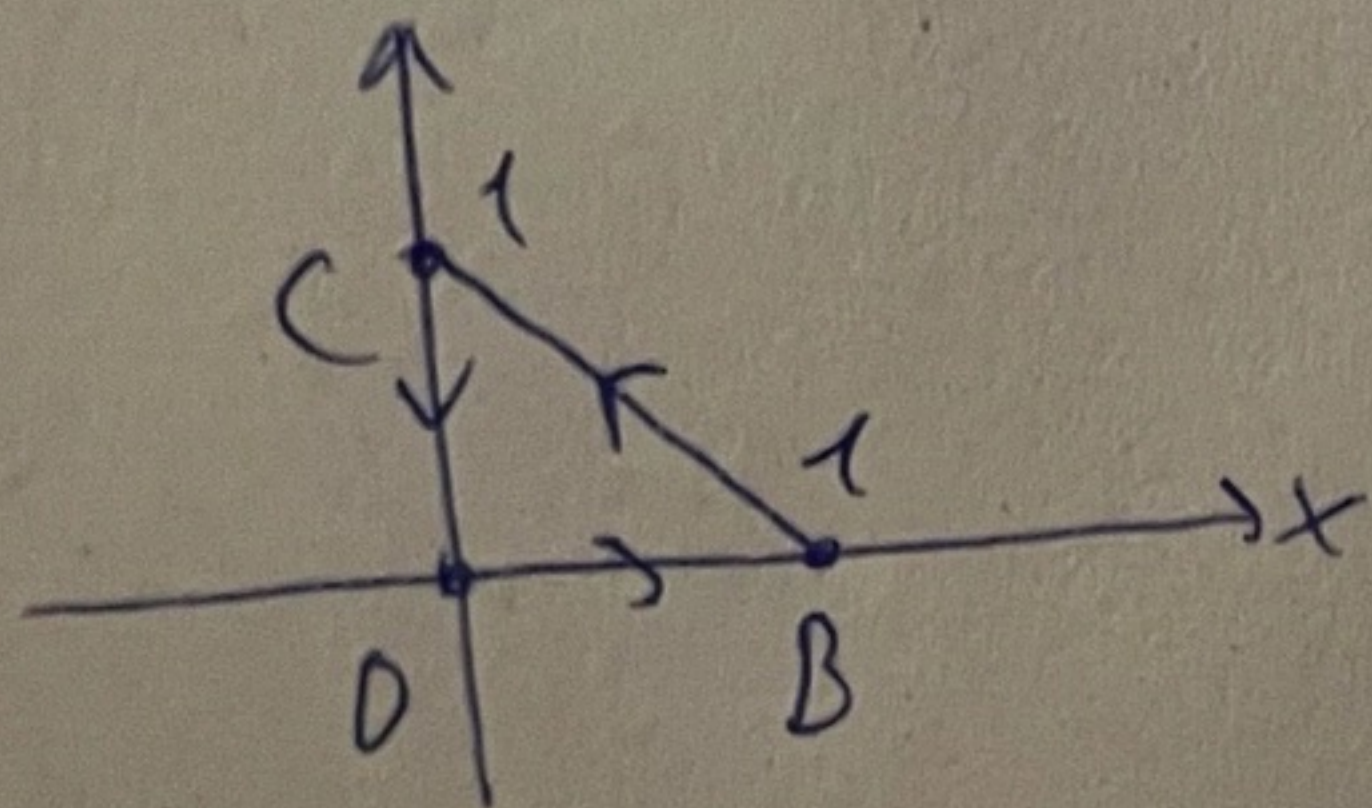


Билет 5.

1. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ по треугольнику C с вершинами $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$. (4 балла)
2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 9$, $z = 4$, $z = 0$. (4 балла)
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sin \frac{2}{\sqrt{n}}$. (4 балла)
4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n (x+3)^n}{n(3 \ln n + 1)^2}$. Исследовать этот ряд на сходимость в концах интервала сходимости. (4 балла)
5. Используя стандартные разложения (для e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$) функцию $f(x) = x \sin 2x$ разложить в степенной ряд по степеням $x - \frac{\pi}{4}$. Указать интервал сходимости полученного ряда. (4 балла)

Задача	1	2	3	4	5	Min	Max
Баллы	4	4	4	4	4	12	20

N1 $\oint (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$



По теореме Грина:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{Dxy} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

