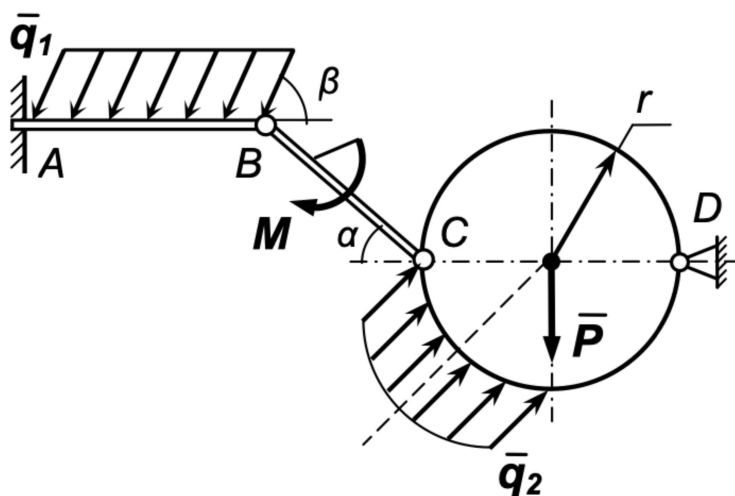


ПЛОСКАЯ СТАТИКА

Задача №1

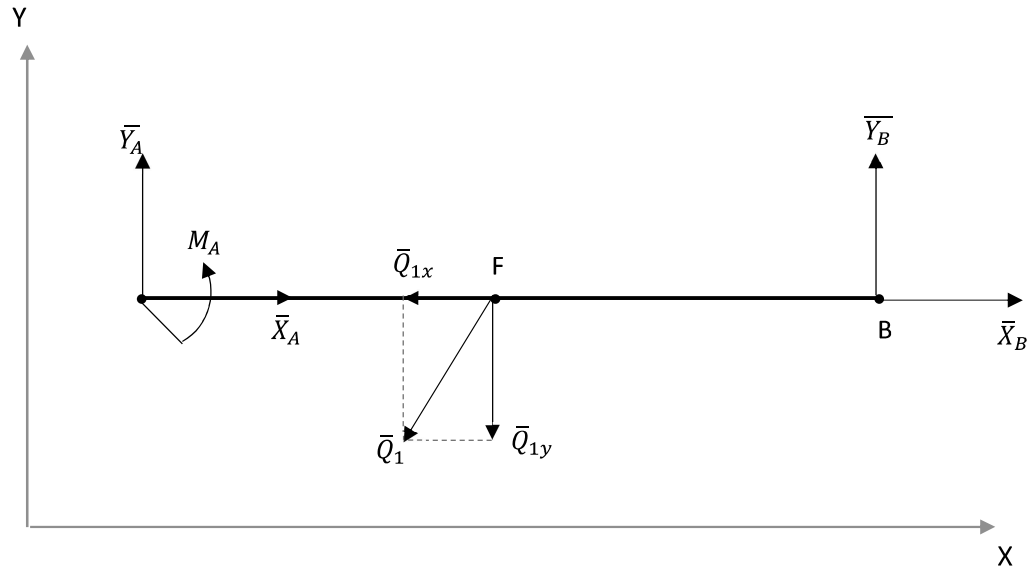
Механизм находится в равновесии с учетом того, что к нему приложены соответствующие силы. Расстояние между соседними точками A, B, C равны l , углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $r = 0,4l$. Величины $M = Pl$, $q = P / l$. Определить реакции опор точек.



1.2

Решение

Освободим тело 1 от связей:



$$AF = FB = \frac{AB}{2} = \frac{l}{2}$$

$$Q_{1x} = q_1 AB \cos \beta = \frac{P}{l} * \frac{l}{2} = \frac{1}{2} P \text{ (Н)}$$

$$Q_{1y} = q_1 AB \sin \beta = \frac{P}{l} * \frac{l\sqrt{3}}{2} = P \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (Н)}$$

Из условия равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = 0$$

$$\Sigma M_A(\vec{F}_k) = 0$$

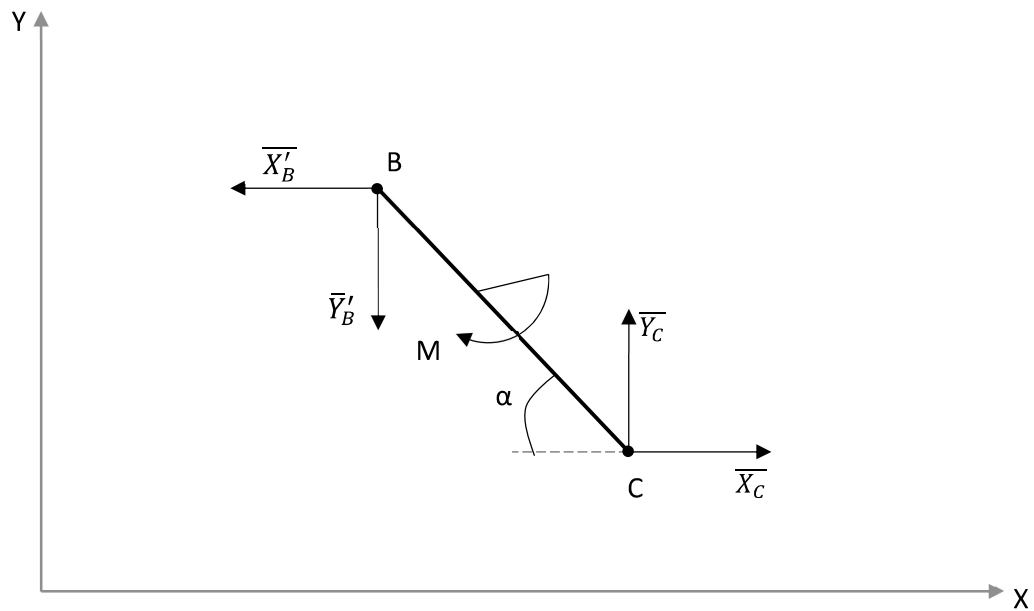
Определим уравнения:

