

Поскольку силы тяжести имеют силовую функцию, мы получаем еще одно *дважды хорошее* уравнение:

$$dT = dU \Rightarrow d(T - U) = 0 \Rightarrow T - U = h. \quad (3.9.2)$$

В. Теперь надо представить уравнения (3.9.1) и (3.9.2) в выбранных координатах.

Кинетический момент  $\vec{K}_O$  системы складывается из кинетического момента цилиндра  $\vec{K}_Ц$  и кинетического момента шарика  $\vec{K}_Ш$ :

$$\vec{K}_O = \vec{K}_Ц + \vec{K}_Ш \Rightarrow (\vec{K}_O, \vec{e}_z) = (\vec{K}_Ц, \vec{e}_z) + (\vec{K}_Ш, \vec{e}_z).$$

Для вычисления проекции кинетического момента цилиндра на ось  $Oz$  воспользуемся одной из формул (III.10):

$$(\vec{K}_Ц, \vec{e}_z) = J_z \omega = \frac{M \tau^2}{2} \dot{\varphi}. \quad (3.9.3)$$

Используя определение кинетического момента материальной точки и свойства смешанного произведения трех векторов, получим

$$(\vec{K}_Ш, \vec{e}_z) = ([\vec{OG}, m\vec{V}_G], \vec{e}_z) = (m\vec{V}_G, [\vec{e}_z, \vec{OG}]). \quad (3.9.4)$$

В цилиндрических координатах  $(\rho, \vartheta, z)$

$$\vec{OG} = R\vec{e}_\rho + z_G\vec{e}_z,$$

значит

$$[\vec{e}_z, \vec{OG}] = R[\vec{e}_z, \vec{e}_\rho]. \quad (3.9.5)$$

Считая что подвижный трехгранник жестко связан с цилиндром, применим теорему сложения скоростей

$$\vec{V}_G = \vec{V}_G^{\text{пер}} + \vec{V}_G^{\text{отн}}, \vec{V}_G^{\text{пер}} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\vartheta, \vec{V}_G^{\text{отн}} = \dot{s}\vec{e}_s. \quad (3.9.6)$$

Подставив (3.9.5) и (3.9.6) в (3.9.4), имеем:

$$(\vec{K}_Ш, \vec{e}_z) = m(R^2\dot{\varphi} + R\dot{s}(\vec{e}_s, \vec{e}_\vartheta)) = m(R^2\dot{\varphi} + R\dot{s}\cos\alpha). \quad (3.9.7)$$

Окончательно, учитывая то, что в начальный момент скорости всех точек системы равны нулю (значит кинетический момент и любая его проекция тоже равны нулю), вместо (3.9.1) можем записать:

$$\frac{MR^2}{2}\dot{\varphi} + m(R^2\dot{\varphi} + R\dot{s}\cos\alpha) = 0 \Rightarrow \left(\frac{M}{2} + m\right)R\dot{\varphi} + m\dot{s}\cos\alpha = 0. \quad (3.9.8)$$



Займемся, теперь, уравнением (3.9.2). Кинетическая энергия так же, как и кинетический момент, является величиной *аддитивной*, поэтому

$$T = T_{\text{Ц}} + T_{\text{Ш}}.$$

Кинетическую энергию цилиндра можно посчитать по первой из формул (III.10):

$$T_{\text{Ц}} = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{MR^2}{4} \dot{\varphi}^2. \quad (3.9.9)$$

Кинетическая энергия шарика по определению равна

$$T_{\text{Ш}} = \frac{m(\vec{V}_G, \vec{V}_G)}{2} = \frac{m}{2} (R\dot{\varphi}\vec{e}_\vartheta + \dot{s}\vec{e}_s, R\dot{\varphi}\vec{e}_\vartheta + \dot{s}\vec{e}_s) = \frac{m}{2} (R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{s}\cos\alpha). \quad (3.9.10)$$

Так как центр тяжести цилиндра *неподвижен*, работу, при движении системы, совершает только сила тяжести шарика, следовательно,

$$U = -mgz_C = mgs \sin\alpha. \quad (3.9.11)$$

Подставив (3.9.9), (3.9.10) и (3.9.11) в (3.9.2), с учетом нулевых начальных условий, найдем:

$$\frac{MR^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} (R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{s}\cos\alpha) - mgs \sin\alpha = 0. \quad 3.9.12$$

Уравнения (3.9.8) и (3.9.12) определяют движение при заданных начальных условиях. Разрешим уравнение (3.9.8) относительно  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = -\frac{R\dot{\varphi}}{\cos\alpha} \left(1 + \frac{M}{2m}\right). \quad (3.9.13)$$

Исключая  $\dot{s}$  с помощью (3.9.13), из (3.9.12) получим:

$$\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{2} \left(1 + \frac{M}{2m}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} \left(1 + \frac{M}{2m}\right) - 2\right) = gs \sin\alpha \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{\cos\alpha}{R} \sqrt{\frac{2gs \sin\alpha}{\left(1 + \frac{M}{2m}\right)(\sin^2\alpha + \frac{M}{2m})}}.$$

Для окончательного решения задачи осталось выбрать знак в правой части последнего выражения и вспомнить, что для винтовой линии, сделавшей  $n$  оборотов по поверхности цилиндра

$$s = n \frac{2\pi R}{\cos\alpha}.$$

При заданных начальных условиях шарик под действием силы тяжести может двигаться *только вниз* по желобу. Это означает, что

$\dot{s} > 0$ . Но тогда из соотношения (3.9.8) или (3.9.13) следует, что угловая скорость цилиндра отрицательна, т.е. ответом на вопрос задачи является формула:

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{2\pi n g \sin 2\alpha}{R(1 + \frac{M}{2m})(\sin^2 \alpha + \frac{M}{2m})}}. \quad (3.9.14)$$

Г. Обе части равенства (3.9.14) имеют одинаковую размерность, так что простейшую проверку найденный ответ выдерживает. Имеет смысл обсудить знак угловой скорости. Дело в том, что студенты, решающие эту задачу, ссылаясь на интуицию: "шарик движется вправо, значит цилиндр должен двигаться влево", часто начинают составлять уравнения движения системы считая, что проекция угловой скорости цилиндра на ось  $Oz$  отрицательна.

Казалось бы, что в этом плохого: ведь полученный результат подтверждает это предположение. Однако формула (3.9.14) получена при *определенных начальных условиях*, т.е. при конкретных (нулевых) значениях произвольных постоянных в первых интегралах (3.9.8) и (3.9.12).

Легко указать начальные условия (например  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 > 0$ ,  $s(0) = 0$ ,  $\dot{s}(0) = 0$ ), при которых высказанное предположение не будет выполняться (по крайней мере на некотором интервале времени) и, значит, построенные с учетом этого предположения уравнения могут оказаться неправильными.

Чтобы избежать ошибок подобного рода, при составлении уравнений движения стоит руководствоваться следующими простыми правилами:

1. выбрать обобщенные координаты, по возможности учитывающие особенности системы (геометрические, особенности сил, действующих на систему и т.п.),

2) при вычислении динамических величин, фигурирующих в теоремах, которые предполагается использовать для составления уравнений движения, считать значения всех обобщенных координат и их производных положительными.

Описанная процедура позволяет получить уравнения, *правильно* описывающие *любое* движение системы. В рассмотренной задаче, такими уравнениями являются:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{MR^2}{2} \dot{\varphi} + m(R^2 \dot{\varphi} + R\dot{s} \cos \alpha) \right) &= 0, \\ d \left( \frac{MR^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} (R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{s} \cos \alpha) \right) &= mg \cos \alpha ds. \end{aligned}$$

### Задача 3.10. [3, 39.21]

Два круглых, однородных, цилиндрических вала, массы которых равны  $m$  и  $M$ , движутся по двум неподвижным, гладким, наклонным плоскостям, образующим соответственно углы  $\alpha$  и  $A$  с горизонтом (см. рис. 3.10.1). Валы соединены нерастяжимой невесомой лентой, намотанной на них так, что проскальзывания валов относительно ленты нет. Найти абсолютные ускорения центров тяжести цилиндров.

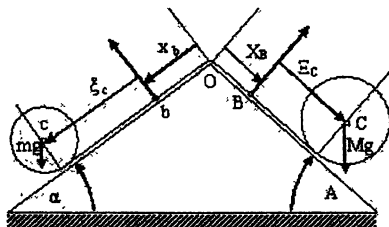


Рис. 3.10.1.

Решение.

А. Рассмотрим в качестве системы оба вала и соединяющую их ленту. Будем считать, что валы совершают плоско-параллельное движение и что лента во все время движения натянута.

Найдем число степеней свободы и выберем обобщенные координаты. Определить положение системы, состоящей из двух валов и связывающей их ленты, можно, задав положение ленты и положение каждого из валов относительно ленты. Задать положение ленты можно, указав положение какой-либо ее точки на неподвижной плоскости. Однако, чтобы выбор координат учитывал симметрию расположения валов, возьмем две точки ленты  $b$  и  $B$ , расположенные по разные стороны от точки  $O$ , и введем координаты  $x_b$  и  $X_B$ . Так как лента нерастяжимая

$$x_b + X_B = \text{const}, \quad (3.10.1)$$

значит  $x_b$  и  $X_B$  нельзя считать независимыми, и положение ленты определяется одной координатой.

Введем два подвижных правых трехгранника, связанных с лентой,  $b\zeta\eta\zeta$  и  $B\xi HZ$  (оси  $b\zeta$  и  $BZ$  лежат в плоскости движения и перпендикулярны соответствующим наклонным плоскостям), и обозначим центры тяжести валов буквами  $c$  и  $C$ .

Тогда, вследствие отсутствия проскальзывания валов относительно ленты,  $\xi_c$  и  $\Xi_C$  однозначно определяют положение валов

на ленте.

Величинам  $\xi_c$ ,  $\Xi_C$ , и  $x_b$  (или  $X_B$ ) можно придавать значения *не зависящие* друг от друга, они полностью определяют положение системы и, следовательно, могут использоваться в качестве обобщенных координат.

Таким образом система имеет *три степени свободы*, связи на нее наложенные являются *идеальными* и *действительные* перемещения принадлежат *множеству виртуальных* (см. С4, С5, С6).

Б. Для того, чтобы найти движение системы с *тремя* степенями свободы, достаточно *трех* уравнений, полученных с помощью *специальных* теорем динамики.

Однако, связи не допускают ни *поступательных перемещений* всей системы как твердого тела, ни *вращений* ее вокруг какой либо неподвижной оси или оси проходящей через центр масс, поэтому из набора имеющихся специальных теорем можно применить лишь одну - теорему (III.27) (об изменении кинетической энергии). Но *одного* уравнения недостаточно для нахождения *трех* неизвестных величин. Выход из создавшегося положения можно искать по разному. Можно попытаться доказать новые утверждения, справедливые для определенного класса систем (ведь ниоткуда не следует, что набор сформулированных теорем является исчерпывающим). Примером такого подхода может служить доказательство теоремы (III.26) (см. задачу 3.14), не упоминаемой в известных учебниках ([7],[8],[9],[10]). А можно поступить проще: разбить исходную систему на части, и рассматривать каждую из частей, как новую систему. Тогда для *каждой* из этих систем открывается возможность применения *всего* списка теорем и, тем самым, оказывается возможным составление достаточного числа уравнений.

Попытаемся применить последний подход к рассматриваемой задаче. "Выбросим" кусок ленты между точками  $b$  и  $B$ , приложим к оставшимся кускам силы  $(-s_b \vec{e}_x)$  и  $(-S_B \vec{e}_x)$  ( $s_b > 0$ ,  $s_b = S_B$ , ввиду того, что лента невесома и лежит на гладкой поверхности), и рассмотрим две новых системы: вал с центром тяжести в точке  $c$  (назовем ее *системой 1*) и вал с центром тяжести в точке  $C$  (*система 2*), присоединив силы  $(-s_b \vec{e}_x)$  и  $(-S_B \vec{e}_x)$ , соответственно, к заданным силам, действующим на каждую из этих систем.

В. Связи, наложенные на *систему 1*, *идеальные* и *допускают* в каждый момент времени *поступательное перемещение* ее вдоль оси  $Ox$  и *вращение* вокруг оси  $с\eta$ , проходящей через центр масс  $c$  и перпендикулярной плоскости, в которой происходит движение, т.е.

выполнены условия применимости теорем (III.24) и (III.26), следовательно, мы можем записать:

$$M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)}, \vec{e}_x \right), \quad (3.10.2)$$

$$\frac{d(\vec{K}_c, \vec{e}_\eta)}{dt} = \left( \sum_{k=1}^N [\varrho_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_\eta \right). \quad (3.10.3)$$

Точно такие же рассуждения для системы 2 дают:

$$M\ddot{X}_C = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)}, \vec{e}_X \right). \quad (3.10.4)$$

$$\frac{d(\vec{K}_C, \vec{e}_H)}{dt} = \left( \sum_{k=1}^N [\varrho_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_H \right). \quad (3.10.5)$$

Между тем, для системы 1

$$x_c = x_b + \xi_c \Rightarrow \ddot{x}_c = \ddot{x}_b + \ddot{\xi}_c,$$

$$\sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)}, \vec{e}_x \right) = mg \sin \alpha - s_b,$$

$(\vec{K}_c, \vec{e}_\eta) = J_{c\eta} \omega = \frac{mr^2}{2} \omega$  ( $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\eta$  — угловая скорость вала 1,  $r$  — его радиус),

$$\left( \sum_{k=1}^N [\varrho_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_\eta \right) = r s_b,$$

а для системы 2

$$X_C = X_B + \Xi_C \Rightarrow \ddot{X}_C = \ddot{X}_B + \ddot{\Xi}_C,$$

$$\sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)}, \vec{e}_X \right) = mg \sin A - S_B,$$

$(\vec{K}_C, \vec{e}_H) = J_{CH} \Omega = \frac{MR^2}{2} \Omega$  ( $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_H$  — угловая скорость вала 2,  $R$  — его радиус,  $\vec{e}_H = -\vec{e}_\eta$ ),

$$\left( \sum_{k=1}^N [\varrho_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_H \right) = R S_B.$$

С учетом указанных соотношений, получим

$$m(\ddot{x}_b + \ddot{\xi}_c) = mg \sin \alpha - s_b, \quad (3.10.6)$$

$$\frac{mr^2}{2}\dot{\omega} = r s_b, \quad (3.10.7)$$

$$M(\ddot{X}_B + \ddot{\Xi}_C) = Mg \sin A - S_B, \quad (3.10.8)$$

$$\frac{MR^2}{2}\dot{\Omega} = R S_B, \quad (3.10.9)$$

Дважды продифференцировав (3.10.1) найдем:

$$\ddot{x}_b + \ddot{X}_B = 0. \quad (3.10.10)$$

Условие отсутствия проскальзывания валов относительно ленты дает

$$\dot{\xi}_c = r\omega \Rightarrow \ddot{\xi}_c = r\dot{\omega}, \quad (3.10.11)$$

$$\dot{\Xi}_C = R\Omega \Rightarrow \ddot{\Xi}_C = R\dot{\Omega}. \quad (3.10.12)$$

Добавив к уравнениям (3.10.6)–(3.10.12) соотношение

$$s_b = S_B, \quad (3.10.13)$$

получаем систему *восьми* линейных уравнений относительно *восьми* неизвестных:  $\ddot{x}_b, \ddot{\xi}_c, \dot{\omega}, \ddot{X}_B, \ddot{\Xi}_C, \dot{\Omega}, s_b, S_B$ , решив которую найдем:

$$\ddot{x}_b = g \frac{m \sin \alpha - M \sin A}{m + M},$$

$$\ddot{\xi}_c = \frac{2}{3}g \frac{M(\sin \alpha + \sin A)}{m + M},$$

$$\ddot{\Xi}_C = \frac{2}{3}g \frac{m(\sin \alpha + \sin A)}{m + M},$$

поэтому

$$\ddot{x}_c = \ddot{x}_b + \ddot{\xi}_c = \frac{2}{3}g \sin \alpha + g \frac{m \sin \alpha - M \sin A}{3(m + M)},$$

$$\ddot{X}_C = -\ddot{x}_b + \ddot{\Xi}_C = \frac{2}{3}g \sin A - g \frac{m \sin \alpha - M \sin A}{3(m + M)}.$$

Г. Ответ, с точки зрения совпадения размерностей правой и левой частей, сомнений не вызывает, кроме того, для частного случая, когда  $A = 0$  и  $M \gg m$ , получим

$$\ddot{x}_c = \frac{2}{3}g \sin \alpha + \varepsilon, \varepsilon \ll 1,$$

т.е. результат близкий к тому, который имел бы место при качении вала без проскальзывания по неподвижной наклонной плоскости (см. задачу 3.1), как и должно быть при указанных значениях

параметров задачи, что может служить еще одним подтверждением правильности найденного ответа.

Эту задачу можно было бы решить, используя общие теоремы динамики. Однако в этом случае потребовалось бы вводить реакции наклонных плоскостей, что, вообще говоря, увеличило бы число неизвестных, т.е. привело бы к усложнению задачи (хотя в данном случае не слишком сильному).

### Задача 3.11.

Однородный круглый диск радиуса  $r$  и массы  $m$  может катиться по неподвижной горизонтальной плоскости без проскальзывания, причем плоскость диска остается вертикальной ( модель колеса тележки в универсаме ).

Найти движение диска при произвольных начальных условиях, если известно, что связи наложенные на диск идеальные.

Решение.

А. Сначала займемся геометрией, т.е. выберем обобщенные координаты.

Свяжем неподвижный трехгранник  $Oxyz$  с горизонтальной плоскостью, направив ось  $Oz$  по вертикали вверх.

Обозначим центр масс диска буквой  $C$  и введем подвижный трехгранник  $C\xi\eta\zeta$ : ось  $C\zeta$  направлена по вертикали вверх, ось  $C\xi$  горизонтальна и лежит в плоскости диска, ось  $C\eta$  перпендикулярна этой плоскости.

Чтобы задать положение диска, надо, для начала, задать положение его центра масс. Вследствие связей, наложенных на диск

$$z_C = r, \quad (3.11.1)$$

а координаты  $x_C, y_C$  могут принимать произвольные значения. Добавив к координатам  $x_C, y_C$  два угла:  $\psi$  — угол между плоскостями  $Oxz$  и  $C\xi\zeta$  и  $\varphi$  — угол поворота диска относительно трехгранника  $C\xi\eta\zeta$  вокруг оси  $C\eta$  получим набор из *четырёх* координат, однозначно определяющих положение диска.

Однако, мы пока не учли, что диск движется по плоскости без проскальзывания. Пусть  $A$  — точка диска, которой он касается плос-

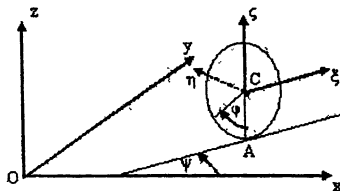


Рис.3.11.1.

кости. Запишем формулу Эйлера для точек  $A$  и  $C$ :

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + [\vec{\omega}, \overrightarrow{AC}]. \quad (3.11.2)$$

Но, в силу (3.11.1):

$$\vec{V}_C = \dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{y}_C \vec{e}_y;$$

вследствие отсутствия проскальзывания

$$\vec{V}_A = 0;$$

по теореме сложения угловых скоростей

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_\zeta + \dot{\varphi} \vec{e}_\eta;$$

и

$$\overrightarrow{AC} = r \vec{e}_\zeta, \vec{e}_\zeta = \vec{e}_z, \vec{e}_\eta = -\sin \psi \vec{e}_x + \cos \psi \vec{e}_y.$$

Подставляя выписанные выше соотношения в (3.11.2) и приравнивая коэффициенты при  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$ , получим:

$$\dot{x}_C = r \dot{\varphi} \cos \psi, \quad (3.11.3)$$

$$\dot{y}_C = r \dot{\varphi} \sin \psi. \quad (3.11.4)$$

Итак, положение диска полностью определяется четырьмя координатами, которые должны удовлетворять двум уравнениям связи — (3.11.3) и (3.11.4), поэтому возникает вопрос: могут ли эти четыре координаты принимать независимые друг от друга значения? Ответ будет отрицательным, если существует хотя бы одно соотношение вида

$$f(x_c, y_c, \psi, \varphi) = \text{const}, \quad (3.11.5)$$

где  $f$  — некоторая функция. Наличие или отсутствие такой функции (или таких функций) связано с интегрируемостью или неинтегрируемостью системы линейных дифференциальных форм, каковую представляют собой уравнения (3.11.3) и (3.11.4). Необходимые и достаточные условия интегрируемости системы линейных дифференциальных форм дает теорема Фробениуса (см. [5],[10]).

В данном случае, однако, будет проще непосредственно доказать невозможность существования соотношений вида (3.11.5). Предположим, что такое соотношение в рассматриваемой задаче существует. Тогда, если в какой-то момент изображающая точка системы находится на гиперповерхности (3.11.5), то сойти с этой гиперповерхности она не может — противное будет означать нарушение условий связи. Поэтому, если справедливо утверждение: из любой точки четырехмерного пространства  $(x_{C0}, y_{C0}, \psi_0, \varphi_0)$ , не нарушая условий связи, можно попасть в любую другую точку этого



пространства  $(x_{C1}, y_{C1}, \psi_1, \varphi_1)$ , то соотношений вида (3.11.5) быть не может, т.е. уравнения связи в данной задаче неинтегрируемы.

Доказательство сформулированного утверждения несложно: проведем на плоскости  $Oxy$  прямую, проходящую через точки  $(x_{C0}, y_{C0})$  и  $(x_{C1}, y_{C1})$ , и повернем диск вокруг вертикальной оси, проходящей через точку  $(x_{C0}, y_{C0})$ , так, чтобы линия пересечения плоскости диска с плоскостью  $Oxy$  совпала с построенной прямой (такое движение допускается связями, поскольку скорость точки  $A$  остается равной нулю, а плоскость диска — вертикальной). Теперь прокатим диск *без проскальзывания* по этой прямой, до положения, в котором координаты точки касания станут равными  $(x_{C1}, y_{C1})$ . Пусть в этом положении  $\varphi = \varphi^*$  (для определенности будем считать  $\varphi^* > \varphi_1$ ).

Построим в плоскости  $Oxy$  окружность радиуса  $\varrho = \frac{r(\varphi^* - \varphi_1)}{2\pi}$ , касающуюся построенной прямой в точке  $(x_{C1}, y_{C1})$  (координата  $\eta$  центра этой окружности должна быть положительной), и прокатим диск по этой окружности *без проскальзывания* до возвращения точки касания в точку  $(x_{C1}, y_{C1})$ .

Теперь повернем плоскость диска вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через точку  $(x_{C1}, y_{C1})$  так, чтобы плоскость  $C\xi\zeta$  образовывала с плоскостью  $Oxz$  угол  $\psi_1$ .

Таким образом, мы действительно из произвольной точки  $(x_{C0}, y_{C0}, \psi_0, \varphi_0)$  конфигурационного пространства попали в другую произвольную точку  $(x_{C1}, y_{C1}, \psi_1, \varphi_1)$  этого пространства, нигде по пути не нарушив условий связи.

Значит уравнения связей (3.11.3), (3.11.4) *неинтегрируемы*. В механике такие связи называются *неголономными*. Для неголономных систем число *независимых координат* и число *независимых вариаций координат* не совпадает: в нашем случае число независимых координат равно *четырем*, а число независимых вариаций — *двум*, так как вариации должны удовлетворять соотношениям:

$$\delta x_c = r \delta \varphi \cos \psi,$$

$$\delta x_c = r \delta \varphi \sin \psi.$$

поэтому, согласно определению (см. п. "Некоторые сведения о связях"), число степеней свободы системы равно *двум*.

Б. Для нахождения *четырех* координат нужны *четыре* уравнения. Два уравнения уже есть — это уравнения связи — (3.11.3), (3.11.4); надо найти еще два. Попытаемся сделать это с помощью

специальных теорем динамики. По условию связи наложенные на систему идеальные и

1) в каждый момент времени допускают вращение диска вокруг оси  $C\zeta$ ;

2) в каждый момент времени действительные перемещения принадлежат множеству виртуальных.

Идеальность связей и выполнение условий (1) и (2) позволяют применить теоремы (III.26) и (III.27):

$$\frac{d(\vec{K}_C, \vec{e}_\zeta)}{dt} = \left( \sum_{k=1}^N [\varrho_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_\zeta \right), \quad (3.11.6)$$

$$dT = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right). \quad (3.11.7)$$

Эти два уравнения в совокупности с двумя уравнениями связи образуют систему для нахождения четырех обобщенных координат:  $x_C, y_C, \psi, \varphi$ .

