Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

С. М. Вишнякова, В. И. Вишняков, Н. А. Гладков

Определение момента инерции маятника Максвелла

Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу общей физики

BAUMANPRESS

Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2016

УДК 531(076)
ББК 22.2
В55

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: http://www.ebooks.bmstu.ru/catalog/70/book1418.html

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Физика»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве методических указаний*

Вишнякова, С. М.

В55 Определение момента инерции маятника Максвелла : методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу общей физики / С. М. Вишнякова, В. И. Вишняков, Н. А. Гладков. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. — 16, [4] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4398-7

На примере маятника Максвелла, который одновременно находится во вращательном движении и совершает поступательное перемещение, рассмотрена динамика сложного движения твердого тела. Из динамических и кинематических уравнений движения получена расчетная формула для определения момента инерции маятника Максвелла относительно оси, совпадающей с его осью симметрии. Для нахождения числового значения момента инерции маятника Максвелла и оценки погрешностей его определения предложен графический способ.

Для студентов первого курса всех специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 531(076)
ББК 22.2

ISBN 978-5-7038-4398-7

Предисловие

Лабораторная работа выполняется в целях закрепления и конкретизации теоретического материала по разделу курса общей физики «Физические основы механики», ее содержание базируется на материале, изложенном в лекциях и учебной литературе, рекомендованной для дисциплины «Физика».

Практически все современные механизмы — устройства, создание которых, эффективность их функционирования невозможны без знания законов классической механики. Будущий инженер должен знать основные физические законы, включая границы их применимости, уметь использовать эти знания в решении конкретных естественнонаучных и технических проблем.

В данной лабораторной работе основные законы механического движения рассматриваются в применении к колебательному движению твердого тела — маятника Максвелла. Для развития навыка проведения физико-математического анализа физической ситуации студенты знакомятся с тремя вариантами описания движения маятника. В экспериментальной части определяют время движения маятника, используя для измерения промежутков времени световой барьер, секундомер; момент инерции маятника Максвелла находят графическим способом, рекомендованным в методических указаниях. Отчет по выполненной лабораторной работе должен содержать графики, статистическую обработку результатов измерений, выводы, соответствующие цели работы, а также письменные ответы на вопросы, которые даны в методических указаниях, для самопроверки знания и понимания изучаемой темы.

Выполнение данной работы способствует усилению практической направленности образовательного процесса как в целом, так и при изучении дисциплины «Физика».

Цель работы:

1) изучение динамики сложного движения твердого тела на примере маятника Максвелла, который одновременно находится во вращательном движении и совершает поступательное перемещение. Развитие навыка физико-математического анализа физиче-

ской ситуации через ознакомление с тремя вариантами описания движения маятника;

2) практическое освоение одного из методов — графического — определения моментов инерции тел на примере определения момента инерции маятника Максвелла относительно своей оси симметрии;

3) приобретение умения и навыков самостоятельной работы со специальной аппаратурой — световым барьером для измерения промежутков времени;

4) получение представления об одном из методов обработки экспериментальных данных — графическом методе. Проведение статистической обработки результатов измерений и оценка их точности.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Маятник Максвелла (рис. 1) состоит из массивного колеса *1* (рис. 1, *а*) радиусом R с тонким осевым валом *2* радиусом r, который висит на двух нитях *3*. После намотки нитей центр масс коле-