$$\Sigma F_{kx} = X_A + X_B - Q_{1x} = 0 \quad \dots > \quad X_A = Q_{1x} - X_B$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_A + Y_B - Q_{1y} = 0 \quad \dots > \quad Y_A = Q_{1y} - Y_B$$

$$\Sigma M_A(\vec{F}_k) = Y_B * AB - Q_{1y} * AF + M_A = 0 \quad \dots > \quad M_A = Q_{1y} * \frac{AB}{2} - Y_B * AB$$

Освободим тело 2 от связей:



Учтем, что:

$$|\bar{X}'_B| = |\bar{X}_B|$$

$$|\bar{Y}'_B| = |\bar{Y}_B|$$

Из условия равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = 0$$

$$\Sigma M_B(\bar{F}_k) = 0$$

Определим уравнения:

$$\Sigma F_{kx} = X_C - X'_B = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_C - Y'_B = 0$$

$$\Sigma M_B(\bar{F}_k) = Y_C * BC * \cos \alpha + X_C * BC * \sin \alpha - M = 0$$

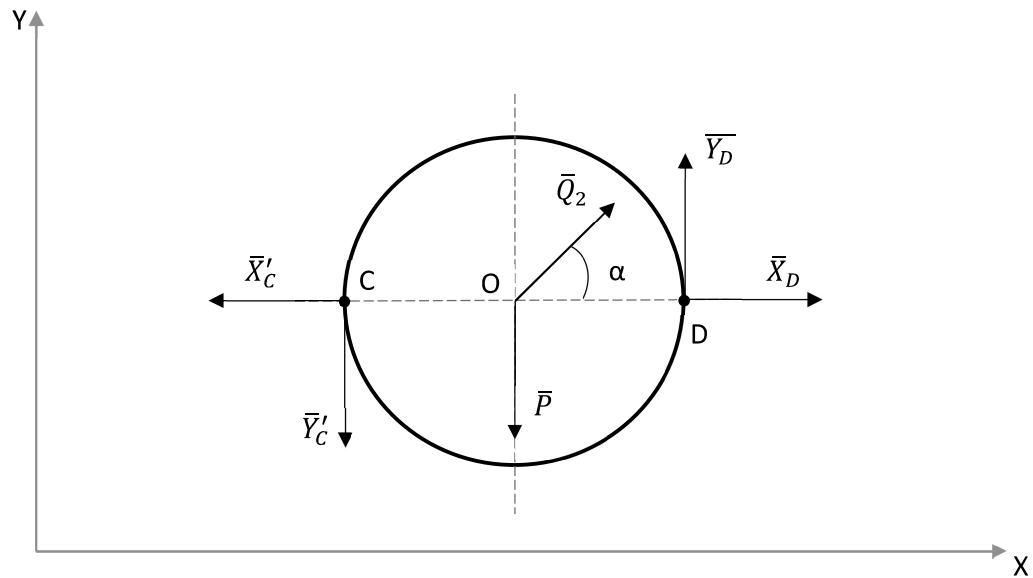
Значит:

$$X_B = X_C$$

$$Y_B = Y_C$$

$$X_C = \frac{M - Y_C * BC \cos \alpha}{BC \sin \alpha} = \frac{M - Y_C * l \frac{\sqrt{2}}{2}}{l \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{M}{l \frac{\sqrt{2}}{2}} - Y_C$$

Освободим тело 3 от связей:



Равнодействующая равномерно распределенных сил по дуге окружности Q равна произведению интенсивности сил q на длину дуги. Обозначим длину дуги C , и возьмем ее четверть:

$$C = \frac{2\pi r}{4} = \frac{0,4\pi l}{2} = 0,63l \text{ (м)}$$

$$Q_2 = q_2 C = \frac{P}{l} * 0,2\pi l = 0,63P \text{ (Н)}$$

Учтем, что:

$$|\bar{X}'_C| = |\bar{X}_C|$$

$$|\bar{Y}'_C| = |\bar{Y}_C|$$

Из условия равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = 0$$

$$\Sigma M_C(\bar{F}_k) = 0$$

Определим уравнения:

$$\Sigma F_{kx} = X_D - X'_C + Q_2 \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_D - Y'_C + Q_2 \sin \alpha - P = 0$$

$$\Sigma M_C(\bar{F}_k) = -P * r + Q_2 * r \sin \alpha + Y_D * 2r = 0$$

ОТВЕТ

Подсчитаем все значения:

$$Y_D = \frac{P \cdot r - Q_2 \cdot r \sin \alpha}{2r} = \frac{P}{2} - 0,2\pi P \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,28P \text{ (H)}$$

$$Y_C = Y_D + Q_2 \cdot \sin \alpha - P = 0,28P + 0,63P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - P = -0,28P \text{ (H)}$$

$$Y_B = Y_C = -0,28P \text{ (H)}$$

$$X_C = \frac{2M}{l\sqrt{2}} - Y_C = \frac{2M}{l\sqrt{2}} + 0,28P \text{ (H)}$$

$$X_D = X_C - Q_2 \cos \alpha = \frac{2M}{l\sqrt{2}} + 0,28P - P = \frac{2M}{l\sqrt{2}} - 0,17P \text{ (H)}$$

$$X_B = X_C = \frac{2M}{l\sqrt{2}} + 0,28P \text{ (H)}$$

$$X_A = Q_{1x} - X_B = \frac{P}{2} - \frac{2M}{l\sqrt{2}} - 0,28P = 0,22P - \frac{2M}{l\sqrt{2}} \text{ (H)}$$