В. Запишем уравнения (3.11.6) и (3.11.7) в условиях рассматриваемой задачи. Оси  $C\xi, C\eta$  и  $C\zeta$  в каждый момент времени являются главными осями эллипсоида инерции, построенного в точке  $C$ , поэтому (см. III.9)

$$\vec{K}_C = \frac{mr^2}{4} \cdot 0 \cdot \vec{e}_\xi + \frac{mr^2}{2} \dot{\varphi} \vec{e}_\eta + \frac{mr^2}{4} \dot{\psi} \vec{e}_\zeta \Rightarrow (\vec{K}_C, \vec{e}_\zeta) = \frac{mr^2}{4} \dot{\psi}, \quad (3.11.8)$$

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{mr^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{mr^2}{4} \dot{\psi}^2 \right). \quad (3.11.9)$$

Так как единственной заданной силой в данном случае является сила тяжести

$$\left( \sum_{k=1}^N [\varrho_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_\zeta \right) = 0, \quad (3.11.10)$$

$$\sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, d\vec{r}_k \right) = 0. \quad (3.11.11)$$

Подставляя (3.11.8) и (3.11.10) в (3.11.6), (3.11.11), (3.11.9) и (3.11.3), (3.11.4) в (3.11.7) получим:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mr^2}{4} \dot{\psi} \right) = 0 \Rightarrow \dot{\psi} = \text{const} = \omega_1,$$

$$d\left(\frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mr^2}{8}\dot{\psi}^2\right) = 0 \Rightarrow d\left(\frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2\right) = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \text{const} = \omega_2^2.$$

Без ограничения общности можно считать  $x_C(0) = 0, y_C(0) = 0, \psi(0) = 0, \varphi(0) = 0$ .

Если  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ , то диск просто стоит на месте, если  $\omega_1 = 0, \omega_2 > 0$  – диск катится вправо по оси  $Ox$ , если  $\omega_1 > 0, \omega_2 = 0$  – центр диска остается на месте и он вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$ , если  $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$

$$\dot{x}_C = r\omega_2 \cos \omega_1 t, \Rightarrow x_c = \frac{r\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_1 t,$$

$$\dot{y}_C = r\omega_2 \sin \omega_1 t \Rightarrow y_c = \frac{r\omega_2}{\omega_1} (1 - \cos \omega_1 t),$$

т.е. центр диска движется по окружности

$$x_C^2 + \left(y_C - \frac{r\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{r\omega_2}{\omega_1}\right)^2, \quad z_C = r,$$

а сам диск катится по такой же окружности, расположенной в плоскости  $Oxy$ .

### Задача 3.12.

Конец  $A$  оси велосипедного колеса закреплен неподвижно в шаровом шарнире. Конец  $B$  с помощью невесомой нерастяжимой нити подвешен так, что в положении равновесия нить вертикальна, а ось  $AB$  горизонтальна.

Найти реакцию в шарнире и натяжение нити для случаев, когда колесо неподвижно, и когда оно вращается вокруг неподвижной оси  $AB$  с угловой скоростью  $\omega_0$ , и изменение реакции в шарнире в момент обрыва нити (для обоих случаев).

Масса колеса равна  $m$ , центр масс колеса (точка  $C$ ) лежит на середине отрезка  $AB$ , длина которого равна  $2l$ . Направление оси динамической симметрии колеса совпадает с направлением оси  $AB$ , моменты инерции относительно этой

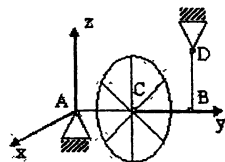


Рис.3.12.1.

оси и оси, ей перпендикулярной и проходящей через центр масс, равны соответственно  $mr^2$  и  $mr\rho^2$ . Массой оси пренебречь.

Решение.

А. Пусть начало неподвижного трехгранника совпадает с точкой А, ось  $Az$  направлена по вертикали вверх,  $\vec{e}_y = \vec{e}_{AB}$  ( $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  — правый трехгранник).

Как известно, реакцию шарового шарнира можно представить в виде

$$\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{e}_x + R_{Ay}\vec{e}_y + R_{Az}\vec{e}_z,$$

а реакция нити  $\vec{R}_B$  направлена вдоль нити, т.е. при сформулированных условиях

$$\vec{R}_B = R_{Bz}\vec{e}_z.$$

Таким образом, нам надо найти *четыре* скалярных неизвестных:  $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bz}$ , для чего нужно написать, по крайней мере, *четыре* уравнения.

Б. Во многих случаях, при решении задач по динамике твердого тела, удобно воспользоваться теоремами о движении центра масс (III.14) и об изменении кинетического момента в движении относительно трехгранника Кёнига (III.16):

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right), \quad (3.12.1)$$

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \sum_{k=1}^N \left[ \vec{\rho}_k, \vec{F}_k^{(e)} + \vec{R}_k^{(e)} \right]. \quad (3.12.2)$$

В. Сначала рассмотрим задачу о реакциях в *положении равновесия* при исправной нити. В этом положении

$$\vec{V}_C \equiv 0 \Rightarrow \frac{d\vec{V}_C}{dt} \equiv 0,$$

$$\vec{K}_C \equiv 0 \Rightarrow \frac{d\vec{K}_C}{dt} \equiv 0,$$

кроме того

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)} = -mg\vec{e}_z,$$

$$\sum_{k=1}^N \vec{R}_k^{(e)} = \vec{R}_A + \vec{R}_B,$$

$$\sum_{k=1}^N [\vec{\rho}_k, \vec{F}_k^{(e)}] = 0,$$

$$\sum_{k=1}^N [\vec{\rho}_k, \vec{R}_k^{(e)}] = [-l\vec{e}_y, \vec{R}_A] + [l\vec{e}_y, \vec{R}_B]$$

поэтому умножая скалярно обе части уравнения (3.12.1) на орты  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ , получим:

$$0 = R_{Ax}, \quad (3.12.3)$$

$$0 = R_{Ay}, \quad (3.12.4)$$

$$0 = R_{Az} + R_{Bz} - mg. \quad (3.12.5)$$

Проекция уравнения (3.12.2) на оси  $Ay$  и  $Az$  представляют собой тождества

$$0 \equiv 0,$$

проекция на ось  $Ax$  дает:

$$0 = -lR_{Az} + lR_{Bz}. \quad (3.12.6)$$

Система уравнений (3.12.3) – (3.12.6) (четырёх уравнений для четырёх неизвестных) имеет единственное решение:

$$R_{Ax} = R_{Ay} = 0, R_{Az} = R_{Bz} = \frac{mg}{2}.$$

Уравнения (3.12.1), (3.12.2) кроме решения, описывающего *положение равновесия*, допускают решение, при котором

$$\vec{V}_C \equiv 0 \Rightarrow \frac{d\vec{V}_C}{dt} \equiv 0,$$

$$\vec{K}_C = mr^2\omega_0\vec{e}_y, \omega_0 = \text{const} \Rightarrow \frac{d\vec{K}_C}{dt} \equiv 0.$$

Легко видеть, что реакции в этом случае удовлетворяют той же системе уравнений, поэтому и для этого движения

$$R_{Ax} = R_{Ay} = 0, R_{Az} = R_{Bz} = \frac{mg}{2}.$$

Посмотрим, как изменится реакция в шарнире  $A$ , в момент обрыва нити. Как в задаче 3.2.7 введем моменты времени  $t^*$  (обрыва нити),  $(t^* + 0)$  и  $(t^* - 0)$  и найдем  $\vec{R}_A(t^* + 0)$ . По-прежнему будем считать, что *состояния* системы (т.е. совокупность значений координат и скоростей точек системы) в моменты  $(t^* - 0)$  и  $(t^* + 0)$  одинаковы. Введем подвижный трехгранник  $C\xi\eta\zeta$ , жестко связанный с колесом, так, что

$$\vec{e}_\xi(t^*) = \vec{e}_x, \vec{e}_\eta(t^*) = \vec{e}_y, \vec{e}_\zeta(t^*) = \vec{e}_z.$$

Для нахождения реакции шарнира снова воспользуемся уравнениями (3.12.1) и (3.12.2). В рассматриваемой ситуации, в отличие от предыдущей задачи,

$$\frac{d\vec{V}_C}{dt}(t^* + 0) \neq 0, \frac{d\vec{K}_C}{dt}(t^* + 0) \neq 0$$

Представим ускорение центра масс, используя формулу Ривальса (I.16):

$$\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{a}_C = \vec{a}_A + [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{AC}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{AC}]], \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Но

$$\vec{a}_A \equiv 0,$$

и

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{AC}]]_{t=t^*+0} = [\omega_0 \vec{e}_y, [\omega_0 \vec{e}_y, l \vec{e}_y]] = 0,$$

поэтому

$$\left. \frac{d\vec{V}_C}{dt} \right|_{t=t^*+0} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt}, l \vec{e}_y \right]_{t=t^*+0}.$$

Используя понятие *локальной производной* и обозначая ее  $\frac{\tilde{d}(\cdot)}{dt}$  (если интерпретировать производную по времени от какого-либо вектора, как скорость конца этого вектора, то используемая ниже формула представляет собой применение теоремы сложения скоростей для вычисления этой производной, при этом *локальная производная* является аналогом *относительной скорости*), запишем:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{\omega}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{\omega}] = \frac{\tilde{d}\vec{\omega}}{dt} = \dot{\omega}_\xi \vec{e}_\xi + \dot{\omega}_\eta \vec{e}_\eta + \dot{\omega}_\zeta \vec{e}_\zeta.$$

Таким образом

$$\left. \frac{d\vec{V}_C}{dt} \right|_{t=t^*+0} = [\dot{\omega}_\xi \vec{e}_\xi + \dot{\omega}_\eta \vec{e}_\eta + \dot{\omega}_\zeta \vec{e}_\zeta, l \vec{e}_\eta] = l(\dot{\omega}_\xi \vec{e}_\zeta - \dot{\omega}_\zeta \vec{e}_\xi).$$

Для вычисления  $\frac{d\vec{K}_C}{dt}$  еще раз воспользуемся *локальной производной*:

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_C}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{K}_C].$$

Так как

$$[\vec{\omega}, \vec{K}_C]_{t=t^*+0} = [\omega_0 \vec{e}_y, mr^2 \omega_0 \vec{e}_y] = 0, \quad (3.12.7)$$

то

$$\left. \frac{d\vec{K}_C}{dt} \right|_{t=t^*+0} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_C}{dt} = m\varrho^2 \dot{\omega}_\xi \vec{e}_\xi + mr^2 \dot{\omega}_\eta \vec{e}_\eta + m\varrho^2 \dot{\omega}_\zeta \vec{e}_\zeta.$$

С учетом того, что

$$\vec{R}_B(t^* + 0) = 0,$$

уравнения (3.12.1) и (3.12.2), записанные в проекциях на оси  $C\xi, C\eta, C\zeta$  в момент  $t = t^* + 0$ , примут вид:

$$\left. \begin{aligned} -ml\dot{\omega}_\zeta &= R_{A\xi} \\ 0 &= R_{A\eta} \\ ml\dot{\omega}_\xi &= R_{A\zeta} - mg \\ m\rho^2\dot{\omega}_\xi &= -lR_{A\zeta} \\ mr^2\dot{\omega}_\eta &= 0 \\ m\rho^2\dot{\omega}_\zeta &= lR_{A\xi} \end{aligned} \right\} \quad (3.12.8)$$

Получилась (в отличие от первой задачи) система *шести* уравнений относительно *шести* неизвестных:  $\dot{\omega}_\xi, \dot{\omega}_\eta, \dot{\omega}_\zeta, R_{A\xi}, R_{A\eta}, R_{A\zeta}$ . Решая ее, найдем

$$\dot{\omega}_\xi = -\frac{gl}{\rho^2 + l^2}, \dot{\omega}_\eta = \dot{\omega}_\zeta = 0,$$

$$R_{A\xi} = R_{A\eta} = 0, R_{A\zeta} = mg\left(1 - \frac{l^2}{\rho^2 + l^2}\right).$$

Г. Если  $\omega_0 = 0$ , то колесо будет двигаться как *физический маятник*, т.е. его центр будет *колебаться* в неподвижной *вертикальной* плоскости  $Ayz$ . Если же  $\omega_0 \gg \sqrt{\frac{gl}{r^2}}$ , то центр колеса, почти не отклоняясь от *горизонтальной* плоскости  $Axy$ , описывает кривую, близкую к окружности радиуса  $l$ , с *почти постоянной* скоростью (см. задачу 4.4).

Эти два примера говорят о том, что движение колеса, возникающее после обрыва нити, *сильно* зависит от значения начальной угловой скорости. В то же время найденный ответ не содержит  $\omega_0$ .

Не является ли это свидетельством ошибки? Не является.

Во-первых, независимость системы (3.12.8) от  $\omega_0$  связана с равенством (3.12.7), которое справедливо в *двух* случаях: когда  $\omega_0 = 0$  и когда вектор  $\vec{\omega}_0$  коллинеарен вектору  $\vec{K}_C$ , т.е. в обоих случаях система уравнений для определения реакции в момент  $t = t^* + 0$  действительно будет одинаковой, и, во-вторых, система (3.12.8) определяет движение колеса и реакцию шарнира только в *начальный* момент времени. В момент  $t = t^* + \Delta t$  имеем:

в случае  $\omega_0 = 0$

$$\vec{\omega}(t^* + \Delta t) = -\frac{gl\Delta t}{\rho^2 + l^2}\vec{e}_\xi,$$

во втором случае

$$\vec{\omega}(t^* + \Delta t) = \vec{\omega}_0 - \frac{gl\Delta t}{\rho^2 + l^2} \vec{e}_\xi,$$

поэтому в этот момент вектор  $[\vec{\omega}(t^* + \Delta t), \vec{K}_C(t^* + \Delta t)]$ , будет *разным* в каждом из двух случаев, соответственно будут разными системы уравнений для определения углового ускорения и реакции и, естественно, решения этих уравнений.

### Задача 3.13.

На гладкой горизонтальной плоскости лежит однородный шар массы  $M$  и радиуса  $r$ . На концах фиксированного диаметра шара  $AB$  закреплены две материальные точки массы  $m$  каждая.

В начальный момент скорость центра масс шара равна нулю, вектор угловой скорости направлен по вертикали и равен по величине  $\omega_0$ , диаметр  $AB$  образует с вертикалью угол  $\alpha$ .

Какую траекторию описывает точка  $B$  относительно неподвижного трехгранника.

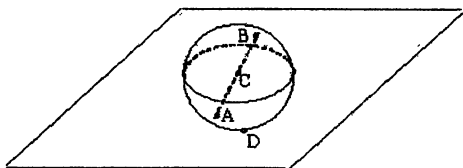


Рис.3.13.1.

Решение.

А. Будем рассматривать в качестве системы совокупность шара и двух материальных точек. Очевидно, что центр масс этой системы, ввиду однородности шара и одинаковости точек, совпадает с центром шара.

Внешними силами приложенными к системе являются силы тяжести и реакция плоскости. Все они направлены по вертикали и проходят через центр шара.

Чтобы задать положение рассматриваемой системы, достаточно знать положение ее центра масс и ориентацию подвижного трехгранника, жестко связанного с шаром, относительно трехгранника неподвижного. Поскольку центр масс движется в горизонтальной плоскости, а указанная ориентация определяется тремя углами (например, углами Эйлера) система имеет *пять* степеней свободы.



Для ответа на поставленный вопрос, надо знать движение шара; чтобы найти движение шара надо написать, как минимум, *пять* уравнений.

Б. Так как точки жестко связаны с шаром, рассматриваемая система представляет собой абсолютно твердое тело.

Для получения уравнений движения системы воспользуемся теоремами о движении центра масс (III.14) и об изменении кинетического момента в движении по отношению к трехграннику Кёнига (III.16).

Первая теорема дает

$$(M + 2m) \frac{d(\vec{V}_h + \vec{V}_V)}{dt} = (M + 2m)\vec{g} + \vec{N}, \quad (3.13.1)$$

где  $\vec{V}_h$  – горизонтальная составляющая вектора скорости центра шара,  $\vec{V}_V$  – вертикальная составляющая этого вектора,  $\vec{N}$  – реакция плоскости. Из уравнения (3.13.1) и условия связи  $\vec{V}_V \equiv 0$  следует

$$0 = (M + 2m)\vec{g} + \vec{N} \Rightarrow \vec{N} = -(M + 2m)\vec{g},$$

$$(M + 2m) \frac{d\vec{V}_h}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V}_h = const \Rightarrow \vec{V}_h = \vec{V}_h(0) = 0, \quad (3.13.2)$$

т.е. центр шара остается на месте (соотношение (3.13.2) эквивалентно двум скалярным уравнениям).

Записав вторую теорему ( $\vec{\rho}_C$  и  $\vec{\rho}_D$ , соответственно, радиусы-векторы центра масс и точки касания шара и плоскости относительно трехгранника Кёнига), получим:

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = [\vec{\rho}_C, (M + 2m)\vec{g}] + [\vec{\rho}_D, \vec{N}] \Rightarrow \frac{d\vec{K}_C}{dt} = 0 \Rightarrow \quad (3.13.3)$$

$$\vec{K}_C = \vec{K}_C(0). \quad (3.13.4)$$

Уравнение (3.13.4) дает еще *три* скалярных уравнения.

Задача свелась к случаю Эйлера движения твердого тела с одной неподвижной точкой. Более того, эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, является эллипсоидом вращения. Известно, что в этом случае движение тела, представляет собой *регулярную прецессию* и, следовательно, чтобы решить поставленную задачу, достаточно найти параметры этой прецессии и установить, как при этом будет двигаться точка *B*.

Мы, однако, откажемся от использования известных результатов и проследим процесс получения решения уравнения (3.13.3) с самого начала, поскольку этот процесс содержит ряд поучительных моментов.

Первым важным моментом, во многом, определяющим в дальнейшем успех или неудачу в решении задачи, является выбор координат. Для изучения движения твердого тела с одной неподвижной точкой используются, как правило, те или другие системы угловых переменных (см., например, [10]). Мы воспользуемся, часто употребляемыми, углами Эйлера.

Выбор координат, сам по себе, определяет далеко не все — так при удачном выборе начала и ориентации осей, глядя на уравнение плоской кривой второго порядка (каноническое) можно сразу определить вид этой кривой, если же оси выбраны *произвольно*, для идентификации кривой требуется выполнение ряда процедур с коэффициентами соответствующей квадратичной формы.

В рассматриваемой задаче речь пойдет о выборе ориентаций неподвижного  $Cxyz$  и подвижного  $C\xi\eta\zeta$  трехгранников, имеющих общее начало в точке  $C$  — неподвижном центре масс системы. Начнем с выбора направлений осей  $Cz$  и  $C\xi$ , выделяющихся среди других тем, что угол  $\vartheta$  между ними, является одним из углов Эйлера. Понятно, что при выборе должны учитываться *особенности* решаемой задачи. В пространстве, жестко связанном с шаром, легко указать направление, *явно выделяющееся* среди других, — это направление *оси динамической симметрии* системы (*оси вращения эллипсоида инерции*, построенного в точке  $C$ ), состоящей из шара и прикрепленных к нему материальных точек, т.е. направление задаваемое единичным вектором  $\vec{e}_{AB}$ . Итак возьмем

$$\vec{e}_{\zeta} = \vec{e}_{AB}.$$

В задачах, связанных с движением, происходящим в поле сил тяжести, в неподвижном пространстве естественно выделить направление, задаваемое вектором  $\vec{g}$ . Но в данном случае такой выбор не столько учитывает особенности задачи, сколько игнорирует их, поскольку, как следует из уравнения (3.13.3) сила тяжести *никакого влияния* на движение системы *не оказывает*.

Однако следствие (3.13.4) этого уравнения указывает нам *неподвижное* относительно *неподвижного пространства* направление — направление, определяемое вектором  $\vec{K}_C$ , поэтому возьмем  $\vec{e}_z$  таким, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{K}_C = K_C \vec{e}_z, (K_C = \text{const}).$$

Выберем орты  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_{\xi}$ , лежащими в начальный момент времени в плоскости, образованной векторами  $\vec{\omega}_0$  и  $\vec{e}_{\zeta}(0)$  (вектор  $\vec{e}_z$  также лежит в этой плоскости). Теперь оба трехгранника определены

однозначно и, следовательно, однозначно определены углы Эйлера.

Для нахождения *трех* углов Эйлера нужны *три* уравнения. В качестве таких уравнений можно воспользоваться проекциями *векторного* уравнения (3.13.3) на три некопланарных направления, а можно попытаться найти *первые интегралы* задачи, тем более, что один такой интеграл у нас уже есть:

$$K_C = \text{const.} \quad (3.13.5)$$

Поскольку *элементарная работа сил тяжести и реакции горизонтальной плоскости на действительном перемещении соответствующих точек равна нулю*, применив теорему (III.17) об изменении кинетической энергии, получим еще один первый интеграл

$$dT = 0 \Rightarrow T = \text{const.} \quad (3.13.6)$$

Для получения недостающего третьего уравнения запишем соотношение (3.13.3) в проекции на ось  $C\zeta$  (одно из *выделенных* направлений):

$$\left( \frac{d\vec{K}_C}{dt}, \vec{e}_\zeta \right) = 0. \quad (3.13.7)$$

Используя определение локальной производной, выражения векторов кинетического момента и угловой скорости в проекциях на оси подвижного трехгранника и свойства векторного и смешанного произведений, запишем:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_C}{dt} &= \frac{\tilde{d}\vec{K}_C}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{K}_C], \\ \left( \frac{\tilde{d}\vec{K}_C}{dt}, \vec{e}_\zeta \right) &= (J_\xi \dot{\omega}_\xi \vec{e}_\xi + J_\eta \dot{\omega}_\eta \vec{e}_\eta + J_\zeta \dot{\omega}_\zeta \vec{e}_\zeta, \vec{e}_\zeta) = J_\zeta \dot{\omega}_\zeta, \\ ([\vec{\omega}, \vec{K}_C], \vec{e}_\zeta) &= ([\vec{e}_\zeta, \vec{\omega}], \vec{K}_C) = \\ &= ([\vec{e}_\zeta, \omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta + \omega_\zeta \vec{e}_\zeta], J_\xi \omega_\xi \vec{e}_\xi + J_\eta \omega_\eta \vec{e}_\eta + J_\zeta \omega_\zeta \vec{e}_\zeta) = \\ &= ([\vec{e}_\zeta, (\omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta)], J_\xi (\omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta)) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая выписанные соотношения, из (3.13.7) найдем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{K}_C}{dt}, \vec{e}_\zeta \right) &= \left( \frac{\tilde{d}\vec{K}_C}{dt}, \vec{e}_\zeta \right) = J_\zeta \dot{\omega}_\zeta = 0 \Rightarrow \\ \omega_\zeta &= \omega_\zeta(0) = \omega_0 \cos \alpha, \quad (3.13.8) \end{aligned}$$

— еще один первый интеграл.

Три уравнения — (3.13.5), (3.13.6) и (3.13.8) — позволяют найти три неизвестных:  $\vartheta, \psi, \varphi$ .

В. Теперь надо выразить полученные уравнения через углы Эйлера и их производные. Но прежде чем приступить к этой процедуре, заметим, что в силу выбора осей  $Cz$  и  $C\zeta$

$$(\vec{K}_C, \vec{e}_\zeta) = K_C \cos \vartheta \Rightarrow K_C \cos \vartheta = J_\zeta \omega_\zeta \Rightarrow \cos \vartheta = \frac{J_\zeta \omega_\zeta}{K_C} = \text{const} \Rightarrow \dot{\vartheta} = 0, \quad (3.13.9)$$

т.е. один из углов Эйлера в рассматриваемой задаче не меняется, сохраняя начальное значение. Представление (I.14) вектора угловой скорости, с учетом (3.13.9) дает:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta. \quad (3.13.10)$$

Из (3.13.10) вытекает

$$\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta(0) = \omega_0 \cos \alpha, \quad (3.13.11)$$

Поскольку  $J_\xi = J_\eta = J_\zeta + 2mr^2$  интеграл энергии (3.13.6) можно представить в виде:

$$\frac{1}{2}(J_\xi \omega_\xi^2 + J_\xi \omega_\eta^2 + (J_\xi - 2mr^2)\omega_\zeta^2) = h \Rightarrow J_\xi \omega^2 = h + mr^2 \omega_\zeta^2 \Rightarrow \omega^2 = \text{const} = \omega_0^2$$

откуда с учетом (3.13.10) следует:

$$\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \vartheta(0) = \omega_0^2. \quad (3.13.12)$$

Из уравнений (3.13.11) и (3.13.12) видно, что во время движения  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\varphi}$  остаются постоянными, т.е. движение шара с прикрепленными к нему точками представляет собой регулярную прецессию — радиус  $CB$  шара описывает конус, ось которого направлена по вектору  $\vec{K}_C$ , плоскость  $Cz\zeta$  вращается относительно неподвижного трехгранника с постоянной угловой скоростью  $\dot{\psi}\vec{e}_z$ ,  $\dot{\varphi}\vec{e}_\zeta$  — угловая скорость шара относительно подвижного трехгранника, жестко связанного с плоскостью  $Cz\zeta$ , тоже постоянна.