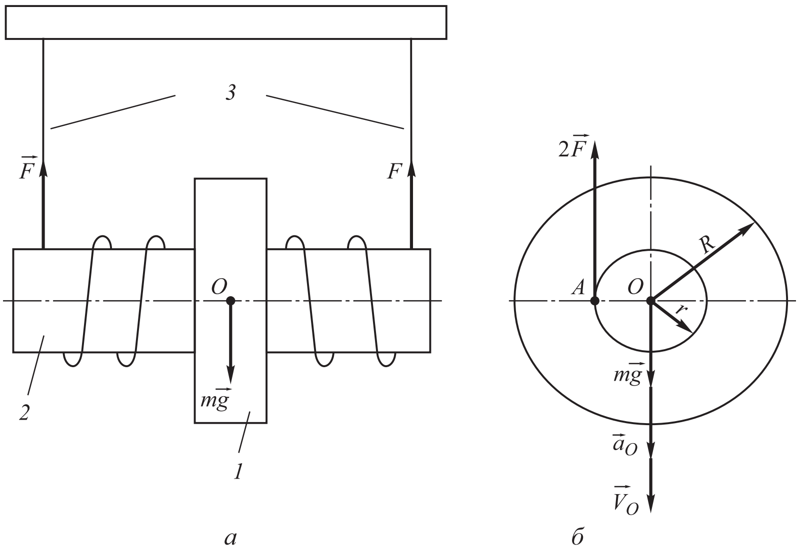

Рис. 1. Схематическое изображение маятника Максвелла

са поднимется на некоторую высоту h. Если после этого колесо отпустить, то оно под действием силы тяжести маятника начнет раскручиваться и опускаться вниз. Очевидно, в крайнем нижнем положении маятника, когда нити размотаются, скорость спуска маятника достигнет максимального значения $V_{O\max}$. При этом ось маятника начнет вращаться вокруг оси, проходящей через концы нитей (точка A, рис. 1, *б*). В результате скорость $V_{O\max}$ станет направленной вертикально вверх, т. е. вектор $\vec{V}_{O\max}$ повернется на 180°. Далее нити начнут наматываться на осевой вал, и маятник начнет подниматься вертикально вверх.

Дойдя до крайнего верхнего положения, маятник начнет вновь опускаться. Таким образом, движения маятника станут повторяться, т. е. маятник Максвелла будет совершать колебательные движения. В отличие от известных нам маятников, которые колеблются по гармоническому закону, маятник Максвелла совершает свободные колебательные движения под действием постоянной по значению и по направлению результирующей силы, т. е. движется с постоянным ускорением, но значения скорости и смещения от положения равновесия повторяются. Отметим, что движение маятника — плоское.

Уравнения движений маятника Максвелла

Сложное движение твердого тела можно разложить на поступательное и вращательное движения по-разному. Мы рассмотрим два варианта.

Первый вариант. Представим сложное движение маятника как сумму поступательного движения в лабораторной (абсолютной) системе отсчета и вращательного движения относительно его оси симметрии, проходящей через центр масс маятника — точку O. Согласно основным законам динамики поступательного и вращательного движений твердого тела и пренебрегая толщиной нитей, уравнения движения маятника при спуске (см. рис. 1) можно записать следующим образом:

$$ma_O = mg - 2F; \tag{1}$$

$$I_O \varepsilon_O = 2Fr_A, \tag{2}$$

где m — масса маятника; F — сила натяжения каждой нити; a_O — ускорение центра масс маятника при спуске; I_O — момент инерции маятника относительно оси симметрии, проходящей через центр масс; ε_O — угловое ускорение маятника вокруг оси; r_A — плечо силы натяжения, равное радиусу осевого вала r, т. е. $r_A = r$. Считаем нить нерастяжимой, тогда скорость центра масс V_O маятника будет равна скорости вращательного движения точек на поверхности осевого вала:

$$V_O = V_{\text{вр}}(r_A) = \omega_O r_A, \tag{3}$$

где ω_O — угловая скорость вращения маятника относительно оси, т. е. оси, проходящей через точку O.

Если продифференцировать выражение (3) по времени t, то приходим к соотношению следующего вида:

$$a_O = \varepsilon_O r_A, \tag{4}$$

где $a_O = \dfrac{dV_O}{dt}$ и $\varepsilon_O = \dfrac{d\omega_O}{dt}$.

Соотношение (4) связывает характеристику поступательного движения — ускорение центра масс a_O — с характеристикой вращательного движения — угловым ускорением ε_O при условии, если нити нерастяжимы. Решая совместно уравнения (1), (2) и (4), для момента инерции маятника Максвелла относительно оси симметрии (относительно оси, проходящей через центр масс), получим формулу

$$I_O = mr^2\left(\frac{g}{a_O} - 1\right). \tag{5}$$

Второй вариант. Момент инерции маятника Максвелла можно определить, если рассмотреть его вращение вокруг мгновенной оси, т. е. оси, положение которой в пространстве непрерывно изменяется, но точки этой оси относительно лабораторной системы отсчета в каждый момент времени имеют скорость, равную нулю.