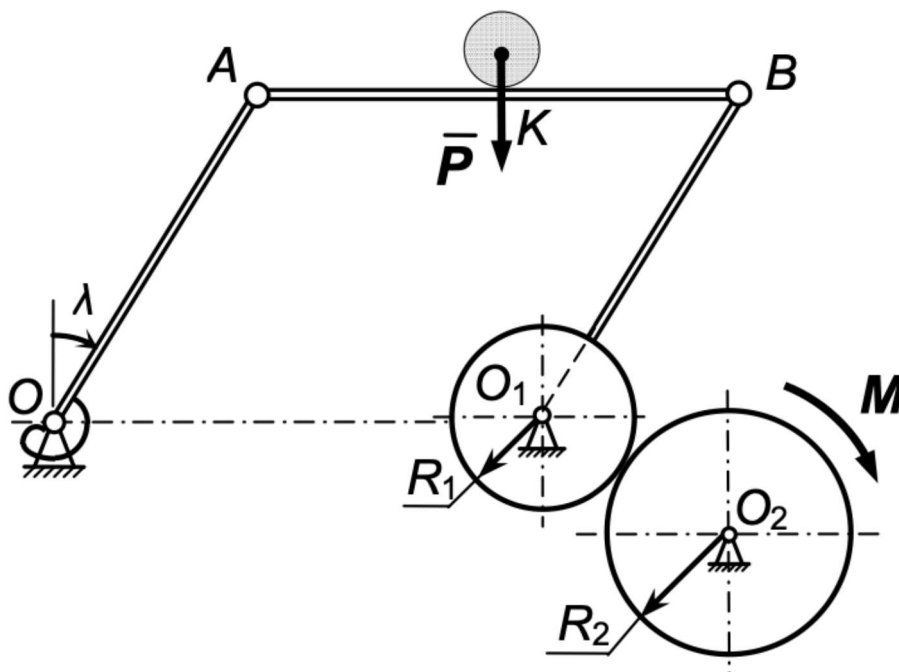
$$Y_A = Q_{1y} - Y_B = P \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,28P = 1,15P \text{ (H)}$$

$$M_A = Q_{1y} \cdot \frac{AB}{2} - Y_B \cdot AB = P \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l}{2} + 0,28P \cdot l = Pl \frac{\sqrt{3}}{4} + 0,43Pl = 0,71Pl \text{ (H*м)}$$

Задача №2

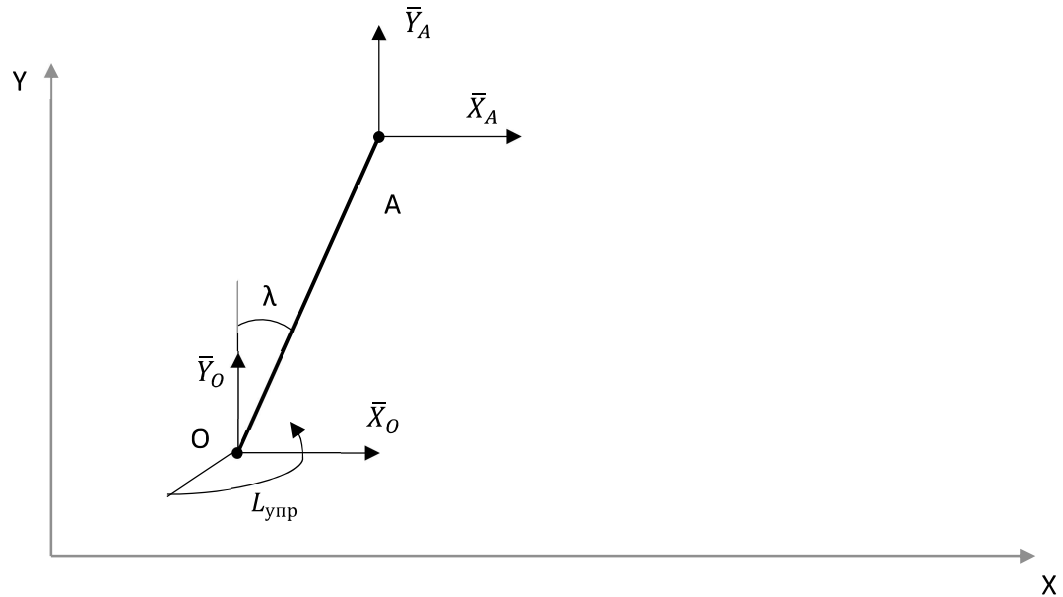
Механизм – спарник – состоит из стержней OA , AB , O_1B и шестерён. Стержни соединены шарнирно между собой и с опорами O , O_1 , стержень OA еще и спиральной пружиной жесткостью c с опорой O . Шестерни O_1 , O_2 находятся в зацеплении. Первая шестерня жёстко скреплена со стержнем O_1B . Определить величину момента пары сил M и реакции опор O_1 , O_2 . При расчетах принять: $OA=OB$, $\lambda=30^\circ$, $\alpha=45^\circ$, $P=100\text{H}$, $R_2=2R_1$, $AK=BK$, $OA=1\text{м}$, $c=20\text{Н}\cdot\text{м/рад}$.