Теперь легко ответить на вопрос задачи — траекторией точки  $B$  по отношению к неподвижному трехграннику будет окружность радиуса  $r \sin \vartheta(0)$

$$\begin{aligned} \text{tg } \vartheta(0) &= \frac{J_\xi \omega_\xi}{J_\zeta \omega_\zeta} = -\frac{(J_\zeta + 2mr^2)\omega_0 \sin \alpha}{J_\zeta \omega_0 \cos \alpha} = \\ &= -\frac{J_\zeta + 2mr^2}{J_\zeta} \text{tg } \alpha, \quad (J_\zeta = \frac{2}{5}mR^2), \quad (3.13.13) \end{aligned}$$

расположенная в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{K}_C$ .

Г. Из формулы (3.13.13) следует, что  $m = 0 \Rightarrow \vartheta(0) = -\alpha$  (знак минус появляется вследствие того, что углы  $\alpha$  и  $\vartheta$  отсчитываются в противоположные стороны) и значит шар будет вращаться вокруг *неподвижной* оси, направление которой совпадает с направлением начальной угловой скорости (как и должно быть, поскольку для однородного шара любой диаметр является *перманентной* осью вращения), т.е. по крайней мере, при одном значении параметра полученный результат не противоречит известным фактам.

Рассмотренная задача еще раз подтверждает важность серьезного отношения к выбору координат: если в качестве неподвижной оси  $Cz$  выбрать вертикаль, то несмотря на то, что движение шара останется тем же, его описание в углах Эйлера, привязанных к новому выбору *неподвижного* трехгранника, будет достаточно сложным.

### Задача 3.14.

Доказать теорему III.26.

Решение.

А. Дано: система, на которую наложены *идеальные* связи. Вектор

$$\delta \vec{r}_k = [\lambda \vec{e}_\zeta, \vec{\rho}_k], \quad (3.14.1)$$

( $\vec{\rho}_k$  — радиус-вектор  $k$ -той точки, относительно трехгранника Кёнига,  $\vec{e}_\zeta$  — орт оси неизменного направления, проходящей через центр масс системы,  $\lambda$  — произвольное число) в каждый момент времени принадлежит *множеству виртуальных перемещений* системы. Надо доказать, что при выполнении этих условий, справедливо соотношение

$$\frac{d(\vec{K}_C, \vec{e}_\zeta)}{dt} = \left( \sum_{k=1}^N [\varrho_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_\zeta \right). \quad (3.14.2)$$

Б+В. Так как связи, наложенные на систему *идеальные*, для решения задачи можно воспользоваться общим уравнением динамики (III.22):

$$\sum_{k=1}^N \left( m_k \ddot{\vec{r}}_k - \vec{F}_k^{(e)} - \vec{F}_k^{(i)}, \delta \vec{r}_k \right) = 0, \forall t, \forall \delta \mu \in \{V\}. \quad (3.14.3)$$

Поскольку вектор заданный формулой (3.14.1) по условию является

одним из виртуальных перемещений, перепишем (3.14.3) в виде:

$$\sum_{k=1}^N \left( m_k \ddot{\vec{r}}_k - \vec{F}_k^{(e)} - \vec{F}_k^{(i)}, [\lambda \vec{e}_\zeta, \vec{\varrho}_k] \right) = 0, \quad (3.14.4)$$

и учтем, что

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\varrho}_k \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_k = \ddot{\vec{r}}_C + \ddot{\vec{\varrho}}_k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^N \left( m_k (\ddot{\vec{r}}_C + \ddot{\vec{\varrho}}_k) - \vec{F}_k^{(e)} - \vec{F}_k^{(i)}, [\lambda \vec{e}_\zeta, \vec{\varrho}_k] \right) = 0.$$

Преобразовывая по частям последнее выражение, получим:

$$\sum_{k=1}^N \left( m_k \ddot{\vec{r}}_C, [\lambda \vec{e}_\zeta, \vec{\varrho}_k] \right) = \left( \ddot{\vec{r}}_C, \left[ \lambda \vec{e}_\zeta, \sum_{k=1}^N m_k \vec{\varrho}_k \right] \right) = 0, \quad (3.14.5)$$

(в силу определения центра масс и трехгранника Кёнига);

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left( m_k \ddot{\vec{\varrho}}_k - \vec{F}_k^{(e)} - \vec{F}_k^{(i)}, [\lambda \vec{e}_\zeta, \vec{\varrho}_k] \right) = \\ = \left( \lambda \vec{e}_\zeta, \left[ \sum_{k=1}^N \vec{\varrho}_k, (m_k \ddot{\vec{\varrho}}_k - \vec{F}_k^{(e)} - \vec{F}_k^{(i)}) \right] \right). \end{aligned}$$

Учитывая последнее преобразование, (3.14.5), свойства моментов внутренних сил относительно центра масс и определение кинетического момента системы в движении относительно трехгранника Кёнига, можем записать:

$$\lambda \left( \vec{e}_\zeta, \frac{d\vec{K}_C}{dt} - \sum_{k=1}^N [\vec{\varrho}_k, \vec{F}_k^{(e)}] \right) = 0. \quad (3.14.6)$$

Поскольку  $\lambda$  – произвольное число, а  $\vec{e}_\zeta$  – постоянный вектор, из (3.14.6) вытекает:

$$\frac{d(\vec{K}_C, \vec{e}_\zeta)}{dt} = \left( \sum_{k=1}^N [\vec{\varrho}_k, \vec{F}_k^{(e)}], \vec{e}_\zeta \right).$$

Г. Доказательство остальных специальных теорем динамики системы можно получить аналогичным образом, или найти в учебниках ([7],[8],[9],[10]).

## Глава 4

# Некоторые задачи аналитической механики

### 1. Перечень IV: используемые положения аналитической механики

**1.1. Уравнения Лагранжа второго рода** Если связи, наложенные на систему, идеальные и голономные, уравнения движения могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{IV.1})$$

где  $n$  — число степеней свободы,  $T$  — кинетическая энергия системы в абсолютном движении,  $q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  — обобщенные (лагранжевы) координаты,  $Q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  — обобщенные силы.

Вычисление обобщенной силы.

Пусть  $\delta\mu \in \{V\}$ . Обозначим элементарную работу всех заданных сил на произвольном виртуальном перемещении  $W(\delta\mu)$ :

$$W(\delta\mu) = \sum_{k=1}^N (\vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, \delta\vec{r}_k) = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j.$$

Пусть  $\delta\mu(j) = (\delta\vec{r}_1(j), \delta\vec{r}_2(j), \dots, \delta\vec{r}_N(j))$  обозначает виртуальное перемещение, имеющее место при следующих условиях:

$$\delta q_k = 0, \quad \forall k \neq j, \delta q_j > 0.$$

Тогда

$$W(\delta\mu(j)) = \sum_{k=1}^N (\vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, \delta\vec{r}_k(j)) = Q_j \delta q_j \Rightarrow Q_j = \frac{W(\delta\mu(j))}{\delta q_j}. \quad (\text{IV.2})$$

Если существует функция  $U$  такая, что

$$W(\delta\mu) = \delta U = \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j \Rightarrow Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{IV.3})$$

можно определить функцию Лагранжа (лагранжиан):

$$L = T + U, \quad (IV.4)$$

и тогда уравнения Лагранжа второго рода примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (IV.5)$$

Функция  $U$  называется силовой функцией, функция  $\Pi = (-U)$  – потенциальной энергией.

### 1.2. Первые интегралы уравнений Лагранжа .

а) Если  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$ , обобщенная координата  $q_j$  называется циклической. В этом случае система уравнений (IV.5) имеет первый интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const}, \quad (IV.6)$$

который также называется циклическим.

б) В общем случае  $T = T_2 + T_1 + T_0$ ,  $T_2$  – квадратичная форма обобщенных скоростей,  $T_1$  – линейная форма обобщенных скоростей,  $T_0$  – часть кинетической энергии, не зависящая от обобщенных скоростей. Если  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  и  $T \neq T_2$ , то имеет место первый интеграл

$$T_2 - T_0 = U + h, \quad (IV.7)$$

который называется обобщенным интегралом энергии или интегралом Якоби.

в) Если  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  и  $T = T_2$ , имеет место первый интеграл

$$T = U + h \Rightarrow T + \Pi = h, \quad (IV.8)$$

который называется интегралом энергии и представляет собой закон сохранения полной механической энергии.

### 1.3. Положения равновесия и теория малых колебаний .

Пусть связи, наложенные на систему являются идеальными, голономными и стационарными, и заданные силы допускают силовую функцию, не зависящую от времени явно:  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ . Уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (IV.9)$$

называются уравнениями равновесия, а их решения положениями равновесия данной механической системы.

Положение равновесия может быть устойчивым или неустойчивым.



Достаточным условием устойчивости положения равновесия является положительная определенность матрицы

$$B = \left\| \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right\|, i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{IV.10})$$

вычисленной в этом положении равновесия.

Достаточным условием неустойчивости данного положения равновесия является отрицательность хотя бы одного из диагональных элементов матрицы  $B$ .

Пусть в некотором положении равновесия матрица  $B$  является положительно определенной. Обозначим через  $q$  вектор-столбец обобщенных координат (пусть  $q = 0$  в рассматриваемой точке), через  $A$  — матрицу кинетической энергии, вычисленной в этой точке. Уравнения

$$A\ddot{q} + Bq = 0 \quad (\text{IV.11})$$

называются уравнениями малых колебаний системы в окрестности рассматриваемого положения равновесия.

Если начальные условия для уравнений (IV.5) и (IV.11) совпадают и находятся в  $\epsilon$ -окрестности нулевой точки фазового пространства, то на конечном, но, вообще говоря, достаточно большом интервале времени, разность решений систем (IV.5) и (IV.11) не превзойдет величины порядка  $\epsilon^2$ .

Общее решение системы (IV.11) имеет вид [11]:

$$q(t) = \sum_{j=1}^n u_j (c_j \cos \omega_j t + d_j \sin \omega_j t), \quad (\text{IV.12})$$

где  $c_j, d_j$  — произвольные постоянные,  $\omega_j$  — собственные частоты малых колебаний системы, являющиеся решениями характеристического уравнения (уравнения собственных частот, векового уравнения)

$$\det \|\omega^2 A + B\| = 0, \quad (\text{IV.13})$$

а  $u_j$  — собственные столбцы (собственные формы колебаний), определяемые из уравнений:

$$(-\omega_j^2 A + B)u_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.14})$$

При сделанных предположениях (матрицы  $A$  и  $B$  — определено-положительные), характеристическое уравнение имеет ровно  $n$  положительных решений. Если все собственные частоты различны, все собственные столбцы линейно независимы. Если кратность какого-либо из корней уравнения (IV.13) больше еди-

ницы, число линейно-независимых решений системы (IV.14) равно кратности корня.

#### 1.4. Стационарные движения и малые колебания относительно них .

Пусть координаты  $q_k$ ,  $k = s + 1, \dots, n$  — циклические. Координаты  $q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  в этом случае называются *позиционными*.

Рассматривая циклические интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \beta_k, \quad k = s + 1, \dots, n \quad (\text{IV.15})$$

как уравнения относительно  $\dot{q}_k$  и разрешая их, получим

$$\dot{q}_k = f_k(t, q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n). \quad (\text{IV.16})$$

Функция Рауса определяется следующим образом:

$$R(t, q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = \\ (L - \sum_{k=s+1}^n \beta_k \dot{q}_k)_{\dot{q}_k \rightarrow f_k(t, q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n)} \quad (\text{IV.17})$$

Для механических систем функция Рауса имеет следующую структуру:

$$R = R_2 + R_1 + R_0,$$

$R_2$  — квадратичная форма относительно производных по времени от *позиционных* координат,

$R_1$  — линейная форма относительно производных по времени от *позиционных* координат,

$R_0$  — часть функции Рауса, не зависящая от производных по времени от *позиционных* координат.

Изменение *позиционных* координат во времени описывается уравнениями Рауса:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (\text{IV.18})$$

Назовем систему, поведение которой определяется уравнениями Рауса, приведенной. Уравнения Рауса по форме совпадают с уравнениями Лагранжа второго рода, в которых лагранжиан заменен на функцию Рауса, поэтому, считая, что  $R_0$  выполняет роль силовой функции для приведенной системы, можем найти *положения равновесия* этой системы. Это будут решения системы уравнений :

$$\frac{\partial R_0}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (\text{IV.19})$$

Положениям равновесия приведенной системы, соответствуют такие движения исходной системы, на которых позиционные координаты и производные по времени циклических координат постоянны. Такие движения называются стационарными.

Положение равновесия приведенной системы будет устойчивым, если матрица

$$\| - \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_i \partial q_j} \|, i, j = 1, 2, \dots, s \quad (\text{IV.20})$$

вычисленная в этом положении равновесия, положительно определена. При малом отклонении от устойчивого положения равновесия приведенная система будет совершать колебания в окрестности этого положения.

Для нахождения частот малых колебаний и собственных столбцов им соответствующих используется процедура аналогичная (но не идентичная, если число степеней свободы приведенной системы больше единицы) процедуре, описанной выше. Выписав общее решение задачи о малых колебаниях для приведенной системы, подставив его в соотношения (IV.16), и проинтегрировав их по времени, получим решение задачи о малых колебаниях исходной системы относительно стационарного движения.

## 2. Задачи

### Задача 4.1.

Написать уравнение движения математического маятника, найти первый интеграл и построить фазовый портрет.

Решение.

А+Б. Подробное описание математического маятника дано в задаче 2.3. Из этого описания следует, что математический маятник представляет собой систему с идеальными голономными связями, следовательно, для описания его движения можно воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода.

Выберем в качестве координаты угол  $\varphi_M$  отклонения маятника от вертикали (см. рис.2.3.1).

В. Составим уравнение Лагранжа второго рода. Для этого

1) вычислим его кинетическую энергию, как функцию обобщенной координаты и скорости

$$T = \frac{1}{2} m V_M^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_M^2;$$

2) для нахождения обобщенной силы подсчитаем элементарную работу заданной силы (силы тяжести) на виртуальном перемещении

$$(m\vec{g}, \delta\vec{r}_M) = (mg\vec{e}_z, l\delta\varphi_M\vec{e}_\varphi) = mgl\delta\varphi_M(\vec{e}_z, \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi_M\vec{e}_x - \sin\varphi_M\vec{e}_z \Rightarrow (m\vec{g}, \delta\vec{r}_M) = -mgl\delta\varphi_M \sin\varphi_M \Rightarrow$$

$$Q_\varphi = \frac{-mgl\delta\varphi_M \sin\varphi_M}{\delta\varphi_M} = -mgl \sin\varphi_M;$$

3) подсчитаем частные производные кинетической энергии по обобщенной скорости и координате

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_M} = ml^2\dot{\varphi}_M, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_M} = 0;$$

4) запишем уравнение Лагранжа второго рода для математического маятника

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_M} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_M} = Q_\varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}_M) = -mgl \sin\varphi_M \Rightarrow$$

$$\ddot{\varphi}_M + \frac{g}{l} \sin\varphi_M = 0. \quad (4.1.1)$$

Заметим, что сила тяжести имеет силовую функцию:

$$m\vec{g} = mg\vec{e}_z, \delta\vec{r}_M = \delta x_M\vec{e}_x + \delta z_M\vec{e}_z \Rightarrow$$

$$(m\vec{g}, \delta\vec{r}_M) = mg\delta z_M = \delta(mgz_M) \Rightarrow U = mgz_M. \quad (4.1.2)$$

Выражение (4.1.2) остается справедливым в любой задаче, где действует сила тяжести и ось  $Oz$  направлена по вертикали вниз. При его использовании нужно выразить  $z_M$  через соответствующую обобщенную координату, в данном случае  $z_M = l \cos\varphi_M$ .

При наличии силовой функции можно выписать функцию Лагранжа

$$L = T + U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_M^2 + mgl \cos\varphi_M, \quad (4.1.3)$$

и воспользоваться ею для получения уравнения движения (см. формулу IV.5 — результатом ее применения снова будет уравнение 4.1.1) и первого интеграла. В самом деле, анализируя структуру функции  $L$ , заданной равенством (4.1.3), замечаем, что

$$T = T_2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

т.е. выполнены достаточные условия существования интеграла энергии

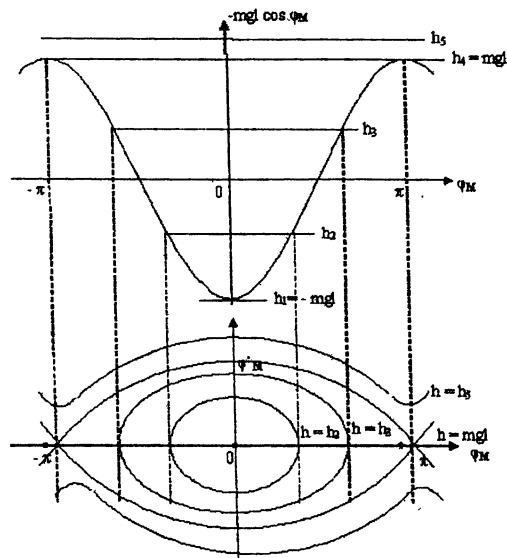


Рис. 4.1.1.

$$T = U + h \Rightarrow T + \Pi = h \Rightarrow \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_M^2 - mgl \cos \varphi_M = h. \quad (4.1.4)$$

Разрешив уравнение (4.1.4) относительно  $\dot{\varphi}_M$  получим:

$$\dot{\varphi}_M = \pm \sqrt{\frac{2}{ml^2}(h + mgl \cos \varphi_M)} = \pm \sqrt{\frac{2}{ml^2}(h - (-mgl \cos \varphi_M))}. \quad (4.1.5)$$

При фиксированном значении  $h$  уравнение (4.1.5) задает кривую (фазовую траекторию) на плоскости  $(\varphi_M, \dot{\varphi}_M)$ , называемой фазовой плоскостью. Множество кривых, получающихся при всех допустимых значениях  $h$  и заполняющих эту плоскость или ее часть, называется фазовым портретом математического маятника.

Строить фазовый портрет математического маятника удобно используя график потенциальной энергии  $\Pi = -mgl \cos \varphi_M$ .

Проведем на рисунке, изображающем этот график, линии параллельные оси абсцисс на уровнях

1.  $h_1 = -mgl, -mgl = -mgl \cos \varphi_{M1} \Rightarrow \varphi_{M1} = 0,$
2.  $-mgl < h_2 \leq 0, h_2 = -mgl \cos \varphi_{M2} \Rightarrow \varphi_{M2} = \arccos(-\frac{h_2}{mgl}),$
3.  $0 < h_3 < mgl, h_3 = -mgl \cos \varphi_{M3} \Rightarrow \varphi_{M3} = \arccos(-\frac{h_3}{mgl}),$
4.  $h_4 = mgl, mgl = -mgl \cos \varphi_{M4} \Rightarrow \varphi_{M4} = \pm\pi,$

$$5. h_5 > mgl,$$

и построим фазовые траектории, соответствующие каждому из этих уровней.

Фазовая траектория, соответствующая уровню  $h_1$  состоит из одной точки, являющейся *положением равновесия*, поскольку в этой точке в силу уравнений (4.1.1) и (4.1.5) выполняются соотношения

$$\varphi_M = 0, \dot{\varphi}_M(\varphi_{M1}) = 0, \ddot{\varphi}_M(\varphi_{M1}) = 0.$$

Уровням энергии  $h_2$  и  $h_3$ , как можно видеть из уравнения (4.1.5), отвечают симметричные относительно обеих координатных осей замкнутые выпуклые гладкие кривые, расположенные, соответственно, на интервалах

$$-\varphi_{M2} \leq \varphi_M \leq \varphi_{M2},$$

$$-\varphi_{M3} \leq \varphi_M \leq \varphi_{M3}.$$

Все такого рода фазовые траектории пересекают ось абсцисс под прямым углом, так как

$$\frac{d\dot{\varphi}_M}{d\varphi_M}(\varphi_{Mi}, 0) = \frac{\ddot{\varphi}_M(\varphi_{Mi})}{\dot{\varphi}_M(\varphi_{Mi})} = -\frac{g \sin \varphi_{Mi}}{l \cdot 0} = -\infty, \quad i = 2, 3.$$

Для того, чтобы определить время движения по каждой из этих кривых, перепишем уравнение (4.1.5) в виде:

$$dt = \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(h + mgl \cos \varphi_M)}}.$$

Используя упомянутую выше симметрию, для случая  $h = h_2$  можем записать:

$$\tau_2 = 4 \int_0^{\varphi_{M2}} \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(h + mgl \cos \varphi_M)}}.$$

В точке  $\varphi_M = \varphi_{M2}$  маятник останавливается, знаменатель подынтегрального выражения обращается в нуль, поэтому представим вычисляемый интеграл в виде:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_{M2}} \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(h + mgl \cos \varphi_M)}} &= \\ &= \int_0^{\varphi_{M2}-\varepsilon} \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(h + mgl \cos \varphi_M)}} + \\ &+ \int_{\varphi_{M2}-\varepsilon}^{\varphi_{M2}} \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(h + mgl \cos \varphi_M)}}. \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части выражения (4.1.6) *конечно*, второе после замены переменных

$$\varphi_M = \varphi_{M2} - x$$

и разложения  $\cos(\varphi_{M2} - x)$  в ряд по  $x$ , приобретает вид

$$\int_{\varphi_{M2}-\varepsilon}^{\varphi_{M2}} \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(h + mgl \cos \varphi_M)}} = \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2g}{l}(x \sin \varphi_{M2} + O(x^2))}}.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, *сходится*, значит время  $\tau_2$  *конечно*, и, следовательно, рассмотренная фазовая траектория описывает *периодическое движение* (*колебания маятника*).

Аналогичные выводы можно сделать для любой траектории, уровень энергии которой удовлетворяет условиям

$$-mgl < h < mgl.$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $h = h_4 = mgl$ . Этому значению энергии в зависимости от начальных условий соответствуют два различных движения маятника:

1.  $\varphi_M(0) = \pi$ ,  $\dot{\varphi}_M(0) = 0$ , и поскольку  $\ddot{\varphi}_M(\pi) = 0$ , это положение оказывается *положением равновесия*, т.е. точка  $(\pi, 0)$  представляет собой *фазовую траекторию*;

2.  $\varphi_M(0) = \varphi_0 > 0$ ,  $\dot{\varphi}_M(0) = \sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos \varphi_0)}$ , кривая с такими начальными условиями, определяемая уравнением (4.1.5), "пересекает" ось абсцисс в точке  $(\pi, 0)$  под углом

$$\frac{d\varphi_M}{d\varphi_M}(\pi, 0) = \frac{\ddot{\varphi}_M(\pi)}{\dot{\varphi}_M(\pi)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{g \sin(\pi - x)}{l \sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos(\pi - x))}} \right) = -\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Возникает вопрос не нарушается ли в этом случае теорема единственности? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, найдем время движения по второй траектории:

$$\begin{aligned} \tau = \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos \varphi_M)}} &= \int_{\varphi_0}^{\pi-\varepsilon} \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos \varphi_M)}} + \\ &+ \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos \varphi_M)}}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

Первое слагаемое *конечно*, во втором сделаем замену

$$\varphi_M = \pi - x,$$

$$\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \frac{d\varphi_M}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1+\cos\varphi_M)}} = \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\frac{x^2}{2} + O(x^4))}}.$$

Получившийся интеграл расходится, следовательно двигаясь по траектории с начальными условиями (2) фазовая точка *никогда* не достигнет положения  $(\pi, 0)$ , и теорема единственности не нарушается.

Так как при  $h = h_5 > mgl$  скорость маятника в нуль не обращается, фазовые траектории с указанным уровнем энергии не пересекают ось абсцисс (они описывают *вращательные* движения маятника).

Проведенные рассуждения позволяют построить фазовые траектории в полосе  $(-\pi \leq \varphi_M \leq \pi)$ . Траектории в остальной части фазовой плоскости получаются сдвигом вдоль оси абсцисс ввиду периодичности функции, задаваемой соотношением (4.1.5).

Г. Общий вид уравнений Лагранжа второго рода одинаков в любых обобщенных координатах. Однако *конкретный* вид этих уравнений сильно зависит от выбора координат.

Чтобы было понятнее о чем идет речь, выведем уравнение движения маятника, приняв за обобщенную координату  $x_M$  (см. рис. 2.3.1). Это можно сделать в области  $z_M > 0$ .