Так как скорость центра масс $\vec{V}_O$ и скорость вращательного движения $\vec{V}_{\text{вр}}(r_A)$ точки A (см. рис. 1, *б*) вокруг оси направлены в противоположные стороны, а в силу условия (3) равны, то абсолютная скорость $\vec{V}_A$ точки A оказывается равной нулю:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{\text{вр}}(r_A) = \vec{V}_O + [\vec{\omega}_O \vec{r}_A] = 0.$$

Через точку A параллельно оси симметрии маятника можно провести новую ось, ось A, скорость которой в каждый рассматриваемый момент времени равна нулю, так называемую мгновенную ось. Тогда движение маятника можно рассматривать только как его вращение в данный момент времени относительно мгновенной оси вращения, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости (см. рис. 1, *б*) и параллельно оси маятника. В этом случае уравнение динамики вращательного движения маятника

$$I_A \varepsilon_A = mgr_A, \tag{6}$$

где ε_A — угловое ускорение маятника относительно мгновенной оси, проходящей через точку A; I_A — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через эту точку A. Согласно теореме Штейнера,

$$I_A = I_O + mr^2. \tag{7}$$

Для того чтобы выйти на ту же формулу (5) для момента инерции I_O маятника Максвелла, надо связать угловое ускорение ε_A с ускорением центра масс a_O. При рассмотрении вращения маятника вокруг мгновенной оси A скорость центра масс V_O является также и скоростью вращения точек, лежащих на оси O, с радиусом вращения, равным радиусу осевого вала, и соответствует

$$V_O = V_{\text{вр}}(r) = \omega_A r. \tag{8}$$

Если продифференцировать (8) по времени t, то получим

$$a_O = \varepsilon_A r. \tag{9}$$

Решая совместно уравнения (6), (7) и (9), получим для определения момента инерции маятника такую же формулу, что и (5).

Поскольку силы, действующие на маятник, сила тяжести, силы натяжения и моменты этих сил не зависят от времени ни по значению, ни по направлению, и поступательное, и вращательное движения будут равнопеременными, т. е. $a_O = \text{const}$ и $\varepsilon_A = \text{const}$. При равнопеременном движении с начальной скоростью, равной нулю, ускорение центра масс a_O можно определить через высоту спуска h и время спуска t_h. Из $h = a_O t_h^2/2$ следует

$$a_O = 2h/t_h^2. \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в (5), получим расчетную формулу для момента инерции маятника Максвелла относительно его оси симметрии:

$$I_O = mr^2\left(\frac{gt_h^2}{2h} - 1\right). \tag{11}$$

Итак, момент инерции маятника Максвелла можно определить, если измерить расстояние h и время прохождения маятником этого расстояния t_h. Формулу (5) можно получить также и *третьим способом* — из уравнения, соответствующего закону сохранения энергии,

$$mgh = \frac{mV_O^2}{2} + \frac{I_O\omega_O^2}{2}, \tag{12}$$

где mgh — потенциальная энергия маятника в начальный момент времени, т. е. на высоте h; $mV_O^2/2$ — кинетическая энергия поступательного движения маятника и $I_O\omega_O^2/2$ — кинетическая энергия вращательного движения маятника относительно оси O в конце спуска при $t = t_h$. При этом надо учесть, что, согласно (3), скорость центра масс $V_O = \omega_O r$, а $V_O^2 = 2a_O h$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Описание лабораторной установки

Общий вид экспериментальной установки представлен на рис. 2. Маятник Максвелла *2*, висящий на двух нитях, расположен между двумя стойками. Свободные концы нитей прикреплены к горизонтальной перекладине. При этом одна нить прикреплена к регулировочному винту. Используя этот винт, можно установить ось колеса точно в горизонтальное положение. При вращении колеса вокруг его оси нити равномерно наматываются на осевой вал так, как это показано на рис. 1, *а*. При этом плотность витков должна быть приблизительно одинаковой на обоих концах вала. До начала движения нити всегда необходимо намотать в одном и том же направлении. После намотки нитей центр колеса поднимется на некоторую высоту h. Если после этого колесо отпустить, то оно под действием силы тяжести маятника и сил натяжения начнет раскручиваться и опускаться вниз.