При решении задачи предполагается, что механизм находится в равновесии под действием приложенных к нему сил. Трение в сочленениях элементов отсутствует. В зубчатых зацеплениях угол между полной реакцией и общей касательной плоскостью принимается равным 20° . Предполагается, что катки имеют возможность катиться без скольжения



Решение

Освободим тело 1 от связей



Из условия равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = 0$$

$$\Sigma M_A(\bar{F}_k) = 0$$

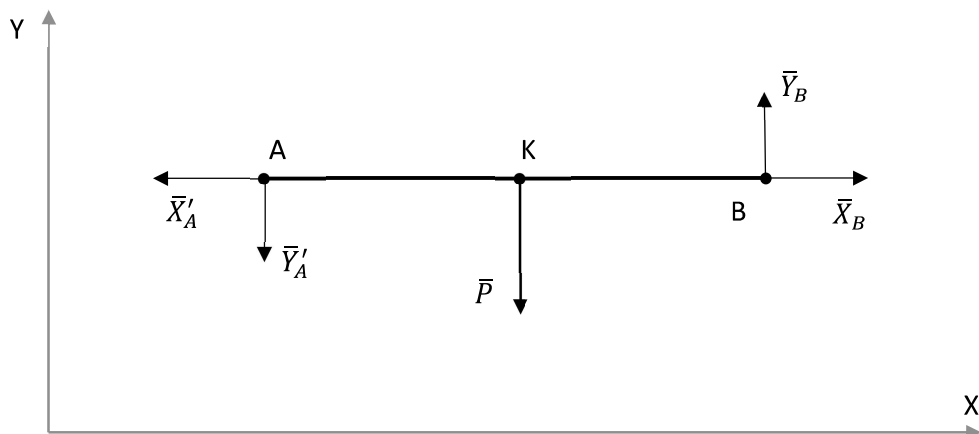
$$L_{упр} = c\lambda = 20 * 0,52 = 10,3 \text{ (Н*м)}$$

$$\Sigma F_{kx} = X_O + X_A = 0 \text{ отсюда } X_O = -X_A$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_O + Y_A = 0 \text{ отсюда } Y_O = -Y_A$$

$$\Sigma M_A(\bar{F}_k) = L_{упр} + X_O * AO * \cos \lambda - Y_O * AO \sin \lambda = 0$$

Освободим тело 2 от связей



Из условия равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = X_B - X'_A = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_B - Y'_A - P = 0$$

$$\Sigma M_A(\vec{F}_k) = -P \cdot AK + Y_B \cdot AB = 0$$

Учтем, что:

$$|\vec{X}_B| = |\vec{X}'_A|$$

$$|\vec{Y}_B| = |\vec{Y}'_A|$$

Найдем значения:

$$Y_B = \frac{P \cdot AK}{AB} = \frac{P \cdot AB}{2AB} = \frac{P}{2}$$

$$Y_A = Y'_A = Y_B - P = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$$

При $P = 100$ (Н)

$$Y_B = 50 \text{ (Н)} \text{ и } Y_A = -50 \text{ (Н)}$$

С учетом, что $X_O = -X_A$ и $Y_O = -Y_A$

$$Y_O = -Y_A = \frac{P}{2}$$

$$Y_O = 50 \text{ (Н)}$$

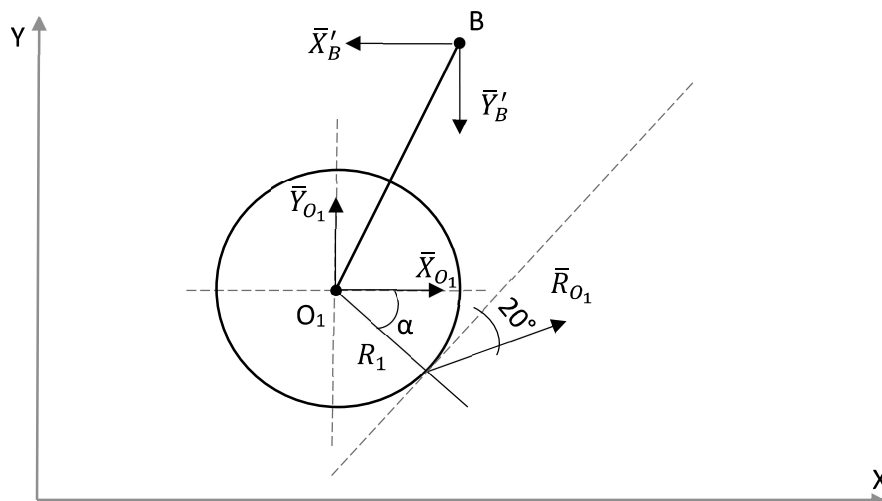
$$X_O = \frac{Y_O \cdot AO \sin \lambda - L_{\text{упр}}}{AO \cos \lambda} = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2c\lambda}{\sqrt{3}} = \frac{P - 4c\lambda}{2\sqrt{3}}$$

$$X_O = 16,8 \text{ (Н)}$$

$$X_A = -X_O \text{ отсюда } X_A = -16,8 \text{ (Н)}$$

$$X_B = X_A \text{ отсюда } X_B = -16,8 \text{ (Н)}$$

Освободим тело 3 от связей



Из условия равновесия:

