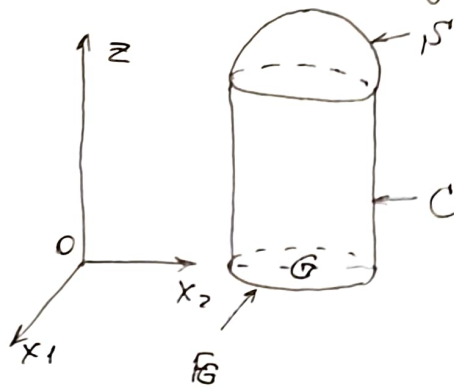


Задачи об объеме цилиндрического тела

6.09.19.

ЛЕКЦИЯ 1



Пусть в $\mathbb{R}^3$ фикс.-а дек. с.к. (см.р.) и в пл-ти x_1, x_2 замкнутый контур Γ_G охватывает обл. G конеч. диаметра $d(G)$ и конечной меры $m(G)$ — площадь.

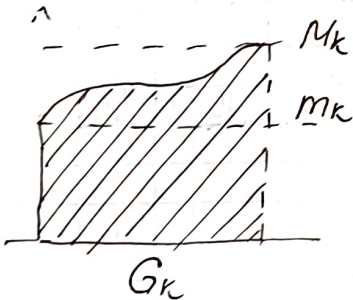
Пусть $S \stackrel{\text{def}}{=} \{ [\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}] \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_1, x_2) \geq 0 \}$
 $\forall [\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}] \in G$ — такая пов-ть

В этом случае тело T , огранич. пов-тью S , цилиндр. пов-тью C , образ.-я кот. ортогональна x_1, x_2 и проходит по контуру Γ_G , и частью пл-ти $z=0$, представл. мн-вом G , будем находить цилиндрическим телом.

Задача о нахождении объема $V(T)$ тела T решается с использованием стандарта схем, примен. при вычисл. пл-ди плоской фигурой.

1. Фривз-м образом выбираем разбиение G на систему подобластей, пересек-ся быть может (б.м.) лишь по границе, т.е. $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$ и $m(G_k \cap G_j) = 0, \forall k \neq j$.
2. $m_k \triangleq \inf_G f(x_1, x_2)$ и $M_k \triangleq \sup_{G_k} f(x_1, x_2), \forall k = 1, \dots, n$.

При этом цилиндр высоты m_k основанием G_k целиком содержится в T , а цилиндр высоты M_k и с осн. G_k целиком содержит соотв. часть T . Таким образом, ступенчатое тело A_n и B_n , образ. из этих цилиндров соотв.-о обхвад. очевидным св-вом: $A_n \subset T \subset B_n$



3. Согласно 2 имеем: $\sum_{k=1}^n m_k m(G_k) \leq V(T) \leq \sum_{k=1}^n M_k m(G_k)$

4. Фривз. образом. в кажд. эл-те разбиения G_k выбираем некоторую точку (x_{1k}, x_{2k}) . Тогда

$$m_k \leq f(x_{1k}, x_{2k}) \leq M_k, \quad \forall k = 1, \dots, n. \text{ Т.е. } V(A_n) = \sum_{k=1}^n m_k m(G_k) \leq \sum_{k=1}^n f(x_{1k}, x_{2k}) m(G_k) \leq V(B_n) = \sum_{k=1}^n M_k m(G_k)$$

5. С измельчением разбиения $\{G_k\}$ последовательность $\{V(A_n)\}$ будет монотонно возрастать, оставаясь ограниченной величиной $V(T)$, а $\{V(B_n)\}$ — монотонно убывать, оставаясь ограниченной снизу. Т.о.

$$\exists \lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} V(A_N) \wedge \exists \lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} V(B_N)$$

6. Если предположить, что $\lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} V(A_N) = \lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} V(B_N)$, то

$$V(T) = \lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} \sum_k f(x_{1k}, x_{2k}) m(G_k)$$

Опр. Пусть область $G \subset x_1, x_2 : d(G) < \infty \wedge m(G) < \infty$.

Если $f(x_1, x_2)$ определена и непрерывна в G , и при этом вне зависимости от выбора разбиения $\{G_k\}$ обл-ти G , где эти разбиения могут пересекаться лишь по границе, и в вне зависимости от выбора сист. ограниченных точек $(x_{1k}, x_{2k}) \in G_k, \forall k \geq 1$

$\exists \lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} \sum_k f(x_{1k}, x_{2k}) m(G_k)$, то говорит, что опре-д

двойной интеграл ф-ии $f(x_1, x_2)$ по обл-ти G :

$$\iint_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \triangleq \lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} \sum_k f(x_{1k}, x_{2k}) m(G_k)$$

Т-ма существования:

Если в усл-ях опре-е ф-ии $f(x_1, x_2)$ непрерывна на мн-ве G , то $\exists \iint_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

Замечание к опр. Непосредственно из определения вытекает след. св-ва двойного интеграла:

$$① \iint_G \sum_{k=1}^m C_k f_k(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \sum_{k=1}^m C_k \iint_G f_k(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \text{лин-тв}$$

$$② G = \bigcup_{k=1}^M G_k \wedge m(G_k \cap G_j) = 0, \forall k \neq j \Rightarrow$$

$$\iint_{\bigcup_{k=1}^M G_k} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \sum_{k=1}^M \iint_{G_k} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$③ \iint_G dx_1 dx_2 = m(G)$$

не коммутативна

$$④ \{ f(x_1, x_2) \leq \varphi(x_1, x_2) \wedge f(x_1, x_2) \neq \varphi(x_1, x_2), [x_1, x_2] \in G \} \Rightarrow$$

$$\iint_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 < \iint_G \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2;$$

$$⑤ \quad \left| \iint_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| \leq \iint_G |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$$

Теорема о среднем:

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ имеет $d(G) < \infty$ и $m(G) < \infty$ и $f(x_1, x_2)$, $\varphi(x_1, x_2)$ определены и непрерывны в G . Если хотя бы одна из них сохраняет свой знак в G (пусть φ), то $\exists (x_{10}, x_{20}) \in G$:

$$\iint_G f(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = f(x_{10}, x_{20}) \iint_G \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Д-во: Пусть две определены $\varphi(x_1, x_2) > 0$ в G и $m \triangleq \inf_G f(x_1, x_2)$ и $M \triangleq \sup_G f(x_1, x_2)$. Тогда $m \leq f(x_1, x_2) \leq M \Rightarrow$

$$m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi \Rightarrow (4) \Rightarrow$$

$$m \iint_G \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \iint_G f\varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq M \iint_G \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \text{ т.к. сужай } f \equiv \text{const на } G \text{ - тривиален.}$$

А т.к. $f(x_1, x_2)$ принимает все промежут. значения на интервале $(m; M)$, то $\exists (x_{10}, x_{20}) \in G$:

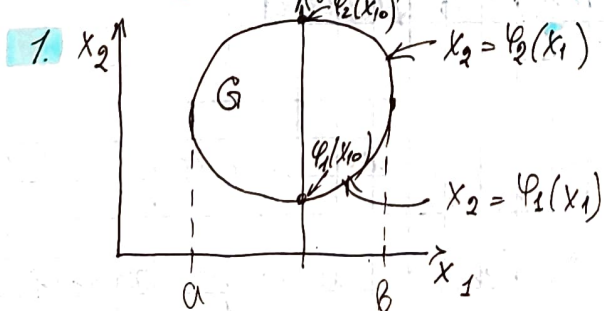
$$f(x_{10}, x_{20}) = \iint_G f\varphi dx_1 dx_2 / \iint_G \varphi dx_1 dx_2 \quad \text{т.м.г.}$$

Замечание: В расч. сужай имеем

$$\iint_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = f(x_{10}, x_{20}) m(G) \text{ следует из}$$

теоремы $\varphi(x_1, x_2) = 1$.

Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.

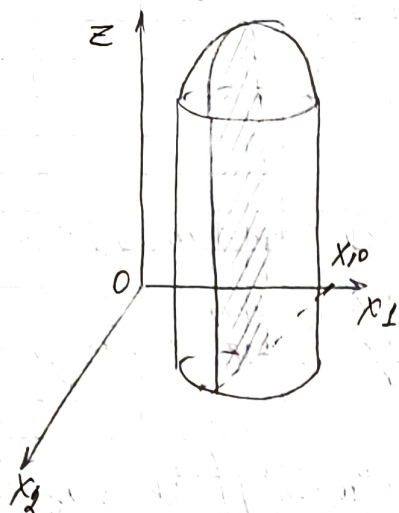


Пусть Γ_G гр-ца мн-ва $G \subset \mathbb{R}^2$ и при этом $[a, b] = \text{Пр}_{x_1} G$. Пусть любая прямая, паралл. $z/z(a; b) \parallel OX_2$, пересек. Γ_G в 2-х точках.

Пусть вып-ны усл. неотриц. и непрер-ти $f(x_1, x_2)$ в точках G .

Если при этом вып-ны все перечисл. усл., то верн.

и нижний участки G заданы соотв. ур-ниями - см. р.



Пл-стью $x_1 = x_{10} \in (a; b)$ пересекает тело T и т-до его сечение $S(x_{10}) = \int_{\phi_1(x_{10})}^{\phi_2(x_{10})} f(x_{10}, x_2) dx_2$

Для нахождения объема искомого тела осталось воспользоваться извест. результатами: вычисление объема тела по площадям $\parallel$ сечений.

Т.о. $V(T) = \int S(x_{10}) dx_{10} \equiv \int S(x_1) dx_1 \equiv$

$$\equiv \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x_1)}^{\phi_2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right\} dx_1 \equiv \int_a^b dx_1 \int_{\phi_1(x_1)}^{\phi_2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2$$

$$V(T) = \int_a^b dx_1 \int_{\phi_1(x_1)}^{\phi_2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2$$

2. Если $f(x_1, x_2) < 0$ в G , то $-f(x_1, x_2) > 0$ в G

$$-\iiint_G \{-f(x_1, x_2)\} dx_1 dx_2 = - \int_a^b dx_1 \int_{\phi_1(x_1)}^{\phi_2(x_1)} \{-f(x_1, x_2)\} dx_2 \Rightarrow$$

$$\iint_G f dx_1 dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{\phi_1(x_1)}^{\phi_2(x_1)} f dx_2$$

3. Оси Ox_1 и Ox_2 - равноправны, т.е. проецирование G правильно как на ось Ox_1 , так и на ось Ox_2 .

4. Если f меняет знак в G , то G разбив. на сист. не пересек-ся областей, в каждой из кот. f сохр. свой знак, и использу. метод разложения.

Замена переменных в двойном интеграле

13.09.19.

ЛЕКЦИЯ 2

Пусть $G \subset K^2$ - мн-во конечного диаметра $d(G)$ и конечной площади $m(G)$.

Пусть в точках G определены скаляр. ф-ии $f(x, y)$ и $\int \int_G f(x, y) dx dy$, но его непосредств. вычисл. затруднено

Реализуем замену переменных $x = \varphi_1(u, v), y = \varphi_2(u, v)$,
 где φ_1 и φ_2 — скаляр. непрерывно дифференцируемые ф-ции в
 точках мн-ва $D \subset \mathbb{R}^2$ и при этом якобиан этого
 преобр-ния:

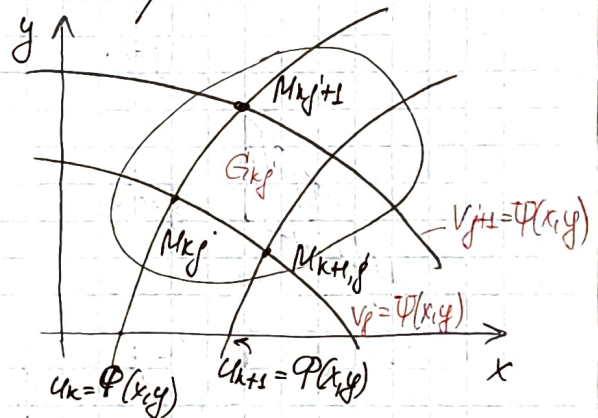
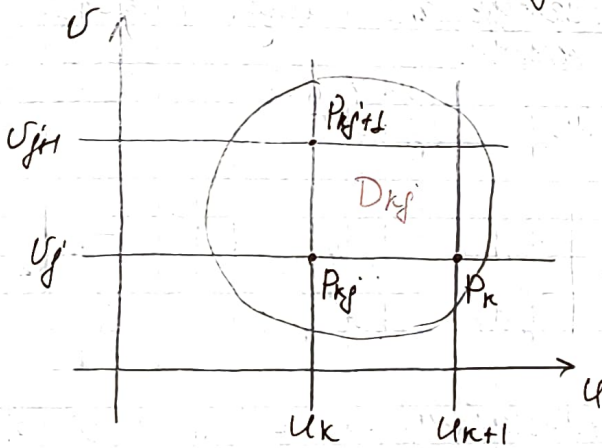
$$J(u, v) \triangleq \det \begin{bmatrix} \partial \varphi_1 / \partial u & \partial \varphi_1 / \partial v \\ \partial \varphi_2 / \partial u & \partial \varphi_2 / \partial v \end{bmatrix} \text{ ни в одной точке } D \text{ не обращ. в нуль.}$$

В этом случае сущ. обр-е отображение по отн. к
 исходному:

$$u = \varphi(x, y)$$

$$v = \psi(x, y)$$

при этом внутр. точкам
 G соотв. внутр. точки D ,
 а граничные — граничным,
 и наоборот.



Системой прямых $u = u_k$ и $v = v_j$ реализуем разбиение
 мн-ва D , т-тн кот. пересекаются лишь по границе,
 т.е. $u_j D_{kj} = D \cap m(D_{kj} \cap D_{ih}) = \emptyset, \forall k \neq i, \forall j \neq n$, а в кар-ве имеет.

точки для D_{kj} выбираем точку P_{kj} . В этом случае
 $m(D_{kj}) \approx \Delta u_k \cdot \Delta v_j$, где $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$, а знак
 обусловлен наличием крайних и срединных прямоугольников.
 Разбиением $\{D_{kj}\}$ соотв. разбиение G сист-ой кривых
 $\varphi(x, y) = u_k$ и $\psi(x, y) = v_j$. При этом элемент этого
 разбиения G_{kj} — криволинейн. параллелограмм, кот. стор-
 ностями до б.м. аппроксим. паралл-мом, постр. на
 векторах M_{kj}, M_{kj+1} как на сторонах.
 Т.о. с учетом соотв-ий $P_{kj} \leftrightarrow M_{kj}$ имеем:

$$m(G_{kj}) \approx \text{mod} \begin{vmatrix} \varphi_1(P_{kj}) & \varphi_2(P_{kj}) & 1 \\ \varphi_1(P_{k+1,j}) & \varphi_2(P_{k+1,j}) & 1 \\ \varphi_1(P_{k,j+1}) & \varphi_2(P_{k,j+1}) & 1 \end{vmatrix} = \text{mod} \begin{vmatrix} \varphi_1(P_{kj}) & \varphi_2(P_{kj}) \\ \varphi_1(P_{k+1,j} - P_{kj}) & \varphi_2(P_{k+1,j} - P_{kj}) \\ \varphi_1(P_{k,j+1} - P_{kj}) & \varphi_2(P_{k,j+1} - P_{kj}) \end{vmatrix}$$

$$= \text{mod} \begin{vmatrix} \varphi_1(P_{kj}) & \varphi_2(P_{kj}) & 1 \\ \varphi_1(P_{k+1,j}) - \varphi_1(P_{kj}) & \varphi_2(P_{k+1,j}) - \varphi_2(P_{kj}) & 0 \\ \varphi_1(P_{k,j+1}) - \varphi_1(P_{kj}) & \varphi_2(P_{k,j+1}) - \varphi_2(P_{kj}) & 0 \end{vmatrix} = \text{mod} \begin{vmatrix} \varphi_1(P_{k,j+1}) - \varphi_1(P_{kj}) & \varphi_2(P_{k,j+1}) - \varphi_2(P_{kj}) \\ \varphi_1(P_{k+1,j}) - \varphi_1(P_{kj}) & \varphi_2(P_{k+1,j}) - \varphi_2(P_{kj}) \end{vmatrix}$$

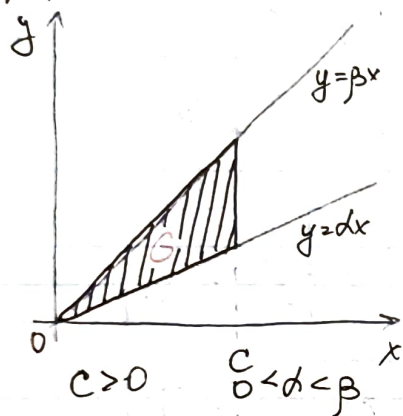
$$\approx \text{mod} \begin{vmatrix} \partial \varphi_1 / \partial u & \partial \varphi_2 / \partial u \\ \partial \varphi_1 / \partial v & \partial \varphi_2 / \partial v \end{vmatrix}_{P_{kj}} \cdot \Delta u_k \cdot \Delta v_j = |J(P_{kj})| m(D_{kj})$$

T.O. $\iint_G f(x,y) dx dy = \lim_{\max d(G_{kj}) \rightarrow 0} \sum_k \sum_j f(M_{kj}) \cdot m(G_{kj}) =$

$= \lim_{\max d(G_{kj}) \rightarrow 0} \sum_k \sum_j f(M_{kj}) \cdot |J(P_{kj})| \cdot m(D_{kj}) =$

$= \iint_D f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) |J(u,v)| du dv = \iint_G f(x,y) dx dy$

Пр-р 1.



Нужно реализовать след. замену переменных:

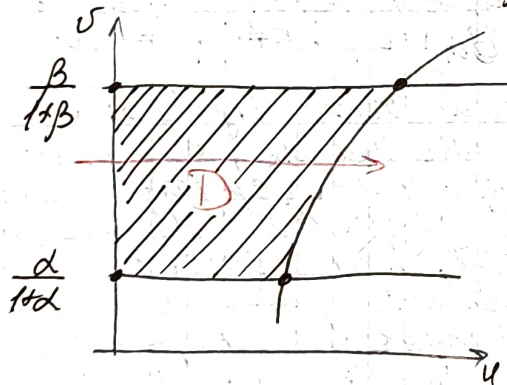
$\iint_G f(x,y) dx dy, \begin{cases} x = u - uv \\ y = uv \end{cases}$

$J(u,v) = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u - 0 = u$

$(y=dx) \Rightarrow uv = d(1-v) \Rightarrow v = d - dv \Rightarrow v = \frac{d}{1+d}$

$(y=\beta x) \Rightarrow v = \frac{\beta}{1+\beta}; x=c \Rightarrow c = u(1-v)$

$u = \frac{c}{1-v}$



Т.е. точка (0,0) и т.д. G
отв. в отрезок $[\frac{d}{1+d}; \frac{\beta}{1+\beta}]$

$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_{\frac{d}{1+d}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv) u du$

Замечание 1: Формула результат всегда корректна в тех случаях, когда $J(u,v)$ не равна нулю в одной или нескольких точках мн-ва D.