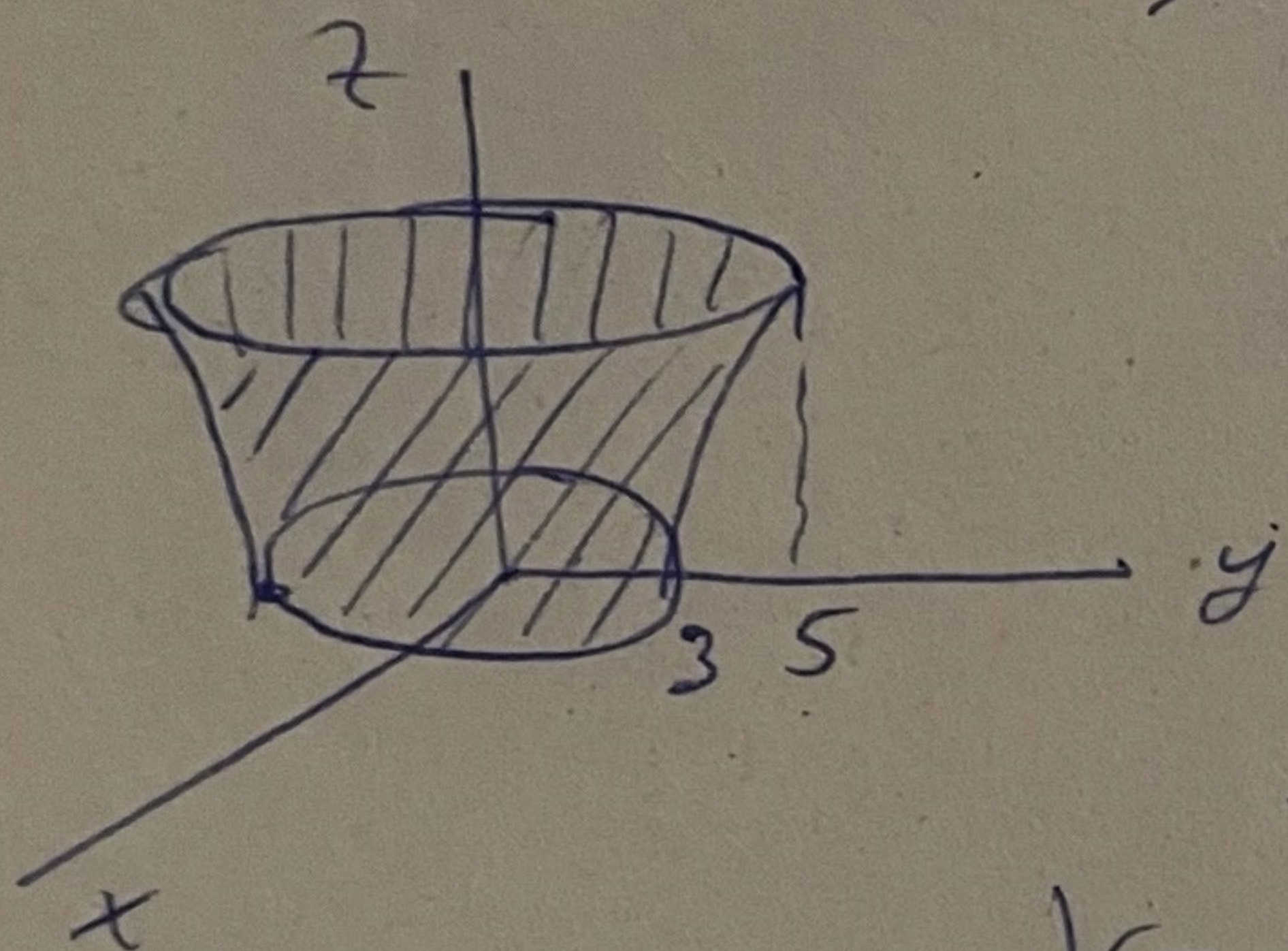
$$\Rightarrow \oint_C P dx + Q dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x - 2y) dy = \int_0^1 (2x(1-x) - (1-x)^2) dx =$$

$$= \int_0^1 (2x - 2x^2 - 1 + 2x - x^2) dx = \int_0^1 (-3x^2 + 4x - 1) dx = (-x^3 + 2x^2 - x) \Big|_0^1 =$$

$$= -1 + 2 - 1 = 0$$

N2

$$x^2 + y^2 - z^2 = 9, \quad z=4, \quad z=0.$$



Умножить на ρ и проинтегрировать:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = 0 \end{cases} \quad y = \rho$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^4 dz + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 \rho d\rho \int_0^4 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - 9}} dz =$$

$$= 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^3 + 2\pi \int_3^5 (4\rho - \rho \sqrt{\rho^2 - 9}) d\rho = 4\pi \cdot 9 + 8\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_3^5 -$$

$$- \pi \int_3^5 \sqrt{\rho^2 - 9} d(\rho^2 - 9) = 36\pi + 64\pi - \pi \frac{2}{3} (\rho^2 - 9)^{3/2} \Big|_3^5 =$$

$$= 100\pi - \frac{2\pi}{3} (64 - 0) = 100\pi - \frac{128}{3}\pi = \frac{172}{3}\pi$$

N3

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sin \frac{2}{\sqrt{n}}$$

ряд из модулей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sin \frac{2}{\sqrt{n}} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0 \quad - \text{возможен} \\ \text{необяз. признак.}$$

Сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/6}}{\sqrt{n}} \sin \frac{2}{\sqrt{n}} = \left(\text{при } n \rightarrow \infty \right. \\ \left. \sin \frac{2}{\sqrt{n}} \sim \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/6} \cdot 2}{n^{5/6}} = 2$$

$\Rightarrow$ ряд из модулей $\sum |a_n|$ расходится по признаку сравнения

Однако т.к. он убывает монотонно $\Rightarrow$

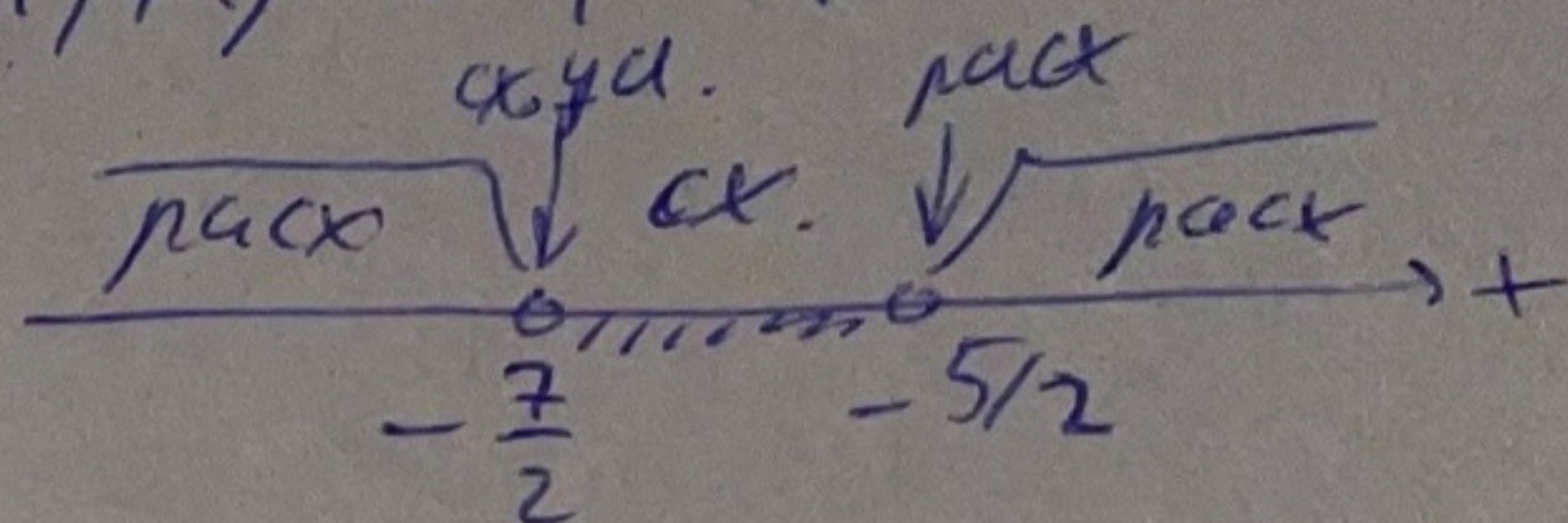
по признаку Лейбница их ряд сходится условно

$$\text{N4} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n (x+3)^n}{n(3\ln n + 1)^2}$$

признак Даламбера;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n |x+3|^{n+1} n(3\ln n + 1)^2}{(n+1)(3\ln(n+1) + 1)^2 2^n |x+3|^n} = 2|x+3| < 1$$

$$\Rightarrow \text{~~сход.~~} \quad |x+3| < 1/2;$$



$$1) \quad x = -\frac{7}{2}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3\ln n + 1)^2}$$

Признак Коши и интеграл из модулей:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(3\ln x + 1)^2} = \frac{1}{3} \int_2^{\infty} \frac{d(3\ln x + 1)}{3\ln x + 1} = +\frac{1}{3} \ln(3\ln x + 1) \Big|_2^{\infty} = \infty$$

ряд из модулей расходится, однако убывает монотонно

$\Rightarrow$ по лемме Дирихле сходится условно

$$2) \quad x = -\frac{5}{2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(3\ln n + 1)^2} \Rightarrow \text{расходится (признак Коши)}$$

Область сходимости: $x \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

N5

$$f(x) = x \sin 2x \quad \text{no con.} \quad x - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Замени: } x - \frac{\pi}{4} = t, \quad x = t + \frac{\pi}{4}$$

$$f(t) = \left(t + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = \left(t + \frac{\pi}{4}\right) \cos(2t) = t \cos(2t) + \frac{\pi}{4} \cos 2t =$$

$$= t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n \cdot (x - \pi/4)^{2n+1}}{(2n)!} + \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n \cdot (x - \pi/4)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{Область } (x - \pi/4) : -\infty < 2t < \infty \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$$