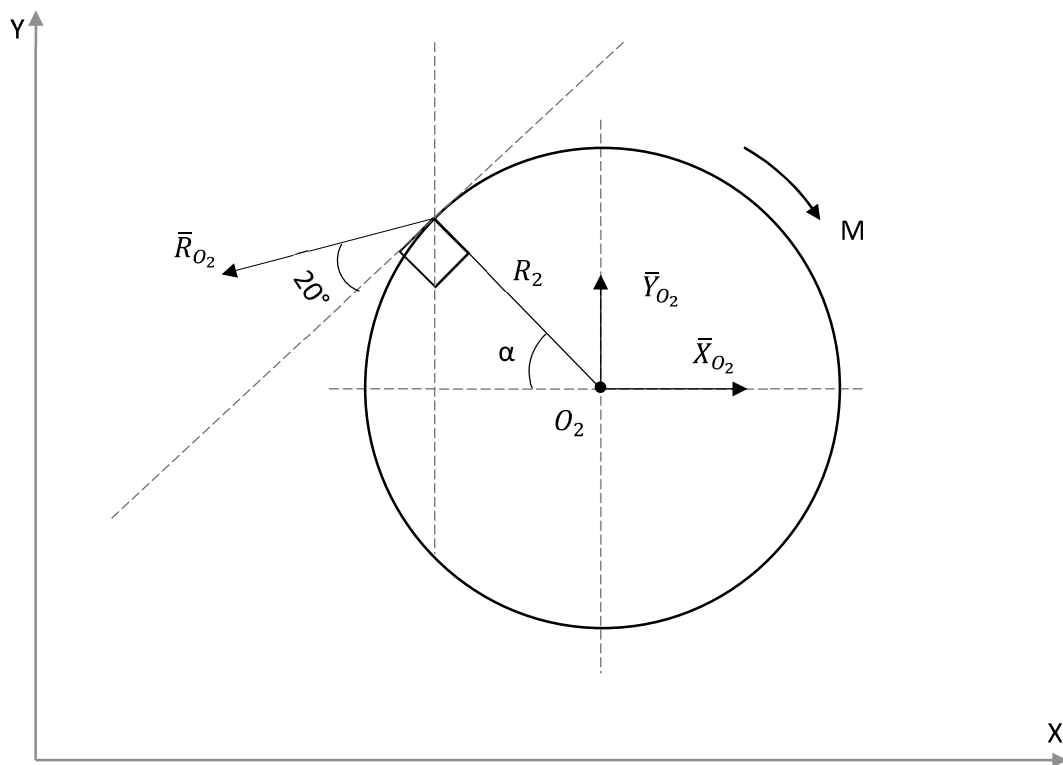
$$\sum F_{kx} = X_{O_1} - X'_B + R_I \sin 65^\circ = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_{O_1} - Y'_B + R_I \cos 65^\circ = 0$$

$$\sum M_{O_1}(\bar{F}_k) = R_{O_1} * R_1 \cos 20^\circ + X_B * O_1 B \cos \lambda - Y_B * O_1 B \sin \lambda = 0$$

$$R_{O_1} = \frac{Y_B * O_1 B \sin \lambda - X_B * O_1 B \cos \lambda}{R_1 \cos 20^\circ}$$

Освободим тело 4 от связей



Искомый угол будет $45 + 20 = 65$ градусов

Из условия равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_{O_2} - R_{O_2} \cos 65^\circ = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_{O_2} - R_{O_2} \sin 65^\circ = 0$$

$$\sum M_{O_2}(\bar{F}_k) = R_{O_2} * R_2 * \cos 20^\circ - M = 0$$

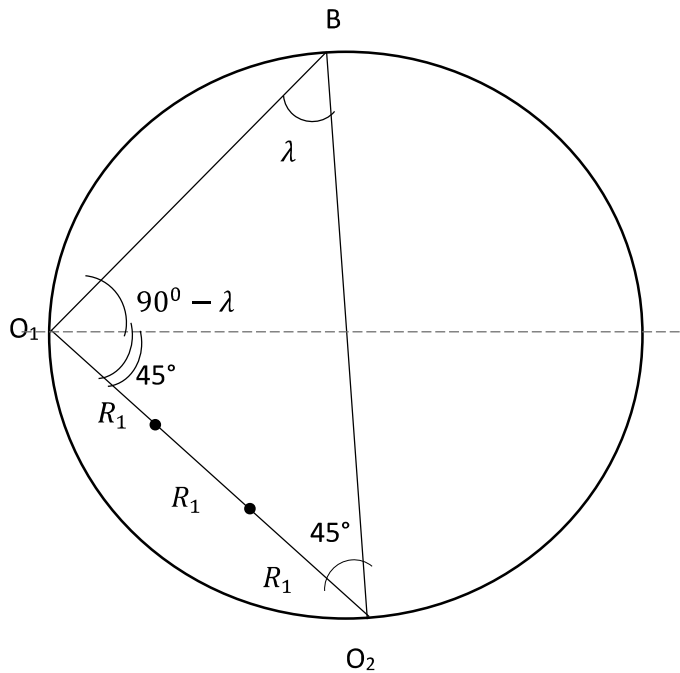
$$M = 2R_{O_2} \cdot R_1 \cos 20^\circ = \frac{2 * (Y_B \cdot O_1 B \sin \lambda - X_B \cdot O_1 B \cos \lambda)}{R_1 \cos 20^\circ} * R_1 \cos 20^\circ$$

$$\text{Так как } R_{O_2} = R_{O_1} = R$$

$$M = 79 \text{ (Н*м)}$$

$$R = R_{O_1} = R_{O_2} = \frac{M}{R_2 \cos 20^\circ}$$

Найдем радиусы и сделаем проверку



$$\angle O_1 O_2 B = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Применяем расширенную теорему синусов к треугольнику $O_1 O_2 B$

$$\frac{O_1 B}{\sin 45^\circ} = \frac{O_1 O_2}{\sin 30^\circ}$$

$$O_1 O_2 = \frac{O_1 B \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$O_1 O_2 = 0,7 \text{ м}$$