Замечание 2: (Переход к полярной сист. координат)

$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \rightarrow \text{пар-ры } a, b \text{ реализ. расст. от осей}$

$J(z, \varphi) = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b \cos \varphi \end{vmatrix} = ab$

Пример: Вычисл. объём эллипсоида с полуосями a, b, c , т.е.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1. \quad V = 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{a^2 r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 1 \right\} =$$

$$= c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr \cdot 2ab = 2 \cdot 2\pi abc \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = \left\{ \begin{array}{l} t^2 = 1-r^2 \\ t dt = -r dr \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \cdot 2\pi abc \int_0^1 t^2 dt = \frac{4}{3} \pi abc$$

Тройной интеграл.

Задача

Пусть $T \subset R^3$ - трёхмерное тело конечного объёма $m(T)$ и конечного диаметра $d(T)$. Пусть $\mu(x, y, z)$ - плотность вещества в точке $(x, y, z) \in T$. Необходимо опред. массу $M(T)$ этого тела, считая, что $\mu(x, y, z)$ непрерывна в $T \subset R^3$.

Пусть $\{T_k\}$ - разбиение T на сист. подобластей:

$$\bigcup_k T_k = T \quad \text{и} \quad m(T_k \cap T_j) = 0, \quad \forall k \neq j$$

Пусть $M_k \in T_k$ - произв. отл. точка. Считаем, что $\mu(x, y, z) \approx \mu(M_k)$, $\forall (x, y, z) \in T_k$. В этом случае $M[T_k] = \mu(M_k) \cdot m(T_k)$, т.е.

$$M(T) = \lim_{\max d(T_k) \rightarrow 0} \sum_k \mu(M_k) \cdot m(T_k)$$

Опр.: Пусть $T \subset R^3$ - замкнут. трёхмерн. область:

$$d(T) < \infty \quad \text{и} \quad m(T) < \infty.$$

Пусть в точках T опред.-на скаляр. ф-ия $f(x, y, z)$. Если вне зависимости от выбора разбиения $\{T_k\}$:

$$\bigcup_k T_k = T \quad \text{и} \quad m(T_k \cap T_j) = \emptyset, \quad \forall k \neq j \quad \text{и} \quad \forall \text{ выбора}$$

сист. образующих точек $\{M_k\}$: $M_k \in T_k, \forall k \geq 1$

$\exists \lim_{\max d(T_k) \rightarrow 0} \sum_k f(M_k) \cdot m(T_k)$, то его называют тройным интегралом f по T и обознач:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{или} \quad \int_T f(X) dX$$

Замечание:

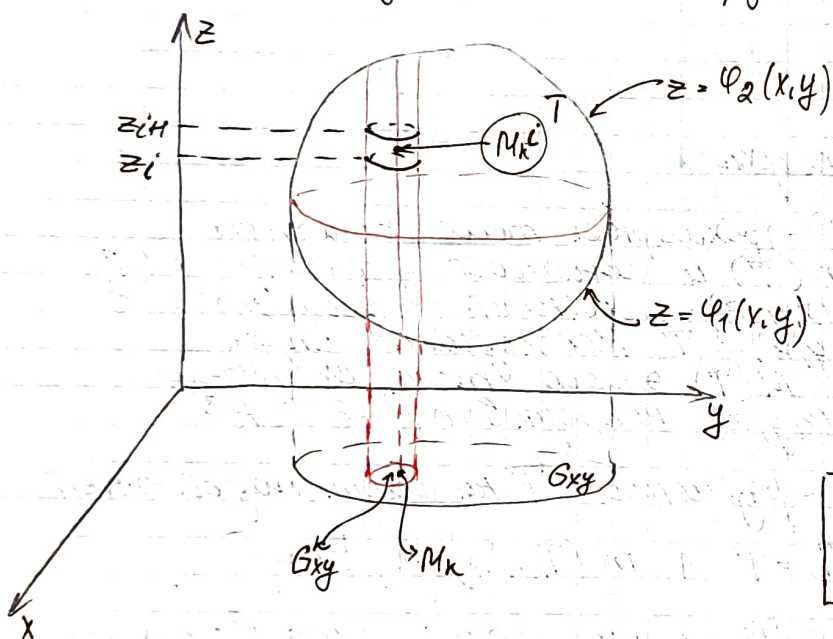
① Если в усм. опред-е ф-ия f непрер-на в точках T , то

$$\exists \iiint_T f(x,y,z) dx dy dz \text{ [Теор. сущ-я]}$$

② $\iiint_T dx dy dz = m(T)$

③ Тройной интеграл обладает стандартными св-ми кратных интегралов (см. св-ва двойного интеграла)

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.



Пусть в R^3 фикс-на стандартная декарт. сист. коорд. и пов-ть S огранич. трехмерную область T . Для этой любой прямой, парал. Oz , пересекает S не более чем в 2-х точках. Пусть в $T \cup S$ опред. и непрер-на скаляр. ф-ия $f(x,y,z)$, тогда

$$\exists \iiint_T f(x,y,z) dx dy dz$$

Пусть далее $\{G_{xy}^k\}$ - разбиение

20.09.19.

Лекция 3

$G_{xy} \triangleq \text{Пр}_{xy} T$, т.е. $\bigcup G_{xy}^k = G_{xy}$ и $m(G_{xy}^k \cap G_{xy}^i) = 0$, $\forall k \neq i$, где $m(G_{xy})$ - площадь G_{xy} .

Провед. сор. в кажд. подобл. G_{xy}^k выбираем отмеченную точку M_k с коорд. (x_k, y_k) .

Пусть $T_k \subset T$: $\text{Пр}_{xy} T_k = G_{xy}^k$. Этот элемент разбиения T плоскостями $z = z_i^k$ разбиваем на призмы цилиндры, площадь оснований кажд. из которых равна $m(G_{xy}^k)$, а высота Δz_i^k .

$\Delta z_i^k \triangleq z_{i+1}^k - z_i^k$, т.е. объем этого цилиндра T_{ki} равен:

$$m(T_{ki}) \approx m(G_{xy}^k) \Delta z_i^k, \text{ где знак } \approx \text{ обусл. наличием концевых срезаемых элементов.}$$

Т.о. имеем разбиение $\{T_{ki}\}$ трехмерного тела T . Выбор отмеченной точки реализуем след. образом:

$$M_k^i \in T_{ki} : M_k^i = (x_k, y_k, z_i^k), \text{ т.е. } \text{Пр}_{xy} M_k^i \equiv M_k, \forall i \geq 1$$

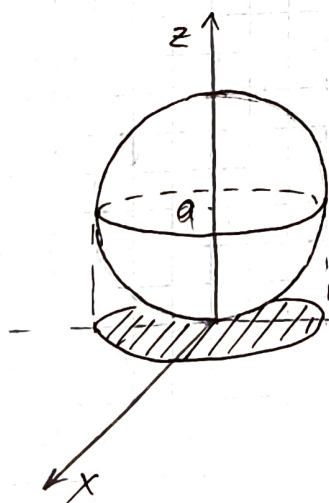
$$f(x_k, y_k, z_k^i) \cdot \Delta z_k^i \equiv \int_{z_k^i}^{z_{k+1}^i} f(x_k, y_k, z) dz - \text{по теор. о среднем.}$$

В силу $\exists$ исходного интеграла его значение не зависит ни от выбора разбиения, ни от выбора сист. отмер. точек. Т.о. имеем.

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \lim_{\max d(T_{ki}) \rightarrow 0} \sum_k \sum_i f(\mu_k^i) \cdot m(T_{ki}) = \\ &= \lim_{\max d(T_{ki}) \rightarrow 0} \sum_k \sum_i f(x_k, y_k, z_k^i) \Delta z_k^i \cdot m(G_{xy}^k) = \\ &= \lim_{\max d(T_{ki}) \rightarrow 0} \sum_k \sum_i \int_{z_k^i}^{z_{k+1}^i} f(x_k, y_k, z) dz \cdot m(G_{xy}^k) = \\ &= \lim_{\max d(G_{xy}^k) \rightarrow 0} \sum_k \left\{ \int_{\varphi_1(x_k, y_k)}^{\varphi_2(x_k, y_k)} f(x_k, y_k, z) dz \right\} \cdot m(G_{xy}^k) = \\ &= \iint_{G_{xy}} dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

Пр-р: Нееобх. выч-ть массу тела, огранич. пов-тью:

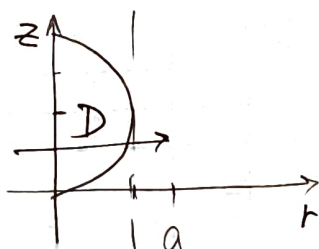
$x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, если плотность в-ва в любой точке тела обр. пропорц. расст. от этой точки до начала координат.



$$M = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 2az} \frac{\lambda dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lambda \iint_{x^2+y^2 \leq 2a^2} dx dy \int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right| = \lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{a+\sqrt{a^2-r^2}} \frac{dz}{\sqrt{z^2+r^2}} =$$

$$= 2\pi\lambda \iint_D \frac{r dr dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi\lambda \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$



Замечание 1: При вычисл. тройного интеграла все коор. м-ти равноправны, т.е. возможны 3 разн. варианта при вычисл. тройного интеграла, т.е. проецирование области.

Замечание 2: Точно также, как и в двумерном случае док-ся теорема о замене переменных в тройном интеграле, т.е. если $\exists \iiint_T f(x,y,z) dx dy dz$ и функ. непрерывно дифф-е отображение $\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(u,v,w) \\ y &= \varphi_2(u,v,w) \\ z &= \varphi_3(u,v,w) \end{aligned} \right\}$ области $B \subset \mathbb{R}^3$ в $T \subset \mathbb{R}^3$

и при этом якобиан преобр.:

$$J(u,v,w) \triangleq \begin{vmatrix} \partial \varphi_1 / \partial u & \partial \varphi_1 / \partial v & \partial \varphi_1 / \partial w \\ \partial \varphi_2 / \partial u & \partial \varphi_2 / \partial v & \partial \varphi_2 / \partial w \\ \partial \varphi_3 / \partial u & \partial \varphi_3 / \partial v & \partial \varphi_3 / \partial w \end{vmatrix}$$

не обр. в нуль в B , то:

$$\iiint_T f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_B f(\varphi_1(u,v,w), \dots, \varphi_3(u,v,w)) |J(u,v,w)| du dv dw.$$

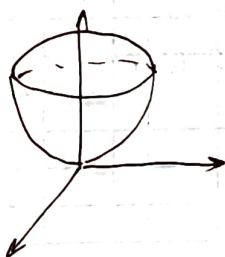
При этом результат ост-ся справедливым и в случае обр-ия якобиана в нуль в одной или нескольких точках B

Замечание 3: Наиболее распр. заменой, связанной с сист-и обобщенной цилиндрич. и обобщенной сферич. сист. коор.

Обобщ. цилиндрич. с.к.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cos \varphi \\ x_2 &= b \sin \varphi \\ x_3 &= ct \end{aligned} \right\} \Rightarrow J(r, \varphi, t) = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -b \sin \varphi & 0 \\ b \sin \varphi & b \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc r$$

Пример: $\int_T \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, Тогр-но пов-ми:



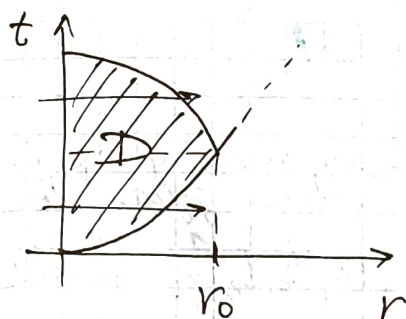
$$z = \frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Переходим к цилиндрич. сист.

$$c^2 t^2 = \frac{a^2 r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = r^2$$

$$r^2 + t^2 = 1$$



$$r^2 + \frac{r^4}{c^2} = 1$$

$$ct = 1 - t^2$$

$$r^4 + c^2 r^2 - c^2 = 0$$

$$t^2 + ct - 1 = 0$$

$$r^2 = \frac{c^2}{2} + \sqrt{c^2 - \frac{c^4}{4}}$$

$$\left(t + \frac{c}{2}\right)^2 = 1 - \frac{c^2}{4}$$

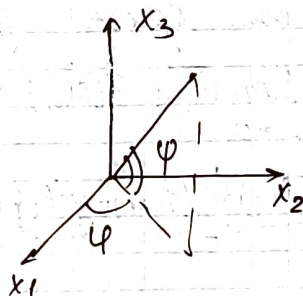
$$t_x = -\frac{c}{2} + \sqrt{1 - \frac{c^2}{4}}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_D \frac{abc r dr dt}{\sqrt{r^2 + t^2}} =$$

$$= abc \cdot 2\pi \left\{ \int_0^{t_x} dt \int_0^{\sqrt{ct}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + t^2}} + \int_{t_x}^1 dt \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + t^2}} \right\}$$

Обобщенно сферич. с.к.

$$\begin{cases} x_1 = a \cos \varphi \cos \psi \\ x_2 = b \cos \varphi \sin \psi \\ x_3 = c r \sin \psi \end{cases}$$



$$J = \begin{vmatrix} a \cos \varphi \cos \psi & -a \sin \varphi \cos \psi & -a \cos \varphi \sin \psi \\ b \sin \varphi \cos \psi & b \cos \varphi \cos \psi & -b \sin \varphi \sin \psi \\ c \sin \psi & 0 & c \cos \psi \end{vmatrix} = abc r^2 \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{vmatrix}$$

$$= abc r^2 \cos \psi \left\{ \sin \psi \begin{vmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi \end{vmatrix} + \cos \varphi \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= abc r^2 \cos \psi \{ \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \} = \boxed{abc r^2 \cos \psi = J}$$

Итак-п: $\iiint dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi dr = 2\pi abc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 d\psi =$

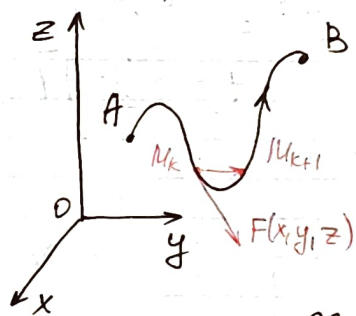
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

$$\frac{a^2 r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi}{b^2} + \frac{c^2 r^2 \sin^2 \psi}{c^2} \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \leq 1 = \frac{4}{3} \pi abc$$

27.09.19.

Криволинейные интегралы.

Лекция 4



Пусть в $\mathbb{R}^3$ фикс. стандартная декартова с.к. $Oxyz$ и задана ориент. дуга $AB = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{matrix}, t \in [t_A, t_B] \right\}$, огранич.

точками A и B .

При этом точка $M(x, y, z)$ пробегает эту дугу от A до B при монотон. изменении параметра t от t_A и до t_B . Пусть далее в некоей окрестности AB определена в-ая ф-ия $\vec{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$. Отрезок $[t_A, t_B]$ точками

$\{t_k\}_{k=0}^N$: $t_A = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_B$ разбив. на части.

При этом точке $t = t_k$ соотв. точка M с коорд. $x(t_k), y(t_k), z(t_k)$, кот. принадлежат ориент. дуге AB . В этом случае

$$\lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_k (\vec{F}(M_k); \vec{M_k M_{k+1}}) = \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_k P(M_k) \underbrace{\{x(t_{k+1}) - x(t_k)\}}_{\Delta x_k} +$$

$$+ \underbrace{Q(M_k) \{y(t_{k+1}) - y(t_k)\}}_{\Delta y_k} + \underbrace{R(M_k) \{z(t_{k+1}) - z(t_k)\}}_{\Delta z_k} =$$

$$\equiv \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_k P(M_k) \Delta x_k + Q(M_k) \Delta y_k + R(M_k) \Delta z_k.$$

В случае сущ-ия этого предела вне зависимости от выбора разбиения $\{t_k\}$ отрезка $[t_A, t_B]$ его называют криволинейным интегралом ф-ии $\vec{F}(x, y, z)$ по ориент. дуге AB и пишут:

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz \quad \text{или} \quad \int_L P dx + Q dy + R dz$$

Замечание 1:

Если $\vec{F}(x, y, z)$ непрерывна в некоей окрестности AB , а сама дуга явл. гладкой, т.е. является дугой с непрер. измен-ся касательной, что обеспе. непрер. дифф-тою скалярных ф-ий $x(t), y(t), z(t)$ и выпол-ем неравенства: $|x'(t)| + |y'(t)| + |z'(t)| > 0$, то

$$\exists \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_k P(M_k) \cdot \Delta x_k + Q(M_k) \cdot \Delta y_k + R(M_k) \cdot \Delta z_k =$$

$$\equiv \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_k P(x(t_k), y(t_k), z(t_k)) \cdot x'(t_k) \cdot \Delta t_k + Q(x(t_k), y(t_k), z(t_k)) \cdot y'(t_k) \cdot \Delta t_k +$$

$$+ R(x(t_k), y(t_k), z(t_k)) \cdot z'(t_k) \cdot \Delta t_k \equiv \int_{t_A}^{t_B} \{P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)\} dt.$$

Замечание 2: Если $\vec{F}(M)$ — сила, то $(\vec{F}(M_k); \overrightarrow{M_k M_{k+1}})$ — работа силы по перемещению мат. точки M от M_k до M_{k+1} по отрезку прямой, т.е. $\int Pdx + Qdy + Rdz$ — работа силы по перемещ. мат. точки $\overrightarrow{AB}$ от A до B вдоль ориент. дуги $\overrightarrow{AB}$

Замечание 3: Кривин. интеграл по ориент. замкнутой контуру вводит аналогично и обозначают:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

Замечание 4: С учётом результата предст-во в замечании 1. м/о утверждать, что кривин. интеграл облад. стандартными св-ми интеграла Римана.

$$(a) \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L Pdx + \int_L Qdy + \int_L Rdz$$

$$(b) \int_{\overrightarrow{AB}} = - \int_{\overrightarrow{BA}}$$

$$(c) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{CB} \wedge m(\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{CB}) = 0, \text{ то}$$

$$\int_{\overrightarrow{AB}} = \int_{\overrightarrow{AC}} + \int_{\overrightarrow{CB}}$$

$$(2) \overrightarrow{AB}: y = \varphi(x) \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=\varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \int_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \{P(t, \varphi(t)) + Q(t, \varphi(t)) \varphi'(t)\} dt$$

Пример 1: $\oint_{x^2+y^2=1} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \left\{ \begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin t \end{array} \right. \begin{array}{l} dx = -\sin t dt \\ dy = \cos t dt \end{array} \right\} =$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Формула Грина: Далее будем говорить, что область $G \subset \mathbb{R}^2$ обл. односвязной, если любой замкнут. контур $\Gamma \subset G$ м/т быть стянут в точку без пересек. границы Γ_G обл. G .