1) Вычисление кинетической энергии:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m V_M^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}_M^2 + \dot{z}_M^2), \\ x_M^2 + z_M^2 &= l^2 \Rightarrow z_M = \sqrt{l^2 - x_M^2} \Rightarrow \\ \dot{z}_M &= -\frac{x_M \dot{x}_M}{\sqrt{l^2 - x_M^2}} \Rightarrow T = \frac{ml^2}{l^2 - x_M^2} \frac{\dot{x}_M^2}{2}; \end{aligned}$$

2) Сила тяжести имеет силовую функцию (см. 4.1.2), значит можно для вывода уравнения можно воспользоваться функцией Лагранжа:

$$\begin{aligned} L &= T + U, U = mgz_M = mg\sqrt{l^2 - x_M^2} \Rightarrow \\ L &= \frac{ml^2}{l^2 - x_M^2} \frac{\dot{x}_M^2}{2} + mg\sqrt{l^2 - x_M^2}; \end{aligned}$$

3) Подсчитаем производные, необходимые для составления уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} = \frac{ml^2 \dot{x}_M}{l^2 - x_M^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_M} = \frac{ml^2 x_M \dot{x}_M^2}{(l^2 - x_M^2)^2} - \frac{mgx_M}{\sqrt{l^2 - x_M^2}},$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} \right) = \frac{ml^2 \ddot{x}_M}{l^2 - x_M^2} + \frac{2ml^2 x_M \dot{x}_M^2}{(l^2 - x_M^2)^2};$$

4) Составим уравнение Лагранжа для математического маятника:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_M} = 0 \Rightarrow \frac{ml^2 \ddot{x}_M}{l^2 - x_M^2} + \frac{ml^2 x_M \dot{x}_M^2}{(l^2 - x_M^2)^2} + \frac{mgx_M}{\sqrt{l^2 - x_M^2}} = 0. \quad (4.1.7)$$

И уравнение (4.1.1) и уравнение (4.1.7) представляют собой *уравнение Лагранжа второго рода для математического маятника*, однако если первое уравнение — достаточно простое, позволяющее сделать определенные выводы о свойствах решения, то второе — пугающе громоздкое.

Получение *хороших* уравнений движения с помощью *общих теорем динамики*, требует предварительного анализа свойств действующих на систему сил и наложенных связей, необходимого для выбора *подходящих* теорем (см. главы II и III), что часто бывает нелегким делом.

Приведенный пример показывает, что хотя метод Лагранжа предлагает четкий алгоритм вывода уравнений движения, гарантии того, что на выходе будет *хорошее* уравнение нет. Трудности, теперь, заключаются в выборе *хороших* обобщенных координат, что в свою очередь требует анализа свойств заданных сил и наложенных связей.

#### Задача 4.2.

Круглая тонкостенная труба радиуса  $R$  и массы  $M$  может катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости. По внутренней поверхности трубы, не проскальзывая относительно нее, катается сплошной однородный цилиндр радиуса  $r$  и массы  $m$ .

Оси трубы и цилиндра во время движения остаются параллельными друг другу, их центры тяжести лежат в одной плоскости, перпендикулярной направлению осей. Составить функцию Лагранжа и найти первые интегралы.

Решение.

А. В силу наложенных связей, оси трубы и цилиндра во время движения остаются параллельными их начальному положению, т.е. движение системы является плоско-параллельным. Выберем неподвижный трехгранник  $Oxyz$  следующим образом: плоскость  $Oxz$  (ось  $Oz$  направлена вертикально вверх) содержит центры масс

обоих тел и перпендикулярна оси трубы, плоскость  $Oxy$  совпадает с плоскостью, по которой труба катается.

Обозначим центр масс трубы буквой  $G$ , а центр масс цилиндра — буквой  $C$ . Поскольку труба катится по плоскости без проскальзывания ее положение можно задать с помощью одной обобщенной координаты  $x_G$ . Положение

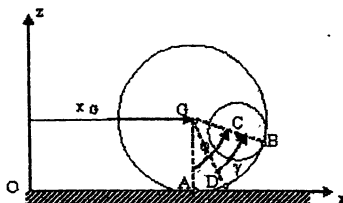


Рис. 4.2.1.

цилиндра удобно задать углом  $\varphi$ , который образует отрезок  $GC$  с вектором  $(-\vec{e}_z)$  (подробнее о выборе координат см. в пункте Г).

Эти две координаты могут принимать *независимые* друг от друга значения; будучи заданными, они однозначно определяют положение любой точки системы, дополнительных ограничений на них не наложено, значит рассматриваемая система имеет *две* степени свободы и является *голономной*.

Б. Итак, система *голономная*, и, поскольку никаких явных указаний о характере взаимодействия трубы с плоскостью и цилиндром нет, будем считать связи *идеальными* и применим для описания движения системы *метод Лагранжа*.

В. Система состоит из двух твердых тел, поэтому ее кинетическая энергия складывается из кинетической энергии трубы  $T_T$  и кинетической энергии цилиндра  $T_{Ц}$ :

$$T = T_T + T_{Ц}.$$

Оба тела совершают плоско-параллельное движение, следовательно:

$$T_T = \frac{MV_G^2}{2} + \frac{J_G\omega_T^2}{2}, \quad T_{Ц} = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega_{Ц}^2}{2}.$$

Теперь надо  $V_G$ ,  $V_C$ ,  $\omega_T$ ,  $\omega_{Ц}$  выразить через  $x_G$  и  $\varphi$  и их производные. Обозначим точки касания трубы и неподвижной плоскости буквой  $A$ , трубы и цилиндра — буквой  $B$ . Применяя формулу Эйлера, запишем:

$$\begin{aligned} \vec{V}_G &= \vec{V}_A + [\vec{\omega}_T, \vec{AG}], \quad \vec{V}_A = 0, \quad \vec{V}_G = \dot{x}_G \vec{e}_x, \\ \vec{\omega}_T &= \omega_T \vec{e}_y, \quad \vec{AG} = R \vec{e}_z, \Rightarrow \dot{x}_G = \omega_T R \Rightarrow \omega_T = \frac{\dot{x}_G}{R}, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + [\vec{\omega}_\Pi, \vec{BC}], \vec{V}_B = \vec{V}_A + [\vec{\omega}_T, \vec{AB}] \Rightarrow$$

$$\vec{V}_C = [\vec{\omega}_T, \vec{AB}] + [\vec{\omega}_\Pi, \vec{BC}], \quad (4.2.2)$$

$$(\vec{AB} = R \sin \varphi \vec{e}_x + R(1 - \cos \varphi) \vec{e}_z, \quad \vec{BC} = -r \sin \varphi \vec{e}_x + r \cos \varphi \vec{e}_z). \quad (4.2.3)$$

Введем подвижный трехгранник  $G\xi\eta\zeta$ , движущийся поступательно, и применим к точке С теорему сложения скоростей

$$\vec{V}_C = \vec{V}_C^{\text{пер}} + \vec{V}_C^{\text{отн}}, \vec{V}_C^{\text{пер}} = \vec{V}_G, \vec{V}_C^{\text{отн}} = (R - r)\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \Rightarrow$$

$$\vec{V}_C = \dot{x}_G \vec{e}_x + (R - r)\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (4.2.4)$$

Подставим выражения (4.2.3) и (4.2.4) в формулу (4.2.2). Умножив обе части получившегося равенства скалярно на  $\vec{e}_z$ , получим:

$$\begin{aligned} (R - r)\dot{\varphi}(\vec{e}_\varphi, \vec{e}_z) &= \\ &= ([\omega_T \vec{e}_y, R \sin \varphi \vec{e}_x + R(1 - \cos \varphi) \vec{e}_z], \vec{e}_z) + \\ &+ ([\omega_\Pi \vec{e}_y, -r \sin \varphi \vec{e}_x + r \cos \varphi \vec{e}_z], \vec{e}_z) \Rightarrow (R - r)\dot{\varphi} \sin \varphi = \\ &= -R\omega_T \sin \varphi + r\omega_\Pi \sin \varphi \Rightarrow \omega_\Pi = \frac{(R - r)\dot{\varphi} + \dot{x}_G}{r}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Подсчитаем кинетическую энергию системы, учитывая, что  $J_G = MR^2$  и  $J_C = \frac{mr^2}{2}$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{M\dot{x}_G^2}{2} + \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{2R^2} + \\ &+ \frac{m(\dot{x}_G \vec{e}_x + (R - r)\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \dot{x}_G \vec{e}_x + (R - r)\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)}{2} + \\ &+ \frac{mr^2}{4} \left( \frac{(R - r)\dot{\varphi} + \dot{x}_G}{r} \right)^2 = \\ &= (M + \frac{3}{4}m)\dot{x}_G^2 + \frac{3}{4}m((R - r)\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m(R - r)\dot{\varphi}\dot{x}_G(1 + 2 \cos \varphi). \end{aligned}$$

Поскольку заданными силами являются силы тяжести, силовая функция системы имеет вид:

$$U = -Mgz_G - mgz_C = -MgR - mg(R - (R - r) \cos \varphi).$$

Отбрасывая несущественные при определении функции Лагранжа постоянные слагаемые, получим:

$$L = T + U =$$

$$(M + \frac{3}{4}m)\dot{x}_G^2 + \frac{3}{4}m((R - r)\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m(R - r)\dot{\varphi}\dot{x}_G(1 + 2 \cos \varphi) + mg(R - r) \cos \varphi.$$

Найденная функция Лагранжа не зависит от  $x_G$ , поэтому имеет место *циклический* интеграл:

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} = \beta \Rightarrow 2\left(M + \frac{3}{4}m\right)\dot{x}_G + \frac{1}{2}m(R-r)\dot{\varphi}(1+2\cos\varphi) = \beta, \quad (4.2.6)$$

кроме того

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad T = T_2 \Rightarrow T = U + h \Rightarrow \\ \left(M + \frac{3}{4}m\right)\dot{x}_G^2 + \frac{3}{4}m((R-r)\dot{\varphi})^2 + \\ + \frac{1}{2}m(R-r)\dot{\varphi}\dot{x}_G(1+2\cos\varphi) = mg(R-r)\cos\varphi + h, \quad (4.2.7) \end{aligned}$$

т.е. имеет место интеграл энергии.

Г. При определении числа степеней свободы и выборе обобщенных координат системы можно воспользоваться следующим приемом. Система, обычно, состоит из некоторого числа абсолютно твердых тел и материальных точек. Тела, входящие в систему условно можно разделить на "ведущие" и "ведомые" (например, в рассматриваемой задаче "ведущим" телом является труба, а "ведомым" — цилиндр, т.к. движение трубы определяется относительно неподвижной плоскости, а движение цилиндра — относительно трубы).

Задавать положение системы удобно, начиная с "ведущего" тела: движение трубы полностью определяется движением ее плоского сечения — окружности, расположенной в плоскости  $Oxz$  и касающейся без проскальзывания по оси  $Ox$ . При фиксированном значении координаты  $x_G$  окружность (а вместе с ней и трубу) нельзя пошевелить, не оторвав от плоскости (отрывая трубу от плоскости мы нарушаем условие связи:  $z_G = R$ ).

Означает ли это, что  $x_G$  полностью определяет положение трубы, т.е. зная  $x_G$  мы можем вычислить положение любой ее точки?

В данном случае ответ на этот вопрос положительный: для того чтобы найти положение любой точки трубы, достаточно знать кроме положения ее центра тяжести (или любой другой точки) угол  $\alpha$ , образуемый фиксированным диаметром упомянутого выше плоского сечения с осью  $Ox$ . Выберем направление отсчета этого угла так, чтобы  $\vec{\omega}_T = \alpha \vec{e}_y$ . Тогда из соотношения (4.2.1) вытекает

$$\alpha = \frac{\dot{x}_G}{R} \Rightarrow \alpha = \alpha(0) + \frac{x_G - x_G(0)}{R}, \quad (4.2.8)$$

т.е. зная  $x_G$  и положение трубы в начальный момент, мы можем

однозначно найти  $\alpha$ , и тем самым имеем возможность определить положение *любой точки* этого тела.

Теперь надо зафиксировать положение цилиндра. Для этого достаточно при известном  $x_G$  задать значение угла  $\varphi$ . Действительно, при заданных значениях  $x_G$  и  $\varphi$  рассматриваемая система полностью лишена возможности двигаться. Проверим, можно ли зная  $x_G$  и  $\varphi$ , при наложенных связях определить координаты *каждой точки* системы. Для точек трубы этот вопрос мы уже рассмотрели, осталось разобраться с точками цилиндра. Для того чтобы найти положение любой точки цилиндра, надо знать положение его центра масс (при известных  $x_G$  и  $\varphi$  координаты центра масс цилиндра легко определяются) и угол  $\psi$ , образуемый выделенным диаметром цилиндра с осью  $Ox$  (направление отсчета этого угла выберем так, чтобы  $\vec{\omega}_C = \dot{\psi} \vec{e}_y$ ). Воспользовавшись соотношением (4.2.5), имеем

$$\dot{\psi} = \frac{(R-r)\dot{\varphi} + \dot{x}_G}{r} \Rightarrow \psi = \psi(0) + \frac{(R-r)(\varphi - \varphi(0)) + (x_G - x_G(0))}{r},$$

т.е. и для точек цилиндра, следовательно, и для *всех точек* системы ответ на поставленный вопрос положительный.

Итак, параметры  $x_G$  и  $\varphi$  могут принимать в некоторой области произвольные, независимые друг от друга значения, с их помощью могут быть найдены абсолютные координаты *всех точек* системы, значит, их можно назвать *обобщенными координатами*.

Чтобы столь подробные рассуждения в сравнительно простом случае не показались лишними, приведем пример, когда задав значения параметров, *исключающих любое движение системы*, мы не можем, используя только эти параметры, однозначно определить положение *всех точек* системы.

Вернемся к задаче 3.11. При наложенных связях и фиксированных значениях координат  $x_C, y_C, \psi$  пошевелить диск невозможно. Однако чтобы найти положение *любой точки* диска надо знать еще и значение параметра  $\varphi$ , восстановить которое при заданных  $x_C, y_C, \psi$  из уравнений связи (3.11.3) и (3.11.4) невозможно, вследствие *неинтегрируемости* этих уравнений.

Отметим еще одно интересное свойство, связанное с определением координат рассматриваемой системы. Выбрав в качестве обобщенных координат параметры  $x_G$  и  $\varphi$ , мы заметили, что координата  $x_G$  является *циклической* и ей соответствует *циклический интеграл* (4.2.6).

Однако положение "ведомого" тела (достаточно естественно) можно задать с помощью угла  $\gamma$ , образованного отрезками  $GD$  и

$GC$  ( $D$  – фиксированная точка трубы). Пара  $x_G$  и  $\gamma$ , как легко убедиться, также может быть принята в качестве обобщенных координат. Начало отсчета угла  $\alpha$  можно выбрать так, что в любой момент времени будет иметь место равенство

$$\varphi + \gamma + \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma - \alpha(0) - \frac{x_G - x_G(0)}{R},$$

и, следовательно, силовая функция системы будет иметь вид

$$U = mg(R - r) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \gamma - \alpha(0) - \frac{x_G - x_G(0)}{R} \right),$$

т.е. в случае использования в качестве обобщенных координат пары  $x_G$ ,  $\gamma$ , координата  $x_G$  не является циклической (!) и соответственно *отсутствует* циклический интеграл. Поэтому, судить о том является ли координата циклической или нет, можно лишь тогда, когда предъявлен полный набор обобщенных координат.

Последнее замечание еще раз подчеркивает важность серьезного отношения к выбору обобщенных координат при использовании уравнений Лагранжа второго рода.

#### Задача 4.3.

Прямоугольный брусок  $ABCD$  массы  $M$  может двигаться в плоскости  $Ozx$  вдоль оси  $Ox$ . По верхней грани бруска катается без проскальзывания, оставаясь в той же плоскости, круглый однородный диск радиуса  $r$  и массы  $m$ , к центру которого приложена сила  $Q(t)$ , образующая угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ .

Считая связи идеальными найти ускорение бруска.

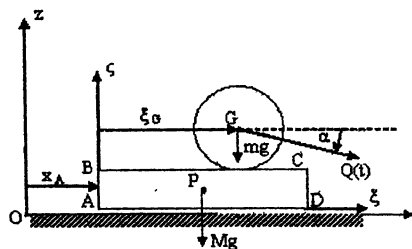


Рис. 4.3.1.

Решение.

А. Поскольку брусок движется вдоль оси  $Ox$  для определения его положения достаточно задать координату любой его точки, например,  $x_A$ . Введем подвижный трехгранник  $A\xi\eta\zeta$  ( $\vec{e}_\xi = \vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_\zeta =$

$\vec{e}_z$ ), жестко связанный с бруском, и определим положение диска относительно этого трехгранника координатой  $\xi_G$  ( $G$  — центр масс диска).

Пара  $(x_A, \xi_G)$  позволяет определить положение *любой точки* системы, состоящей из бруска и диска (см. п.Г задачи 4.2), элементы этой пары могут принимать *произвольные значения, независимые друг от друга* (это утверждение справедливо и для их производных по времени), следовательно, система имеет *две степени свободы*, и, указанные величины можно принять за *обобщенные координаты* рассматриваемой системы.

Брусok движется поступательно, т.е. скорости и ускорения всех его точек одинаковы, поэтому, чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно найти  $\ddot{x}_A$ .

Б. По условию задачи, связи наложенные на систему являются идеальными, из п.А и соотношений (С4) можно заключить, что они — *голомомные*, значит для исследования движения данной системы применимы *уравнения Лагранжа второго рода*.

В. 1) Нахождение кинетической энергии.

Кинетическая энергия системы  $T$  складывается из кинетической энергии бруска  $T_б$  и кинетической энергии диска  $T_д$ :

$$T = T_б + T_д.$$

Оба тела совершают плоско-параллельное движение, поэтому для вычисления кинетической энергии каждого из них следует использовать формулу (III.11):

$$T = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} J_\eta \omega^2.$$

Для бруска, движущегося *поступательно*, имеем (точка  $P$  — центр масс бруска):

$$T_б = \frac{1}{2} M \dot{x}_P^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}_A^2.$$

Скорость центра масс диска найдем, используя теорему сложения скоростей (неподвижный трехгранник —  $Oxyz$ , подвижный —  $A\xi\eta\zeta$ ):

$$\vec{V}_G = \vec{V}_G^{\text{пер}} + \vec{V}_G^{\text{отн}}, \vec{V}_G^{\text{пер}} = \dot{x}_A \vec{e}_x, \vec{V}_G^{\text{отн}} = \dot{\xi}_G \vec{e}_\xi \Rightarrow \vec{V}_G = (\dot{x}_A + \dot{\xi}_G) \vec{e}_x.$$

Учитывая *поступательное* движение бруска и *отсутствие проскальзывания* между бруском и диском, запишем формулу Эйлера для точки  $G$ :

$$\vec{V}_G = \vec{V}_A + [\omega \vec{e}_y, r \vec{e}_z] \Rightarrow \dot{\xi}_G = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{\dot{\xi}_G}{r}.$$

Поскольку для однородного диска  $J_{\eta} = mr^2/2$ , кинетическая энергия диска выражается формулой:

$$T_D = \frac{1}{2}m(\dot{x}_A + \dot{\xi}_G)^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{\xi}_G}{r}\right)^2.$$

Используя найденные для кинетической энергии бруска и диска выражения, получим кинетическую энергию системы в виде:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_A + \dot{\xi}_G)^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{\xi}_G}{r}\right)^2$$

2) Найдем обобщенные силы.

Заданными силами, действующими на систему, являются силы тяжести и сила  $\vec{Q}(t)$ . Подсчитаем обобщенную силу, соответствующую координате  $x_A = q_1$ . Для этого сообщим системе *виртуальное* перемещение, определяемое соотношениями:

$$\delta x_A = \delta q_1 > 0, \quad \delta \xi_G = 0 \Rightarrow \delta \vec{r}_P = \delta x_A \vec{e}_x, \quad \delta \vec{r}_G = \delta x_A \vec{e}_x,$$

и вычислим элементарную работу  $W(\delta\mu(1))$  *всех заданных* сил на этом перемещении:

$$W(\delta\mu(1)) = (-Mg\vec{e}_z, \delta\vec{r}_P) + (-mg\vec{e}_z, \delta\vec{r}_G) + (\vec{Q}(t), \delta\vec{r}_G) = Q(t)\delta x_A \cos \alpha, \quad Q_{q_1} = \frac{W(\delta\mu(1))}{\delta q_1} \Rightarrow Q(x_A) = Q(t) \cos \alpha.$$

Для нахождения обобщенной силы, отвечающей координате  $\xi_G = q_2$ , положим:

$$\delta x_A = 0, \delta \xi_G = \delta q_2 > 0 \Rightarrow \delta \vec{r}_P = 0, \delta \vec{r}_G = \delta \xi_G \vec{e}_x,$$

и повторим выкладки, проведенные выше:

$$W(\delta\mu(2)) = (-Mg\vec{e}_z, \delta\vec{r}_P) + (-mg\vec{e}_z, \delta\vec{r}_G) + (\vec{Q}(t), \delta\vec{r}_G) = Q(t)\delta \xi_G \cos \alpha, \quad Q_{q_2} = \frac{W(\delta\mu(2))}{\delta q_2} \Rightarrow Q_{\xi_G} = Q(t) \cos \alpha.$$

3) Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = \frac{d}{dt} (M\dot{x}_A + m(\dot{x}_A + \dot{\xi}_G)), \quad \frac{\partial T}{\partial x_A} = 0 \Rightarrow (M + m)\ddot{x}_A + m\ddot{\xi}_G = Q(t) \cos \alpha, \quad (4.3.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_G} = \frac{d}{dt} (m(\dot{x}_A + \dot{\xi}_G) + \frac{1}{2}m\dot{\xi}_G), \quad \frac{\partial T}{\partial \xi_G} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_A + \frac{3}{2}m\ddot{\xi}_G = Q(t) \cos \alpha. \quad (4.3.2)$$



Решая систему уравнений (4.3.1) и (4.3.2), получим:

$$\ddot{x}_A = \frac{Q(t) \cos \alpha}{3M + m}.$$

Г. Запишем выражение элементарной работы всех заданных сил на произвольном виртуальном перемещении:

$$(-Mg\vec{e}_z, \delta\vec{r}_P) + (-mg\vec{e}_z, \delta\vec{r}_G) + (\vec{Q}(t), \delta\vec{r}_G) = Q(t) \cos \alpha (\delta x_A + \delta \xi_G). \quad (4.3.3)$$

Учитывая то обстоятельство, что математический смысл оператора  $\delta(\cdot)$  заключается во взятии дифференциала при фиксированном времени, правую часть соотношения (4.3.3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} Q(t) \cos \alpha (\delta x_A + \delta \xi_G) &= \delta(Q(t)(x_A + \xi_G) \cos \alpha) = \\ &= \delta(Q(t)x_G \cos \alpha) = \delta U, \quad U = Q(t)x_G \cos \alpha, \end{aligned}$$

т.е. взяв в качестве обобщенных координат пару  $x_A, x_G = x_A + \xi_G$  мы можем воспользоваться функцией Лагранжа

$$L = T + U = \frac{1}{2}M\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_G^2 + \frac{1}{4}m(\dot{x}_G - \dot{x}_A)^2 + Q(t)x_G \cos \alpha,$$

и даже получить циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = M\dot{x}_A - \frac{1}{2}m(\dot{x}_G - \dot{x}_A) = \text{const},$$

который, впрочем, легко вывести с помощью ранее полученной системы уравнений, вычитая уравнение (4.3.2) из уравнения (4.3.1).

#### Задача 4.4.

В условиях задачи 3.12 предположим, что до разрыва нити колесу сообщается достаточно большая угловая скорость  $\omega_0$ , направленная вдоль его оси  $A\zeta$  ( $\frac{mg\ell}{J_c\omega_0^2} = \epsilon \ll 1$  — удвоенная кинетическая энергия колеса в начальный момент много больше максимальной потенциальной энергии). Введем угол  $\vartheta$ , определяемый равенством

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + \delta,$$

где  $\vartheta$  — угол между осью  $Az$  и осью динамической симметрии колеса.

Найти максимальное и минимальное значения угла  $\delta$  в процессе движения колеса, возникающем после обрыва нити.

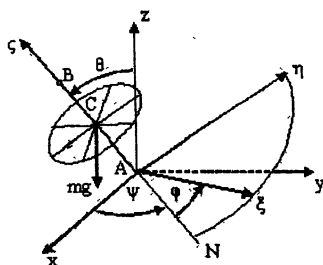


Рис. 4.4.1.

Решение.

А. После обрыва нити возникает задача о движении твердого тела с неподвижной точкой (случай Лагранжа-Пуассона).

Связи, наложенные на систему предполагаются *идеальными* и являются *голономными*, следовательно, для изучения движения системы можно воспользоваться *уравнениями Лагранжа второго рода*.

В качестве координат, определяющих положение тела, возьмем углы Эйлера. При этом, как в задаче 3.13, возникает вопрос о выборе направлений осей подвижного и неподвижного трехгранников. В рассматриваемой задаче, в отличие от задачи 3.13, сила тяжести играет важную роль, поэтому направим *неподвижную* ось  $Az$  по вертикали (так, чтобы  $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ ).