На третьей стойке закреплено спусковое устройство *3*, в которое входит игла, спусковой тросик, электросистема, связывающая с помощью двух соединительных проводов спусковое устройство и счетчик времени. Игла вставляется в одно из углублений на ободе колеса и с помощью тросика удерживает колесо от движения либо освобождает его. Положение кнопки тросика можно фиксировать

Рис. 2. Общий вид установки

стопорным винтиком или пальцем руки (как в тросике для фотоаппарата). Спусковое устройство должно быть отрегулировано так, чтобы после старта колесо не колебалось и не крутилось.

На четвертой стойке установлен вилкообразный световой барьер *1* со счетчиком времени. На верхней панели светового барьера расположены дисплей для вывода результатов отсчета, кнопка Set (сброс), рычажок для установления режимов отсчета (число пересечений светового луча барьера и промежутков времени).

Методика выполнения эксперимента

Задачи и порядок выполнения работы

Согласно расчетной формуле (11) для определения момента инерции маятника Максвелла необходимо измерить расстояние h и время прохождения маятником этого расстояния t_h. Для измерения времени предлагается воспользоваться одним из двух описанных ниже вариантов. Числовое значение момента инерции маятника Максвелла определяется графическим способом. В конце работы проводится обработка и анализ полученных результатов.

Алгоритм проведения эксперимента сводится к следующим операциям.

1. Измеряется время спуска маятника с разных высот, начиная с высоты h = 0,50 м до высоты h = 1,00 м с интервалом Δh = 0,10 м. Для каждой высоты время спуска определяется 3 раза: t_1, t_2, t_3. Затем определяется среднее время спуска с данной высоты.

2. Эти данные заносят в таблицу. При вычислениях ускорение свободного падения берется равным g = 9,8 м/с^2.

Таблица

h, м	t_i, с	$t_h = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} t_i$, с	t_h^2, с^2	$\frac{1}{2} g t_h^2$, м
0,50	$t_1 =$ $t_2 =$ $t_3 =$			
0,60				
…				
1,00				

Задание высоты спуска и измерение времени движения маятника Максвелла может проводиться в двух вариантах.

Вариант А

1. На вертикальной шкале с помощью оранжевых верхнего и нижнего реперов установить высоту h.

2. Наматывая нити на осевой вал, поднять маятник к верхней точке шкалы, на которую указывает верхний репер, так, чтобы ось вала находилась на одном уровне с концом репера. Секундомер привести в исходное рабочее состояние.

3. Отпустить маятник и одновременно включить секундомер.

4. При прохождении осью маятника нижнего репера закончить измерение времени спуска маятника (нажать на кнопку «Стоп» секундомера).

5. Для данной высоты опыт повторить 3 раза, записав показания секундомера t_i в таблицу.

6. Определить среднее время спуска с данной высоты h по формуле

$$t_h = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} t_i .$$

7. Результаты опытов занести в таблицу.

Вариант Б

1. Подсоединить спусковое устройство к световому барьеру, как это показано на рис. 2.

2. На панели светового барьера аккуратно установить рычажок переключения режимов отсчета в положение (соответствует трем огонькам на дисплее).

3. Нажать кнопку Set светового барьера. Нажать кнопку Set еще раз (подготовка к новому отсчету).

4. Нажать кнопку тросика так, чтобы игла вошла в углубление на ободе колеса и удерживала его от движения. Зафиксировать положение кнопки с помощью стопорного винтика или удерживать пальцем (как в фотоаппарате для длительной экспозиции). Ось колеса должна при этом сохранять горизонтальное положение.

5. Отпустить кнопку тросика. При этом колесо начнет движение и включится счетчик времени.

6. После того, как колесо пройдет иглу (чтобы не помешать движению колеса), кнопку тросика надо **опять нажать** и **удерживать** в нажатом состоянии до того момента, пока ось колеса не приблизится к световому лучу, и **отключить до пересечения луча**. Отсчет времени заканчивается при пересечении светового луча барьера. На дисплее высвечивается время движения маятника из состояния покоя (с начальной скоростью, равной нулю) до момента пересечения луча.

Отсчет времени начинается с момента отпускания кнопки тросика для начала движения колеса.

Счетчик останавливается, как только ось вращения пересекает путь луча света вилкообразного светового барьера.