Пример 2:

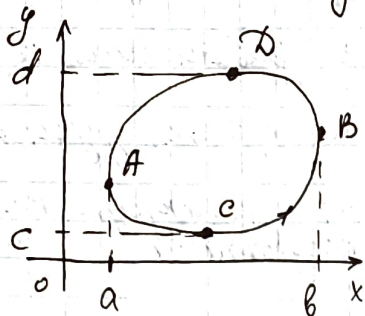


односвязная область



неодносвязн. обл.

Пусть далее G - односвязн. замкнутая область в $\mathbb{R}^2$ конечного диаметра, Пусть $[a, b] = \text{Пр}_x G$, $[c, d] = \text{Пр}_y G$ и любая прямая



$x = x_* \in (a, b)$, $y = y_* \in (c, d)$ пересек. границу Γ_G в двух точках, Тогда участки границы Γ_G опред. ур-ниями: $ACB: y = \varphi_1(x) \mid DAB: x = \varphi_1(y)$
 $BDA: y = \varphi_2(x) \mid CBD: x = \varphi_2(y)$

В этом случае имеем:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\vec{ACB}} Pdx + \int_{\vec{BDA}} Pdx + \int_{\vec{DAC}} Qdy + \int_{\vec{CBD}} Qdy$$

Далее предполагаем непрерывность в точках $G \cup \Gamma_G$ функций $P(x, y)$, $P'_y(x, y)$, $Q(x, y)$, $Q'_x(x, y)$. Тогда с учетом тождества, приведем выше имеем:

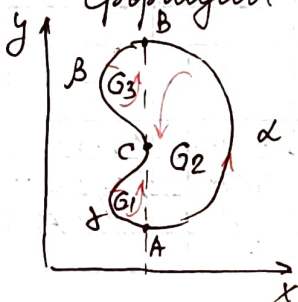
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} Pdx + Qdy &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x))dx + \int_c^d Q(\varphi_1(y), y)dy + \\ &+ \int_d^c Q(\varphi_2(y), y)dy = - \int_a^b P(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx + \int_c^d Q(x, y) \Big|_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dy = \\ &= - \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P'_y(x, y) dy + \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} Q'_x(x, y) dx = \iint_G (Q'_x - P'_y) dx dy = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy \end{aligned}$$

Пример 3 В усл. примера 1 имеем:

$$\oint_{x^2+y^2=1} \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_P dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_Q dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \{Q'_x - P'_y\} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left\{ \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right\} dx dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 0 dx dy \equiv 0 \rightarrow \text{Несомн. получ. результата с результатом, предств. выше связана с парой. требование непрер-ти ф-ий } P, Q, P'_y, Q'_x \text{ в обл-ти } G.$$

Замечание 1: Требование выпуклости обл-ти G при выводе формулы Грина не явл. принципиальным. - см. рис.



Замечание 2 Требование односвязности G также не явл. принципиальным - см. рис.



4 эквивалентных условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть в замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^2$ концы дуги определены и непрерывны ф-ции $P(x, y), Q(x, y), P'_x(x, y), Q'_x(x, y)$. В этом случае след. 4 условия эквивалентны:

① $\int_{\vec{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от произвольной дуги $\vec{AB}$, а зависит лишь от гранич. точек A и B .

② $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ для любого замкнутой контура $L \subset G$

③ $\exists u(x, y): du = Pdx + Qdy$

④ в $G \quad P'_y = Q'_x$

Ряды.

4.10.19.

Опр. Пару числовых послед-й $\{a_k\}$ и $\{S_n\}$, $k \geq 1, n \geq 1$ будем наз-ть числ. ряд, если для $\forall n \geq 1$ $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$. ЛЕКЦИЯ 5

Замечание: Для обознач. искомого числ. ряда зачастую исп-ют след. терминологию

- числовой ряд с общ. членом a_k
- числовой ряд $\{a_k\}_{k \geq 1}$
- числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Пример 1: Гармонический ряд - числ. ряд с общ. членом $a_k = \frac{1}{k}$

Опр. 2: Числовой ряд $\{a_k\}_{k \geq 1}$, $\{S_n\}_{n \geq 1}$, где S_n наз-ют n -ой частич. суммой исх. ряда, наз-ют сходящимся, если:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S: |S| < \infty, \text{ при этом}$$

S наз-ют суммой исх. числ. ряда

Замечание к опр. 2: 1) Для числ. ряда с общ. членом a_k и n -ой частич. суммы S_n исп-ют след. обознач-отн-ие к его сх-ти:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \text{ где } S \text{ м/т не сущ-ть или равняться } \pm \infty.$$

$$2) S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + \dots + a_{n+m} + \dots) \equiv S_n + R_n,$$

где S_n - n -я частич. S_n сумма, а $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \equiv \sum_{m=1}^{\infty} a_{n+m}$, т.е.

и/о расш. числ. ряд $\{a_n\}_{n \geq 1}$ для любого фикс. n .

Теорема 1: Необх. условие сходимости ряда

Если числ. ряд $\{a_k\}_{k \geq 1}$ сх-ся, то $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

Д-во: $a_n = S_n - S_{n-1}$. А т.к. сч. ряд сх-ся, то $\exists$ и конечен $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$. Т.о. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Пример: $a_k = \frac{1}{k}$, $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \Rightarrow$? т.г.

$\Rightarrow$ гармонический ряд может сх-ся (далее д-м, что он расх-ся)

Пример 2: $a_k = d_0 \cdot q^k$, $k \geq 0$, d_0 и q - фикс. вещ. числа. и $d_0 \neq 0$.

$(|q| < 1) \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ - может сх-ся;

$(|q| = 1) \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = d_0 \neq 0$ - расх-ся по необх. признаку.

$(|q| > 1) \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (\text{sign } d_0) \cdot \infty \neq 0$ - расх-ся по необх. признаку.

$(|q| \leq -1) \Rightarrow \nexists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ - расх. по необх. признаку.

Остановимся на случае, когда $|q| < 1$

$$S_n = d_0 + d_0 q + \dots + d_0 q^n$$

$$q S_n = d_0 q + \dots + d_0 q^{n+1}$$

$$S_n = d_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{d_0}{1 - q}$$

Теорема 2: Линейная комбинация сх-ся числ. рядов с общ. членами a_k и b_k и суммами S^a и S^b - сходящийся числ. ряд и сумма числ. ряда:

$$\{\lambda a_k + \mu b_k\} = \lambda S^a + \mu S^b$$

Д-во: Если $|\lambda|, |\mu| < \infty$, то сумма S ряда с общ. членами $\{\lambda a_k + \mu b_k\}$ равна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \{\lambda a_k + \mu b_k\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k \right\} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \lambda S^a + \mu S^b$$

? т.г.

Предварительные замечания: 1. $S_{n+N} = \underbrace{(a_1 + \dots + a_n)}_{S_n} + \underbrace{(a_{n+1} + \dots + a_{n+N})}_{\sigma_n^N}$,

т.е. $S_{n+N} = S_n + \sigma_n^N$, где S_{n+N} и S_n - соотв-е частные суммы исх. ряда $\{a_k\}$, а $\sigma_n^N = \sum_{k=1}^N a_{n+k}$ - N -ая частичная сумма n -го остатка исх-го ряда, т.е. частичная сумма R_n

Т.о. $S_{n+N} = S_n + \sigma_n^N$ отсюда следует зам. 2.

при фикс. n пределы левой и правой частей последнего равенства либо одновременно $\exists$ и $< \infty$, либо не сущ. $\Rightarrow$ теорема 3.

Теорема 3: Числ. ряд сход-ся или расх-ся одновременно с любым своим остатком.

Следствие из теор. 3: Характер сходимости исх. числ. ряда не измен., если:

- 1) к нему добавить конеч. число эл-тов
- 2) вычеркнуть конеч. число эл-тов.
- 3) переставить местами конеч. число эл-тов.
- 4) заменить конеч. число эл-тов другими.

Знакоположительные числовые ряды.

• Далее рассм. числовые ряды с общ. членом $a_k > 0, \forall k \geq 1$.
В этом случае $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$, т.е. послед-ть частных сумм $\{S_n\}$ монот-но возр-т и имеет конеч. предел лишь в том случае, когда она ограничена сверху.
Т.о. имеет место след. теорема.

Теорема 1: Знакополож. числ. ряд сходится $\Leftrightarrow$ когда монотон. возр. послед. его частных сумм ограничена сверху.

Признаки сходимости знакополож. числ. рядов

① Признак сравнения

Если, начиная с некот. номера $N \geq 1$, имеет место неравенство: $a_k \leq b_k \quad \forall k \geq N$, то из сх-ти знакополож. числ. ряда $\{b_k\}_{k \geq 1} \Rightarrow$ сходимость знакополож. числ. ряда $\{a_k\}_{k \geq 1}$, а из расх-ти числ. ряда $\{a_k\}_{k \geq 1}$ следует расх-ть числ. ряда $\{b_k\}_{k \geq 1}$.

Д-во: Согласно усл. теор. 1 имеем:

$$\underbrace{\sum_{k=N+1}^{N+m} a_k}_{\sigma_{N+m}^a} \leq \underbrace{\sum_{k=N+1}^{N+m} b_k}_{\sigma_{N+m}^b}, \text{ т.е. } \sigma_{N+m}^a \leq \sigma_{N+m}^b, \text{ где исп-ем } n=N$$

общая частн. сумма n -х остатков соотв. числ. рядов.

Если $\{b_k\}_{k \geq 1}$ - сх-ся, то имеем $\sum_{k=N+1}^{N+m} a_k \leq \sum_{k=N+1}^{N+m} b_k < \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k < \infty$, т.е. послед-ть $\{\sigma_{N+m}^a\}_{m \geq 1}$ монот. возр., огранич. сверху, т.е. $\{a_k\}_{k \geq 1}$ сх-ся.

Если те $\{a_k\}_{k \geq 1}$ расх-ся, то $\sigma_{N+m}^b \geq \sigma_{N+m}^a \rightarrow +\infty$ откуда
и следует расх-ть ряда $\{b_k\}_{k \geq 1}$

Замечание к пр-ку сравнения:

т.т.г.

Если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = q \in (0; \infty)$, то знакопом. числ. ряды $\{a_k\}_{k \geq 1}$ и

$\{b_k\}_{k \geq 1}$ сх-ся или расх-ся одновременно, т.к. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \geq 1)$:

$$(k \geq N) \Rightarrow \left| \frac{a_k}{b_k} - q \right| < \varepsilon \Leftrightarrow q - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < q + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_k < (q + \varepsilon)b_k \quad \wedge \quad (q - \varepsilon)b_k < a_k \Rightarrow \left[\text{рассм. } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{a_k} = \frac{1}{q} \in (0; \infty) \right]$$

(ост-ся восп-ся теор)

② Интегральный признак Коши:

Пусть впр-д-на скамп. ф-ия $f(x)$ ^{мон-но убыв} такая, что, начиная с некоег. номера $N \geq 1$ $f(k) = a_k, k \geq N$. Тогда знакопом. числовой ряд $\{a_k\}_{k \geq 1}$ сх-ся или расх-ся одновременно с несобств. интегралом:

$$\int_N^{\infty} f(x) dx$$

Пример: $a_k = \frac{1}{k^\lambda}$. При $\lambda \leq 0$ исх. ряд расх-ся по несоб. пр-ку.

Если $\lambda > 0$, то начинаем $f(x) = \frac{1}{x^\lambda}$

$$\text{Но тогда } \int_N^{\infty} f(x) dx = \int_N^{\infty} x^{-\lambda} dx = \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \Big|_N^{\infty} < \infty : \lambda > 1$$

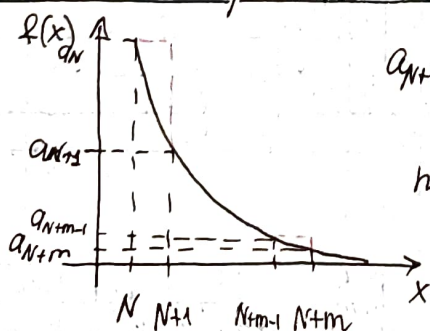
$$\text{А т.к. } \int_N^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_N^{\infty} = \infty, \text{ то } \left\{ \frac{1}{k^\lambda} \right\}_{k \geq 1} \text{ сх-ся при } \lambda > 1 \text{ и}$$

расх-ся при $0 < \lambda \leq 1$, таким образом гарм. ряд расх-ся.

Док-во инт. пр-ка Коши:

11.10.19.

Лекция 6



$$a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+m} < \int_N^{N+m} f(x) dx < a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+m-1}$$

по св-вам объёмностей и объёмности фигур

$$\sigma_{N+1}^k = a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+k} - k\text{-ая часть}$$

сумма N -го члена остатка числ. ряда $\{a_k\}_{k \geq 1}$

$$\text{Т.о. имеем: } \sigma_N^m < \int_N^{\infty} f(x) dx < a_N + \sigma_N^{m-1} \text{ и осталось}$$

воспользоваться признаком сравнения и изв. утв.:

числ. ряд сходится или расходится одновременно с своим остатком.

③ Признак Коши (с радикалом):

Если, начиная с некот. номера $N \geq 1$, имеет место неравенство

числ. ряд $\{a_k\}_{k \geq 1}$ сходится и расходится, если
 $\forall n \geq 1 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, $\forall n \geq N$, то знакочередование.
 $\forall n \geq 1 \quad \sqrt[n]{a_n} \geq q > 1$

Д-во: Пусть $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, $\forall n \geq N \geq 1$. Тогда $a_n \leq q^n$, где $q \in (0; 1)$, и сход-ть следует по признаку сравнения со сход-ся геомтр. прогрессией. Вторая часть утвержде-ние док-ся аналогично.

Замечание: Предельный вариант признака Коши с радикалом: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ и при $q < 1$ - сх-ся;

$q > 1$ - расходится, $q = 1$ - требуется доп. исследование

Д-во аналогично док-ву предельного случая признака сравнения.

Пример: $a_n = \frac{(n+1)^n}{(2n^2+3)^{n/2}}$. Имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n^2+3)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 - \text{сходится.}$$

④ Признак Д'Аламбера:

Если, начиная с некот. номера $N \geq 1$, имеет место неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, то исх. ряд сх-ся.

Если же $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$, то исх. ряд расходится.

Д-во: $\forall n \geq N > 1$ имеем $a_{n+1} \leq q a_n \Rightarrow a_{n+2} \leq q a_{n+1} \leq q^2 a_n \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{n+m} \leq q^m a_n$ и исх. ряд сх-ся по признаку сравнения со сход-ся геомтр. прогрессией $\{a_n q^{n+k}\}_{k \geq 1}$.

Вторая часть утверждения док-ся аналогично.

Замечание: Как и в случае признака сравнения док-ся предельный вариант рассм. признака:

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ и $(q < 1)$ - сходится, $(q > 1)$ - расх-ся;

$(q = 1)$ - необх. доп. исследование.

Пример: $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^2}{(n+1)^{n+2} \cdot 2^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1 \text{ с.с.}$$

Знакопеременные числовые ряды.

- Далее будем рассм. числовые ряды, эл-ты кот. в зависимости от номера могут иметь любой знак. Такие ряды будем называть знакопеременными.
- Если эл-ты знакоперем. числ. ряда меняют знак посмер, т.е. $+-+--\dots$ или $-+-+--\dots$, то такие числ. ряды будем наз-ть знакопеременными.

Теорема Лейбница:

Пусть $a_k > 0$, $\forall k \geq 1$ и при этом $a_{k+1} < a_k$, $\forall k \geq 1$ и

$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. В этом случае знакоперемен. числ. ряд $\{(-1)^k a_k\}_{k \geq 0}$ сходится и его сумма $S < a_1$

Д-во: $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

Т.о. $S_{2n+1} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > S_{2n}$, т.е. $\{S_{2n}\}_{n \geq 1}$ монотон.

возр. знакополож-я числ. послед-ть. А т.к. $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$, т.е. $\{S_{2n}\}_{n \geq 1}$ огранич. сверху

и $\exists S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$.

А т.к. $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$, то

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S \text{ и док-во завершено.}$$

Замечание: Если $\{b_k\}_{k \geq 1}$ - знакоперем. числ. ряд и сх-ся ряд $\{|b_k|\}_{k \geq 1}$, то говорим, что исх. ряд сходится абсолютно. Если же ряд $\{b_k\}_{k \geq 1}$ сх-ся, а ряд $\{|b_k|\}_{k \geq 1}$ расходится, то говорим, что исх. ряд сх-ся условно.

Пример: ① $b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ - сх-ся условно по признаку Лейбница, т.к. ряд с общ. членом $|b_k| = \frac{1}{k}$ расх-ся по интегральному признаку, но

② $b_k = \frac{(-1)^{k(k+1)}}{k^2}$ не явл. знакоперем., $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$ и $|b_{k+1}| = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} = |b_k|$

т.к. $b_1 = -1$; $b_2 = -\frac{1}{2^2}$; $b_3 = \frac{1}{3^2}$; $b_4 = \frac{1}{4^2} \dots$ Признак Лейбница не применим. $|b_k| = \frac{1}{k^2}$ - сх-ся по ит-му признаку $\Rightarrow$ исх. ряд сходится абсолютно

О структуре абсолютно и условно сходящихся числовых рядов.