В пространстве, жестко связанном с колесом, по прежнему выделяется направление, задаваемое осью *динамической симметрии колеса*. В соответствии с этим положим  $\vec{e}_\zeta = \vec{e}_{AB}$ . Направления осей  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_\xi$  определим соотношениями:

$$\vec{e}_x = \vec{e}_{AB}(t^* - 0), \quad \vec{e}_\xi(t^* - 0) = \vec{e}_z, \quad (t^* - \text{момент обрыва нити}).$$

(Определение величин  $t^* + 0$  и  $t^* - 0$  см. в задаче 3.7).

Направления остальных осей для *правых* трехгранников определяются однозначно. При этом упомянутый выше угол  $\vartheta$  оказывается одним из углов Эйлера, два других угла выбираются как обычно (см. рис.4.4.1).

Б. Составим функцию Лагранжа:

$$L = T + U, \quad U = -mgz_C = -mg \cos \vartheta.$$

Для вычисления  $T$  воспользуемся формулой кинетической энергии твердого тела с *одной неподвижной точкой* (сравните с выражени-

ем, задаваемым формулами (III.8), (III.9)):

$$T = \frac{1}{2}(J_{\xi}\omega_{\xi}^2 + J_{\eta}\omega_{\eta}^2 + J_{\zeta}\omega_{\zeta}^2),$$

$J_{\xi}, J_{\eta}, J_{\zeta}$  — моменты инерции колеса относительно главных осей эллипсоида инерции, построенного в точке  $A$ ,  $\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$  — проекции вектора абсолютной угловой скорости колеса на эти оси. Наличие динамической симметрии означает, что

$$J_{\xi} = J_{\eta} \Rightarrow T = \frac{1}{2}J_{\xi}(\omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2) + \frac{1}{2}J_{\zeta}\omega_{\zeta}^2. \quad (4.4.1)$$

Формула (I.14)

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\vartheta}\vec{e}_{AN} + \dot{\varphi}\vec{e}_{\zeta}$$

с учетом того, что

$$(\vec{e}_z, \vec{e}_{AN}) = (\vec{e}_{\zeta}, \vec{e}_{AN}) = 0, (\vec{e}_z, \vec{e}_{\zeta}) = \cos \vartheta,$$

позволяет записать

$$\omega^2 = (\dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\vartheta}\vec{e}_{AN} + \dot{\varphi}\vec{e}_{\zeta}, \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\vartheta}\vec{e}_{AN} + \dot{\varphi}\vec{e}_{\zeta}) = \dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos \vartheta,$$

$$\omega_{\zeta} = (\vec{\omega}, \vec{e}_{\zeta}) = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos \vartheta,$$

$$\omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2 = \omega^2 - \omega_{\zeta}^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2.$$

Подставляя найденные выражения в (4.4.1), получим:

$$T = \frac{1}{2}J_{\xi}(\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}J_{\zeta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos \vartheta)^2.$$

Таким образом, функция Лагранжа принимает вид:

$$L = \frac{1}{2}J_{\xi}(\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}J_{\zeta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos \vartheta)^2 - mgl \cos \vartheta. \quad (4.4.2)$$

В. Как видно из (4.4.2) координаты  $\psi$  и  $\varphi$  являются *циклическими*. Им соответствуют два первых интеграла:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \beta_1 \Rightarrow J_{\xi}\dot{\psi}\sin^2 \vartheta + J_{\zeta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos \vartheta)\cos \vartheta = \beta_1, \quad (4.4.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \beta_2 \Rightarrow J_{\zeta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos \vartheta) = \beta_2. \quad (4.4.4)$$

Кроме того поскольку  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  и  $T = T_2$ , имеет место интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}J_{\xi}(\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}J_{\zeta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos \vartheta)^2 + mgl \cos \vartheta = h. \quad (4.4.5)$$

Повторяя рассуждения, приведенные в задаче 3.7, запишем  $\vartheta(t^* + 0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi(t^* + 0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(t^* + 0) = \omega_0$ ,  $\dot{\vartheta}(t^* + 0) = 0$ . Подставляя эти значения в уравнения (4.4.3), (4.4.4), (4.4.5), найдем:

$$J_{\xi}\dot{\psi}\sin^2 \vartheta + J_{\zeta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos \vartheta)\cos \vartheta = 0,$$

$$J_{\zeta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = J_{\zeta} \omega_0,$$

$$\frac{1}{2} J_{\xi}(\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} J_{\zeta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 + mgl \cos \vartheta = \frac{1}{2} J_{\zeta} \omega_0^2.$$

Несложные преобразования позволяют исключить  $\dot{\varphi}$ :

$$J_{\xi} \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + J_{\zeta} \omega_0 \cos \vartheta = 0, \quad (4.4.6)$$

$$\frac{1}{2} J_{\xi}(\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + mgl \cos \vartheta = 0. \quad (4.4.7)$$

Перейдем к переменной  $\delta$ :

$$J_{\xi} \dot{\psi} \cos^2 \delta - J_{\zeta} \omega_0 \sin \delta = 0, \quad (4.4.8)$$

$$\frac{1}{2} J_{\xi}(\dot{\psi}^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2) - mgl \sin \delta = 0. \quad (4.4.9)$$

Пусть  $\delta_e$  означает экстремальные значения функции  $\delta(t)$ . В точках экстремума  $\dot{\delta} = 0$ , поэтому  $\delta_e$  найдется из уравнения:

$$\frac{1}{2} J_{\xi} \left( \frac{J_{\zeta} \omega_0 \sin \delta_e}{J_{\xi} \cos^2 \delta_e} \right)^2 \cos^2 \delta_e - mgl \sin \delta_e = 0 \Rightarrow$$

$$\sin \delta_e \cdot \left( \frac{J_{\zeta} \sin \delta_e}{2 J_{\xi} \cos^2 \delta_e} \left( \frac{J_{\zeta} \omega_0^2}{mgl} \right) - 1 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$1) \sin \delta_e = 0 \Rightarrow \delta_{e1} = 0, \delta_{e2} = \pi,$$

$$2) \frac{J_{\zeta} \sin \delta_e}{2 J_{\xi} \cos^2 \delta_e} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 \delta_e + \frac{J_{\zeta}}{2 \varepsilon J_{\xi}} \sin \delta_e - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\sin \delta_{e3,4} = -\frac{J_{\zeta}}{4 \varepsilon J_{\xi}} \pm \frac{J_{\zeta}}{4 \varepsilon J_{\xi}} \sqrt{1 + \left( \frac{4 \varepsilon J_{\xi}}{J_{\zeta}} \right)^2},$$

$$\sin \delta_{e3} = -\frac{J_{\zeta}}{4 \varepsilon J_{\xi}} + \frac{J_{\zeta}}{4 \varepsilon J_{\xi}} \left( 1 + \left( \frac{4 \varepsilon J_{\xi}}{J_{\zeta}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2 \varepsilon J_{\xi}}{J_{\zeta}} - \frac{1}{8} \left( \frac{4 \varepsilon J_{\xi}}{J_{\zeta}} \right)^3 + \dots,$$

$$\sin \delta_{e4} = -\frac{J_{\zeta}}{4 \varepsilon J_{\xi}} - \frac{J_{\zeta}}{4 \varepsilon J_{\xi}} \left( 1 + \left( \frac{4 \varepsilon J_{\xi}}{J_{\zeta}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Произведем отбор корней. По определению

$$0 < \vartheta < \pi \Rightarrow -\pi/2 < \delta < \pi/2$$

значит корень  $\delta_{e2} = \pi$  следует отбросить.

При достаточно малом  $\varepsilon$  модуль выражения

$$-\frac{J_{\zeta}}{4 \varepsilon J_{\xi}} - \frac{J_{\zeta}}{4 \varepsilon J_{\xi}} \left( 1 + \left( \frac{4 \varepsilon J_{\xi}}{J_{\zeta}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

превосходит единицу, поэтому решение  $\delta_{e4}$  не существует.

При малом  $\varepsilon$  можно считать, что

$$\delta_{e3} = \frac{2\varepsilon J_\xi}{J_\zeta} - O(\varepsilon^3).$$

Таким образом, при указанных начальных условиях максимальное отклонение оси колеса от горизонтальной плоскости не превышает величины  $\delta_e = \frac{2\varepsilon J_\xi}{J_\zeta}$ . Минимальное отклонение равно нулю.

Г. Воспользовавшись тем, что во все время движения угол  $\delta$  остается малым можно найти приближенное решение уравнений движения.

Разрешив уравнение (4.4.8) относительно  $\dot{\psi}$  и подставив найденное выражение в (4.4.9), получим:

$$\frac{1}{2} J_\xi \left( \left( \frac{J_\zeta \omega_0 \sin \delta}{J_\xi \cos^2 \delta} \right)^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2 \right) - mgl \sin \delta = 0. \quad (4.4.10)$$

Разлагая  $\sin \delta$  и  $\cos \delta$  в ряды и отбрасывая члены выше второго порядка малости по  $\delta$ , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_\xi \left( \left( \frac{J_\zeta \omega_0 \delta}{J_\xi} \right)^2 + \dot{\delta}^2 \right) - mgl \delta &= 0 \Rightarrow \\ \left( \frac{J_\xi}{J_\zeta \omega_0} \dot{\delta} \right)^2 &= \delta_e \delta - \delta^2 \Rightarrow \\ \frac{d(\delta - \frac{\delta_e}{2})}{\sqrt{(\frac{\delta_e}{2})^2 - (\delta - \frac{\delta_e}{2})^2}} &= d \left( \frac{J_\zeta \omega_0}{J_\xi} t \right). \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Интегрируя обе части соотношения (4.4.11) в соответствующих пределах, имеем:

$$\begin{aligned} \arcsin \left( \frac{\delta - \frac{\delta_e}{2}}{\frac{\delta_e}{2}} \right) + \frac{\pi}{2} &= \frac{J_\zeta \omega_0}{J_\xi} t \Rightarrow \\ \delta &= \frac{\delta_e}{2} (1 - \cos \frac{J_\zeta \omega_0}{J_\xi} t). \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Как можно заметить из уравнений (4.4.8) и (4.4.9), величина  $\dot{\psi}$  во время движения не меняет знака. Найдем среднее значение  $\dot{\psi}$  этой величины за время  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $\omega = \frac{J_\zeta \omega_0}{J_\xi}$ .

$$\bar{\dot{\psi}} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \omega \frac{\delta_e}{2} (1 - \cos \omega t) dt = \omega \frac{\delta_e}{2} = \frac{mgl}{J_\zeta \omega_0}.$$

Оценим значения полученных величин для реального колеса. Для простоты будем считать

$$J_{\zeta} = mr^2, J_{\xi} = \frac{1}{2}J_{\zeta} + ml^2, g = 10 \frac{m}{s^2}, r = 0.3m, l = 0.03m.$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{gl}{r^2\omega_0^2} = \frac{1}{100} \Rightarrow \omega_0^2 = 100 \cdot \frac{10 \cdot 0.03}{(0.3)^2} \Rightarrow \omega_0 = 18.26 \frac{1}{s}.$$

При этом значении угловой скорости колесо совершает 3 оборота в секунду. Скорость велосипеда в этом случае была бы равна 5.5 м/с или 19.8 км/час. Если сообщить колесу с горизонтальной осью, один конец которой шарнирно закреплен, указанную угловую скорость и отпустить ее второй конец, то максимальное отклонение оси от горизонтальной плоскости не превысит 0.57 угловых градуса, т.е. будет практически незаметным. Средняя угловая скорость вертикальной плоскости, содержащей эту ось, будет определяться соотношением

$$\tilde{\psi} = \frac{gl}{r^2\omega_0} = \frac{10 \cdot 0.03}{(0.3)^2 18.26} = 0.18 \frac{1}{s}$$

т.е. скорость  $V_B$  свободного конца оси будет равна

$$V_B = 2l\tilde{\psi} = 2 \cdot 0.03 \cdot 0.18 = 0.0108 \frac{m}{s} \approx 1 \frac{cm}{s}.$$

Кажется, что под действием силы тяжести ось колеса должна опуститься вниз (так и будет если  $\omega_0 = 0$ ), однако вопреки ожиданию она движется почти не отклоняясь от горизонтальной плоскости.

Такое необычное движение является следствием *гироскопического эффекта*, связанного с тем, что колесо быстро закручено вокруг собственной оси.

Это явление может наблюдать каждый, у кого под рукой окажется велосипедное колесо и помощник. Возьмите колесо руками за концы оси и попробуйте отпустить один из концов. Вряд ли вам удастся удержать колесо за конец оси одной рукой. Теперь снова возьмите колесо за два конца оси так, чтобы она была горизонтальной, и попросите помощника хорошо крутануть колесо. После этого можете спокойно убрать одну руку — колесо не упадет, а его ось начнет медленно поворачиваться в горизонтальной плоскости.

#### Задача 4.5.

В условиях задачи 3.12 нить, удерживающая конец  $B$  оси, заменена невесомым, нерастяжимым и *несжимаемым* стержнем длины  $\lambda$ . Стержень связан с неподвижным основанием и точкой  $B$  оси

шаровыми шарнирами. Найти движение колеса при произвольных начальных условиях.

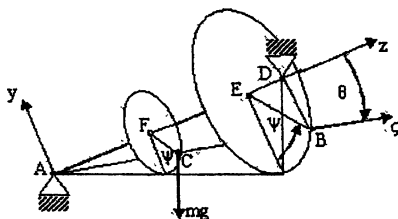


Рис. 4.5.1.

Решение.

А. Начнем с выяснения вопроса о числе степеней свободы. Твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы. Однако в предлагаемой задаче на колесо наложена *дополнительная связь* – стержень, удерживающий второй конец оси. Благодаря этой связи, точка  $B$ , должна находиться на сфере радиуса  $\lambda$  с центром в точке  $D$ . С другой стороны траектория точки  $B$  лежит на сфере радиуса  $2l$  с центром в точке  $A$ .

Линией пересечения этих двух сфер служит окружность с центром в точке  $E$  (см. рис.4.5.1), и координата точки  $B$  на этой окружности может служить одной из координат рассматриваемой системы. В качестве второй координаты можно выбрать угол поворота диска по отношению к трехграннику, жестко связанному с плоскостью  $ABD$ . Эти два параметра могут принимать значения *независимо* друг от друга и позволяют однозначно определить положение *любой точки* колеса, из чего следует, что система имеет *две* степени свободы.

Центр тяжести колеса при движении также описывает окружность вокруг *неподвижной* оси  $AD$  с центром в точке  $F$  (см. рис. 4.5.1).

Совместим начало *неподвижного* трехгранника (правого) с точкой  $A$ , ось  $Az$  направим так, чтобы  $\vec{e}_z = \vec{e}_{AD}$ , ось  $Ay$  расположим в вертикальной плоскости так, чтобы выполнялось неравенство  $(\vec{g}, \vec{e}_y) < 0$ . Ось  $A\zeta$  *подвижного* трехгранника направим по линии  $AB$  ( $\vec{e}_\zeta = \vec{e}_{AB}$ ), ось  $A\eta$  поместим в плоскости  $ABD$  ( $\vec{e}_\eta = \vec{e}_{BD}$ ). Хотя трехгранник  $A\zeta\eta$  не связан жестко с колесом, его оси в *каждый* момент времени являются *главными осями эллипсоида инерции*, построенного в точке  $A$ .

Построенные трехгранники позволяют ввести углы Эйлера: угол нутации  $\vartheta$  ( $(\vec{e}_z, \vec{e}_\zeta) = \cos \vartheta = \text{const}$ , поэтому угол  $\vartheta$  в этой ситуации является не координатой, а параметром задачи), угол прецессии  $\psi$  ( $(\vec{e}_x, \vec{e}_\xi) = \cos \psi$ ), определяет положение точки  $B$  на упомянутой выше окружности, и угол собственного вращения  $\varphi$ , задающий поворот колеса относительно трехгранника  $A\xi\eta\zeta$  — ось  $A\xi$ , в данном случае, играет роль линии узлов. (Полезно сравнить способы выбора трехгранников и определение углов Эйлера в задачах 3.13, 4.4 и 4.5).

Б. Составим функцию Лагранжа

$$L = T + U,$$

$$T = \frac{1}{2} J_\xi (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + \frac{1}{2} J_\zeta \omega_\zeta^2. \quad (4.5.1)$$

$$U = mg(\vec{r}_C, \vec{e}_g) + \text{const}, (\vec{g} = g\vec{e}_g). \quad (4.5.2)$$

Используя формулу (I.14), для выбранных осей можем записать:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta \Rightarrow \omega_\xi = 0, \omega_\eta = \dot{\psi} \sin \vartheta, \omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta. \quad (4.5.3)$$

Подставляя (4.5.3) в (4.5.1) получим

$$T = \frac{1}{2} J_\xi (\dot{\psi} \sin \vartheta)^2 + \frac{1}{2} J_\zeta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2. \quad (4.5.4)$$

Для вычисления силовой функции заметим, что

$$\vec{r}_C = \vec{AF} + \vec{FC} = \vec{AF} + l \sin \vartheta \sin \psi \vec{e}_x - l \sin \vartheta \cos \psi \vec{e}_y,$$

поэтому

$$(\vec{r}_C, \vec{e}_g) = (\vec{AF} + l \sin \vartheta \sin \psi \vec{e}_x - l \sin \vartheta \cos \psi \vec{e}_y, \vec{e}_g) = \text{const} + l \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \psi,$$

что, после отбрасывания несущественных для определения силовой функции постоянных слагаемых, дает

$$U = mgl \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \psi. \quad (4.5.5)$$

Соотношения (4.5.4) и (4.5.5) позволяют представить функцию Лагранжа в виде:

$$L = \frac{1}{2} J_\xi (\dot{\psi} \sin \vartheta)^2 + \frac{1}{2} J_\zeta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 + mgl \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \psi. \quad (4.5.6)$$

Нетрудно заметить, что координата  $\varphi$  является циклической, и, следовательно, в качестве уравнений движения можно использовать *циклический интеграл* и *уравнение Рауса* для координаты  $\psi$ .

В. Выпишем циклический интеграл и разрешим его относительно  $\dot{\varphi}$ :



$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \beta \Rightarrow J_{\zeta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = \beta \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\beta}{J_{\zeta}} - \dot{\psi} \cos \vartheta. \quad (4.5.7)$$

Найдем функцию Рауса:

$$R = (L - \beta \dot{\varphi})|_{\dot{\varphi} = \frac{\beta}{J_{\zeta}} - \dot{\psi} \cos \vartheta} = \frac{1}{2} J_{\xi} (\dot{\psi} \sin \vartheta)^2 + \\ + mgl \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \psi - \frac{\beta^2}{2J_{\zeta}} + \beta \dot{\psi} \cos \vartheta. \quad (4.5.8)$$

Уравнение Рауса для координаты  $\psi$  имеет вид (для сокращения записи введем обозначения:  $a = J_{\xi} \sin^2 \vartheta$ ,  $b = mgl \sin \vartheta \cos \vartheta$ ):

$$\ddot{\psi} + \frac{b}{a} \sin \psi = 0, \quad (4.5.9)$$

т.е. движение оси колеса подчиняется уравнению движения математического маятника с соответствующим образом подобранной длиной.

Построив фазовый портрет (см. задачу 4.1) получим представление о всех возможных движениях оси колеса.

Самое удивительное (если вспомнить результаты предыдущей задачи) состоит в том, что это движение *не зависит* от того закручено колесо в начальный момент вокруг собственной оси или нет. Чтобы понять почему в этом случае не проявляется *гироскопический эффект*, найдем реакцию стержня  $\vec{R}_B$ . Для определения этой реакции удобно воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента системы в абсолютном движении (III.14), поскольку она не содержит реакции  $\vec{R}_A$ :

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = [\vec{r}_C, mg\vec{e}_g] + [\vec{r}_B, \vec{R}_B]. \quad (4.5.10)$$

Но (см. рис.4.5.1):  $\vec{r}_C = l \sin \vartheta \sin \psi \vec{e}_x - l \sin \vartheta \cos \psi \vec{e}_y + l \cos \vartheta \vec{e}_z$ ,  $\vec{e}_g = 0 \cdot \vec{e}_x - \cos \vartheta \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z$ ,  $\vec{r}_B = 2l \vec{e}_z$ ,  $\vec{R}_B = R_B \vec{e}_\eta$ , и

$$\vec{K}_A = J_{\xi}(\omega_{\xi} \vec{e}_{\xi} + \omega_{\eta} \vec{e}_{\eta}) + J_{\zeta} \omega_{\zeta} \vec{e}_{\zeta},$$

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = J_{\xi}(\dot{\omega}_{\xi} \vec{e}_{\xi} + \dot{\omega}_{\eta} \vec{e}_{\eta}) + J_{\zeta} \dot{\omega}_{\zeta} \vec{e}_{\zeta} + [\dot{\psi} \vec{e}_z, \vec{K}_A],$$

поэтому уравнение (4.5.10) приобретает вид ( $\omega_{\xi} = 0$ ,  $\dot{\omega}_{\xi} = 0$ ):

$$J_{\xi} \dot{\omega}_{\eta} \vec{e}_{\eta} + J_{\zeta} \dot{\omega}_{\zeta} \vec{e}_{\zeta} + [\dot{\psi}(\cos \vartheta \vec{e}_{\zeta} + \sin \vartheta \vec{e}_{\eta}), J_{\xi} \omega_{\eta} \vec{e}_{\eta} + J_{\zeta} \omega_{\zeta} \vec{e}_{\zeta}] =$$

$$= mg[l \sin \vartheta \sin \psi \vec{e}_x - l \sin \vartheta \cos \psi \vec{e}_y + l \cos \vartheta \vec{e}_z, \\ - \cos \vartheta \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z] - 2l R_B \vec{e}_\xi.$$

Умножив обе части последнего соотношения скалярно на  $\vec{e}_\xi$  и разрешив получившееся уравнение относительно  $R_B$  получим (с учетом (4.5.3) и (4.5.7)):

$$R_B = \frac{1}{2l} (J_\xi \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \beta \dot{\psi} \sin \vartheta + mgl(\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta \cos \psi)). \quad (4.5.11)$$

Рассмотрим движения, для которых справедливы условия:

$$-\frac{\pi}{2} < \psi(0) < \frac{\pi}{2}, \dot{\psi}(0) = 0 \Rightarrow \beta = J_\xi \dot{\psi}(0).$$

При таких начальных условиях точка  $B$  будет совершать колебания относительно положения равновесия  $\psi = 0$  и, если  $\beta = 0$ , т.е. колесо не раскручено, то как легко видеть из формулы (4.5.11) реакция стержня во все время движения будет оставаться *положительной*. Это, в частности, означает, что в этом случае движение оси будет происходить одинаково, независимо от того как реализована связь — с помощью стержня или с помощью нити. Из уравнения (4.5.9) получим:

$$\dot{\psi}^2 = \frac{2b}{a} (\cos \psi - \cos \psi(0)) \Rightarrow \max \dot{\psi}^2 = \frac{2b}{a} (1 - \cos \psi(0)). \quad (4.5.12)$$

Поскольку функции  $\psi(t)$  и  $\dot{\psi}(t)$  периодичны и имеет место соотношение (4.5.12), формула (4.5.11) позволяет сделать вывод, что при увеличении  $\beta$  появятся участки траектории, на которых *реакция меняет знак*. В этой ситуации замена стержня на нить приведет к *сходу* точки  $B$  со связи, причем чем больше  $b$ , тем раньше это произойдет.

Таким образом, *гироскопический эффект* в явном виде может проявиться лишь при осуществлении связи в виде невесомой нерастяжимой нити.

Г. Формула (4.5.11) получена из довольно громоздкого выражения, поэтому желательна проверка. Правая и левая части этой формулы, как и положено, имеют одинаковую размерность. При  $\psi = 0, \dot{\psi} = 0$  имеем

$$R_B = \frac{mg}{2},$$

что совпадает со значением, которое можно получить из элементарных соображений, при  $\dot{\psi} = 0, \psi = \pi$

$$R_B = -\frac{mg \cos 2\vartheta}{2}$$

— результат, подтверждаемый законами геометрической статики. Эти соображения, разумеется, не гарантируют правильность соотношения (4.5.11), однако позволяют считать, что грубых ошибок в ней нет.

В заключение заметим, что решение задачи о движении колеса, найденное с помощью циклического интеграла и уравнения Рауса для оставшейся координаты, можно было получить иначе, поскольку в рассматриваемой задаче

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, T = T_2,$$

и, следовательно, справедлив интеграл энергии

$$\frac{1}{2} J_\xi (\dot{\psi} \sin \vartheta)^2 + \frac{1}{2} J_\zeta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 - mgl \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \psi = h,$$

который с учетом (4.5.7) приобретает вид

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 - \frac{b}{a} \cos \psi = \frac{1}{2} \dot{\psi}^2(0) - \frac{b}{a} \cos \psi(0),$$

и задача опять сводится к изучению движения математического маятника соответствующей длины (отметим еще раз, что это уравнение не зависит от  $\beta$ ).