Пояснение. В установленном режиме работы счетчик времени включается при первом пересечении луча и выключается при третьем пересечении, т. е. показывает промежуток времени между первым и третьим прерыванием луча. В системе спусковое устройство — световой барьер первое отпускание кнопки тросика (начало движения колеса) имитирует первое пересечение луча, второе отпускание кнопки во время движения колеса имитирует второе пересечение луча, третье пересечение луча производится самим колесом.

7. Из описания работы системы спусковое устройство — световой барьер следует способ задания высоты спуска. Высота h равна расстоянию от положения осевого вала в состоянии покоя до положения луча светового барьера. Это расстояние можно изменять, перемещая либо спусковое устройство, т. е. исходное положения маятника, либо световой барьер. Рекомендуется перемещать световой барьер.

Обработка результатов измерений

Расчет момента инерции маятника Максвелла графическим способом

Преобразуем формулу (11) к несколько иному виду:

$$\frac{gt_h^2}{2} = \left(1 + \frac{I_O}{mr^2}\right)h,$$

отсюда видно, что $gt_h^2/2$ и h связаны линейно, т. е. $gt_h^2/2 = Ch$, где $C = \left(1 + \frac{I_O}{mr^2}\right)$ — коэффициент пропорциональности.

Если по оси ординат y откладывать величину $gt_h^2/2$, а по оси абсцисс x — величину h, то $C = \operatorname{tg}\alpha$, т. е. угол α определяет наклон графика к оси h (рис. 3). Итак,

$$\operatorname{tg}\alpha = 1 + \frac{I_O}{mr^2}. \tag{13}$$

1. Результаты расчетов из таблицы нанести в виде точек на график в системе координат $x = h$, $y = gt_h^2/2$. Провести прямую линию (см. рис. 3), проходящую через начало координат так, что-

бы число экспериментальных точек справа и слева от прямой было приблизительно одинаковым.

2. Вычислить $\text{tg}\,\alpha = \Delta y / \Delta x$. При этом для расчета этой величины надо брать наиболее удаленную от начала координат точку прямой.

3. Определить угол α в радианах по формуле $\alpha = \text{arctg}\dfrac{g t_h^2}{2h}$.

4. Момент инерции маятника Максвелла рассчитать, согласно (13), по формуле:

$$I_O = m r^2 (\text{tg}\,\alpha - 1), \tag{14}$$

где масса маятника Максвелла m = 0,436 кг, а радиус осевого вала r = 2,5 мм.

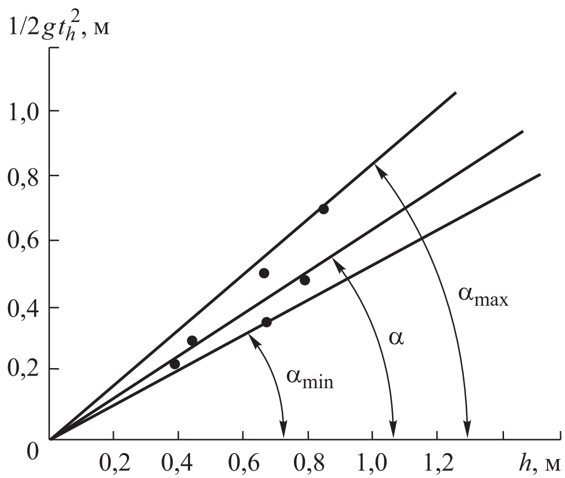

Рис. 3. Графический способ обработки результатов измерений

Расчет погрешностей измерений

Момент инерции маятника Максвелла I_O зависит, согласно (14), от массы m, радиуса вала r, а также от α — угла наклона прямой на рис. 3, т. е. I_O является функцией от этих величин:

$$I_O = I_O(m, r, \alpha). \tag{15}$$

Поэтому, согласно общему выражению для вычисления погрешности косвенного измерения (см. дополнительную литературу) и в соответствии с формулами (14), (15), приходим к формуле следующего вида:

$$\Delta I_O = \sqrt{\left(\frac{\partial I_O}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I_O}{\partial r}\Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial I_O}{\partial \alpha}\Delta \alpha\right)^2}. \qquad (16)$$

Масса m и радиус осевого вала r маятника Максвелла, входящие в формулу (14), определяются с достаточно малой относительной погрешностью:

$$m = (436 \pm 1) \cdot 10^{-3} \text{ кг},$$
$$r = (2,50 \pm 0,01) \text{ мм}.$$

Поэтому абсолютная погрешность определения ΔI_O будет зависеть в основном от точности определения угла α, вернее, от абсолютной погрешности угла α, т. е. от $\Delta\alpha$.