Имеем числ. ряд $\sum a_k$ знакочеред. с общ. чл. a_k . Рассм. знакочеред. числ. ряды с общ. чл. $|a_k|$.

$$b_k \triangleq \frac{1}{2} \{ |a_k| + a_k \} \geq 0$$

$$c_k \triangleq \frac{1}{2} \{ |a_k| - a_k \} \geq 0$$

В этом случае имеем:

$$(A) \quad |a_k| = b_k + c_k; \quad a_k = b_k - c_k$$

$$(B) \quad |b_k| \leq |a_k|; \quad |c_k| \leq |a_k|$$

Сформули.
теорему
к экзамену.

- 1) Если исх. ряд сходится абсолютно, то сош. (B) по признаку сравнения сходится числ. ряд, сост. из полож. и отриц. эл-тов исх. ряда. Как следствие исх. ряд сходится как лнн. комбинация сх-ся числ. рядов. - второе рав-во в (A).
- 2) Если одновр. сх-ся числ. ряды $\{b_k\}_{k \geq 1}$ и $\{c_k\}_{k \geq 1}$, то сош. (A) исх. ряд сходится и при том абсолютно.
- 3) Если лишь один из рядов $\{b_k\}_{k \geq 1}$ и $\{c_k\}_{k \geq 1}$ сходится, а второй расх-ся, то исх. числ. ряд сош. (A) расх-ся.
- 4) Исх. ряд может сходиться лишь условно, если одновр. расх-ся $\{b_k\}_{k \geq 1}$ и $\{c_k\}_{k \geq 1}$.

Пример: 1) $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ - сх-ся условно.

$$b_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}, \quad c_{2k} = \frac{1}{2k} - \text{расх-ся.}$$

$$2) \quad a_{2k} = -\frac{1}{5^k} \quad \{a_k\}_{k \geq 1} - \text{знакочереда, но } \frac{1}{k} > \frac{1}{5^k} < \frac{1}{k+1} -$$

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k}$$

нарушено монот. уб., т.е. признак Лейбница не применим.

$$|a_{2k}| = \frac{1}{5^k} - \text{сх-ся как геом. прогрессия}$$

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k} - \text{расх-ся как гарм. ряд}$$

Исх. ряд расх-ся.

Числовые ряды в $\mathbb{C}$.

Опр. Комплексное число z наз-ют пределом комплекс. числ. последовательности $\{z_k\}_{k \geq 1}$ и пишут

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \geq 1:$$

$$n \geq N(\varepsilon) \geq 1 \Rightarrow |z - z_k| < \varepsilon$$

18.10.19.

ЛЕКЦИЯ 7

Замечание 1: Имеет место очевидные неравенства:

$$\frac{|x-x_k|}{|y-y_k|} \leq \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2} = |z-z_k| \leq |x-x_k| + |y-y_k|, \text{ где}$$

где $z = x + iy$ и $z_k = x_k + iy_k, \forall k \geq 1$

Т.о. имеет место след. эквивалентность:

$$\left(\exists \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z \right) \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \right) \wedge \left(\exists \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y \right)$$

Замечание 2:

Если $z_k = x_k + iy_k, \forall k \geq 1$, и при этом

$$S_n^z \equiv \sum_{k=1}^n z_k \equiv \sum_{k=1}^n (x_k + iy_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k}_{S_n^x} + i \underbrace{\sum_{k=1}^n y_k}_{S_n^y} = S_n^x + i S_n^y$$

Т.о. с учетом замечания 1 мы можем утверждать следующее:

комплексный числовой ряд с общ. чл. $\{z_k\} = x_k + iy_k$
 сх-сл $\Leftrightarrow$ когда одновременно сх-сл вещественные
 числ. ряды $\{x_k\}_{k \geq 1}$ и $\{y_k\}_{k \geq 1}$

Пример 1: $z_k = \frac{k^3 + ik^2 + 1}{k^2(k^3 + 1)} = \frac{1}{k^2} + i \frac{1}{k^3 + 1}$

Т.о. $x_k \equiv \frac{1}{k^2}$ - сх-сл как ряд $\frac{1}{k^\lambda}$, где $\lambda = 2 > 1$

$y_k = \frac{1}{k^3 + 1} \sim \frac{1}{k^3}$ - сх-сл как ряд $\frac{1}{k^\lambda}$, где $\lambda = 3 > 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow z_k$ сх-сл.

Замечание 3:

Т.к. $\left\{ \begin{matrix} |x_k| \\ |y_k| \end{matrix} \right\} \leq \sqrt{x_k^2 + y_k^2} = |z_k| \leq |x_k| + |y_k|$, то

м/о утв-ть, что ряд $\{z_k\}_{k \geq 1}$ сх-сл абсолютно $\Leftrightarrow$
 когда одновременно абс-но сх-сл веществ.
 числ. ряды $\{x_k\}_{k \geq 1}$, $\{y_k\}_{k \geq 1}$

Пример 2: $z_k \equiv \frac{i^k}{\sqrt{k}} \Rightarrow z_{2k} \equiv \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k}}$ - сх-сл условно по пр-ку Лейбница;

$z_{2k+1} = i \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}, y_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$ - сх-сл условно по пр-ку Лейбница $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$ исх. ряд $\{z_k\}_{k \geq 1}$ сх-сл условно.

Пример 3: $z_k = \frac{(k+i)^k}{(2k-i)^k} \Rightarrow |z_k| = \frac{|k+i|^k}{|2k-i|^k} = \frac{(k^2+1)^{k/2}}{(4k^2+1)^{k/2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{4k^2+1}} = \frac{1}{2} < 1$ - сх-сл абс-но

Функциональные ряды.

Пусть $\forall k \geq 1$ скаляр. ф-ция $a_k(x)$ опред-на на некот. мн-ве Ω . Если $D \subset \Omega$ и для кажд. $x \in D$ ряд с общ. членом $a_k(x)$ сх-ся, то будем говорить, что на Ω опред-н функцион-нальный ряд с общ. членом $a_k(x)$ и областью сходимости $D \subset \Omega$

Пример 1: $a_k(x) \triangleq \frac{(x+1)^k}{k}$, $\Omega = \mathbb{R}^1$.

В этом случае при $|x+1| < 1$, т.е. $-2 < x < 0$ исх. ряд сх-ся абс-но как сх-ся геом. прогрессия, т.к. в этом случае $\frac{|x+1|^k}{k} < |x+1|^k < 1$

Если $|x+1| > 1$, т.е. $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$, то исх. ряд расх-ся по некот. пр-ку.

Если $x+1 = -1$, т.е. $x = -2$, то $a_k(-2) = \frac{(-1)^k}{k}$ - сх-ся усл-но по пр-ку Лейбница.

При $x=0$, $a_k(0) = \frac{1}{k}$ - расх-ся как гарм. ряд.

Т.о. $D = \{x \in \mathbb{R}^1: -2 \leq x < 0\}$

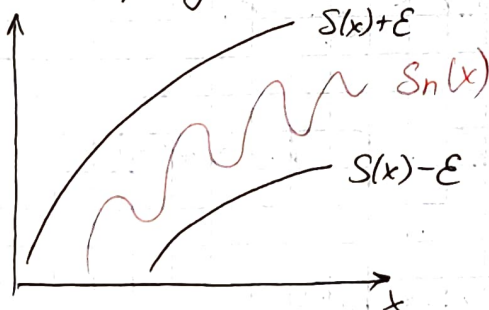
Опр: Пусть функц. ряд $\{a_k(x)\}_{k \geq 1}$ имеет обл. сх-ти $D \subset \Omega$. Пусть $M \subset D$ в точках кот. имеет место след-е:

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \equiv N(\varepsilon) \geq 1): n \geq N(\varepsilon) \geq 1$, то

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \text{ где}$$

$$S_n(x) \triangleq \sum_{k=1}^n a_k(x), \quad S(x) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

В этом случае говорят, что на мн-ве $M \subset D \subset \Omega$ исх. ряд $\{a_k(x)\}_{k \geq 1}$ сходится равномерно.



Пример 2: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1: 0 \leq x \leq 1\}$, $a_1(x) \triangleq x$, $a_k(x) \Big|_{k \geq 2} = x^k - x^{k-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_n = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \dots + (x^n - x^{n-1}) = x^n,$$

$$\text{Т.о. } S_n(x) \equiv \begin{cases} 0 & x=0 \\ 0 < x < 1, x^n \\ 1 & x=1 \end{cases} \Rightarrow S(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0; 1) \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

Вынесем хар-р сх-ти исх. функц. ряда.

$$|S(x) - S_n(x)| \equiv |R_n(x)| = |x|^n < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \Rightarrow N(\varepsilon, x) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} + 1$$

Т.о. наблюд. парадокс - следствие отсутствия равномерной сх-ти!

Л-ма Вейерштрасса о равномерной сходимости

Пусть $a_k(x)$ - общ. член функц. ряда с обл-то сходимости $D \subset \Omega$. Если для элемента $M \subset D$ для исх. функц. ряда существует монотонно $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ - знакочередующаяся сходящаяся числовой ряд такой, что:

$$|a_k(x)| \leq v_k, \quad (\forall k \geq 1) \quad (\forall x \in M), \text{ то}$$

на M функц. ряд $\{a_k(x)\}_{k=1}^\infty$ сх-ся абсолютно и равномерно.

Д-во. Абс-я сх-ть исх. функц. ряда следует по признаку сравнения.

Т.к. $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ - сх-ся знакочередующаяся числ. ряд, то $(\forall \varepsilon > 0)$

$$(\exists N = N(\varepsilon) \geq 1): \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+k} < \varepsilon, \text{ где } \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+k} \equiv R_n^v -$$

n -ый остаток знакочередующаяся числ. ряда $\{v_k\}_{k=1}^\infty$

Рассм. m -ую частн. сумму исх. функц. ряда:

$$\tilde{\sigma}_{n,m}^a(x) \equiv a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \dots + a_{n+m}(x). \text{ Имеем}$$

$$|\tilde{\sigma}_{n,m}^a(x)| \leq \sum_{k=1}^m |a_{n+k}(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+k} < \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Т.о. если $n \geq N(\varepsilon)$, то

$$|\tilde{\sigma}_{n,m}^a(x)| < \varepsilon, \text{ т.к. } R_n^v < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Переходим к пределу при $m \rightarrow \infty$. Т.о.

$$|R_n^a(x)| < \varepsilon, \quad (\forall x \in M) \wedge (\forall n \geq N(\varepsilon) \geq 1) \\ \text{в.т.д.}$$

Пример 3: $a_k(x) = \frac{x^k}{k^2}$, $M = \{x \in \mathbb{R}': |x| \leq 1\}$ - сх-ся абс-но и равномерно, т.к. $|a_k(x)| < \frac{1}{k^2}$ - сх-ся как ряд $\frac{1}{k^\lambda}$, $\lambda = 2 > 1$

Замечание 1: Если функц. ряд $\{a_k(x)\}_{k \geq 1}$ непрер-х на МСД ф-ий сх-ся на М равномерно, то его сумма $S(x)$ на М явл. непрер-й ф-ией

Замечание 2: Если функц. ряд $\{a_k(x)\}_{k \geq 1}$ непр-х (дифф-х) на М ф-ий сх-ся в точках М равномерно, то допустимо почленное интегрирование (дифф-е) его суммы.

Степенные ряды.

Опр: Функц. ряд с общ. членом $a_k(x)$, $x \in D$ наз-т степенным рядом, если

$$a_k(x) \equiv \alpha_k (x-x_0)^k, \quad \forall k \geq 0, \text{ где } \{\alpha_k\}_{k \geq 0}, \text{ и } x_0 - \text{изв. веществ. числа.}$$

Замечание 1: Полагая $X \triangleq x-x_0$, всегда можно привести общ. чл. степенного ряда к стандартной форме $a_k \equiv \alpha_k X^k$

Замечание 2: Совершенно аналогично вводится и комплексн. степенной ряд:

$$\{\beta_k (z-z_0)^k\}_{k \geq 0}, \text{ где } \{\beta_k\}, z_0 \in \mathbb{C} - \text{изв. комплекс. числа.}$$

Элементы ТФКП.

25.10.19.

Замечание 1: Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ отлич. от $\mathbb{R}^2$ наличием второго внутреннего закона - операции умножения. Поэтому комплекс. ф-ия $f(z)$ комплекс. переменного z обладает всеми стандартными св-ми векторной ф-ии векторного аргумента. Наша задача уяснить специфику, обусл. наличием второго внутр. закона.

Лекция 8

Замечание 2: $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}$. При этом принято

$\operatorname{Re} z \equiv x \wedge \operatorname{Im} z \equiv y$. Кроме того используют арифм. форму записи комплекс. числа: $z = x + iy \equiv \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$

Т.о. $f(z) \equiv f(x, y)$. При этом $U(x, y) \triangleq \operatorname{Re} f(z)$, $V(x, y) \triangleq \operatorname{Im} f(z)$,

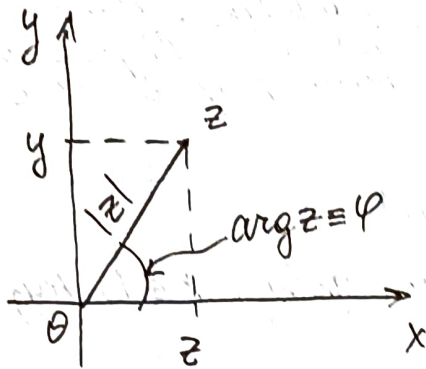
т.е. $f(z) \equiv \begin{bmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{bmatrix} \equiv U(x, y) + iV(x, y)$

Замечание 3: При исп-ии арифм. формулы умножения комплекс. чисел реалн. по стандартному правилу:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + ix_2 y_1 + ix_1 y_2 \equiv \\ &\equiv (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \equiv \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{bmatrix} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

Замечание 4:



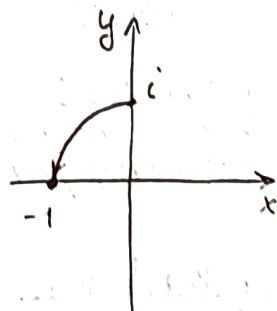
$$z = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi =$$

$$= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Далее докажем $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$

$$\text{Т.о. } z_1 \cdot z_2 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



Теорема Абеля:

Пусть $\{a_k\}_{k \geq 0} \in \mathbb{C}$. Имеем комплексной степен. ряд с общ. членом $a_k z^k$. Если в точке $z_1 \neq 0$ этот ряд сх-ся, то он сходится и при том абс-но в любой точке $z \in \mathbb{C}$: $|z| < |z_1|$. Если же он расх-ся в некой точке $z_2 \neq 0$, то он расх-ся во всех точках $\mathbb{C}$ таких, что $|z| > |z_2|$.

Д-во: Пусть в точке $z_1 \neq 0$ исх. ряд сходится. Но тогда по нек-м признаку $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k z^k = 0$. Т.о. $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \geq 1)$:

$$(n \geq N(\varepsilon) \geq 1) \Rightarrow |a_n z_1^n| < \varepsilon. \text{ Т.о. } \forall z \in \mathbb{C}:$$

$$|z| < |z_1| \text{ имеем: } |a_n z^n| = |a_n z_1^n| \cdot (z/z_1)^n = |a_n z_1^n| \cdot (|z|/|z_1|)^n \rightarrow$$

$$|a_n z_1^n| \cdot (|z|/|z_1|)^n < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и т.е. утв. следует из признака ср-ия.}$$

Пусть теперь исх. ряд расх-ся в точке $z_2 \neq 0$ и $z \in \mathbb{C}$:

$|z| > |z_2|$. Если предположить, что в точке z исх. ряд сх-ся, то соед. докажем в т. z_2 он г/н сх-ся абс-но - получ. противоречие заверш. д-во.

Следствия из теоремы Абеля:

① $\exists R \geq 0$: $\forall z \in K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ исх. ряд $\{a_k z^k\}_{k \geq 0}$ сх-ся абс-но и расх-ся $\forall z \in \mathbb{C} : |z| > R$

$$\textcircled{2} R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n/|a_n|}$$

③ В круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r < R\}$ исх. степенной ряд абс-но и равномерно (см. теор. Вейерштрасса)

④ Если хотя бы в одной точке окружности

$\gamma_R \triangleq \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ круга сх-ти исх. ред сх-се абс-но, то он сх-се абс-но во всех точках γ_R , т.к. если $z_1, z_2 \in \gamma_R$, то $|z_1| = |z_2| = R$.

⑤ Если хотя бы в одной точке γ_R исх. ред расх-се по неопр. признаку, то он расх-се во всех точках γ_R . — док-во аналог. предыдущему.

⑥ Если хотя бы в одной точке γ_R исх. ред сх-се усл-но, то он сх-се усл-но во всех точках γ_R

Пример 1:

$$a_n(z) = \frac{i^k \cdot z^{2k}}{(k+1)\sqrt{k}} \Rightarrow |a_n(z)| = \frac{|z|^{2k}}{(k+1)\sqrt{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}(z)|}{|a_k(z)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|z|^{2k+2} \cdot (k+1) \cdot \sqrt{k}}{(k+2)\sqrt{k+1} \cdot |z|^{2k}} = |z|^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}(k+2)} = \frac{|z|^2}{1} \Rightarrow$$

$R=1$, т.е. $|z| < 1$ — сх-се абс-но

$|z| > 1$ — расх.

$$|z|=1: |a_k(z)| = \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \text{ — сх-се, т.е.}$$

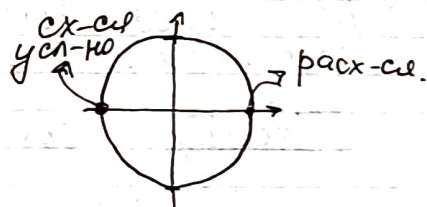
исх. ред сх-се абс-но при $|z| \leq 1$.

Пример 2:

$$a_n(z) = \frac{z^k}{\sqrt{k}} \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$$

$$a_n(-1) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ — сх-се усл-но}$$

$$a_n(1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ — расх-се}$$



Трансцендентные функции комплексного переменного.