#### Задача 4.6.

Круглый однородный обруч массы  $M$  и радиуса  $R$  может свободно вращаться, оставаясь в неподвижной вертикальной плоскости, вокруг одной из своих точек, закрепленной с помощью цилиндрического шарнира.

Внутри обруча, без трения, может двигаться шарик массы  $m$ . Пренебрегая толщиной обруча и размерами шарика, найти положение равновесия системы и частоту малых колебаний в окрестности устойчивого положения равновесия для случая  $M = 2m$ .

Решение.

А. Обозначим неподвижную точку обруча буквой  $O$ , центр тяжести обруча буквой  $A$ , шарик буквой  $B$ . Углы, образованные отрезками  $OA$  и  $AB$  с вертикалью назовем соответственно  $\alpha$  и  $\beta$  (положительное направление отсчета углов указано на рисунке 4.6.1). Эти два угла могут служить обобщенными координатами системы.

Направим ось  $Oz$  неподвижного трехгранника вертикально вниз, ось  $Ox$  — вправо.

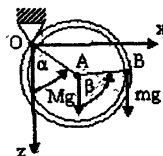


Рис. 4.6.1.

Б. Связи, наложенные на систему, являются *голономными* (см. перечень III) и *идеальными*, поэтому для решения задачи можно применить *уравнения Лагранжа второго рода*.

Заданные силы (силы тяжести), действующие на систему, имеют силовую функцию

$$U = Mgz_A + mgz_B,$$

значит для написания уравнений движения можно использовать *функцию Лагранжа*

$$L = T + U. \quad (4.6.1)$$

В. Теперь надо найти  $L$ , как функцию обобщенных координат и скоростей. Выражая  $z_A$  и  $z_B$  через  $\alpha$  и  $\beta$ , получим выражение силовой функции:

$$U = MgR \cos \alpha + mgR(\cos \alpha + \cos \beta) = (M+m)gR \cos \alpha + mgR \cos \beta. \quad (4.6.2)$$

Кинетическая энергия системы  $T$  складывается из кинетической энергии обруча  $T_{\text{обр}}$  и кинетической энергии шарика  $T_{\text{ш}}$ :

$$T = T_{\text{обр}} + T_{\text{ш}}. \quad (4.6.3)$$

Обруч в условиях рассматриваемой задачи представляет собой твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси  $Oy$ , поэтому его кинетическую энергию можно считать по формуле (III.10):

$$T_{\text{обр}} = \frac{1}{2} J_{Oy} \omega^2, \quad \vec{\omega} = \dot{\alpha} \vec{e}_y.$$

По теореме Гюйгенса - Штейнера

$$J_{Oy} = MR^2 + MR^2 \Rightarrow T_{\text{обр}} = MR^2 \dot{\alpha}^2. \quad (4.6.4)$$

Так как мы считаем шарик материальной точкой

$$T_{\text{ш}} = \frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} m (\vec{V}_B, \vec{V}_B). \quad (4.6.5)$$

Для нахождения  $\vec{V}_B$ , введем подвижный трехгранник с началом в точке  $A$ , осями, параллельными осям трехгранника  $Oxyz$ , и применим теорему сложения скоростей:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_B^{\text{пер}} + \vec{V}_B^{\text{отн}}.$$

Поскольку подвижный трехгранник движется *поступательно*

$$\vec{V}_B^{\text{пер}} = \vec{V}_A = R \dot{\alpha} \vec{e}_\alpha.$$

Относительное движение шарика есть движение по окружности, поэтому

$$\vec{V}_B^{\text{отн}} = R \dot{\beta} \vec{e}_\beta.$$

Таким образом

$$\begin{aligned}\vec{V}_B &= R\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha + R\dot{\beta}\vec{e}_\beta \Rightarrow (\vec{V}_B, \vec{V}_B) = (R\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha + R\dot{\beta}\vec{e}_\beta, R\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha + R\dot{\beta}\vec{e}_\beta) = \\ &= (R\dot{\alpha})^2 + (R\dot{\beta})^2 + 2R^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta - \alpha). \quad (4.6.6)\end{aligned}$$

Имея в виду (4.6.2)-(4.6.6) из (4.6.1) получим

$$\begin{aligned}L &= MR^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m((R\dot{\alpha})^2 + (R\dot{\beta})^2 + 2R^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta - \alpha)) + \\ &\quad + (M + m)gR\cos\alpha + mgR\cos\beta. \quad (4.6.7)\end{aligned}$$

Уравнения равновесия (IV.9):

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \alpha} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \\ -(M + m)gR\sin\alpha &= 0, \\ -mgR\sin\beta &= 0,\end{aligned}$$

имеют четыре решения:

1.  $\alpha = 0, \beta = 0$ ;
2.  $\alpha = 0, \beta = \pi$ ;
3.  $\alpha = \pi, \beta = 0$ ;
4.  $\alpha = \pi, \beta = \pi$ .

Чтобы отделить устойчивые положения равновесия от неустойчивых подсчитаем матрицу вторых производных потенциальной энергии  $\Pi(\alpha, \beta)$  ( $\Pi(\alpha, \beta) = -U(\alpha, \beta)$ ), в каждом из найденных положений равновесия:

$$\begin{aligned}B(\alpha, \beta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \beta^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ B = B(0, 0) &= \begin{pmatrix} (M + m)gR & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix}, \\ B(0, \pi) &= \begin{pmatrix} (M + m)gR & 0 \\ 0 & -mgR \end{pmatrix}, \\ B(\pi, 0) &= \begin{pmatrix} -(M + m)gR & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix}, \\ B(\pi, \pi) &= \begin{pmatrix} -(M + m)gR & 0 \\ 0 & -mgR \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Матрица  $B = B(0, 0)$  — положительно определенная, что является достаточным условием устойчивости этого положения равновесия. У каждой из матриц  $B(0, \pi)$ ,  $B(\pi, 0)$ ,  $B(\pi, \pi)$ , по крайней мере, один из элементов главной диагонали отрицателен, поэтому

согласно достаточному признаку все эти положения равновесия неустойчивы.

В рассматриваемой задаче

$$T = \frac{1}{2} \left( 2MR^2\dot{\alpha}^2 + m((R\dot{\alpha})^2 + (R\dot{\beta})^2 + 2R^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta - \alpha)) \right) \Rightarrow$$

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} (2M+m)R^2 & mR^2\cos(\beta - \alpha) \\ mR^2\cos(\beta - \alpha) & mR^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = A(0, 0) = \begin{pmatrix} (2M+m)R^2 & mR^2 \\ mR^2 & mR^2 \end{pmatrix}$$

(при вычислении матрицы  $A$  надо помнить о необходимости вынести за скобки множитель  $1/2$  в выражении кинетической энергии и о том, что коэффициент при произведении обобщенных скоростей необходимо разделить на две части:  $2mR^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta - \alpha) = a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}$ ,  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ ). Составим характеристическое уравнение:

$$\det(-\omega^2 A + B) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2(2M+m)R^2 + (M+m)gR & -\omega^2mR^2 \\ -\omega^2mR^2 & -\omega^2mR^2 + mgR \end{vmatrix} = 0$$

Подставляя значение  $M = 2m$ , раскрывая определитель и решая квадратное уравнение, получим частоты малых колебаний системы в окрестности устойчивого положения равновесия:

$$(\omega^2)^2 - 2\frac{g}{R}\omega^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{g}{R}\right)^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2R}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2R}}.$$

Г. Применение теоремы сложения скоростей при вычислении кинетической энергии точки иногда вызывает затруднения. В этом случае для нахождения скорости шарика можно использовать более простой, но более длинный способ, связанный с выражением скорости в декартовых координатах

$$V_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{z}_B^2, \quad (4.6.9)$$

$$x_B = R\sin\alpha + R\sin\beta, z_B = R\cos\alpha + R\cos\beta \Rightarrow$$

$$\dot{x}_B = R\dot{\alpha}\cos\alpha + R\dot{\beta}\cos\beta, \dot{z}_B = -R\dot{\alpha}\sin\alpha - R\dot{\beta}\sin\beta. \quad (4.6.10)$$

Подставляя (4.6.10) в (4.6.9) получим (4.6.6), что служит дополнительным подтверждением правильности ранее полученного результата.

В связи с собственной частотой  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2R}}$  интересно отметить, что уравнение движения математического маятника длиной  $2R$  имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{2R}\sin\varphi = 0.$$

Точно так же выглядит уравнение движение круглого однородного обруча радиуса  $R$ , способного вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ . Для рассматриваемой системы это означает, что если  $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha_0, \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = 0$ , то во все время движения  $\alpha(t) = \beta(t)$ , т.е. шарик относительно обруча будет неподвижен, причем это утверждение будет верно для любых начальных отклонений (не только для малых!). В рамках теории малых колебаний это, в частности, указывает на то, что собственный вектор, соответствующий частоте  $\omega_2$  будет иметь вид

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Задача 4.7.

В условиях задачи 4.6, используя теорию малых колебаний, найти движение системы при следующих начальных условиях:

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = \beta_0 \ll 1, \quad \dot{\alpha}(0) = 0, \quad \dot{\beta}(0) = 0.$$

Решение.

А+Б. Для решения задачи воспользуемся формулой (IV.12):

$$q(t) = \sum_{j=1}^n u_j (c_j \cos \omega_j t + d_j \sin \omega_j t).$$

Собственные частоты малых колебаний системы в окрестности устойчивого положения равновесия найдены в задаче 4.6, поэтому остается определить собственные векторы (формы колебаний) и выразить произвольные постоянные, входящие в решение, через начальные условия.

В. Собственные векторы найдем, решая системы уравнений (IV.14):

$$(-\omega_j^2 A + B)u_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

$$1) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2R}} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3g}{2R}5mR^2 + 3mgR & -\frac{3g}{2R}mR^2 \\ -\frac{3g}{2R}mR^2 & -\frac{3g}{2R}mR^2 + mgR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2R}} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{g}{2R}5mR^2 + 3mgR & -\frac{g}{2R}mR^2 \\ -\frac{g}{2R}mR^2 & -\frac{g}{2R}mR^2 + mgR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(каждый собственный вектор определен с *точностью до множителя*, поскольку он является решением системы линейных однородных алгебраических уравнений, определитель которой равен нулю). Итак, общее решение задачи о малых колебаниях рассматриваемой системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} (c_1 \cos \omega_1 t + d_1 \sin \omega_1 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (c_2 \cos \omega_2 t + d_2 \sin \omega_2 t). \quad (4.7.1)$$

Продифференцировав (4.7.1) по времени, получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} (-c_1 \omega_1 \sin \omega_1 t + d_1 \omega_1 \cos \omega_1 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-c_2 \omega_2 \sin \omega_2 t + d_2 \omega_2 \cos \omega_2 t). \quad (4.7.2)$$

Подставив в соотношения (4.7.1) и (4.7.2) значение  $t = 0$ , находим

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0, \\ -3c_1 + c_2 = \beta_0 \Rightarrow c_1 = -c_2 = -\frac{1}{4}\beta_0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} d_1 \omega_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d_2 \omega_2 \Rightarrow d_1 \omega_1 + d_2 \omega_2 = 0, \\ -3d_1 \omega_1 + d_2 \omega_2 = 0 \Rightarrow d_1 = d_2 = 0,$$

следовательно, движение системы при указанных начальных условиях, определяется формулами:

$$\alpha(t) = \beta_0 \left( -\frac{1}{4} \cos \sqrt{\frac{3g}{2R}} t + \frac{1}{4} \cos \sqrt{\frac{g}{2R}} t \right), \\ \beta(t) = \beta_0 \left( \frac{3}{4} \cos \sqrt{\frac{3g}{2R}} t + \frac{1}{4} \cos \sqrt{\frac{g}{2R}} t \right).$$

Г. Отметим, что поскольку отношение собственных частот иррационально, функции  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  не являются периодическими.



Движение системы будет периодическим, если начальные условия таковы, что возбуждается только одна из собственных форм (см. замечание к задаче 4.6).

#### Задача 4.8.

Круглый однородный диск радиуса  $r$  и массы  $m$  может двигаться под действием силы тяжести в неподвижной вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью диска. Невесомая нерастяжимая нить длины  $l$  связывает точку  $A$  диска с точкой  $O$ , расположенной на неподвижной вертикальной прямой, на которую опирается диск (см. рис. 4.8.1).

Найти положение равновесия диска при условии, что трения между диском и прямой нет, и частоту малых колебаний относительно этого положения равновесия.

Решение.

А. Введем правый неподвижный трехгранник  $Oxyz$ : направим ось  $Oz$  вертикально вниз, ось  $Ox$  вправо. При условии, что диск постоянно касается оси  $Oz$ , система имеет одну степень свободы. В самом деле, обозначим угол, образованный нитью с вертикалью через

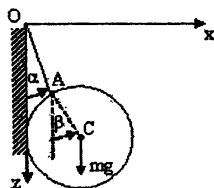


Рис. 4.8.1.

$\alpha$ , а угол, образованный отрезком  $AC$  ( $C$  – центр тяжести диска) с вертикалью через  $\beta$ . Эти два угла, будучи заданными, полностью определяют положение диска в плоскости, однако их значения должны удовлетворять соотношению

$$l \sin \alpha + r \sin \beta = r, \quad (4.8.1)$$

т.е произвольные значения может принимать только один из этих углов, что и доказывает сделанное выше утверждение о числе степеней свободы системы.

Выберем в качестве обобщенной координаты угол  $\beta$ .

Б. Положения равновесия системы находятся из уравнения равновесия:

$$\frac{\partial U(\beta)}{\partial \beta} = 0,$$

а частоты малых колебаний в окрестности положения равновесия  $\beta = \beta_0$  из уравнения:

$$\det(-\omega^2 A + B) = 0,$$

которое для системы с одной степенью свободы превращается в уравнение

$$-\omega^2 a(\beta_0) + b(\beta_0) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{b(\beta_0)}{a(\beta_0)}},$$

где  $a(\beta_0)$  — коэффициент в выражении кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} a(\beta_0) \dot{\beta}^2,$$

а

$$b(\beta_0) = \frac{\partial^2 \Pi(\beta)}{(\partial \beta)^2} \Big|_{\beta=\beta_0}.$$

В. Единственной заданной силой в рассматриваемой задаче является сила тяжести, поэтому

$$U = mgz_C = mg(l \cos \alpha + r \cos \beta).$$

Запишем уравнение равновесия, учитывая, что  $\alpha = \alpha(\beta)$ :

$$\frac{\partial U(\beta)}{\partial \beta} = -mg \left( l \left( \frac{d\alpha}{d\beta} \right) \sin \alpha + r \sin \beta \right) = 0. \quad (4.8.2)$$

Взяв дифференциал от обеих частей равенства (4.8.1), получим:

$$l \cos \alpha d\alpha + r \cos \beta d\beta = 0 \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{r \cos \beta}{l \cos \alpha}. \quad (4.8.3)$$

Подстановка (4.8.3) в (4.8.2) дает:

$$-mg \left( -\frac{r \cos \beta}{\cos \alpha} \sin \alpha + r \sin \beta \right) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta. \quad (4.8.4)$$

Поскольку из физического смысла задачи следует, что  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $0 < \beta < \pi/2$  из (4.8.4) вытекает:

$$\alpha = \beta = \beta_0, \sin \beta_0 = \frac{r}{l+r}. \quad (4.8.5)$$

Проверим устойчивость найденного положения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi(\beta)}{(\partial \beta)^2} \Big|_{\beta=\beta_0} &= -\frac{\partial^2 U(\beta)}{(\partial \beta)^2} \Big|_{\beta=\beta_0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left( mg \left( l \left( \frac{d\alpha}{d\beta} \right) \sin \alpha + r \sin \beta \right) \right) = \\ &= mg \left( l \left( \frac{d\alpha}{d\beta} \right)^2 \cos \alpha + l \frac{d^2 \alpha}{(d\beta)^2} \sin \alpha + r \cos \beta \right). \end{aligned} \quad (4.8.6)$$

Выражение

$$\frac{d^2 \alpha}{(d\beta)^2} = \frac{d}{d\beta} \left( \frac{d\alpha}{d\beta} \right) = \frac{d}{d\beta} \left( -\frac{r \cos \beta}{l \cos \alpha} \right) = \frac{r \sin \beta}{l \cos \alpha} +$$

$$\frac{r \cos \beta}{l \cos^2 \alpha} (-\sin \alpha) \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{r \sin \beta}{l \cos \alpha} + \frac{r^2 \cos^2 \beta}{l^2 \cos^3 \alpha} \sin \alpha$$

положительно в рассматриваемой области значений углов  $\alpha$  и  $\beta$ , следовательно, все слагаемые в (4.8.6) в указанной области положительны, и

$$\frac{\partial^2 \Pi(\beta)}{(\partial \beta)^2} \Big|_{\beta=\beta_0} > 0,$$

т.е. найденное положение равновесия *устойчиво*. С учетом соотношений (4.8.5) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi(\beta)}{(\partial \beta)^2} \Big|_{\beta=\beta_0} = mg \left( \frac{r^2}{l} \cos \beta_0 + l \sin \beta_0 \left( \frac{r \sin \beta_0}{l \cos \beta_0} + \frac{r^2 \sin \beta_0}{l^2 \cos \beta_0} \right) + \right. \\ \left. + r \cos \beta_0 \right) = mg \frac{r(r+l)}{l \cos \beta_0}. \quad (4.8.7) \end{aligned}$$

Осталось найти коэффициент  $a(\beta_0)$ . Кинетическую энергию диска вычислим по формуле

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_\eta \omega^2,$$

$$V_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2 = \dot{z}_C^2 = \dot{\beta}^2 \left( l \left( \frac{d\alpha}{d\beta} \right) \sin \alpha + r \sin \beta \right)^2, \quad J_\eta = \frac{1}{2} m r^2,$$

$$\vec{\omega} = \dot{\beta} \vec{e}_y \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\beta}^2 \left( \left( l \left( \frac{d\alpha}{d\beta} \right) \sin \alpha + r \sin \beta \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \right) \Rightarrow$$

$$a(\beta_0) = m \left( \sin^2 \beta_0 \left( l \left( \frac{-r}{l} \right) + r \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \right) = \frac{1}{2} m r^2. \quad (4.8.8)$$

Используя (4.8.7), (4.8.5) и приведенную выше формулу для частоты малых колебаний, получим

$$\omega = \sqrt{2g \frac{r+l}{rl \cos \beta_0}}.$$

Г. В заключение сделаем два замечания:

1) Найти положение равновесия в этой задаче можно гораздо проще: для того, чтобы твердое тело, на которое действуют *три* силы (сила тяжести и реакции нити и вертикальной прямой) находилось в равновесии *необходимо*, чтобы эти *три* силы *пересекались в одной точке* (следствие теоремы III.15).

Отсюда сразу следует, что в положении равновесия  $\alpha = \beta$ .

2) Несмотря на то что система имеет одну степень свободы, мы повсюду использовали две координаты, исключая лишнюю там, где это необходимо, с помощью уравнения связи. Этот подход носит название *метода избыточных координат*.

Его удобно применять тогда, когда явное введение нужного числа обобщенных координат связано с какими-либо неудобствами.

#### Задача 4.9.

Найти положения равновесия сферического маятника и выписать общее решение задачи о малых колебаниях в окрестности устойчивого положения равновесия.

Решение.

А. Поместим начало неподвижного трехгранника  $Oxyz$  в центр сферы, по которой движется точка  $M$ , и направим ось  $Oz$  вертикально вниз.

Пусть радиус сферы равен  $r$ , а масса точки —  $m$ . Положение точки на двумерной поверхности задается двумя параметрами. В рассматриваемой задаче (поскольку точка движется по сфере) можно воспользоваться углами сферической системы координат  $\vartheta$  и  $\psi$  (см. рис.4.9.1):  $\vartheta$  — угол, образованный осью  $Oz$  и отрезком  $OM$  (назовем ось  $Oz$  в этом случае полярной осью),  $\psi$  — угол между плоскостями  $zOx$  и  $zOM$ . Единственной заданной силой является сила тяжести.

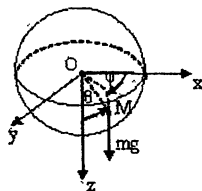


Рис. 4.9.1.

Б+В. Силовая функция в выбранных координатах имеет вид:

$$U = mgz_M = mgr \cos \vartheta.$$

Запишем уравнения равновесия:

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0 \Rightarrow -mgr \sin \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = \pi, \quad (4.9.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow 0 = 0. \quad (4.9.2)$$

Прежде чем интерпретировать найденные решения, как координаты точек равновесия (очевидно, что выписанные уравнения удовлетворяются при любом значении угла  $\psi$ ), нужно вспомнить, что область определения используемых параметров выглядит следующим обра-

ЗОМ:

$$0 < \vartheta < \pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad (4.9.3)$$

поэтому вывод, который следует сделать из соотношений (4.9.1) и (4.9.2), может быть только таким: в области (4.9.3) *положений равновесия нет*.

Попробуем прояснить ситуацию, выбрав в качестве полярной оси ось  $Ox$ , а в качестве углов, определяющих положение маятника, углы  $\alpha$  и  $\beta$  (см. рис. 4.9.2):

$\alpha$  — угол, образованный осью  $Ox$  и отрезком  $OM$ ,  $\beta$  — угол между плоскостями  $xOy$  и  $xOM$ . В этом случае силовая функция представляется формулой:

$$U = mgz_M = mgr \sin \alpha \sin \beta,$$

а уравнения равновесия принимают вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow mgr \cos \alpha \sin \beta = 0, \quad (4.9.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow mgr \sin \alpha \cos \beta = 0. \quad (4.9.5)$$

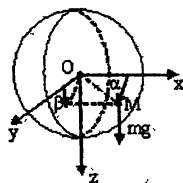


Рис. 4.9.2.

Учитывая область определения углов  $\alpha$  и  $\beta$  (аналогичную области (4.9.3)), получим два решения системы уравнений (4.9.4), (4.9.5):

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Чтобы прояснить вопрос об устойчивости найденных решений, вычислим матрицу вторых производных по координатам потенциальной энергии  $\Pi(\alpha, \beta) = -U(\alpha, \beta)$ :

$$B(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{(\partial \alpha)^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \Pi}{(\partial \beta)^2} \end{pmatrix} = mgr \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B(\alpha_1, \beta_1) = mgr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B, B(\alpha_2, \beta_2) = mgr \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Согласно известным достаточным условиям первое положение равновесия устойчиво, второе — неустойчиво.

Для того, чтобы выписать *общее решение* задачи о малых колебаниях, нужно знать *собственные частоты* и *собственные столбцы* системы, для нахождения которых требуется матрица кинетической энергии, вычисленная в *соответствующем* положении равновесия. Для вычисления кинетической энергии маятника воспользуемся выражением скорости в сферических координатах:

$$T = \frac{1}{2} m V_M^2 = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\alpha}^2 + r^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \alpha) \Rightarrow$$

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & mr^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A(\alpha_1, \beta_1) = A = \begin{pmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения для собственных частот

$$\det(-\omega^2 A + B) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\omega^2 mr^2 + mgr & 0 \\ 0 & -\omega^2 mr^2 + mgr \end{vmatrix} = 0$$

получаем:

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Кратному корню характеристического уравнения соответствуют *два* линейно-независимых *собственных вектора*, удовлетворяющих системам линейных однородных уравнений с определителем равным нулю:

$$\begin{pmatrix} -\omega_j^2 mr^2 + mgr & 0 \\ 0 & -\omega_j^2 mr^2 + mgr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = 1, 2.$$

Легко видеть, что при найденных значениях частот, в качестве *собственных столбцов* могут быть взяты векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно записать *общее решение* задачи о малых колебаниях сферического маятника в окрестности устойчивого положения равновесия:

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) - \frac{\pi}{2} \\ \beta(t) - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (c_1 \cos \sqrt{\frac{g}{r}} t + d_1 \sin \sqrt{\frac{g}{r}} t) + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (c_1 \cos \sqrt{\frac{g}{r}} t + d_1 \sin \sqrt{\frac{g}{r}} t).$$

Г. Можно для решения поставленной задачи попробовать другие обобщенные координаты. Рассмотрим, например, декартовы координаты точки  $(x_M, y_M)$  в области  $z_M > 0$ .