$O_1 O_2$ складывается из $R_2 + R_1 = 2R_1 + R_1 = 3R_1$

$$R_1 = 0,23 \text{ (м)}$$

$$R_2 = 0,46 \text{ (м)}$$

$$R = \frac{M}{R_2 \cos 20^\circ}$$

$$R = 182 \text{ (Н)}$$

$$M = 79 \text{ (Н*м)}$$

$$X_{O_2} = R_{O_2} \cos 65^\circ = 182 \cos 65^\circ = 77 \text{ (Н)}$$

$$Y_{O_2} = R_{O_2} \sin 65^\circ = 182 \sin 65^\circ = 164 \text{ (Н)}$$

$$X_{O_1} = X'_B - R_{O_1} \cos 65^\circ = -16,78 - 77 = -93,78 \text{ (Н)}$$

$$Y_{O_1} = Y'_B - R_{O_1} \cos 65^\circ = 50 - 164 = -114 \text{ (Н)}$$

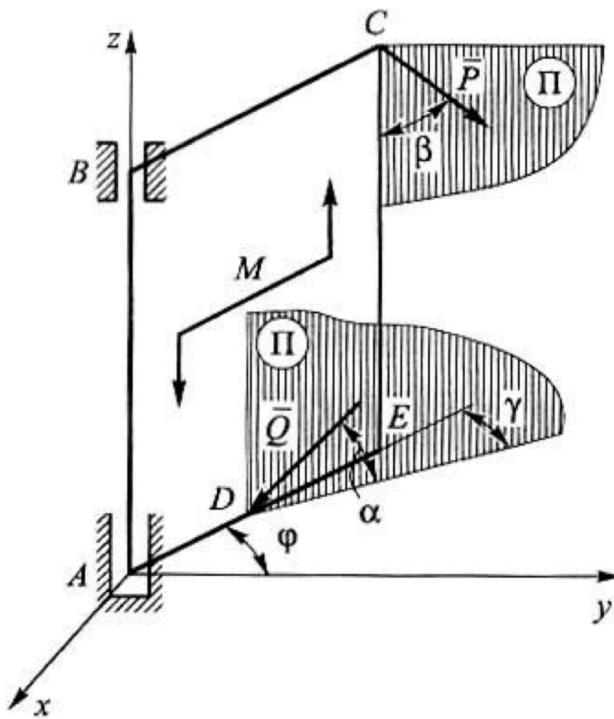
ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТАТИКА

Задача №1

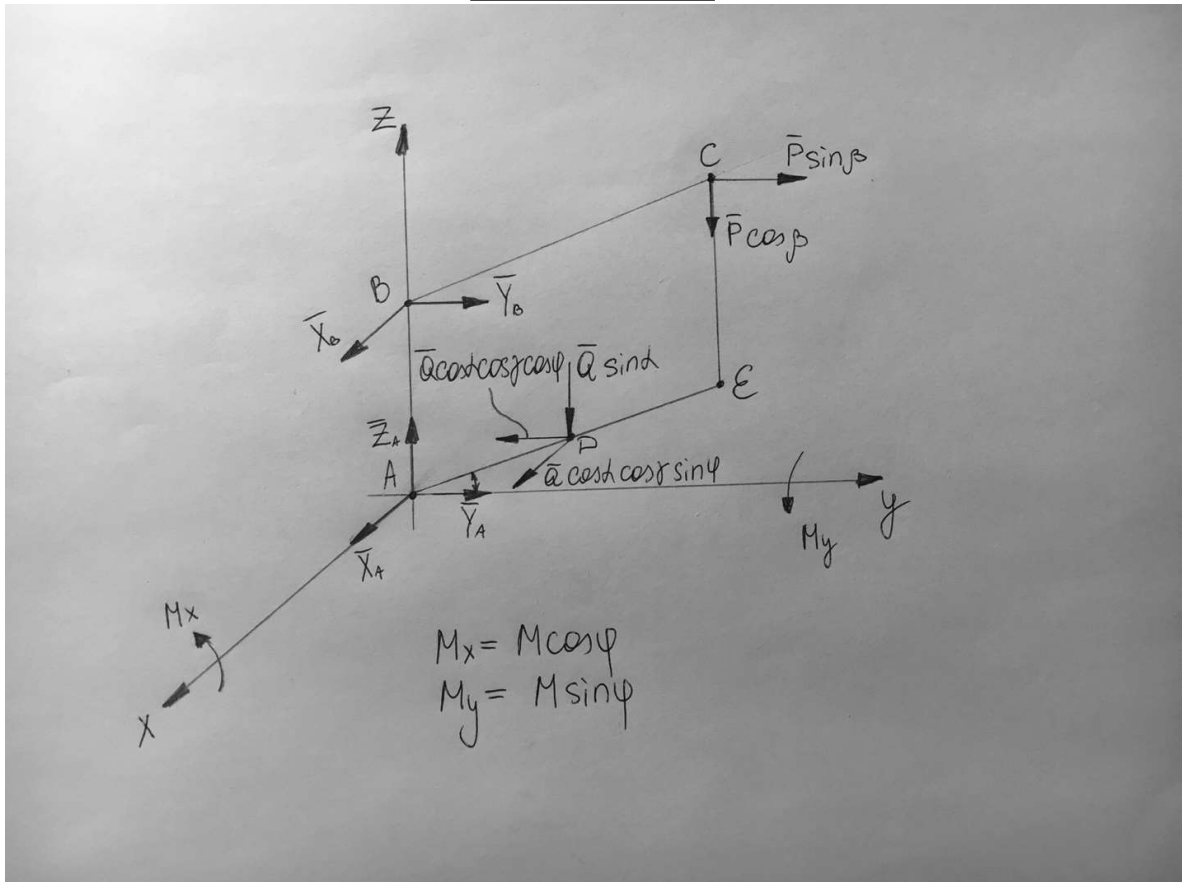
Определить реакции сферического шарнира или подпятника А и подшипника В, необходимую для равновесия силу Q. Точка D, к которой приложена Q, лежит на середине соответствующего отрезка.