① $e^z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < \infty$

Свойства: 1. Пусть φ — веществ. число. Тогда

$$e^{i\varphi} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \varphi^k}{k!} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} \varphi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

А т.к. $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$. Т.о. приходим к ф-лам Эйлера:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \wedge \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$2. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \text{ т.к. } e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(z_1)^i}{i!} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(z_2)^j}{j!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_1)^i (z_2)^j}{i! j!} = \left\{ \begin{array}{l} n=i+j \geq 0 \\ k=i \geq 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} n-k=j \geq 0 \\ n \geq k \geq 0 \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k! (n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}$$

$$3. z = x + iy \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) - \text{тригоном.}$$

при этом $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$
 $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y \Rightarrow |e^z| = e^x$

форма предст.
комплекс.
числа.

$$4. e^{z+2\pi i k} = e^z, \text{ т.е. } e^z - \text{период. ф-ия с периодом } 2\pi i$$

Пример: $e^{1+i\frac{\pi}{4}} = e (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = e \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} e + i \frac{\sqrt{2}}{2} e$

$$\textcircled{II} \cos z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \infty \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |z| < \infty$$

Свойства: 1. По аналогии с веществ. случаем м/р обосн. ф-лой Эйлера

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

2. Комплекс. $\cos z$ и $\sin z$ обладают стандарт. св-ми тригоном. ф-ий.

Пример: $\cos(z_1+z_2) = \frac{1}{2} \{ e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)} \} =$

$$= \frac{1}{2} \{ e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} + e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2} \} = \frac{1}{2} \{ (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) +$$

$$+ (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2) \} = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

3. Стандарт. способом опред-ют веществ. и immag. части тригоном. ф-ий, а также их модуль:

1.11.19. Согласно ф-лам Эйлера и св-м экспоненты, что $\cos$ -ы и $\sin$ -ы явл. ф-циями периодич. с вещ. периодом $T=2\pi$.

Лекция 9

4. $|\cos z|$ и $|\sin z|$ неотрицательны, т.к. в частности

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} (e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) =$$

$$= \frac{1}{2i} (e^{ix-y} - e^{-ix+y}) = \frac{1}{2i} (e^{-y} (\cos x - i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x)) =$$

$$= -i \left\{ -\frac{e^{-y} - e^y}{2} \cos x + i \frac{e^{-y} + e^y}{2} \sin x \right\} = \underbrace{\operatorname{ch} y \sin x}_{\operatorname{Re} \sin z} + i \underbrace{\operatorname{sh} y \cos x}_{\operatorname{Im} \sin z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sin z| = \sqrt{\text{ch}^2 y \sin^2 x + \text{sh}^2 y \cos^2 x}, \text{ откуда и следует основное утв. - е.}$$

неопр ф-ии

Пример:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \frac{1}{2} \left(e^{i(\frac{\pi}{4} + i)} + e^{-i(\frac{\pi}{4} + i)} \right) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-1} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) + e^1 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \text{ch } 1 \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} - i \text{sh } 1 \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ch } 1 - i \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sh } 1$$

III) $\text{sh } z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |z| < \infty;$

$$\text{ch } z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \infty;$$

Осн. свойства: 1. Стандарт. способом док-ем равенства:

$$\left. \begin{aligned} \text{sh } z &= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) \\ \text{ch } z &= \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \end{aligned} \right\} \text{ - аналог фн Эйлера}$$

2. $\text{sh } z$ и $\text{ch } z$ имеют комплекс. период равной $\pm \pi i$, что следует непосредственно из св-ва 1 и периодичности e^z .

3. Для гиперболич. ф-ий имеет место равенство, аналог. ф-лам тригонометрии, в частности:

$$(a) \text{sh}^2 z = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2z} - 2 + e^{-2z}) = \frac{\text{ch}(2z) - 1}{2}$$

$$(b) \text{sh } z_1 \cdot \text{ch } z_2 = \frac{1}{2} (e^{z_1} - e^{-z_1}) \cdot \frac{1}{2} (e^{z_2} + e^{-z_2}) = \frac{1}{4} (e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1-z_2)} + e^{z_1-z_2} - e^{-(z_1+z_2)}) = \frac{1}{2} \{ \text{sh}(z_1+z_2) + \text{sh}(z_1-z_2) \}$$

4. вещественные и мнимые части гиперболич. ф-ий вычисляются стандарт. способами; в частности

$$\text{sh } z = \frac{1}{2} (e^{x+iy} - e^{-x-iy}) = \frac{1}{2} \{ e^x (\cos y + i \sin y) - e^{-x} (\cos y - i \sin y) \} =$$

$$= \text{sh } x \cos y + i \text{ch } x \sin y$$

5. $\text{ch}(iz) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z;$

$$\text{sh}(iz) = \frac{1}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) = i \cdot \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = i \sin z;$$

$$\cos(iz) = \frac{1}{2} (e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2} (e^{-z} + e^z) = \text{ch } z;$$

$$\sin(iz) = \frac{1}{2i} (e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}) = -i \cdot \frac{1}{2} (e^{-z} - e^z) = i \operatorname{sh} z;$$

IV

Натуральный логарифм вводится как ф-ия, обратная к экспоненте; при этом разграничат $\ln z$ и $\operatorname{Ln} z$, что связано с исп-м $\arg z$ и $\operatorname{Arg} z$.

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$$

$$\text{Пусть } W \triangleq \ln z \Leftrightarrow z = e^W$$

При этом пусть $W = u + iv$. В этом случае имеем:

$$z = |z| \cdot e^{i \arg z} = |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)).$$

$$\text{T.O. } |z| e^{i \arg z} = e^{u+iv} \Leftrightarrow |z| e^{i \arg z} = e^u \cdot e^{iv} \Leftrightarrow \left\{ |z| = e^u \right\} \wedge \left\{ \arg z = v \right\}$$

$$\text{T.O. имеем: } \ln z = \ln |z| + i \arg z, \text{ т.е.}$$

$$\operatorname{Ln} z \triangleq \ln z + i 2\pi k; \text{ T.O. } \ln z \text{ и } \operatorname{Ln} z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$$\text{Пример: } \ln(-i) = \ln|-1| + i \arg(-1) = i\pi$$

Замечание: 1) $\ln(z)$ обладает всеми стандартными св-ми логарифма в-го.

2) По аналогии с введением $\ln z$ вводится обр. тригонометрические и обр. гиперболич. ф-ии. В частности:

$$W = \arccos z \Leftrightarrow z = \cos W = \frac{1}{2} (e^{iW} + e^{-iW}) \Leftrightarrow$$

$$(e^{iW})^2 - 2ze^{iW} + 1 = 0 \Leftrightarrow \{e^{iW} - z\}^2 - z^2 + 1 = 0$$

$$e^{iW} = z + \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow iW = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W \triangleq \arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

При этом разграничат $\operatorname{Arccos} z$ и $\arccos z$ — см. $\ln z / \operatorname{Ln} z$.

Дифференцирование комплексных функций комплексного переменного.

• Далее пусть $f(z)$ — комплекс ф-ия комплекс. переменного, опред. в некоей области $G \subset \mathbb{C}$. Далее будем говорить, что эта ф-ия дифф-ма в точке $z \in G$, если $\forall \Delta z \in \mathbb{C}: z + \Delta z \in G$ имеет место след-е равенство:

$$\Delta f(z) \triangleq f(z + \Delta z) - f(z) = A \cdot \Delta z + o(|\Delta z|), \text{ где}$$

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \operatorname{Im} f(z) = v(x, y), \operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y, \text{ т.е.}$$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \text{ и } z = x + iy.$$

Считаем также, что $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$, $A = \alpha + i \beta$, где

$$\alpha \equiv \alpha(x, y) \text{ и } \beta \equiv \beta(x, y);$$

$$\exists \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0 \text{ и } \operatorname{Re} o(|\Delta z|) = o_x(|\Delta z|)$$

$$\operatorname{Im} o(|\Delta z|) = o_y(|\Delta z|).$$

Теорема 1:

Если $f(z)$ дифф-на в точке $z \in G$, то в этой точке выполняются условия Коши-Римана:

$$(u'_x = v'_y) \wedge (u'_y = -v'_x)$$

Д-во: Если $\Delta u(x, y) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$;

$$\Delta v(x, y) = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y), \text{ то}$$

$$\Delta f(z) = \Delta u + i \Delta v.$$

$$\begin{aligned} \text{Т.о. имеем } \Delta u + i \Delta v &= (\alpha + i \beta)(\Delta x + i \Delta y) + o_x(|\Delta z|) + i o_y(|\Delta z|) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{ \Delta u = (\alpha \Delta x - \beta \Delta y) + o_x(|\Delta z|) \} \wedge \{ \Delta v = \beta \Delta x + \alpha \Delta y + o_y(|\Delta z|) \}. \end{aligned}$$

Т.о. имеем:

$$(\alpha = u'_x = v'_y) \wedge (\beta = -u'_y = v'_x)$$

з. м. г.

Замечание 1: Если $f(z)$ дифф-на в т. $z \in G$, т.е.

$\exists A(x, y): \dots$, то принято ф-ию $A(x, y)$ обозначать $f'(z)$ и наз-ть произв-й $f(z)$ в точке z .

Замечание 2: Сом. жок-му $f'(z) = \alpha(x, y) + i \beta(x, y) =$
 $= u'_x + i v'_x = u'_x - i u'_y = v'_y - i u'_y = v'_y + i v'_x$

Теорема 2:

Если для вещ-й и мн-й частей ф-ии $f(z)$ в точке $z \in G$ выполняются условия Коши-Римана и $\exists$ конечные диф-лы её вещ-й и мнимой частей, то $f(z)$ дифф-на в точке $z \in G$, т.е.
 $\exists f'(z)$

Д-во: Согласно исх. допущениям имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= (u'_x \Delta x + u'_y \Delta y) + o_u(|\Delta z|) \\ \Delta v &= (v'_x \Delta x + v'_y \Delta y) + o_v(|\Delta z|) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta f(z) \equiv \Delta u + i \Delta v \in$$

$$\begin{aligned}
 & \ominus \underline{u'_x \Delta x} + \underline{u'_y \Delta y} + o_u(|\Delta z|) + i \underline{v'_x \Delta x} + i \underline{v'_y \Delta y} + i o_v(|\Delta z|) = \\
 & = (\underbrace{u'_x \Delta x + v'_y i \Delta y}_{u'_x(\Delta x + i \Delta y)}) + i (\underbrace{v'_x \Delta x - u'_y i \Delta y}_{-u'_y(\Delta x + i \Delta y)}) + o(|\Delta z|) = \\
 & = \underbrace{(u'_x - u'_y) \Delta z}_{f'(z)} + o(|\Delta z|)
 \end{aligned}$$

r. m. g.

Пример:

① $f(z) = e^{Az}$; $A = \alpha + i\beta$; $z = x + iy$;
 $f'(z) = ?$

8.11.19.

ЛЕКЦИЯ 10

$$\begin{aligned}
 f(z) &= e^{Az} = e^{(\alpha + i\beta)(x + iy)} = e^{(\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)} = \\
 &= \underbrace{e^{\alpha x - \beta y} \cos(\beta x + \alpha y)}_{\operatorname{Re} e^{Az} = u(x, y)} + i \underbrace{e^{\alpha x - \beta y} \sin(\beta x + \alpha y)}_{\operatorname{Im} e^{Az} = v(x, y)}
 \end{aligned}$$

Ф-ии $u(x, y)$, $v(x, y)$ - хорошие
Фроберши ген. конкр-функции

$$u'_x = \alpha e^{\alpha x - \beta y} \cos(\beta x + \alpha y) - \beta e^{\alpha x - \beta y} \sin(\beta x + \alpha y)$$

$$u'_y = -\beta e^{\alpha x - \beta y} \cos(\beta x + \alpha y) - \alpha e^{\alpha x - \beta y} \sin(\beta x + \alpha y)$$

$$v'_x = \alpha e^{\alpha x - \beta y} \sin(\beta x + \alpha y) + \beta e^{\alpha x - \beta y} \cos(\beta x + \alpha y)$$

$$v'_y = -\beta e^{\alpha x - \beta y} \sin(\beta x + \alpha y) + \alpha e^{\alpha x - \beta y} \cos(\beta x + \alpha y)$$

$$u'_x \equiv v'_y \text{ в } \mathbb{R}^2$$

$$u'_y \equiv -v'_x \text{ в } \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists f'(z) = u'_x + i v'_x$$

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \alpha e^{\alpha x - \beta y} \cos(\beta x + \alpha y) - \beta e^{\alpha x - \beta y} \sin(\beta x + \alpha y) + \\
 &+ i (\alpha e^{\alpha x - \beta y} \sin(\beta x + \alpha y) + \beta e^{\alpha x - \beta y} \cos(\beta x + \alpha y)) = \\
 &= e^{\alpha x - \beta y} \left[\underbrace{\cos(\beta x + \alpha y) + i \sin(\beta x + \alpha y)}_{e^{i(\beta x + \alpha y)}} \right] + i \beta e^{\alpha x - \beta y} \left[\underbrace{\cos(\beta x + \alpha y) + i \sin(\beta x + \alpha y)}_{e^{i(\beta x + \alpha y)}} \right] = \\
 &= (\alpha + i\beta) e^{\alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)} = A e^{Az}
 \end{aligned}$$

② $f(z) = \bar{z} \equiv x - iy$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) &= u(x, y) \equiv x \\ \operatorname{Im} f(z) &= v(x, y) \equiv -y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = 1 \\ u'_y = 0 \\ v'_x = 0 \\ v'_y = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

т.е. $u'_x \neq v'_y$ в $\mathbb{R}^2$ и как следствие $f(z) = \bar{z}$ не явл. дифф-иной ни в одной точке $\mathbb{C}$.

Опр. Функцию $f(z)$ будем наз-ть аналитической в точке $z \in \mathbb{C}$, если она дифф-на не только в этой точке, но и в некой её окрестности. $f(z)$ наз-ют аналитической в обл. $G \subset \mathbb{C}$, если она явл. аналитической в каждой точке этой области.

Общие замечание: 1. Операции диф-ия в $\mathbb{C}$ обладает всеми стандартными св-вами операции диф-ия векторных ф-ий векторного аргумента. Объектом исслед-ия нашего курса будут явл-ся те спец-ые особенности, кот. связаны с наличием второго внутрен-него закона — операции умножения комплекс. чисел.

Пример: Пусть $f(w)$ — аналит-я ф-ия и $\varphi(z) \triangleq f(\bar{z})$. По правилу диф-ия композиции функций имеем:

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \left. \frac{df(w)}{dw} \right|_{w=\bar{z}} \cdot \left. \frac{dw}{dz} \right|_{w=\bar{z}}$$

Т.о. $\varphi(z)$ не явл. дифф-й ни в одной точке $\mathbb{C}$

2. Далее мы покажем, что аналит. ф-ия явл. бесконечно дифф-ей. Т.о., если $f(z) \equiv u(x, y) + i v(x, y)$ — аналит-ая, то:

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} u''_{xx} &= v''_{yx} \\ u''_{yy} &= -v''_{xy} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ v''_{yx} = v''_{xy} \right\} \Rightarrow u''_{xx} + v''_{yy} = 0, \text{ т.е. } u(x, y) \triangleq \operatorname{Re} f(z) \text{ — гармонич.}$$

Аналогично док-м, что $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$, т.е. $v(x, y) \triangleq \operatorname{Im} f(z)$ — гарм. ф-ия.

3. Аналитическая ф-ия с точностью до постоя. слагаемых может быть восстановлена по её вещественной или мнимой части.

Пример: $v(x, y) \triangleq x^2 - y^2 + 3$. При этом $v''_{xx} + v''_{yy} = 2 - 2 \equiv 0$, т.е. $v(x, y)$ — гарм. ф-ия в $\mathbb{R}^2$.

$$u'_x = v'_y = -2y \Rightarrow u(x, y) = \int v'_y dx = -2xy + C_1(y)$$

$$u'_y = -v'_x = -2x \Rightarrow u(x, y) = -\int v'_x dy = -2xy + C_2(x)$$

Т.о. $u(x, y) = -2xy + C_0$, $C_0 = \text{const}$, т.е. $f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = -2xy + C_0 + i(x^2 - y^2 + 3) = i(x^2 - y^2 + 2ixy) + C_0 + 3i \equiv$

$$\equiv iz^2 + (C_0 + 3i)$$

Пример 2: $u(x, y) = e^x \sin y - x \Rightarrow u_{xx}'' = e^x \sin y \wedge u_{yy}'' = -e^x \sin y,$

т.е. $u_{xx}'' + u_{yy}'' = 0$ в $\mathbb{C}$

$$v_x' = -u_y' = -e^x \cos y \Rightarrow v(x, y) = -\int e^x \cos y dx = -e^x \cos y + C_1(y)$$

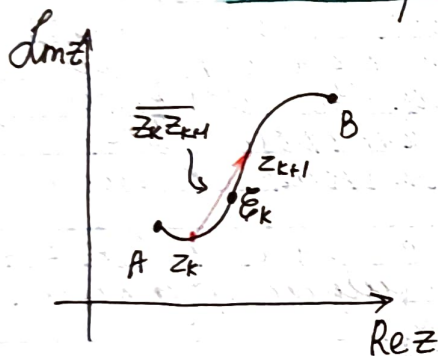
$$v_y' = u_x' = e^x \sin y - 1 \Rightarrow v(x, y) = \int (e^x \sin y - 1) dy =$$

$$-e^x \cos y - y + C_2(x) \Rightarrow v(x, y) = -e^x \cos y - y + C_0, C_0 - \text{const}$$

т.о. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x \sin y - x - i(e^x \cos y + y - C_0) =$

$$\equiv -ie^x(\cos y + isin y) - (x + iy) + iC_0 = -ie^z - z + iC_0$$

Интегрирование в $\mathbb{C}$.



Пусть $\vec{AB}$ — ориент. дуга в $\mathbb{C}$, в некой окрестности к-той опред. на ф-ии $f(z)$. Дугу $\vec{AB}$ точками $\{z_k\}_{k=0}^N$:

$$A = z_0$$

$$B = z_N$$

Разбиваем на N участков, к-ты пересекаются лишь по границам.

На кажд. элемент дуге $\vec{z_k z_{k+1}}$ произв. образом выбираем отмеченную точку ξ_k . Если вне зависимости от выбора разбиения дуги $\vec{AB}$ и выбора системы отмеч. точек $\{\xi_k\}$

$$\exists \lim_{\max |z_k z_{k+1}| \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k) \Delta z_k, \text{ где } \Delta z_k \triangleq z_{k+1} - z_k, \text{ то}$$

его наз-ют интегралом $f(z)$ по ориент. дуге $\vec{AB}$ и обозначают

$$\int_{\vec{AB}} f(z) dz$$

Замечание: ① Если $f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$, то с учетом очевидного равенства $dz \equiv dx + i dy$ имеем:

$$\int_{\vec{AB}} f(z) dz \equiv \int_{\vec{AB}} \{u + iv\} \{dx + i dy\} \equiv \int_{\vec{AB}} u dx - v dy + i \int_{\vec{AB}} v dx + u dy,$$

т.е. интеграл от ф-ии комплекс. переменного представлен парой вещественных криволинейных интегралов. и как следствие обладает всеми стандартными св-ми криволинейных интегралов.