Используя уравнение связи

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = r^2 \Rightarrow z_M = \sqrt{r^2 - x_M^2 - y_M^2},$$

получим выражение для силовой функции:

$$U(x_M, y_M) = mgz_M = mg\sqrt{r^2 - x_M^2 - y_M^2}.$$

Уравнения равновесия в этом случае принимают вид :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_M} &= -\frac{mgx_M}{\sqrt{r^2 - x_M^2 - y_M^2}} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y_M} &= -\frac{mgy_M}{\sqrt{r^2 - x_M^2 - y_M^2}} = 0.\end{aligned}$$

Единственным решением этих уравнений является точка

$$x_M = 0, y_M = 0.$$

Матрица вторых производных потенциальной энергии, вычисленная в найденной точке,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{(\partial x_M)^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_M \partial y_M} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_M \partial x_M} & \frac{\partial^2 \Pi}{(\partial y_M)^2} \end{pmatrix}_{x_M=0, y_M=0} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{r} & 0 \\ 0 & \frac{mg}{r} \end{pmatrix}$$

положительно определена, значит, это положение равновесия устойчиво.

Кинетическую энергию считаем по формуле

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2), \quad \dot{z}_M = \frac{-\dot{x}_M x_M - \dot{y}_M y_M}{\sqrt{r^2 - x_M^2 - y_M^2}}$$

следовательно,

$$A(0, 0) = A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Составляя в соответствии с общим правилом характеристическое уравнение, найдем собственные частоты

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

что является иллюстрацией к теореме, говорящей о том, что частоты малых колебаний механической системы не зависят от выбора координат (хотя матрицы  $A$  и  $B$ , вообще говоря, в разных координатах будут разными).

Определив *собственные векторы*, запишем общее решение задачи о малых колебаниях

$$\begin{pmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (c_1 \cos \sqrt{\frac{g}{r}}t + d_1 \sin \sqrt{\frac{g}{r}}t) + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (c_1 \cos \sqrt{\frac{g}{r}}t + d_1 \sin \sqrt{\frac{g}{r}}t). \quad (4.9.6)$$

Отметим, что в отличие от результата задачи 4.7, малые колебания сферического маятника при любых начальных условиях являются периодическими.

Представленное решение нельзя считать исчерпывающим, поскольку рассмотрена только часть возможных положений маятника. Чтобы завершить исследование, надо изучить точки в области  $z_M < 0$ . Проводя те же выкладки, что и в случае  $z_M > 0$ , найдем в этой области еще одно положение равновесия и убедимся в том, что оно *неустойчиво*.

Из элементарных соображений легко установить, что среди точек, принадлежащих множеству  $z_M = 0$ , положений равновесия нет. Последние рассуждения позволяют считать соотношение (4.9.6) окончательным ответом на поставленный вопрос.

#### Задача 4.10.

Найти стационарные движения сферического маятника и написать общее решение задачи о малых колебаниях относительно устойчивых стационарных движений.

Решение.

А. В задаче 4.9 мы рассмотрели три варианта обобщенных координат для сферического маятника:  $(\vartheta, \psi)$ ,  $(\alpha, \beta)$  и  $(x, y)$ . Что касается двух последних пар, то уже по виду силовой функции, выраженной в этих координатах, видно что среди указанных координат циклических нет (это обстоятельство еще раз подчеркивает важность процедуры выбора координат, поскольку от этого выбора многое зависит – есть циклические координаты, можно ставить задачу о стационарных движениях, нет циклических координат, такая постановка невозможна).

Разберемся с координатами  $(\vartheta, \psi)$ . Вспоминая выражение скорости в сферических координатах и вид силовой функции, использованные в предыдущей задаче, запишем:

$$L = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + mgr \cos \vartheta. \quad (4.10.1)$$

Как видно из (4.10.1) координата  $\psi$  является циклической, сле-



довательно, можно применить *процедуру Рауса* игнорирования циклических координат.

Б+В. Начнем с нахождения циклического интеграла:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \beta \Rightarrow mr^2 \dot{\psi} \sin^2 \vartheta = \beta \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{\beta}{mr^2 \sin^2 \vartheta}, \quad (4.10.2)$$

(заметим, что при  $\beta \neq 0$   $\vartheta$  никогда не обращается в нуль (или  $\pi$ ), следовательно, в этом случае выбранные координаты во время движения не выходят за рамки области определения).

Составим функцию Рауса:

$$\begin{aligned} R(\vartheta, \dot{\vartheta}, \beta) &= (L - \dot{\psi})|_{\dot{\psi} = \frac{\beta}{mr^2 \sin^2 \vartheta}} = \\ &= \frac{1}{2} m(r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 (\frac{\beta}{mr^2 \sin^2 \vartheta})^2 \sin^2 \vartheta) + mgr \cos \vartheta - \beta \frac{\beta}{mr^2 \sin^2 \vartheta} \Rightarrow \\ R(\vartheta, \dot{\vartheta}, \beta) &= \frac{1}{2} mr^2 \dot{\vartheta}^2 + mgr \cos \vartheta - \frac{\beta^2}{2mr^2 \sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \quad (4.10.3)$$

Из (4.10.3) находим

$$R_2 = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\vartheta}^2, R_1 = 0, R_0 = mgr \cos \vartheta - \frac{\beta^2}{2mr^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Положения равновесия *приведенной* системы получим из уравнения:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \vartheta} = 0 \Rightarrow -mgr \sin \vartheta + \frac{\beta^2 \cos \vartheta}{mr^2 \sin^3 \vartheta} = 0. \quad (4.10.4)$$

Обозначим значения переменных  $\vartheta$  и  $\dot{\psi}$  на стационарном движении через  $\vartheta^*$  и  $\dot{\psi}^*$ . Тогда с учетом (4.10.2) и (4.10.4) имеем:

$$\cos \vartheta^* = \frac{g}{r \dot{\psi}^{*2}}. \quad (4.10.5)$$

Проверим устойчивость найденных движений:

$$\frac{\partial^2 R_0}{(\partial \vartheta)^2} |_{\vartheta = \vartheta^*} = -(mgr \cos \vartheta^* + \frac{\beta^2}{mr^2 \sin^2 \vartheta^*} + \frac{3\beta^2 \cos^2 \vartheta^*}{mr^2 \sin^4 \vartheta^*}) < 0$$

следовательно, в силу *достаточного условия*, *стационарные движения сферического маятника устойчивы*.

Введем новую переменную  $\gamma$ :

$$\gamma = \vartheta - \vartheta^*, \quad |\gamma| \ll 1.$$

Согласно теории малых колебаний координата  $\gamma$  удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{\gamma} + \omega^2 \gamma = 0, \quad (4.10.6)$$

где  $\omega^2 = -\frac{\partial^2 R_0}{(\partial \vartheta)^2} \big|_{\vartheta=\vartheta^*}$ . Общее решение уравнения (4.10.6) имеет вид:

$$\gamma = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

следовательно,

$$\vartheta(t) = \vartheta^* + A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (4.10.7)$$

и

$$\dot{\psi} = \frac{\beta}{mr^2 \sin^2 \vartheta} \Rightarrow \psi(t) = \psi(0) + \int_0^t \frac{\beta dt}{mr^2 \sin^2 \vartheta(t)},$$

что завершает построение *общего решения задачи о малых колебаниях сферического маятника относительно стационарного движения*.

Г. Перепишем выражение  $\frac{\partial^2 R_0}{(\partial \vartheta)^2} \big|_{\vartheta=\vartheta^*}$  в несколько измененном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_0}{(\partial \vartheta)^2} \big|_{\vartheta=\vartheta^*} &= - \left( mgr \cos \vartheta^* + \frac{\beta^2}{mr^2 \sin^2 \vartheta^*} + \frac{3\beta^2 \cos^2 \vartheta^*}{mr^2 \sin^4 \vartheta^*} \right) = \\ &= - \left( mgr \cos \vartheta^* + mr^2 \sin^2 \vartheta^* \left( \frac{\beta^2}{m^2 r^4 \sin^4 \vartheta^*} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3mr^2 \cos^2 \vartheta^* \left( \frac{\beta^2}{m^2 r^4 \sin^4 \vartheta^*} \right) \right) = \\ &= - (mgr \cos \vartheta^* + mr^2 \sin^2 \vartheta^* \dot{\psi}^{*2} + 3mr^2 \cos^2 \vartheta^* \dot{\psi}^{*2}). \end{aligned} \quad (4.10.8)$$

Теперь заметим, что из формулы (4.10.5) следует

$$\lim_{\vartheta^* \rightarrow 0} \dot{\psi}^{*2} = \frac{g}{r},$$

и тогда из соотношения (4.10.8) и формулы для частоты малых колебаний получается:

$$\lim_{\vartheta^* \rightarrow 0} \omega^2 = 4 \frac{g}{r},$$

т.е. для значений  $\vartheta^* \ll 1$  движение будет *периодическим* с частотой, близкой к  $2\sqrt{\frac{g}{r}}$ . Но при указанных значениях  $\vartheta^*$ , движение происходит в *малой окрестности положения равновесия*, и, как следует из решения предыдущей задачи, должно быть *периодическим* с частотой  $\sqrt{\frac{g}{r}}$  !?

Впрочем, проницательному читателю не составит труда найти выход из этого "противоречия".

#### Задача 4.11.

Брусок массы  $M$  может скользить вдоль неподвижной прямой  $Ox$ . В точке  $C$  к бруску с помощью цилиндрического шарнира прикреплена прямолинейная трубка, способная вращаться в вертикальной плоскости  $Ozx$ . В трубке расположен шарик массы  $m$ , связанный с трубкой линейной пружиной жесткости  $k$  так, что натяжение пружины равно нулю, когда шарик находится в точке  $C$  (текущее положение шарика отмечено точкой  $D$ ).

Считая связи идеальными и пренебрегая размерами шарика и массой трубки и пружины, найти движение системы (в рамках теории малых колебаний, при начальных условиях указанных ниже).

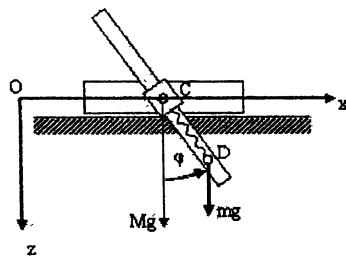


Рис.4.11.1.

Решение. А. Поскольку брусок движется поступательно вдоль неподвижной прямой, задание координаты  $x_C$  точки полностью определяет его положение. Пусть  $\varphi$  обозначает угол поворота трубки, отсчитываемый от вертикали, а  $\xi$  — координату шарика относительно трубки с началом отсчета в точке  $C$ .

Набор  $(x_C, \xi, \varphi)$  может быть использован в качестве *обобщенных координат* системы. Связи, наложенные на систему, *идеальные* и *голономные*, поэтому для описания ее движения можно использовать *уравнения Лагранжа второго рода*.

Заданными силами являются силы тяжести, приложенные к бруску и шарiku, и силы натяжения пружины: сила  $\vec{F}_C = k\xi\vec{e}_\xi$ , приложенная к точке  $C$  бруска и сила  $\vec{F}_D = -k\xi\vec{e}_\xi$ , приложенная к шарiku.

Запишем элементарную работу сил натяжения пружины на произвольном виртуальном перемещении:

$$(\vec{F}_C, \delta\vec{r}_C) + (\vec{F}_D, \delta\vec{r}_D), \quad \delta\vec{r}_D = \delta\vec{r}_C + \xi\delta\varphi\vec{e}_\varphi + \delta\xi\vec{e}_\xi \Rightarrow$$

$$(k\xi\vec{e}_\xi, \delta\vec{r}_C) + (-k\xi\vec{e}_\xi, \delta\vec{r}_C + \xi\delta\varphi\vec{e}_\varphi + \delta\xi\vec{e}_\xi) = -k\xi\delta\xi = \delta\left(-\frac{1}{2}k\xi^2\right),$$

т.е. эти силы имеют силовую функцию  $U_{\text{пр}} = -\frac{1}{2}k\xi^2$ . Учитывая силовую функцию сил тяжести

$$U_g = Mgz_C + mgz_D$$

и отбрасывая несущественные константы, получим выражение силовой функции системы:

$$U = U_g + U_{\text{пр}} = mgz_D - \frac{1}{2}k\xi^2 = mg\xi \cos \varphi - \frac{1}{2}k\xi^2. \quad (4.1.1)$$

Б. Найдем функцию Лагранжа системы:

$$L = T + U.$$

Кинетическая энергия системы  $T$  складывается из кинетической энергии бруса  $T_6$  и кинетической энергии шарика  $T_{\text{ш}}$ :

$$T = T_6 + T_{\text{ш}}. \quad (4.11.2)$$

Брусок движется поступательно, следовательно

$$T_6 = \frac{1}{2}M\dot{x}_C^2. \quad (4.11.3)$$

Размерами шарика пренебрегаем, поэтому

$$T_{\text{ш}} = \frac{1}{2}mV_D^2. \quad (4.11.4)$$

Для вычисления абсолютной скорости шарика  $\vec{V}_D$  введем подвижный трехгранник, жестко связанный с бруском, и применим теорему сложения скоростей:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_D^{\text{пер}} + \vec{V}_D^{\text{отн}}.$$

Так как подвижный трехгранник движется поступательно

$$\vec{V}_D^{\text{пер}} = \dot{x}_C \vec{e}_x.$$

Относительную скорость шарика можно найти, воспользовавшись выражением скорости в полярных координатах (хотя  $\xi$  не является в полном смысле одной из полярных координат, так как может принимать отрицательные значения):

$$\vec{V}_D^{\text{отн}} = \dot{\xi} \vec{e}_\xi + \xi \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Окончательно запишем:

$$\vec{V}_D = \dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{\xi} \vec{e}_\xi + \xi \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi,$$

$$V_D^2 = (\vec{V}_D, \vec{V}_D) = (\dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{\xi} \vec{e}_\xi + \xi \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{\xi} \vec{e}_\xi + \xi \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi),$$

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_\xi) = \sin \varphi, \quad (\vec{e}_x, \vec{e}_\varphi) = \cos \varphi, \quad (\vec{e}_\xi, \vec{e}_\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$V_D^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{\xi}^2 + (\xi \dot{\varphi})^2 + 2\dot{x}_C \dot{\xi} \sin \varphi + 2\dot{x}_C \xi \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (4.11.5)$$

Используя (4.11.1)–(4.11.5) получим:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{\xi}^2 + (\xi\dot{\varphi})^2 + 2\dot{x}_C\dot{\xi}\sin\varphi + 2\dot{x}_C\xi\dot{\varphi}\cos\varphi) + mg\xi\cos\varphi - \frac{1}{2}k\xi^2. \quad (4.11.6)$$

Рассмотрев выражение (4.11.6), замечаем, что координата  $x_C$  является циклической, следовательно, для решения поставленной задачи нужно найти *стационарные движения* и воспользоваться *теорией малых колебаний относительно стационарных движений*.

В. Для нахождения функции Рауса запишем циклический интеграл и найдем из него  $\dot{x}_C$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C} = \beta &\Rightarrow (M+m)\dot{x}_C + m(\dot{\xi}\sin\varphi + \xi\dot{\varphi}\cos\varphi) = \beta \Rightarrow \\ \dot{x}_C &= \frac{\beta - m(\dot{\xi}\sin\varphi + \xi\dot{\varphi}\cos\varphi)}{M+m}. \end{aligned} \quad (4.11.7)$$

Введем обозначение  $m(\dot{\xi}\sin\varphi + \xi\dot{\varphi}\cos\varphi) = f$ .

Тогда функция Рауса примет вид:

$$\begin{aligned} R &= (L - \beta\dot{x}_C)|_{\dot{x}_C \rightarrow \frac{\beta-f}{M+m}} \Rightarrow \\ R &= \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + (\xi\dot{\varphi})^2) + mg\xi\cos\varphi - \frac{1}{2}k\xi^2 - \frac{1}{2}\frac{(\beta-f)^2}{M+m}. \end{aligned} \quad (4.11.8)$$

Проанализировав структуру функции  $R$ , представленную формулой (4.11.8), имеем:

$$R_2 = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + (\xi\dot{\varphi})^2) - \frac{1}{2}\frac{f^2}{M+m}, \quad (4.11.9)$$

$$R_1 = \frac{\beta f}{M+m}, \quad (4.11.10)$$

$$R_0 = mg\xi\cos\varphi - \frac{1}{2}k\xi^2 - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{M+m}. \quad (4.11.11)$$

Запишем уравнения равновесия для приведенной системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_0}{\partial \xi} = 0 &\Rightarrow mg\cos\varphi - k\xi = 0, \\ \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} = 0 &\Rightarrow -mg\xi\sin\varphi = 0. \end{aligned}$$

Решениями этих уравнений будут следующие пары значений *позиционных координат*:

$$1) \xi_1 = \frac{mg}{k}, \quad \varphi_1 = 0,$$

$$2) \xi_2 = -\frac{mg}{k}, \quad \varphi_2 = \pi,$$

$$3) \xi_3 = 0, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Подсчитаем матрицу вторых производных функции  $R_0$ :

$$-B(\xi, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R_0}{(\partial \xi)^2} & \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 R_0}{\partial \varphi \partial \xi} & \frac{\partial^2 R_0}{(\partial \varphi)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -mg \sin \varphi \\ -mg \sin \varphi & -mg \xi \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B(\xi_1, \varphi_1) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{(mg)^2}{k} \end{pmatrix},$$

$$B(\xi_2, \varphi_2) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{(mg)^2}{k} \end{pmatrix}, \quad B(\xi_3, \varphi_3) = \begin{pmatrix} k & mg \\ mg & 0 \end{pmatrix}.$$

Первые две матрицы в предыдущей строке положительно определены, следовательно, согласно *достаточному признаку*, соответствующие положения равновесия устойчивы.

Что касается третьего положения равновесия, то матрица  $B(\xi_3, \varphi_3)$  не дает возможности ответить на вопрос о его устойчивости, однако из физического смысла задачи ясно, что при сколь угодно малом отклонении шарика от положения  $\xi = 0$  под действием силы тяжести он начнет "падать" и трубка "опрокинется", т.е. это положение равновесия неустойчиво.

Введем новые переменные соотношениями:

$$\zeta = \xi - \xi_1, \quad \eta = \xi_1 \varphi,$$

и найдем движение исходной системы при начальных условиях:

$$x_C(0) = 0, \quad \dot{x}_C(0) = V_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0 < \xi_1,$$

$$\dot{\zeta}(0) = 0, \quad \eta(0) = \eta_0 = \xi_1 \varphi_0 < \xi_1, \quad \dot{\eta}(0) = 0.$$

Для составления уравнения малых колебаний разложим функцию Рауса  $R$  в ряд в малой окрестности положения равновесия ( $\zeta = 0, \eta = 0$ ) и выделим *квадратичную* по малым отклонениям (координат и скоростей) часть  $\tilde{R}$ :

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}(\dot{\zeta}^2 + \frac{M}{M+m}\dot{\eta}^2) + \frac{\beta m \xi_1}{M+m}(\dot{\zeta}\eta + \zeta\dot{\eta}) - \frac{1}{2}k\eta^2 - \frac{1}{2}k\zeta^2. \quad (4.11.12).$$

*Линейная по обобщенным скоростям* форма с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат

$$\tilde{R}_1 = \frac{\beta m \xi_1}{M+m}(\dot{\zeta}\eta + \zeta\dot{\eta})$$

никогда не возникает в задаче о малых колебаниях относительно положения равновесия. Наличие этой формы приводит в общем случае к некоторым отличиям в процедуре определения собственных частот и построения общего решения в задаче о малых колебаниях относительно стационарного движения.

Однако, в данной задаче, как легко видеть,

$$\frac{\beta m \xi_1}{M+m}(\dot{\zeta}\eta + \zeta\dot{\eta}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta m \xi_1}{M+m} \zeta \eta \right),$$

поэтому это выражение при составлении уравнений Рауса (оно аннулируется оператором, задающим эти уравнения) может быть отброшено, следовательно, искомые уравнения определяются функцией

$$\hat{R} = \frac{1}{2}(\dot{\zeta}^2 + \frac{M}{M+m}\dot{\eta}^2) - \frac{1}{2}k\eta^2 - \frac{1}{2}k\zeta^2,$$

являющейся суммой двух квадратичных форм с постоянными коэффициентами, и для нахождения общего решения можно без всяких изменений воспользоваться процедурой, примененной в задачах 4.6 и 4.7:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{Mm}{M+m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Частоты малых колебаний определяем из уравнения:

$$\det(-\omega^2 A + B) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\omega^2 m + k & 0 \\ 0 & -\omega^2 \frac{Mm}{M+m} + k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)k}.$$

Нетрудно заметить, что столбцы

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

удовлетворяют соответствующим системам уравнений.

Запишем формулу общего решения задачи о малых колебаниях:

$$\begin{pmatrix} \zeta(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (c_1 \cos \omega_1 t + d_1 \sin \omega_1 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (c_2 \cos \omega_2 t + d_2 \sin \omega_2 t).$$

Для определения значений произвольных постоянных воспользуемся начальными условиями для координат:

$$\begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 \Rightarrow c_1 = \zeta_0, c_2 = \eta_0,$$

и для производных:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d_1 \omega_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d_2 \omega_2 \Rightarrow d_1 = d_2 = 0.$$

Таким образом при указанных начальных условиях *позиционные координаты* будут изменяться во времени следующим образом:

$$\zeta(t) = \zeta_0 \cos \omega_1 t \Rightarrow \xi(t) = \frac{mg}{k} + \zeta_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \eta(t) = \eta_0 \cos \omega_2 t \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cos \sqrt{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)kt}.$$

Из начальных условий и соотношения (4.11.7) имеем:

$$(M+m)\dot{x}_C + m(\dot{\xi} \sin \varphi + \xi \dot{\varphi} \cos \varphi) = (M+m)V_0 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_C = V_0 - \frac{m}{M+m} \left( \dot{\xi} \sin \varphi + \left( \frac{mg}{k} + \zeta_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \dot{\varphi} \cos \varphi \right). \quad (4.11.13)$$

Уравнения малых колебаний могут быть получены из точных уравнений Лагранжа второго рода путем отбрасывания членов второго порядка малости по отношению к отклонениям системы от нулевой точки в *фазовом* пространстве (от положения равновесия). Поэтому при решении уравнения (4.11.13) в правой части имеет смысл сохранить только линейные относительно указанных отклонений члены:

$$\dot{x}_C = V_0 - \frac{m}{M+m} \frac{mg}{k} \dot{\varphi} \cos \varphi \Rightarrow \dot{x}_C = V_0 - \frac{m}{M+m} \frac{mg}{k} \frac{d}{dt} \sin \varphi \Rightarrow$$

$$x_C(t) = V_0 t - \frac{m^2 g}{k(M+m)} \left( \sin \left( \varphi_0 \cos \sqrt{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)kt} \right) - \sin \varphi_0 \right).$$

На этом решение поставленной задачи закончено.

Г. Движение большинства механических систем описывается *нелинейными* дифференциальными уравнениями, не допускающими решение в виде элементарных функций или их комбинаций.

Смысл теории малых колебаний состоит в том, что она позволяет получить решения, представляющие собой линейные комбинации гармонических функций разных частот, *близкие к решениям точных уравнений*.

Хотя эта близость имеет место на *конечных*, но во многих случаях достаточно больших интервалах времени (и лишь в окрестности



положений равновесия или стационарных движений), тем не менее имея эти решения мы можем составить представление о свойствах рассматриваемой системы в определенных обстоятельствах.

## Литература

- [1] Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1961.
- [2] Бухгольц Н.Н., Воронков И.М., Минаков А.П. Сборник задач по теоретической механике. М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
- [3] Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1981.
- [4] Каф. теор.мех. и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ. Задачи по теоретической механике. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2004.
- [5] Шутц Б. Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984.
- [6] Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
- [7] Аппель П. Теоретическая механика, т.2. М.: Физматгиз, 1960.
- [8] Вильке В.Г. Теоретическая механика. С.-П.: Лань, 2003.
- [9] Лидов М.Л. Курс лекций по теоретической механике. М.: Физматлит, 2001.
- [10] Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М: Изд-во Моск.Ун-та, 2000.
- [11] Справочник: Вибрации в технике, т.1 Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1976.