Принять как заданные величины P и l , при этом $l_1 = 2l, R = 2r = l, M = 0,5Pl, AB = 2BC = 2l, \alpha = \gamma = 30^\circ, \beta = \varphi = 60^\circ$. При этом углы α и β отсчитываются в вертикальных плоскостях, а углы γ и φ – в горизонтальных.

1.02



Решение



Условия равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = 0$$

$$\Sigma F_{kz} = 0$$

$$\Sigma M_{Ax}(\bar{F}_k) = 0$$

$$\Sigma M_{Ay}(\bar{F}_k) = 0$$

$$\Sigma M_{Az}(\bar{F}_k) = 0$$

Определим уравнения:

$$1) \Sigma F_{kx} = X_A + X_B + Q \cos \alpha * \cos \gamma * \sin \varphi = 0$$

$$2) \Sigma F_{ky} = Y_A + Y_B + P * \sin \beta - Q \cos \alpha * \cos \gamma * \cos \varphi = 0$$

$$3) \Sigma F_{kz} = Z_A - P * \cos \beta - Q * \sin \alpha = 0$$

$$4) \Sigma M_{Ax}(\bar{F}_k) = M_x - Y_B * AB - P * \sin \beta * AB - P \cos \beta * BC \cos \varphi - Q \sin \alpha * AD * \cos \varphi = 0$$

$$5) \Sigma M_{Ay}(\bar{F}_k) = M_y + X_B * AB - P \cos \beta * BC * \sin \varphi - Q * \sin \alpha * AD * \sin \varphi = 0$$

$$6) \Sigma M_{Az}(\bar{F}_k) = -Q * \cos \alpha * \cos \gamma * \cos \varphi * AD * \cos \varphi + Q * \cos \alpha * \cos \gamma * \cos \varphi * AD * \sin \varphi - P * \sin \beta * AE * \sin \varphi = 0$$

Все величины в Ньютонах

Из последнего уравнения найдем Q:

$$Q = \frac{P \sin \beta * AE \sin \varphi}{AD(\cos \varphi - \sin \varphi) \cos \alpha * \cos \gamma} = \frac{P \sin 60^\circ * 2l \sin 60^\circ}{l \cos^2 30^\circ (\cos 60^\circ - \sin 60^\circ)} = 5,4P$$

Из 5 уравнения найдем X_B:

$$\begin{aligned} X_B &= \frac{Q * \sin \alpha * AD \sin \varphi + P \cos \beta * BC * \sin \varphi - M_y}{AB} = \\ &= \frac{5,4P * \frac{l}{2} \sin 30^\circ * \sin 60^\circ}{2l} + \frac{P * \cos 60^\circ l * \sin 60^\circ - 0,5P * l * \sin 60^\circ}{2l} = 0,58P \end{aligned}$$

Из 4 уравнения найдем Y_B:

$$\begin{aligned} Y_B &= \frac{Q \sin \alpha * AD \cos \varphi + P(\sin \beta * AB + \cos \beta * BC * \cos \varphi) - M_x}{-AB} = \\ &= \frac{5,4P * \sin 30^\circ * \frac{l}{2} \cos 60^\circ + P(\sin 60^\circ * 2l + l * \cos^2 60^\circ)}{-2l} + \frac{0,5Pl * \cos 60^\circ}{2l} = -1,2P \end{aligned}$$

Из 3 уравнения найдем Z_A:

$$Z_A = P \cos \beta + Q \sin \alpha = P * \cos 60^\circ + 5,4P * \sin 30^\circ = 3,2P$$

Из 2 уравнения найдем Y_A:

$$\begin{aligned} Y_A &= Q \cos \alpha * \cos \gamma * \cos \varphi - P * \sin \beta - Y_B = \\ &= 5,4P \cos 30^\circ * \cos 30^\circ * \cos 60^\circ - P * \sin 60^\circ + 1,2P = 2,3P \end{aligned}$$

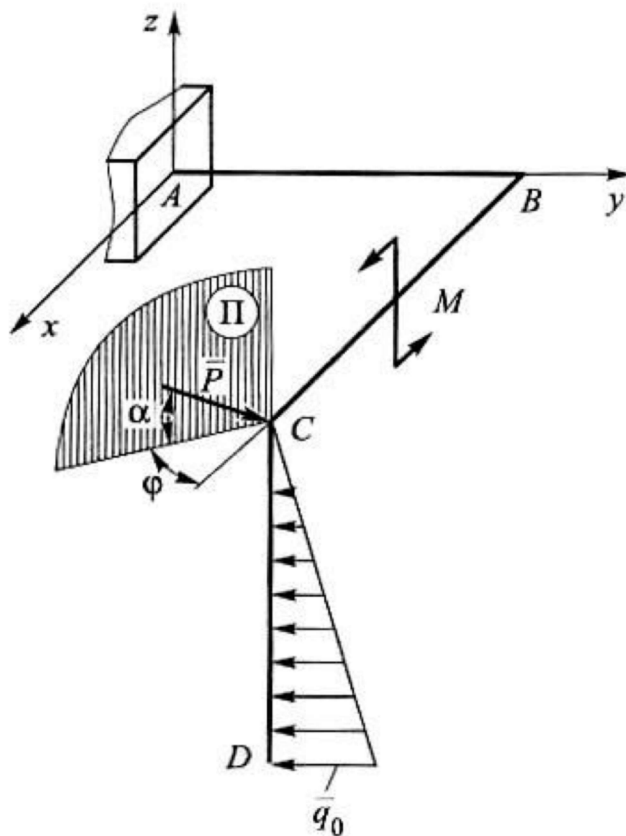
Из 1 уравнения найдем X_A:

$$X_A = -Q \cos \alpha * \cos \gamma * \sin \varphi - X_B = -5,4P \cos 30^\circ * \cos 30^\circ * \sin 60^\circ - 0,58P = -4,08P$$