② $\int_{\vec{AB}} dz = B - A$, т.к. $\int_{\vec{AB}} dz = \lim_{\max|\vec{z}_k - \vec{z}_{k+1}| \rightarrow 0} \{(\vec{z}_1 - \vec{z}_0) + (\vec{z}_2 - \vec{z}_1) + \dots + (\vec{z}_N - \vec{z}_{N-1})\} = \vec{z}_N - \vec{z}_0 = B - A$

③ Если $|f(z)| \leq N < \infty, \forall z \in \vec{AB}$, то $|\int_{\vec{AB}} f(z) dz| \leq N \cdot m(\vec{AB})$,
т.к. $|\int_{\vec{AB}} f(z) dz| = |\lim_{\max|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k) \cdot \Delta z_k| \leq \underbrace{\max_{\leq N} |f(z)|}_{\leq N} \cdot \lim_{\max|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_k |\Delta z_k|$

$\lim_{\max|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_k |\Delta z_k|$; ④ Интеграл по замкнутому контуру вводится стандарт. способом.

Пример:

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \left\{ \begin{array}{l} z-z_0 = \rho e^{i\varphi} \\ dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho^n e^{in\varphi}} =$$

$$= \frac{i}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi} d\varphi. \text{ Если } n=1, \text{ то } \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 2\pi i.$$

Если $n > 1$, то $\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$.

Теорема Коши: Пусть $f(z)$ явл. аналитической в замкнутой односвязной области $G \subset \mathbb{C}$, огранич. кусочно-гладкими замкнутой контуром Γ_G . Тогда

$$\oint_{\Gamma_G} f(z) dz = 0$$

До-во: $\oint_{\Gamma_G} f(z) dz = \oint_{\Gamma_G} u dx - v dy + i \oint_{\Gamma_G} v dx + u dy = 0$, т.к.

$u'_x \equiv v'_y$ в $G \cup \Gamma_G$ и осталось воспользоваться формулой Грина.
 $u'_y \equiv -v'_x$

Замечания к теореме: 1. Если обл. G явл. двусвязной



т.е. $\Gamma_G = l \cup L$. Тогда $\oint_{\Gamma_G} = \oint_l + \oint_L \equiv$

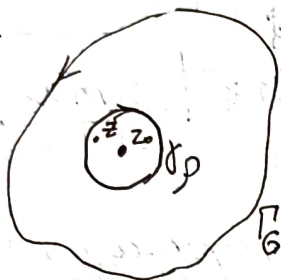
$$\oint_L + \oint_l + \int_{\vec{AB}} + \int_{\vec{BA}} = 0 \Rightarrow \oint_L = \oint_l$$

2. Если обл. является n -связной, т.е. $\Gamma = \bigcup_{k=1}^n \Gamma_k$,

то
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n-1} \oint_{\Gamma_k} f(z) dz$$

15.11.19.

ЛЕКЦИЯ 11



Пусть $f(z)$ определена и является аналитической в односвяз. обл. G , охвачен. кусочно-гладким замкнут. контуром Γ . Пусть z_0 - внутренняя точка G , т.е. она м.б. охвачена окружностью $\Gamma_r = \{ \xi \in \mathbb{C} : |z_0 - \xi| = r \}$, кот. целиком лежит в G и не имеет общ. точек с Γ . В этом случае ф-ция $f(z)/(z-z_0)$ явл-ся аналит. в двухсвязн. обл-ти, охвачен. контурами Γ_G и Γ_r .

Т.о. по теор. Коши для многосв. областей имеем:

$$\oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} + \oint_{\Gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\oint_{\Gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} = \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0}} (*)$$

Т.к. $f(z)$ явл-ся аналитич. в точках Γ_r , то она непрерывна в точках этой окр-ти, т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \rho = \rho(\varepsilon) > 0 : |\xi - z_0| = \rho \Rightarrow |f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$$

А т.к. $\oint_{\Gamma_r} \frac{d\xi}{\xi - z_0} = 2\pi i$, то $\left| \oint_{\Gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \oint_{\Gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} - f(z_0) \oint_{\Gamma_r} \frac{d\xi}{\xi - z_0} \right|$

$$\left| \oint_{\Gamma_r} \frac{d\xi}{\xi - z_0} \right| = \left| \oint_{\Gamma_r} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0} d\xi \right| \leq \max_{\xi \in \Gamma_r} \left| \frac{f(\xi) - f(z_0)}{(\xi - z_0)} \right| \cdot 2\pi \rho \leq 2\pi \varepsilon.$$

Но соогл. раб-ву (*) имеем:

$$\left| \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} - 2\pi i f(z_0) \right| \leq 2\pi \varepsilon. \text{ А т.к. левая часть не}$$

зависит от $\rho = \rho(\varepsilon)$, то имеем
$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0}}$$

интегральная
формула Коши.

Замечание: (1) Интегральная формула Коши позволяет по значению аналит. ф-ции в граничных точках односвязной обл-ти вычислить её значение в любой внутренней точке этой обл-ти.

(2) Аналитическая ф-ция явл-ся бесконечно дифф-и. Действительно, $\forall \Delta z: z_0 + \Delta z \in G$ имеем:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left\{ \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - (z_0 + \Delta z))} - \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \oint_{\Gamma_G} f(\xi) \frac{\xi - z_0 - \xi + z_0 + \Delta z}{(\xi - z_0)(\xi - (z_0 + \Delta z))} d\xi,$$

$$\text{т.е. } f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)(\xi - (z_0 + \Delta z))} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^2}$$

$$\frac{f'(z_0 + \Delta z) - f'(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left\{ \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{[(\xi - z_0) - \Delta z]^2} - \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^2} \right\} =$$

$$= \frac{1!}{2\pi i \Delta z} \oint_{\Gamma_G} \frac{(\xi - z_0)^2 - [(\xi - z_0)^2 - 2(\xi - z_0)\Delta z + (\Delta z)^2]}{[(\xi - z_0) - \Delta z]^2 (\xi - z_0)^2} f(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{1!}{2\pi i \Delta z} \oint_{\Gamma_G} \frac{2(\xi - z_0)\Delta z - (\Delta z)^2}{[(\xi - z_0) - \Delta z]^2 (\xi - z_0)^2} f(\xi) d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^3}$$

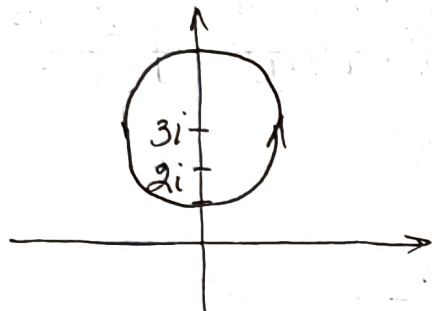
Используя метод полной математ. индукции завершаем наше рассужд. и получаем:

$$\exists f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_G} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, \quad \forall k \geq 0$$

(3) Интегральная формула Коши и формулы для вычисления производных от аналит. ф-ции могут быть исп-ны для вычисл. соотв. интегралов.

Пример: ①
$$J \triangleq \oint_{|z-3i|=2} \frac{e^z}{(z-2i)} dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=2i} = 2\pi i e^{2i} =$$

$$= 2\pi i (\cos 2 + i \sin 2) = -2\pi \sin 2 + 2\pi i \cos 2$$



②
$$J \triangleq \oint_{|z-3i|=2} \frac{e^z dz}{(z-i)^4} = \left\{ \begin{matrix} k+1=4 \\ k=3 \end{matrix} \right\} = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} e^z \Big|_{z=2i} =$$

$$= \frac{\pi i}{3} e^{2i} = \dots$$

Теорема Мейнора



Пусть $f(z)$ явл. аналитической в некот. обл-ти G и z_0 - внутр. точка G , т.е. $\exists$ окр-ть $\delta_\rho = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| = \rho \}$ целиком лежащая в G и не содержащая обл. точек с $\bar{G}$. В этом случае $f(z)$ в точках круга $K_\rho = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| \leq \rho \}$ может быть представлена суммой равномерно сходящ. степенного ряда по целым неотн. степеням $(z - z_0)$, т.е.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k ; C_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \forall z \in K_\rho \setminus \delta_\rho$$

Д-во: Если $\xi \in \delta_\rho$, то $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0) \{ 1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \}} =$

$$= \left\{ \frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} < 1 \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}} \quad \text{— сх-мо абс-но как сх-мо геом. прогр.}$$

Согласно интегр. ф-ле Коши имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_\rho} f(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi =$$

$$\left| \frac{f(\xi) \cdot (z - z_0)^k}{(\xi - z)^{k+1}} \right| \leq \max_{\xi \in \delta_\rho} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|^{k+1}} \cdot |z - z_0|^k = \max_{\xi \in \delta_\rho} \frac{|f(\xi)|}{\rho^{k+1}} |z - z_0|^k$$

Но $f(z)$ аналит. в точках δ_ρ , т.е. ограничена.

Вспомог. теор. Вейерштрассе о равномерной сх-ти
тепущаем:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}} \right\} (z - z_0)^k \quad (\equiv)$$

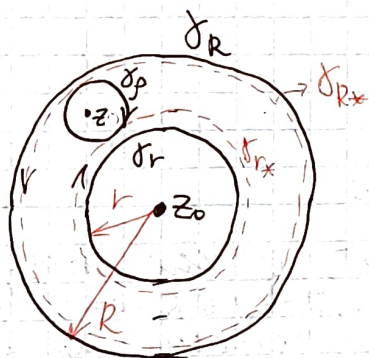
см. замеч. 2 инт. ф-лы Коши

$$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Замечание: $|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}} \right| \stackrel{\text{г.м.г.}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \max_{\xi \in \gamma_R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|^{k+1}} m(\gamma_R) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\max_N |f(\xi)|}_N \cdot \frac{1}{R^{k+1}} \cdot 2\pi R = \frac{N}{R^k}$$

Теорема Ларана:



$f(z)$ аналит. в кольце, охват. окр-ми γ_R и γ_r с центром в точке z_0 .

z - внутр. точка этого кольца. и $\gamma_{r_*}, \gamma_{R_*}$ - окр-ти с радиусами

R_* и r_* такие, что $r < r_* < R_* < R$ и при этом точка z - внутр. по отношению к этим окр-м, а γ_r охват. точку z целиком. Пусть γ_{r_*} и γ_{R_*} . По геор. Коши для

интегралов. оба-тея имеем:

$$\oint_{\gamma_{r_*}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + \oint_{\gamma_{R_*}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_*}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{r_*}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (*)$$

Если $\xi \in \gamma_{R_*}$, то $|\xi - z_0| > |z - z_0|$. Т.о. $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_*}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \equiv$

$$\equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_*}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_*}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi = \begin{cases} \text{абс. равн.} \\ \text{с-ты сш. т. т.} \\ \text{Тейлора} \end{cases}$$

$$\ominus \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R*}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}} \right\}}_{C_k} (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k \quad (**)$$

Теперь вер-ся ко II-му инт-му в рав-ве (*)

Если $\xi \in \gamma_{R*}$, то $|\xi - z_0| < |z - z_0|$, т.е. $\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1$

Т.о. имеем

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R*}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R*}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)(z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R*}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R*}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right\} (z - z_0)^{-n} = \left| \begin{array}{l} K = -(n+1) \\ n=0 \Rightarrow K = -1 \\ n=\infty \Rightarrow K = -\infty \end{array} \right| \ominus$$

$$\ominus \sum_{k=-\infty}^{-1} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R*}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}} \right\}}_{C_k} (z - z_0)^k$$

Т.о. пришли к след. теореме

22.11.19.

ЛЕКЦИЯ 12

Любая однозначная аналит. ф-ция, опред. в кольце $K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r \leq |z - z_0| \leq R < \infty\}$ может быть представлена в этом кольце суммой сходящейся ряда с общ. членами $C_k (z - z_0)^k$, т.е.
 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$, где

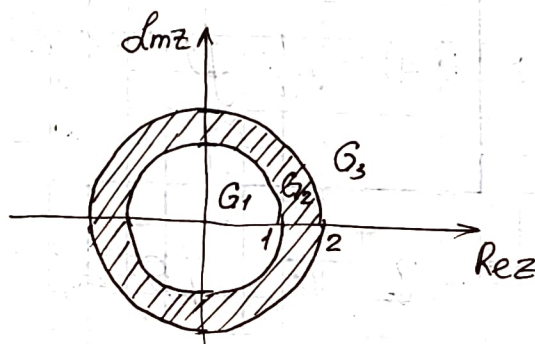
$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = \rho \in (r, R)} \left\{ \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} \right\}, \quad \forall k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Пример: $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$. Найти все разном-е по ст-м z .

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$$

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \Rightarrow$$



$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \{ |z| < 1 \} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k} =$$

$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k$ - сумма ряда Тейлора.

$$G_2 = \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 2\} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z(1 - \frac{1}{z})} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \quad \textcircled{=}$$

$|z| > 1$ $|z| < 2$

$\textcircled{=}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}$ - разложение в ряды с конечными радиусами.

$$G_3 = \{z \in \mathbb{C}: 2 < |z| < \infty\} \Rightarrow$$

$$f(z) \equiv \frac{1}{z(1 - \frac{1}{z})} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = - \sum_{\substack{k=0 \\ 1+k=n}}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} + \sum_{\substack{k=0 \\ k+1=n}}^{\infty} \frac{2^k}{z^{k+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n}$$

Нули аналитических функций

Утверждение: Следующие два определения нулей аналит. ф-ии $f(z)$ эквивалентны.

Опр. 1: Точка $z_0 \neq \infty$ - нуль порядка m однозначной аналитической ф-ии $f(z)$, если $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(m)}(z_0)$

Опр. 2: В окрестности точки $z_0 \neq \infty$ определена аналит. ф-ия $\varphi(z)$ такая, что в этой окрестности $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ и $\varphi(z_0) \neq 0$

Д-во: Согласно теор. Тейлора в окр-ти точки $z_0 \neq \infty$ имеем равенство:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \equiv$$

$$\equiv \left\{ f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \dots + \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} (z - z_0)^{m-1} \right\} + (z - z_0)^m \left\{ \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \right.$$

$$\left. + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \dots \right\}$$

$\varphi(z)$ и $\varphi(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$

з.м.д.

Особые точки аналитических функций

I. Пусть $f(z)$ - однознач. аналит. ф-ия в окр-ти точки $z_0 \neq \infty$, за искл. быть может самой точки z_0 . Относительно самой точки $z_0 \neq \infty$ можно высказать две гипотезы

(А) $\exists$ конеч. число $a_0 \in \mathbb{C}$ такое, что после доопред-ии

$f(z_0) \triangleq a_0$ функция $f(z)$ становится аналит-й в некот. круге $D_\rho \triangleq \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \rho\}$;

(Б) Не существует такого a_0 как в гипотезе (А), т.е. $f(z)$ нельзя определить до аналитической в точке $z_0 \neq \infty$.

В случае (А) точку $z_0 \neq \infty$ назовут правильной или устранимой, а в случае (Б) — изолированной особой точкой для $f(z)$.

Пример 1: $f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z^2}} + 1}$. Точка $z_0 = 0$ — особая для $f(z)$.

При этом $e^{\frac{1}{z^2}} = -1 = e^{i(\pi + i2\pi k)} \Rightarrow \frac{1}{z^2} = i\pi(2k+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_k = \frac{1}{\sqrt{i\pi(2k+1)}}$, т.е. $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$, т.е. в любой окр-ти

$z_0 = 0$ есть другие особые точки и $z_0 = 0$ не явл. изолированной.

II. Теорема 1:

Точка $z_0 \neq \infty$ явл-ся правильной для однознач. аналит. ф-ии $f(z) \Leftrightarrow$ когда $f(z)$ явл-ся огранич. в некоей окрестности точки $z_0 \neq \infty$

Д-во: Необходимость

Пусть $z_0 \neq \infty$ — правильная для $f(z)$, но тогда допустимо опред-е $f(z)$ до аналит. в точке $z_0 \neq \infty$ как следствие, $f(z)$ установится огранич. в некоей окр-ти $D_r \triangleq \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

Достаточность:

Пусть $f(z)$ явл-ся огранич. в некоей окр-ти точки $z_0 \neq \infty$ $K_r = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$, но тогда в K_r по теор. Мораны имеем:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \text{ где } c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = r_* \in (0, r)} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, \text{ т.е.}$$

$$\text{если } N \triangleq \max_{|\xi - z_0| = r_*} |f(\xi)|, \text{ то } |c_k| \leq \frac{N}{2\pi r_*^{k+1}} \cdot 2\pi r_* = \frac{N}{r_*^k}$$

Т.о. при $r_* \rightarrow 0$, то $|c_k| \rightarrow 0$, $\forall k \in \{-1, -2, -3, \dots\}$, т.е.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ и } \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0 \equiv a_0$$

Следствие из теоремы 1:

1) След. для опред-ия правильной точки эквив-ны

исходному:

$$(a) \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0 \neq \infty;$$

$$(b) f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

2) Угнетованная точка $z_0 \neq \infty$ явл. угнет. особей точкой
однознач. аналит. ф-ии $f(z)$, если:
(a) $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \vee \nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

Пример 2:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}. \quad z_0 = 0 \quad \exists \lim_{z=x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = \infty$$

$$\wedge \exists \lim_{z=x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} \text{ и } z_0 = 0 - \text{угнет. точка}$$

III. Пусть однознач. аналит. ф-ия $f(z)$ опред-на в некоей окрестности точки $z_0 \neq \infty$, явл. неогранич. в этой окр-ти, но $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. В этом случае точку $z_0 \neq \infty$ наз-ют полюсом для $f(z)$

Замечание 1: Пусть $f(z)$ не явл. ограниченной в окрестности $K_r = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < r\}$ и $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, тогда ф-ия $\frac{1}{f(z)}$ ограничена в K_r и $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, т.е. z_0 - нуль некоей пор-ки $m \in \{1, 2, \dots, N\}$, где $N < \infty$ и в K_r других нулей нет.