## Оглавление

|                                                                                           |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Предисловие . . . . .                                                                     | 3          |
| <b>Глава 1 Кинематика</b>                                                                 | <b>10</b>  |
| 1. Перечень I: основные понятия и формулы кинематики                                      | 10         |
| 1.1. Кинематика точки . . . . .                                                           | 10         |
| 1.2. Кинематика абсолютно твердого тела . . . . .                                         | 11         |
| 1.3. Теоремы сложения . . . . .                                                           | 13         |
| 2. Задачи . . . . .                                                                       | 14         |
| <b>Глава 2 Динамика точки</b>                                                             | <b>39</b>  |
| 1. Перечень II: основные понятия и теоремы динамики материальной точки . . . . .          | 39         |
| 2. Задачи . . . . .                                                                       | 42         |
| <b>Глава 3 Динамика системы материальных точек</b>                                        | <b>78</b>  |
| 1. Перечень III: основные понятия и теоремы динамики системы материальных точек . . . . . | 78         |
| 1.1. Определения и формулы для вычисления основных динамических величин . . . . .         | 78         |
| 1.2. Общие теоремы динамики системы материальных точек ([6],[7],[9]) . . . . .            | 80         |
| 1.3. Некоторые сведения о связях. . . . .                                                 | 81         |
| 1.4. Теоремы динамики для систем с идеальными связями ([7],[8],[9],[10]) . . . . .        | 86         |
| 2. Задачи . . . . .                                                                       | 87         |
| <b>Глава 4 Некоторые задачи аналитической механики</b>                                    | <b>139</b> |
| 1. Перечень IV: используемые положения аналитической механики . . . . .                   | 139        |
| 1.1. Уравнения Лагранжа второго рода . . . . .                                            | 139        |
| 1.2. Первые интегралы уравнений Лагранжа . . . . .                                        | 140        |
| 1.3. Положения равновесия и теория малых колебаний . . . . .                              | 140        |
| 1.4. Стационарные движения и малые колебания относительно них . . . . .                   | 142        |
| 2. Задачи . . . . .                                                                       | 143        |

Антонов Игорь Леонидович

Как решать задачи по теоретической механике

М., Издательство Центра прикладных исследований при  
механико-математическом факультете МГУ, 192стр.

*Оригинал макет изготовлен издательской группой  
механико-математического факультета МГУ*

Подписано в печать 13.10.2008 г.

Формат 60×90 1/16. Объем 12,0 п.л.

Заказ 17

Тираж 200 экз.

---

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете  
МГУ г. Москва, Ленинские горы.

---

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета.

Дополнение к пособию "Как решать задачи по теоретической механике"  
И.Л.Антонова.

Текстом между двумя штриховыми линиями следует заменить последний абзац в "Перечне IV", задача 4.11 в книге заменяется задачей 4.11 из дополнения. Дополнить список рекомендуемой литературы.

Пусть  $r$  обозначает вектор-столбец *позиционных* координат, и пусть значения всех этих координат в *рассматриваемом* положении равновесия приведенной системы равны нулю. Обозначим

$$M = \left\| \frac{\partial^2 R_2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right\|_{r=0}, \quad K = \left\| -\frac{\partial^2 R_0}{\partial q_j \partial q_k} \right\|_{r=0},$$

$$G = \left\| \frac{\partial^2 R_1}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_j \partial \dot{q}_k} \right\|_{r=0}, \quad j, k = 1, 2, \dots, s.$$

(IV.21)

( $M$  и  $K$  – симметрические матрицы,  $G$  – кососимметрическая матрица).

Уравнения малых колебаний приведенной системы в этом случае имеют вид (см. [13]):

$$M \ddot{r} + G \dot{r} + K r = 0. \quad (\text{IV.22})$$

Разыскивая решение в форме

$$r = u e^{\lambda t}, \quad u = (u^1, \dots, u^s)^T,$$

получим характеристическое уравнение

$$\det(\lambda^2 M + \lambda G + K) = 0, \quad (\text{IV.23})$$

которое при условии, что  $K$  – положительно определенная матрица, имеет  $2s$  решений:

$$\lambda_{2j-1} = i\omega_j, \quad \lambda_{2j} = -i\omega_j, \quad \omega_j > 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad i - \text{мнимая единица.}$$

Комплексно сопряженным собственным числам  $\lambda_{2j-1}$  и  $\lambda_{2j}$  соответствуют комплексно сопряженные собственные векторы  $u_{2j-1}$  и  $u_{2j}$ , удовлетворяющие уравнениям

$$(-\omega_j^2 M + i\omega_j G + K) u_{2j-1} = 0, \quad (\text{IV.24})$$

$$(-\omega_j^2 M - i\omega_j G + K) u_{2j} = 0. \quad (\text{IV.25})$$

Общее решение задачи о малых колебаниях представляется в виде

$$r(t) = \sum_{j=1}^s ((c_j + i d_j) u_{2j-1} e^{\lambda_{2j-1} t} + (c_j - i d_j) u_{2j} e^{\lambda_{2j} t}), \quad (\text{IV.26})$$

где  $c_j$  и  $d_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  – действительные числа (произвольные постоянные).

Зная решения для позиционных координат, с помощью формул (IV.16) можно найти циклические координаты, как функции времени.

Если  $G = 0$  (система в этом случае называется гироскопически несвязанной) общее решение задачи о малых колебаниях приведенной

системы, после внесения необходимых поправок, связанных с обозначениями, дается формулой (IV.12).

#### Задача 4.11

Найти стационарные движения твердого тела с неподвижной точкой, если эллипсоид инерции тела, построенный в неподвижной точке, представляет собой эллипсоид вращения, и центр тяжести расположен на оси вращения этого эллипсоида (волчок Лагранжа) и написать общее решение задачи о малых колебаниях в окрестности устойчивых стационарных движений.

Решение.

А. Пусть  $O$  – неподвижная точка тела,  $C$  – его центр тяжести. Направим ось  $Oz$  неподвижного трехгранника *вертикально* вверх, а ось  $O\xi$  трехгранника, жестко связанного с телом, по оси вращения эллипсоида инерции, так, чтобы выполнялось соотношение:  $\zeta_C = l > 0$ . Положение подвижного трехгранника относительно неподвижного зададим с помощью углов Эйлера  $\vartheta, \psi, \varphi$  (см. рис. 4.4.1). Функция Лагранжа в этом случае имеет вид (вывод см. в задаче 4.4):

$$L = \frac{1}{2} J_\xi (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} J_\zeta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 - m g l \cos \vartheta. \quad (4.11.1)$$

Координаты  $\psi$  и  $\varphi$  являются циклическими, следовательно, можно ставить вопрос о стационарных движениях.

Б. Запишем циклические интегралы и разрешим их относительно обобщенных скоростей:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_\xi \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + J_\zeta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta = a$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_\zeta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = b,$$

$$(J_\xi \sin^2 \vartheta + J_\zeta \cos^2 \vartheta) \dot{\psi} + J_\zeta \cos \vartheta \dot{\varphi} = a,$$

$$J_\zeta \cos \vartheta \dot{\psi} + J_\zeta \dot{\varphi} = b,$$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} J_\xi \sin^2 \vartheta + J_\zeta \cos^2 \vartheta & J_\zeta \cos \vartheta \\ J_\zeta \cos \vartheta & J_\zeta \end{pmatrix} =$$

$$J_\zeta (J_\xi \sin^2 \vartheta + J_\zeta \cos^2 \vartheta) - (J_\zeta \cos \vartheta)^2 = J_\zeta J_\xi \sin^2 \vartheta$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} a & J_\zeta \cos \vartheta \\ b & J_\zeta \end{pmatrix} = \frac{a - b \cos \vartheta}{J_\xi \sin^2 \vartheta}, \quad (4.11.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} J_\xi \sin^2 \vartheta + J_\zeta \cos^2 \vartheta & a \\ J_\zeta \cos \vartheta & b \end{pmatrix} = \\ &= \frac{b(J_\xi \sin^2 \vartheta + J_\zeta \cos^2 \vartheta) - a(J_\zeta \cos \vartheta)}{J_\zeta J_\xi \sin^2 \vartheta} = \frac{b}{J_\zeta} + \frac{b \cos^2 \vartheta - a \cos \vartheta}{J_\xi \sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \quad (4.11.3)$$

Составим функцию Рауса:

$$R = (L - a \dot{\psi} - b \dot{\varphi}) \Big|_{\dot{\psi} = \frac{a-b \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^2 \vartheta}, \dot{\varphi} = \frac{b}{J_{\xi}} + \frac{b \cos^2 \vartheta - a \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^2 \vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{2} J_{\xi} \left( \left( \frac{a-b \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^2 \vartheta} \right)^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \right) + \frac{(b)^2}{2 J_{\xi}} - m g l \cos \vartheta - a \frac{a-b \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^2 \vartheta} - b \left( \frac{b}{J_{\xi}} + \frac{b \cos^2 \vartheta - a \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^2 \vartheta} \right).$$

Отбросив постоянные величины, получим:

$$R = \frac{1}{2} J_{\xi} \dot{\vartheta}^2 - m g l \cos \vartheta - \frac{(a-b \cos \vartheta)^2}{2 J_{\xi} \sin^2 \vartheta} \Rightarrow R_0 = -m g l \cos \vartheta - \frac{(a-b \cos \vartheta)^2}{2 J_{\xi} \sin^2 \vartheta}.$$

В. Поскольку

$$\frac{\partial R_0}{\partial \vartheta} = m g l \sin \vartheta - \frac{b(a-b \cos \vartheta) \sin \vartheta}{J_{\xi} \sin^3 \vartheta} + \frac{(a-b \cos \vartheta)^2 \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^3 \vartheta},$$

уравнение для нахождения стационарных движений имеет вид:

$$\sin \vartheta \left( m g l - \frac{b(a-b \cos \vartheta)}{J_{\xi} \sin^2 \vartheta} + \frac{(a-b \cos \vartheta)^2 \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^4 \vartheta} \right) = 0. \quad (4.11.4)$$

Так как, по определению,  $0 < \vartheta < \pi$ , и значит  $\sin \vartheta \neq 0$ , из (4.11.4) следует:

$$m g l - \frac{b(a-b \cos \vartheta)}{J_{\xi} \sin^2 \vartheta} + \frac{(a-b \cos \vartheta)^2 \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^4 \vartheta} = 0. \quad (4.11.5)$$

Используя (4.11.2), получим:

$$m g l - b \dot{\psi}^* + J_{\xi} (\dot{\psi}^*)^2 \cos \vartheta^* = 0 \Rightarrow$$

$$\cos \vartheta^* = \frac{b \dot{\psi}^* - m g l}{J_{\xi} (\dot{\psi}^*)^2}, \quad (4.11.6)$$

(звездочками отмечены значения соответствующих величин на стационарном движении).

Для проверки устойчивости найденных стационарных движений вычислим

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial \vartheta^2} = \cos \vartheta \left( m g l - \frac{b(a-b \cos \vartheta)}{J_{\xi} \sin^2 \vartheta} + \frac{(a-b \cos \vartheta)^2 \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^4 \vartheta} \right) +$$

$\sin$

$$\left( -\frac{b^2 \sin \vartheta}{J_{\xi} \sin^3 \vartheta} + 2 \frac{b(a-b \cos \vartheta) \cos \vartheta}{J_{\xi} \sin^3 \vartheta} + \frac{2(a-b \cos \vartheta) b \sin \vartheta \cos \vartheta - (a-b \cos \vartheta)^2 \sin \vartheta}{J_{\xi} \sin^4 \vartheta} - 4 \frac{(a-b \cos \vartheta)^2 \cos^2 \vartheta}{J_{\xi} \sin^5 \vartheta} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\vartheta^*} &= -\frac{b^2}{J_\xi} + 2b\dot{\psi}^* \cos \vartheta^* + 2b\dot{\psi}^* \cos \vartheta^* - J_\xi (\dot{\psi}^*)^2 \sin^2 \vartheta^* - 4J_\xi (\dot{\psi}^*)^2 \cos^2 \vartheta^* = \\ &= -\frac{1}{J_\xi} \left( (b - 2J_\xi \dot{\psi}^* \cos \vartheta^*)^2 + J_\xi^2 (\dot{\psi}^*)^2 \sin^2 \vartheta^* \right) < 0, \end{aligned}$$

следовательно, стационарные движения волчка Лагранжа, определяемые формулой (4.11.6), устойчивы (см. [13]).

Сделаем замену переменных

$$\vartheta = \vartheta^* + \alpha.$$

Новая переменная в соответствии с теорией малых колебаний удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad \omega^2 = \frac{-\frac{\partial^2 R_0}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\vartheta^*}}{J_\xi},$$

общее решение которого имеет вид

$$\alpha(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

следовательно,

$$\vartheta(t) = \vartheta^* + A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (4.11.7)$$

Подставляя выражение (4.11.7) в формулы (4.11.2) и (4.11.3) и интегрируя их по времени, получим решение задачи о малых колебаниях волчка Лагранжа в окрестности рассматриваемого стационарного движения,

Формально, уравнение (4.11.4) имеет еще два семейства стационарных движений, возникающих при выполнении соотношения

$$\sin \vartheta = 0,$$

и отброшенных, ввиду того, что при указанном выше направлении осей неподвижного трехгранника  $Oxyz$ , решения этого уравнения лежат вне области определения угла  $\vartheta$ .

Чтобы понять существуют подобные движения или нет, направим ось  $Oz$  неподвижного трехгранника *горизонтально*, а ось  $Ox$  *вертикально вверх*, сохранив выбор осей подвижного трехгранника, жестко связанного с телом.

Определив углы Эйлера стандартным способом (см. рис. 4.4.1), получим:

$$T = \frac{J_\xi}{2} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{J_\zeta}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2,$$

$$U = -mgx_C = -mgl \sin \vartheta \sin \psi,$$

$$L = \frac{J_\xi}{2} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{J_\zeta}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 - mgl \sin \vartheta \sin \psi,$$

т.е. при новом выборе неподвижного трехгранника система имеет *одну* циклическую координату.

Используя циклический интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_\zeta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = J_\zeta r_0 \Rightarrow \dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi} \cos \vartheta,$$

выполнив стандартную процедуру построения функции Рауса и отбросив постоянные слагаемые, запишем:



$$R = \frac{J_z}{2} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + J_z r_0 \dot{\psi} \cos \vartheta - m g l \sin \vartheta \sin \psi, \quad (4.11.8)$$

$$R_2 = \frac{J_z}{2} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2), \quad R_1 = J_z r_0 \dot{\psi} \cos \vartheta, \quad R_0 = -m g l \sin \vartheta \sin \psi.$$

Система уравнений, определяющая стационарные движения,

$$\frac{\partial R_0}{\partial \vartheta} = -m g l \cos \vartheta \sin \psi = 0,$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial \psi} = -m g l \sin \vartheta \cos \psi = 0,$$

с учетом области определения углов Эйлера, имеет два решения

$$1) \vartheta^* = \frac{\pi}{2}, (\psi^*)_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$2) \vartheta^* = \frac{\pi}{2}, (\psi^*)_2 = \frac{3\pi}{2},$$

задающие стационарные движения волчка с осью, расположенной вертикально: в первом случае центр тяжести находится над неподвижной точкой, во втором - под ней, назовем их соответственно движение 1 и движение 2.

Для решения вопроса об устойчивости найденных стационарных движений, вычислим матрицу вторых производных функции  $R_0(\vartheta, \psi)$  на каждом из движений:

$$\| \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_i \partial q_j} \| = m g l \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi & -\cos \vartheta \cos \psi \\ -\cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \sin \psi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$1) \| \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_i \partial q_j} \|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}, \psi=\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.11.9)$$

$$2) \| \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_i \partial q_j} \|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}, \psi=\frac{3\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.11.10)$$

Соотношение (4.11.10) является *достаточным* условием устойчивости движения 2 (см. [12],[13],[14]). Выполнение равенства (4.11.9), в отличие от аналогичной ситуации в задаче об устойчивости *положения равновесия*, не позволяет сделать вывод об устойчивости или неустойчивости движения 1. Это обстоятельство связано с тем, что структура функции  $R_1$  в рассматриваемой задаче, свидетельствует о наличии в уравнениях Рауса слагаемых, называемых гироскопическими силами (см. [12],[13],[14]).

Для того, чтобы найти решение поставленной задачи во втором случае и разобраться с тем, что происходит в первом, перейдем к переменным, описывающим отклонения от стационарных значений:

$$1) \vartheta = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \psi = \frac{\pi}{2} + \beta,$$

$$2) \vartheta = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \psi = \frac{3\pi}{2} + \gamma,$$

и выпишем квадратичные по отклонениям и скоростям части функции Рауса для обоих случаев:

$$R^*(1) = \frac{J_z}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{m g l}{2} (\alpha^2 + \beta^2) - J_z r_0 \dot{\beta} \alpha,$$

$$R^*(2) = \frac{J_\xi}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\gamma}^2) - \frac{mgl}{2} (\alpha^2 + \gamma^2) - J_\zeta r_0 \dot{\gamma} \alpha.$$

Матрицы, задающие уравнения малых колебаний (см. IV.21), имеют вид:

$$M_1 = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 \\ 0 & J_\xi \end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} -mgl & 0 \\ 0 & -mgl \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} 0 & J_\zeta r_0 \\ -J_\zeta r_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 \\ 0 & J_\xi \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 & J_\zeta r_0 \\ -J_\zeta r_0 & 0 \end{pmatrix},$$

соответственно, сами уравнения для каждого из случаев будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} 1) \quad & J_\xi \ddot{\alpha} + J_\zeta r_0 \ddot{\beta} - mgl \alpha = 0, \\ & J_\xi \ddot{\beta} - J_\zeta r_0 \ddot{\alpha} - mgl \beta = 0, \\ 2) \quad & J_\xi \ddot{\alpha} + J_\zeta r_0 \dot{\gamma} + mgl \alpha = 0, \\ & J_\xi \ddot{\gamma} - J_\zeta r_0 \dot{\alpha} + mgl \gamma = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала движение 2, так как для него вопрос об устойчивости решен.

Характеристическое уравнение (уравнение собственных частот) для этого движения имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} J_\xi \lambda^2 + mgl & J_\zeta r_0 \lambda \\ -J_\zeta r_0 \lambda & J_\xi \lambda^2 + mgl \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (J_\xi \lambda^2 + mgl)^2 + (J_\zeta r_0 \lambda)^2 = 0. \quad (4.11.11)$$

Полагая  $\lambda = i\omega$ , получим:

$$\begin{aligned} & (-J_\xi \omega^2 + mgl)^2 - (J_\zeta r_0)^2 \omega^2 = 0 \Rightarrow \\ & ((-J_\xi \omega^2 + mgl) - J_\zeta r_0 \omega)((-J_\xi \omega^2 + mgl) + J_\zeta r_0 \omega) = 0 \Rightarrow \\ & \omega^2 + \frac{J_\zeta r_0}{J_\xi} \omega - \frac{mgl}{J_\xi} = 0 \Rightarrow \omega_{1,3} = -\frac{J_\zeta r_0}{2J_\xi} \pm \sqrt{\left(\frac{J_\zeta r_0}{2J_\xi}\right)^2 + \frac{mgl}{J_\xi}}, \quad (4.11.12) \end{aligned}$$

$$\omega^2 - \frac{J_\zeta r_0}{J_\xi} \omega - \frac{mgl}{J_\xi} = 0 \Rightarrow \omega_{2,4} = \frac{J_\zeta r_0}{2J_\xi} \mp \sqrt{\left(\frac{J_\zeta r_0}{2J_\xi}\right)^2 + \frac{mgl}{J_\xi}} = -\omega_{1,3}. \quad (4.11.13)$$

Из выражений (4.11.12) и (4.11.13) видно, что все корни уравнения (4.11.11) чисто мнимые и образуют две пары комплексно сопряженных чисел.

Решив уравнения (IV.24) и (IV.25), найдем соответствующие собственные векторы

$$u_1 = \begin{pmatrix} i \\ \frac{mgl - J_\xi \omega_1^2}{J_\zeta r_0 \omega_1} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} i \\ \frac{mgl - J_\xi \omega_3^2}{J_\zeta r_0 \omega_3} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -i \\ \frac{mgl - J_\xi \omega_1^2}{J_\zeta r_0 \omega_1} \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -i \\ \frac{mgl - J_\xi \omega_3^2}{J_\zeta r_0 \omega_3} \end{pmatrix},$$

и запишем общее решение системы уравнений для движения 2:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = & (c_1 + i d_1) u_1 e^{i \omega_1 t} + (c_1 - i d_1) u_2 e^{-i \omega_1 t} + (c_2 + i d_2) u_3 e^{i \omega_2 t} + (c_2 - i d_2) u_4 e^{-i \omega_2 t} = \\
 & ((c_1 \cos \omega_1 t - d_1 \sin \omega_1 t) + i(d_1 \cos \omega_1 t + c_1 \sin \omega_1 t)) u_1 + \\
 & ((c_1 \cos \omega_1 t - d_1 \sin \omega_1 t) - i(d_1 \cos \omega_1 t + c_1 \sin \omega_1 t)) u_2 + \\
 & ((c_2 \cos \omega_3 t - d_2 \sin \omega_3 t) + i(d_2 \cos \omega_3 t + c_2 \sin \omega_3 t)) u_3 + \\
 & ((c_2 \cos \omega_3 t - d_2 \sin \omega_3 t) - i(d_2 \cos \omega_3 t + c_2 \sin \omega_3 t)) u_4 = \\
 & = 2 \left( \frac{-(d_1 \cos \omega_1 t + c_1 \sin \omega_1 t)}{\frac{m g l - J_\xi \omega_1^2}{J_\xi r_0 \omega_1}} (c_1 \cos \omega_1 t - d_1 \sin \omega_1 t) \right) + 2 \left( \frac{-(d_2 \cos \omega_3 t + c_2 \sin \omega_3 t)}{\frac{m g l - J_\xi \omega_3^2}{J_\xi r_0 \omega_3}} (c_2 \cos \omega_3 t - d_2 \sin \omega_3 t) \right).
 \end{aligned}$$

Определив из начальных условий значения произвольных постоянных  $c_1, d_1, c_2, d_2$  найдем:

$$\begin{pmatrix} \vartheta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} + \alpha(t) \\ \frac{3\pi}{2} + \gamma(t) \end{pmatrix}. \quad (4.11.14)$$

Используя циклический интеграл, получим соотношение:

$$\dot{\varphi}(t) = r_0 - \dot{\psi}(t) \cos \vartheta(t) \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + r_0 t - \int_0^t \dot{\psi}(x) \cos \vartheta(x) dx,$$

которое вместе с формулами (4.11.14) дает решение задачи о малых колебаниях в окрестности стационарного движения 2.

Вернемся, теперь, к движению 1 и запишем для него характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} J_\xi \lambda^2 - m g l & J_\xi r_0 \lambda \\ -J_\xi r_0 \lambda & J_\xi \lambda^2 - m g l \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (J_\xi \lambda^2 - m g l)^2 + (J_\xi r_0 \lambda)^2 = 0, \quad (4.11.15)$$

$$\begin{aligned}
 \lambda = i \omega \Rightarrow & (-J_\xi \omega^2 - m g l)^2 - (J_\xi r_0)^2 \omega^2 = 0 \Rightarrow \\
 & ((-J_\xi \omega^2 - m g l) - J_\xi r_0 \omega)((-J_\xi \omega^2 - m g l) + J_\xi r_0 \omega) = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\omega^2 + \frac{J_\xi r_0}{J_\xi} \omega + \frac{m g l}{J_\xi} = 0 \Rightarrow \omega_{1,3} = -\frac{J_\xi r_0}{2 J_\xi} \pm \sqrt{\left(\frac{J_\xi r_0}{2 J_\xi}\right)^2 - \frac{m g l}{J_\xi}}, \quad (4.11.16)$$

$$\omega^2 - \frac{J_\xi r_0}{J_\xi} \omega + \frac{m g l}{J_\xi} = 0 \Rightarrow \omega_{2,4} = \frac{J_\xi r_0}{2 J_\xi} \mp \sqrt{\left(\frac{J_\xi r_0}{2 J_\xi}\right)^2 - \frac{m g l}{J_\xi}} = -\omega_{1,3}, \quad (4.11.17)$$

Из формул (4.11.16) и (4.11.17) видно, что если

$$\left(\frac{J_\xi r_0}{2 J_\xi}\right)^2 < \frac{m g l}{J_\xi},$$

*действительная часть*, по крайней мере, одного из корней уравнения (4.11.15) будет *положительной*, и, следовательно, по теореме Ляпунова о неустойчивости (см. [12],[13],[14]) стационарное движение 1 будет *неустойчиво*.

Если же справедливо неравенство

$$\left(\frac{J_{\xi} r_0}{2J_{\xi}}\right)^2 \geq \frac{mg l}{J_{\xi}}, \quad (4.11.18)$$

называемое условием Маиевского-Четаева (см. [12],[13],[14]), то *все* корни уравнения (4.11.15) являются *чисто мнимыми*, и, в этом случае, можно дословно повторить процедуру построения решения задачи о малых колебаниях, проведенную выше.

Г. То обстоятельство, что *все* корни характеристического уравнения являются *чисто мнимыми*, вообще говоря, *не* может служить основанием для утверждения об устойчивости соответствующего движения, однако в рассматриваемой задаче выполнение условия (4.11.18) действительно гарантирует устойчивость движения 1 (доказательство см. в [12],[14]).

Дополнения к списку рекомендуемой литературы:

[12] Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М., Эдиториал УРСС, 1998.

[13] Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М., изд-во "Наука", гл.ред.физ.-мат.лит., 1971.

[14] Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М., "Наука", гл.ред.физ.-мат.лит., 1988.