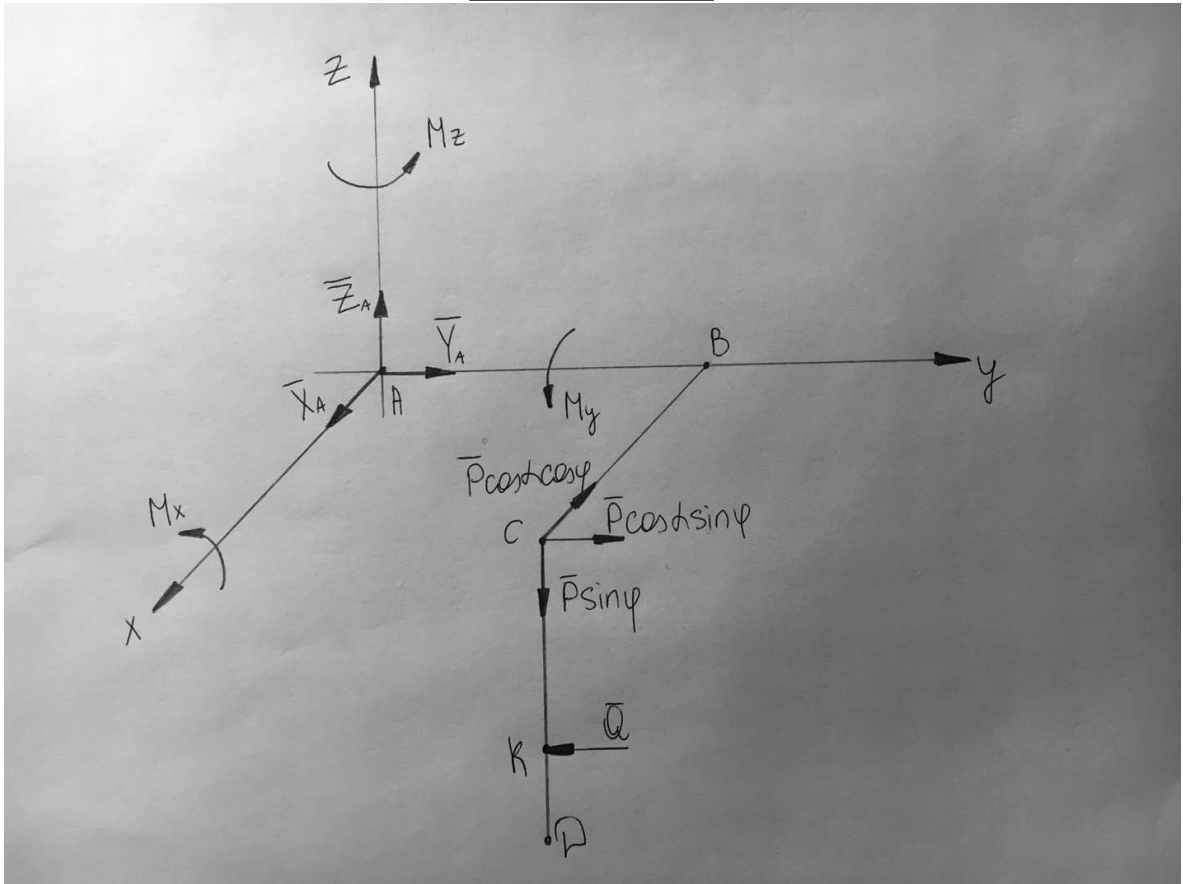
Задача №2

Определить реакцию заделки, если даны P и l , пара сил с моментом $M = 3Pl$, $q_0 = \frac{3P}{l}$,
 $AB = BC = CD = DE = l$, $\gamma = \alpha = 30^\circ$, $\varphi = \beta = 60^\circ$

2.02



Решение



На рисунке:

Точка К на $\frac{2}{3}$ находится на отрезке CD

$$Q = \frac{1}{2} q_0 * CD = \frac{3}{2} P$$

$$DK = \frac{1}{3} * CD = \frac{1}{3} l$$

Условия равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = X_A - P \cos \alpha * \cos \varphi = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_A - Q + P \cos \alpha * \sin \varphi = 0$$

$$\Sigma F_{kz} = Z_A - P * \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma M_{Ax}(\bar{F}_k) = M_x - P \sin \alpha * AB - Q * CK = 0$$

$$\Sigma M_{Ay}(\bar{F}_k) = M_y + M + P * \sin \alpha * BC = 0$$

$$\Sigma M_{Az}(\bar{F}_k) = M_z - Q * BC + P \cos \alpha * \sin \varphi * BC + P \cos \alpha * \cos \varphi * AB = 0$$

Все величины в Ньютонах

Найдем значения:

$$M_z = Q \cdot BC - P \cos \alpha * \sin \varphi * BC - P \cos \alpha * \cos \varphi * AB = \frac{Pl}{4} (3 - \sqrt{3})$$

$$M_y = -M - P \sin \alpha * BC = -3Pl - \frac{Pl}{2} = -3,5Pl$$

$$M_x = P \sin \alpha * AB + Q * CK = \frac{P}{2}l + Pl = \frac{3}{2}Pl$$

$$Z_A = P \sin \alpha = \frac{P}{2}$$

$$Y_A = Q - P \cos \alpha * \sin \varphi = \frac{3}{2}P - \frac{3}{4}P = \frac{3}{4}P$$

$$X_A = P \cos \alpha * \cos \varphi = P \frac{\sqrt{3}}{4}$$