Проведем аналит. рассужд. в обор. послед-ти убедим, что му полюсам ф-ии $f(z)$ и нулей пор-ки m ф-ии $1/f(z)$ установ-ся взаимно-однознач. соответ-ие, поэтому далее будем говорить, что угнетованная особей точка ф-ии $f(z)$ явл-ся полюсом пор-ки m , если эта точка явл-ся нулем пор-ки m для $1/f(z)$

Теорема 2:

Угнетованная особей точка $z_0 \neq \infty$ однознач. аналит. ф-ии $f(z)$ явл-ся полюсом пор-ки m для этой ф-ии $\Leftrightarrow$ когда $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) = b : 0 < |b| < \infty$

До-во: Необходимость:

Пусть $z_0 \neq \infty$ - полюс пор-ки m для $f(z)$. Но тогда $z_0 \neq \infty$ - нуль пор-ки m для $1/f(z)$, т.е. согласно опред-ию нулей суц. аналит. ф-ия $\varphi(z)$ такая, что в окр-ти $z_0 \neq \infty$ имеем:

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \varphi(z), \text{ где } \varphi(z_0) \notin \{0; \infty\}$$

Т.О. $\frac{1}{\varphi(z)} = (z-z_0)^m f(z)$, при этом $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) \equiv$

$$\equiv \frac{1}{\varphi(z_0)} \in \{0, \infty\}$$

Достаточность:

Док-ся с точностью до общ-й записи.

Пример: $f(z) = \frac{8hz}{z^5}$, $z_0 = 0$ — полюс пор-ка 4, т.к.

$$\exists \lim_{z \rightarrow 0} z^4 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{8hz}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{chz}{1} = chz \neq 0$$

29.11.19.

ЛЕКЦИЯ 13 Следствие из теоремы:

Пример. особ. точки $z_0 \neq \infty$ однознач. аналит. ф-ии $f(z)$ явл-ся полюсом пор-ка $m \Leftrightarrow$ когда $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, $c_{-m} \neq 0$

Пример: $f(z) = \frac{8hz}{z^5} = \{ |z| < \infty \} = \frac{1}{z^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-4}}{(2k+1)!} \equiv$

$$\equiv \frac{1}{1!z^4} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!} + \frac{z^2}{7!} + \dots$$

IV. Измированную особую точку $z_0 \neq \infty$ однознач. аналит. ф-ии $f(z)$ называют существенно особой, если $f(z)$ неогранич. в нек-рой окр-ти этой точки и $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

Пример: $f(z) = e^{1/z}$

$$\exists \lim_{z=x \rightarrow 0+} e^{1/z} = e^{+\infty} = \infty \wedge \exists \lim_{z=x \rightarrow 0-} e^{1/z} = e^{-\infty} = 0, \text{ т.е.}$$

$\nexists \lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ и $z=0$ — сущ. особ.

Теорема Сохоцкого-Вейерштрассе (тез г-ва)

Если $z_0 \neq \infty$ сущ. особая для $f(z)$, то

$$\forall A \in \mathbb{C} \exists \{z_k\}_{k \geq 1} : \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0 \wedge \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A$$

Замечание к опред.:

Измированная особая точка $z_0 \neq \infty$ явл. сущ-но особой для однознач. аналит. ф-ии $f(z) \Leftrightarrow$ когда её лорановское разложение содержит счётное мн-во ненулевых коэф. с отриц. индексами.

Действительно. (А) ^{необх-го} Если $z_0 \neq \infty$ - сущ.-но особая, то лорановское разложение не м/т не содержать ненулевых коэф-в с отриц. индексами, т.к. она была бы правильной. Это разложение не м/т содержать конеч. число ненулевых коэф-в с отриц. индексами, т.к. она была бы голоморф. по-ка. Т.о. если $z_0 \neq \infty$ сущ.-но особая, то имеет счётное мн-во ненулевых коэф-в с отриц. индексами.

(Б) ^{дост-но} док-ся аналогично

Пример: $f(z) = e^{1/z}$

$$e^{1/z} = \{ |z| < \infty \} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}, \text{ т.е. } C_k = \frac{1}{k!}, \forall k \geq 1, \text{ т.е.}$$

$z_0 = 0$ - сущ. особ.

V Точку $z_0 = \infty$ наз-ют узловой особой точкой однознач. аналит. ф-ии $f(z)$, если

$\exists$ окрестность $V_N \triangleq \{ z \in \mathbb{C} : N < |z| < \infty \}$ этой точки такая, что $f(z)$ явл-ся аналит. в V_N за искл. быть может точки $z = \infty$

Пример 1:

$$f(z) = \frac{5z+6}{(z-1)(z+2)}. \text{ Особые точки: } z_0 = 1, z_0 = -2, z_0 = \infty$$

Пример 2:

$$f(z) = \frac{1}{1+e^z}. \quad e^z = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_k = i\pi(2k+1) \Rightarrow |z_k| = \pi(2k+1) \rightarrow \infty$, т.е. в любой окр-ти точки $z_0 = \infty$ есть $k \rightarrow \infty$ другие особые точки и $z_0 = \infty$ не явл. узловой

Классификация особенностей в узловой особой точке $z_0 = \infty$

Отображение $z = 1/\xi$ явл-ся взаимнооднознач. отображением узлов. особой точки $\xi_0 = 0$ и узлов. особой точки $z_0 = \infty$. Пусть далее

$\varphi(\xi) = f(1/\xi) = f(z)$ и класс-ие $z_0 = \infty$ для $f(z)$ проводится в полном соотв. с классиф-цией $\xi_0 = 0$ ф-ии $\varphi(\xi)$

Тип особой точки	$\varphi(\xi)$	
1. Правильная [устраиваемая]	$\exists \lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi) = d \neq \infty$	$\varphi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \xi^k$
2. Блесок пор-ка m	$\exists \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^m \cdot \varphi(\xi) = D \notin \{0, \infty\}$	$\varphi(\xi) = \sum_{k=-m}^{\infty} d_k \xi^k, d_m \neq 0$
3. Существенно особая	$\nexists \lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi)$	$\varphi(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \xi^k,$ $\exists$ счетное мн-во ненул. коэф-в с отриц. индексами

Тип. особ. точки	$f(z)$	
1. Правильная [устраиваемая]	$\exists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \neq \infty$	$f(z) = \sum_{k=-\infty}^0 c_k z^k$
2. Блесок пор-ка m	$\exists \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-m} f(z) \notin \{0, \infty\}$	$f(z) = \sum_{k=-\infty}^m c_k z^k, c_m \neq 0$
3. Существенно особая.	$\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$	$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k,$ — и с тем. индексами

Пример 1: $e^z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, |z| < \infty \Rightarrow z_0 = \infty$ — сущ. особая

$$\lim_{z=x \rightarrow +\infty} e^z = e^{+\infty} = \infty \wedge \lim_{z=x \rightarrow -\infty} e^z = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow \infty} e^z$$

Пример 2: $f(z) \triangleq \left(z + \frac{3}{z^2}\right)^2 = z^2 + \frac{6}{z} + \frac{9}{z^4}, z_{01} = 0$ — полюс 4-го пор-ка
 $z_{02} = \infty$ — полюс 2-го пор-ка

Элементы теории вычетов

Опр 1: Пусть $f(z)$ однознач. аналит. ф-ия в замкнутой обл-ти $G \cup \Gamma_G$, охватывающей кусочно-гладкую замкнутую контуру Γ_G , за искл. быть может изолированной точки $z_0 \in G$.

Вычетом $f(z)$ отн-но точки $z_0 \in G$ наз-ют число
 $\text{Res } f(z_0) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_G} f(z) dz$

Общее замечание: ① $\text{Res } f(z_0)$ не зависит от размеров и формы контура Γ , если он удовлетворяет исх. доп. условиям. — см. теор. Коши для множеств. обл-тей.

② $\text{Res } f(z_0) = C_{-1}$ — коэф. в лорановском разложении $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k (z-z_0)^k$ при $(z-z_0)^{-1}$ — см. теор. Лорана.

③ Если z_0 — правильная или точка аналитич. ф-ии $f(z)$, то $\text{Res } f(z_0) \equiv 0$

④ Если $z_0 \neq \infty$ — полюс порядка m , т.е. $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$ и $C_{-m} \neq 0$, тогда имеем:

$$(z-z_0)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + C_0(z-z_0)^m + \dots, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-z_0)^m f(z)\} = (m-1)! C_{-1} \Rightarrow$$

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-z_0)^m f(z)\}. \text{ В част-ти, если}$$

$m=1$, т.е. полюс простой:

$$\text{Res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z)$$

Пример 1: $f(z) = \frac{5z+6}{(z-1)(z+2)}$, $z_{01}=1$, $z_{02}=-2$ — прост. полюсы

$$\text{Res } f(z_{01}) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{5z+6}{(z-1)(z+2)} = \frac{11}{3}$$

$$\text{Res } f(z_{02}) = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{5z+6}{(z-1)(z+2)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Пример 2: $f(z) = \frac{8hz}{z^3}$, $z_0=0$ — полюс порядка 2.

$$\text{Res } f(0) = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left\{ z^2 \frac{8hz}{z^3} \right\} \Big|_{z=0} = \frac{z \cdot 8hz - 8hz}{z^2} \Big|_{z=0} =$$

$$= \frac{8hz - 8hz}{z^2} = 0.$$

Основная теорема о вычетах.



Пусть $f(z)$ — однозн. аналит. ф-ия в замкнутой обл-ти $G \cup L$ за искл. конеч. числа особ. точек $\{z_k\}_{k=1}^N \in G$

В этом случае

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} f(z_k)$$

Д-во. Т.к. $\{z_k\}$ изолированное, то суц. окр-ти δ_k , хват. эти изолир. точки так, что эти окр-ти не пересекаются между собой, ни L не имеют общих точек

По теор. Коши для многозначных обн-тей имеем:

$$\oint_L f(z) dz = \sum_{k=1}^N \oint_{\delta_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} f(z_k)$$

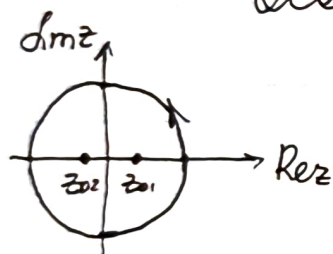
Пример: Вычислить

6.12.19.

$$I \triangleq \oint_{|z|=2} \frac{z dz}{1 - 2\sin^2 z} = \oint_{|z|=2} \frac{z dz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = \pi i \{ \operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2) \}$$

Лекция 14

Особые точки: $z_1 = \frac{\pi}{2}$; $z_2 = -\frac{\pi}{4}$ — прост. полюсы, т.к. $\sin z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\operatorname{Res} f(z_1) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) f(z) \triangleq$$

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z} \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin z} =$$

$$= \frac{\pi/2}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\cos z} = -\frac{\pi}{4}$$

$\operatorname{Res} f(z_2)$ — вычисл. аналогично

Опр. 2: Пусть $z_0 = \infty$ — изолир. особая точка однознат. аналит. ф-ии $f(z)$, т.е. $\exists$ окрест-ть $B_N = \{z \in \mathbb{C} : N < |z| < \infty\}$ этой точки, в како. точке кот. $f(z)$ — аналит.-л. В этом случае $\operatorname{Res} f(\infty) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=N} f(z) dz$, $N_1 > N$

Замечания к опр-ю 2: ① $\operatorname{Res} f(\infty) = -C_{-1}$, где C_{-1} — коэф-т в лорановском разложении $f(z)$ отн-но изолир. особой точки $z = \infty$, а знак "—" обусл-н направлением обхода контура.

② Если в $\mathbb{C}$ однознат. аналит. ф-ии $f(z)$ имеет N лишь конечн. число изолир. особ. точек $\{z_k\}_{k=1}^N$, где $z_N \equiv \infty$, то $\operatorname{Res} f(\infty) = -\sum_{k=1}^N \operatorname{Res} f(z_k)$, т.к. $\exists N_1 > N$ — опр-ю 2 такое, что $\operatorname{Res} f(\infty) + \oint_{|z|=N_1} f(z) dz \equiv 0$

$$\oint_{|z|=N_1} f(z) dz + \oint_{|z|=N_1} f(z) dz = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{сум. очн.} \\ \text{теор. о вычетах} \end{matrix}$$

$$2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) + 2\pi i \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}(z_{0k}) = 0$$

Пример 1:

$$f(z) \triangleq \frac{5z-1}{(z-1)(z+2)} = \frac{4}{3(z-1)} + \frac{11}{3(z+2)}$$

$$\left. \begin{matrix} z_{01} = 1 \\ z_{02} = -2 \end{matrix} \right\} - \text{простые полюсы}$$

$$\left. \begin{matrix} \operatorname{Res} f(z_{01}) = 4/3 \\ \operatorname{Res} f(z_{02}) = 11/3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \operatorname{Res} f(z_{01}) + \operatorname{Res} f(z_{02}) = 5$$

$$f(z) = \frac{4}{3z} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{z})} + \frac{11}{3z} \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{z})} = \left\{ |z| > 2 \right\} = \frac{4}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} +$$

$$+ \frac{11}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 + (-1)^k \cdot 2^k \cdot 11}{3} \cdot \frac{1}{z^{k+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{-1} = \frac{4+11}{3} = 5 \Rightarrow \operatorname{Res} f(\infty) = -5$$

Пример 2: Вычислить $\gamma \triangleq \oint_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4+1}$. Контур взят

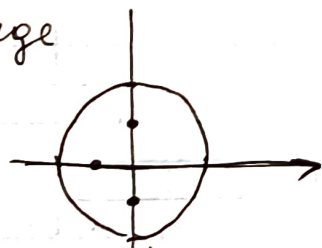
целым. особые точки $z_{0k}, k=0,3, \text{ и } \infty$

$$z_{0k} = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i(\pi+2\pi k)}} =$$

$$= e^{\frac{i\pi(2k+1)}{4}} - \text{простые полюсы}$$

$$f(z) = \frac{1}{z(1+\frac{1}{z^4})} = \left\{ |z| > 1 \right\} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{4k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{4k+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{-1} = 1 \Rightarrow \operatorname{Res} f(\infty) = -1 \Rightarrow \gamma = \oint_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4+1} = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) = 2\pi i$$



Ряды Фурье.

Опр 1: Будем говорить, что скаляр. ф-ия $f(x) \in L^2[a, b]$ если она опред-на на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ и интегрируема с квадратами на нем, т.е.

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty$$

Замечание 1: Если $f(x), \varphi(x) \in L^2[a, b]$, то $f(x) \cdot \varphi(x)$ абс-но интегрир-ма на $[a, b]$, т.к.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) \varphi(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b \{f^2(x) + \varphi^2(x)\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(x) dx. \end{aligned}$$

Замечание 2: $L^2[a, b]$ со стандарт. операцией сложения ф-ий и умнож. на число - лн. пр-во, т.к.

$\forall f(x), \varphi(x) \in L^2[a, b]$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^1$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f(x) + \mu \varphi(x))^2 dx &= \int_a^b \{\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda\mu f(x)\varphi(x) + \mu^2 \varphi^2(x)\} dx \\ &\leq \lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2|\lambda\mu| \int_a^b |f(x)\varphi(x)| dx + \mu^2 \int_a^b \varphi^2(x) dx < \infty \end{aligned}$$

Опр 2: Ф-ии $f(x)$ и $\varphi(x)$ из лн. пр-ва $L^2[a, b]$ будем наз-ть эквивалентными и писать $f(x) \sim \varphi(x)$, если

$$\int_a^b \{f(x) - \varphi(x)\}^2 dx = 0$$

Замечание к опр. 2: ① Если $f(x) \sim \varphi(x)$, то эти ф-ии могут различ-ся лишь на мн-ве мернуль из $[a, b]$, т.е. лишь в отд. точках $[a, b]$.

② В лн. пр-ве $L^2[a, b]$ скалярное произведение вводится стандартным способом:

$$(f, \varphi) \triangleq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx - \text{опред-но для любых пар эл-тов } f(x), \varphi(x) \in L^2[a, b], \text{ т.к.}$$

$f(x) \cdot \varphi(x)$ - абс-но интегрир-ма на $[a, b]$. При этом аксиомы скаляр. произв-ия выполня-ся автоматически, если в $L^2[a, b]$ отношение "равенства" заменить отношением "эквивалентности".

Действительно: (а) $(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$ и $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(x) \sim 0$;

$$(5) (f, \varphi) = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx = (\varphi, f);$$

$$(6) (c \cdot f, \varphi) = \int_a^b c \cdot f(x) \varphi(x) dx = c \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = c(f, \varphi);$$

$$(2) (f + \varphi, \varphi) = \int_a^b \{f(x) + \varphi(x)\} \varphi dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx + \int_a^b \varphi(x) \varphi(x) dx = \\ = (f, \varphi) + (\varphi, \varphi)$$

• Мин. пр-во $L^2[a, b]$ со скаляр. произв-ем — евклидово пр-во.

③ В евклид. пр-ве $L^2[a, b]$ евклидова норма вводится стандартным способом:

$$\forall f(x) \in L^2[a, b] \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

При этом аксиомы нормы выполняются автоматически, т.е.

$$(a) \|f\| \geq 0 \text{ и } \|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) \sim 0;$$

$$(5) \|c \cdot f\| = |c| \cdot \|f\|;$$

$$(6) \|f + \varphi\| \leq \|f\| + \|\varphi\|$$

④ В мин. нормир. пр-ве $L^2[a, b]$ евклид. метрика (расстояние) вводится стандарт. способом:

$$\forall f(x), \varphi(x) \in L^2[a, b] \quad \rho(f, \varphi) \triangleq \|f - \varphi\| = \sqrt{(f - \varphi, f - \varphi)}.$$

При этом аксиомы метрики выполняются автоматически:

$$(a) \rho(f, \varphi) \geq 0 \text{ и } \rho(f, \varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \sim f(x);$$

$$(5) \rho(f, \varphi) = \rho(\varphi, f)$$

$$(6) \rho(f, \varphi) \leq \rho(f, \psi) + \rho(\psi, \varphi)$$

⑤ В рассм. пр-ве сход-ть понимается след. образом:

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} f(x) = f_0(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(f_k, f_0) = 0$$

Задача о наилучшей аппроксимации

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$ — ортонорм. система в лнн. норм. пр-ве $L^2[a, b]$.
 т.е. $(\varphi_k, \varphi_n) = \begin{cases} 1; & k=n, \\ 0; & k \neq n \end{cases}$.

Пусть $f(x) \in L^2[a, b]$.
 Необходимо определить коэф-ты $\{c_k\}_{k=1}^N \in \mathbb{R}^1$ так, чтобы величина $\rho(f, \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k)$ была бы минимальной.