Считая, что первое и второе слагаемые под знаком радикала в формуле (16) являются величинами меньшего порядка по сравнению с третьим слагаемым, первым и вторым слагаемыми можно пренебречь. Следовательно, (16) в этом случае примет более простую форму записи:

$$\Delta I_O = \frac{\partial I_O}{\partial \alpha}\Delta\alpha. \qquad (17)$$

Далее, определяя производную в (17) в соответствии с зависимостью (14), находим формулу, позволяющую рассчитать абсолютную погрешность измерения момента инерции маятника Максвелла:

$$\Delta I_O = \frac{mr^2}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha. \qquad (18)$$

Абсолютная погрешность угла α, т. е. $\Delta\alpha$, определяется по результатам эксперимента и в соответствии с рис. 3. Итак,

$$\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha \qquad (19)$$

или

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_{\min}, \qquad (20)$$

где углы $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$ соответствуют углам наклона прямых, проходящих через начало координат и проведенных через экспериментальные точки, которые определяют соответственно максимальный угол наклона прямой $\alpha_{\max}$ либо минимальный угол наклона прямой $\alpha_{\min}$ (см. рис. 3). Эти углы рассчитывают в радианах по методике, которая ранее использовалась при определении угла α. В формулу (18) подставляется наибольшее значение $\Delta\alpha$, рассчитанное по формулам (19) и (20).

В выводах о проделанной работе студентам необходимо отметить основные положения для получения расчетной формулы момента инерции маятника Максвелла (метод определения), способ обработки экспериментальных данных (получение числового значения и расчет погрешностей). Результат представить в следующем виде: «По результатам проведенного эксперимента момент инерции маятника Максвелла относительно оси, совпадающей с его осью симметрии, $I_O \mp \Delta I_O = ...$ с относительной погрешностью $E = \Delta I_O / I_O \cdot 100\ \% = \ldots$ ».

Контрольные вопросы и задания

1. Какие свойства тела при вращении характеризует такая физическая величина, как момент инерции? Чему равен момент инерции материальной точки, системы материальных точек, твердого тела относительно неподвижной оси вращения?

2. Записать и сформулировать теорему Штейнера, пояснив ее содержание рисунком.

3. Написать уравнение поступательного движения, т. е. уравнение движения центра масс, маятника Максвелла в абсолютной (лабораторной) системе отсчета и уравнение вращательного движения вокруг оси, совпадающей с осью симметрии маятника и проходящей через его центр масс. Содержание уравнения пояснить и обосновать.

4. Написать уравнение движения маятника Максвелла относительно мгновенной оси вращения, проходящей через точку A, параллельно оси симметрии маятника. Содержание уравнения пояснить и обосновать.

5. Написать закон сохранения энергии при движении маятника Максвелла. Содержание записанного уравнения пояснить и обосновать.

6. Показать, что формула (5) может быть получена из закона сохранения энергии.

7. В чем состоит графический способ нахождения числового значения момента инерции маятника Максвелла?

Литература

Основная

Иродов И.Е. Механика. Основные законы: учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 309 с.

Савельев И.В. Курс общей физики: учеб. пособие для вузов: в 3 т. / И.В. Савельев. Т. 1: Механика. Молекулярная физика. СПб.: Лань, 2011. 432 с.

Дополнительная

Савельева А.И., Фетисов И.Н. Обработка результатов измерений при проведении физического эксперимента: метод. указания к лаб. работе М-1 по курсу общей физики / А.И. Савельева, И.Н. Фетисов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 29 с.

Содержание

Учебное издание

Вишнякова Софья Михайловна
Вишняков Виктор Ильич
Гладков Николай Алексеевич

Определение момента инерции маятника Максвелла

Редактор *Д.С. Пирогова*
Художник *Я.М. Ильина*
Корректор *Р.В. Царева*
Компьютерная верстка *О.В. Беляевой*

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Подписано в печать 03.03.2016. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 1,25. Тираж 100 экз. Изд. №027-2016. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com