Решение: $\rho^2(f, \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k) = \|f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k\|^2 = (f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k, f - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n) =$

$$= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^N c_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N c_k c_n (\varphi_k, \varphi_n) =$$

$\begin{matrix} 1: & k=n \\ 0: & k \neq n \end{matrix}$

$$= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^N c_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^N c_k^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \{c_k - (f, \varphi_k)\}^2, \quad \text{т.е. } \min \rho^2(f, \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k) \Leftrightarrow$$

$$0 \Leftrightarrow c_k = (f, \varphi_k), \quad \forall k = \overline{1, N}$$

$$\Leftrightarrow (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2 \Leftrightarrow c_k = (f, \varphi_k), \quad \forall k = \overline{1, N}$$

Замечание

→ на доску перед лекцией

① Т.о. имеем неравенство:

$$13.12.19. \quad \|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2 - \text{неравенство Бесселя, где}$$

ЛЕКЦИЯ 15

$$S_n^f(x) \triangleq \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k(x) - \text{наим.-ая аппрокс.-ия}$$

$f(x) \in L^2[a, b]$ по ортонорм. сист. $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n \in L^2[a, b]$, где $c_k = (f, \varphi_k)$ — коэф-ты Фурье ф-ции $f(x)$ при её разложении по ортонорм. сист. $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$.

② Знакомом числ. послед-ть $\{\sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2\}_{n \geq 1}$ монот. возр-т и ограничена сверху, т.е. в предполож. сист.-ия счётной ортонорм. сист. $\{\varphi_k(x)\}_{k \geq 1} \in L^2[a, b]$ имо утв-ть, что нерав-во Бесселя допуск. обобщение:

$$\boxed{\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2}$$

Опр. 3: Ортонорм. систему $\{\varphi_k(x)\}_{k \geq 1} \in L^2[a, b]$ будем наз-ть полной или замкнутой, если $\forall f(x) \in L^2[a, b]$ нерав-во Бесселя обращ-ся в равенство Парсеваля, а именно:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2$$

Следствие из опред. 3

① Замкнут. система ф-ий $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in L^2[a, b]$ - ортонорм. базис в $L^2[a, b]$, т.к. любая ортонорм. сист-ма - ПНЗ. При этом, если допустить сущ-ие $\exists \varphi_0(x) \in L^2[a, b]$:

$\|\varphi_0\| = 1$ и $(\varphi_0, \varphi_k) \equiv 0, \forall k \geq 1$, то сое. равенству Парсеваля имеем:

$$\|\varphi_0\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_0, \varphi_k)^2 \Leftrightarrow 1 = 0 - \text{попущ.}$$

противоречие и заверш. док-во.

② Если $\{\varphi_k(x)\}_{k \geq 1}$ - замкнут. система в $L^2[a, b]$, т.е. ортонорм. базис в этом пр-ве, то

$\forall f(x) \in L^2[a, b]$ имеем функц. ряд с общ. членом: $(f, \varphi_k) \varphi_k(x)$ и н-ая расш. серии

$$S_n^f(x) \equiv \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$$

При этом

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n^f\|^2 =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2 \right\} = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 = 0, \text{ т.е.}$$

$$\|f - S^f\|^2 = 0, \text{ где } S^f(x) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^f(x)$$

Т.о. $f(x) \sim S^f(x)$ [разлож. ф-ии по ортонорм. базису]

Пример 1: Тригоном. система $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos \frac{\pi k x}{\ell}, \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right\}_{k \geq 1}$ явл-ся ортонорм. на $[c, c+2\ell]$ для любого конст. $c \in \mathbb{R}^1$

В частности при $n \neq k$ $\left(\frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos \frac{\pi k x}{\ell}, \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right) =$

$$= \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} \cos \frac{\pi k x}{\ell} \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} \left\{ \cos \frac{\pi(k+n)x}{\ell} + \cos \frac{\pi(k-n)x}{\ell} \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{\ell} \left\{ \frac{1}{\pi(k+n)} \sin \frac{\pi(k+n)x}{\ell} \Big|_c^{c+2\ell} + \frac{1}{\pi(k-n)} \sin \frac{\pi(k-n)x}{\ell} \Big|_c^{c+2\ell} \right\} \equiv 0;$$

при $x=0$ имеем $\left(\frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi k x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi k x}{l} \right) =$
 $= \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} \frac{1 + \cos \frac{\pi k x}{l}}{2} dx \equiv 1.$

Заметим, что замкнутость расем. сист. следует из теор. Дирихле, приведем ниже.

Замечание: Формально имеем:

$$S^l(x) = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2l}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi k x}{l} \right) \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi k x}{l} +$$

$$+ \left(f, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi k x}{l} \right) \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi k x}{l}$$

Если при этом $c = -l$ и $a_k \triangleq \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx$, $\forall k \geq 0$;
 $b_k \triangleq \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$, $k \geq 1$, то приходим к стандарт.

форме записи:

$$S^l(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l}$$

Теорема Дирихле:

Пусть $f(x)$ опред-на на отрезке $[c, c+2l]$ и при этом:

(1) она кусочно-непрерывна, т.е. на $[c, c+2l]$ м/г иметь лишь разрывы I-го рода и число этих разрывов — конечно.

(2) она кусочно-монот. на $[c, c+2l]$, т.е. этот отрезок м/о разбить на конеч. число участков мон-ти. В этом случае (1) в точках непрерывн.

$$f(x) = S^l(x);$$

(2) в точках разрыва I-го рода:

$$S^l(x) = \{ f(x-0) + f(x+0) \} / 2;$$

(3) На участках непрерывн. ф-ии $f(x)$ её ряд Фурье сх-ся равномерно;

(4) $S^l(c) = S^l(c+2l) = \{ f(c+0) + f(c+2l-0) \} / 2$

Замечание к теор. Дирихле:

(1) В теор. Дирихле сформулированное условие — достаточное для сходимости тригоном-го ряда Фурье. Цикл

невыполнение в общ. случае не означает невозможность разложения Ф-ии в тригоном. ряд Фурье.

Пример 1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $|x| < 1$ — в точке $x=0$ — разрыв 2-го рода $\Rightarrow$ теор. Дирихле неприменима.

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^1 f^2(x) dx = 2 \int_0^1 x^{-2/3} dx = 6x^{1/3} \Big|_0^1 = 6 < \infty \text{ в } L^2[-1, +1]$$

допускаю разложение в тригоном. ряд Фурье

Пример 2: $f(x) = \begin{cases} C_1: -\pi \leq x < 0 \\ C_2: 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Заметим, что $S^f(x)$ для тригоном. ряда Фурье — периодич. Ф-ия с периодом $\frac{\pi}{l}$.

$$S^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$a_k \Big|_{k \geq 0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 C_1 \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} C_2 \cos(kx) dx \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2, & k=0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

$$b_k \Big|_{k \geq 1} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 C_1 \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} C_2 \sin(kx) dx \right\}$$

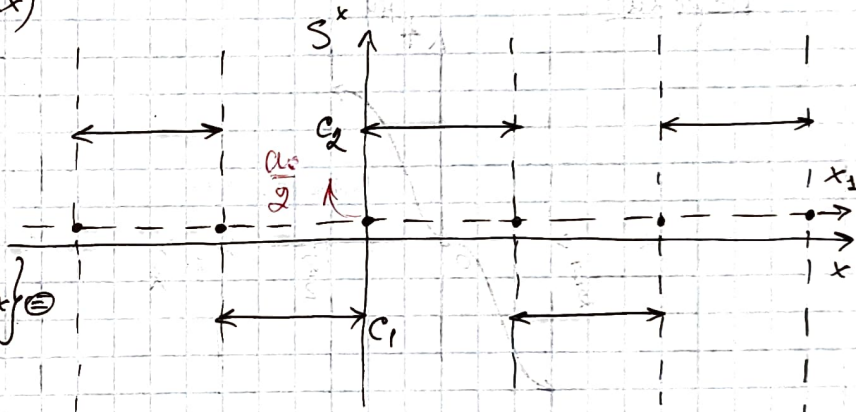
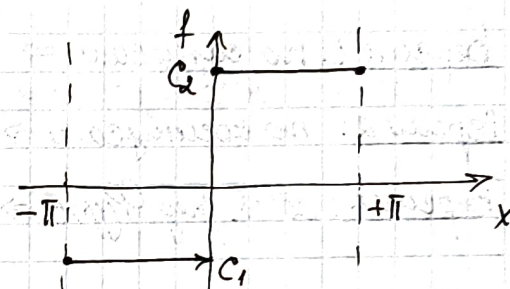
② Пусть на $[-l; l]$ $f(x)$ — четная Ф-ия.

Тогда $a_k \Big|_{k \geq 0} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx \equiv \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx$

$$b_k \Big|_{k \geq 1} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = 0.$$

Т.о. $S^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k x}{l}$ — разложение по косинусам $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ четность $f(x)$ на отрезке

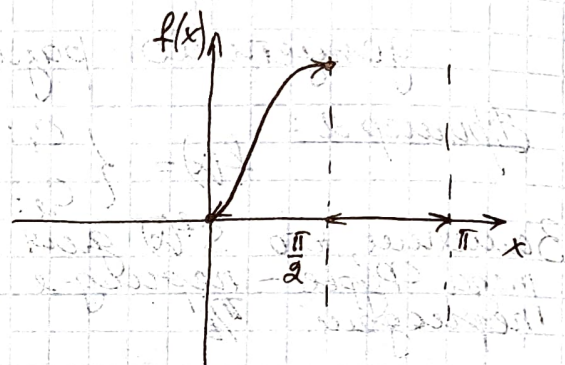


③ Если на $[-l, l]$ $f(x)$ — нечетная, то $a_k|_{k \geq 0} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx \equiv 0$
 $b_k|_{k \geq 1} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \equiv \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$, т.е.

$$S^f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \text{ — "разложение по синусам"}$$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x: & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0: & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

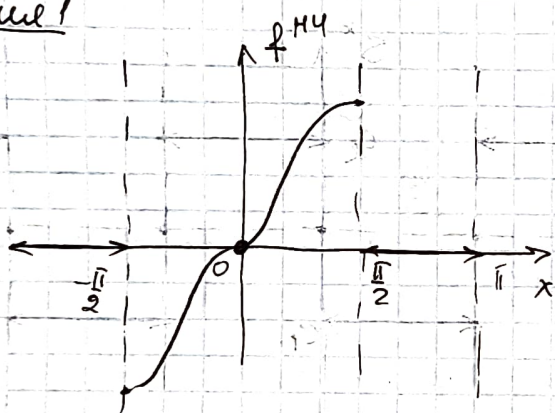


Версия 1: по синусам $\Rightarrow l = \pi$
 (расклад. нечет. продолж. ф-ции)

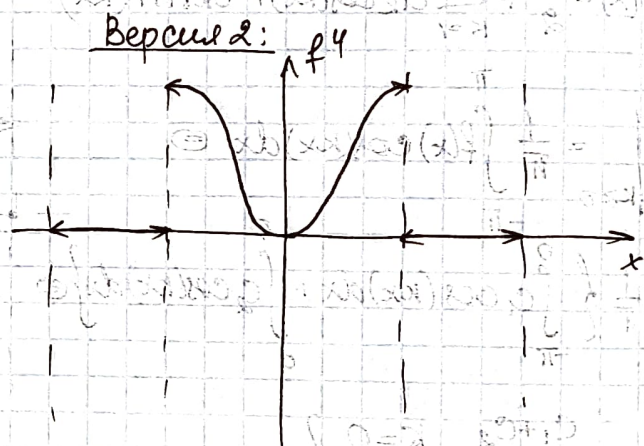
Версия 2: по косинусам $\Rightarrow l = \frac{\pi}{2}$

Версия 3: общ. ред. Фурье $\Rightarrow l = \frac{\pi}{2}$

Версия 1



Версия 2:



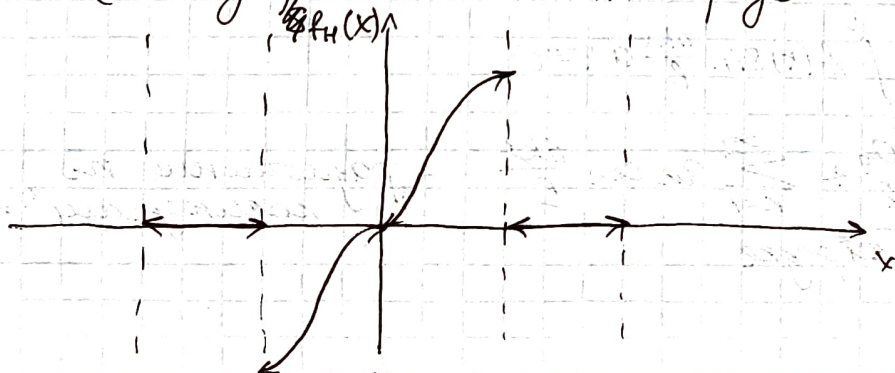
- (1) Записать формулу для суммного ряда Фурье
- (2) Нарисовать график исход. ф-ции и ф-ции, кот. расклад. в ряд

20.12.19

ЛЕКЦИЯ 16 (3) график суммного ряда Фурье

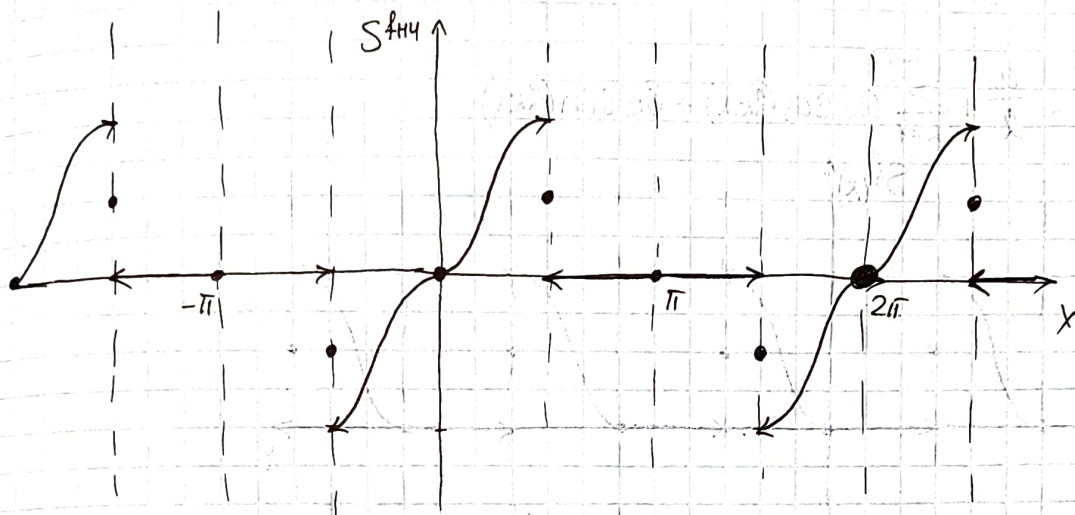
Вариант 1

(А) Изображаем нечетн. продолжение исход. ф-ции:



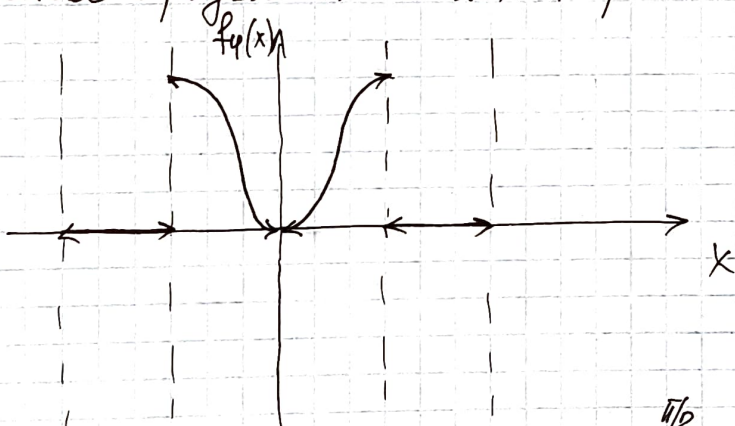
$$(5) \quad l = \pi \Rightarrow a_k|_{k \geq 0} \equiv 0 \quad \wedge \quad b_k|_{k \geq 1} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin(kx) dx$$

$$S_{f_{\text{нч}}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$



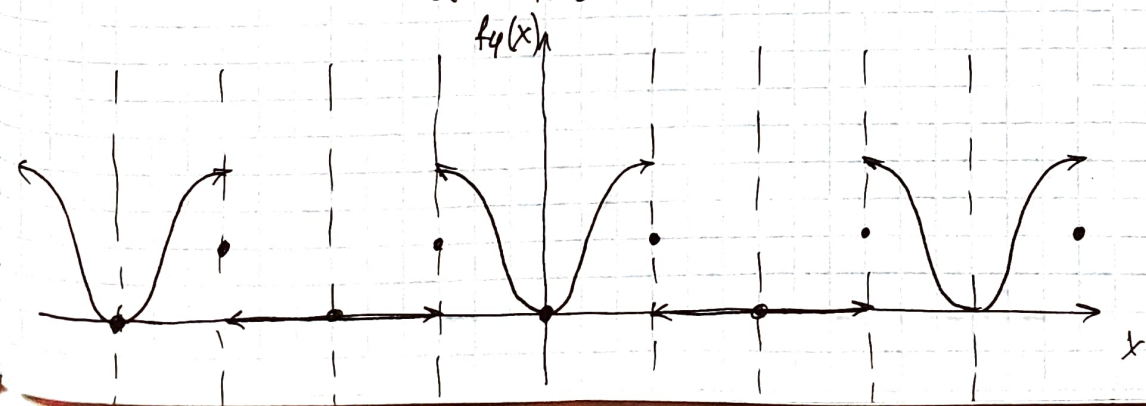
Вариант 2

(А) Чётное продолжение исходной ф-ции



$$(5) \quad l = \pi \Rightarrow b_k|_{k \geq 1} \equiv 0 \quad \wedge \quad a_k|_{k \geq 0} = \frac{2}{l} \int_0^l \sin x \cos(kx) dx$$

$$S_{f_4}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx)$$



Вариант 3

$$(5) \quad l = \pi/2 \Rightarrow a_k \Big|_{k \geq 0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2kx) dx$$

$$b_k \Big|_{k \geq 1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \sin(2kx) dx$$

$$S^f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2kx) + b_k \sin(2kx)$$

