

Билет 3.

1. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ в ряд по степеням z . (5 баллов)
2. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{\cos z}{(4z^2 - \pi^2)^2}$ и определить их характер. (5 баллов)
3. Вычислить интеграл (5 баллов)

$$\oint_{|z|=1} (z^2 e^{-1/z} + e^{z^2} \operatorname{sh} z) dz.$$

4. Вычислить интеграл (5 баллов)

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)} dz.$$

5. Установить, может ли данная функция $v(x, y) = \operatorname{sh} 3x \sin 3y$ служить вещественной или мнимой частью некоторой аналитической функции и, если может, восстановить эту аналитическую функцию. Через $u(x, y)$ обозначена вещественная часть искомой аналитической функции, а через $v(x, y)$ — мнимая часть (5 баллов)

Задача	1	2	3	4	5	Min	Max
Баллы	5	5	5	5	5	14	25

Билет 27.

1. Запишите неравенство Бесселя. При каких условиях оно превращается в равенство? (3 балла)
2. Сформулируйте основную теорему о вычетах. (3 балла)

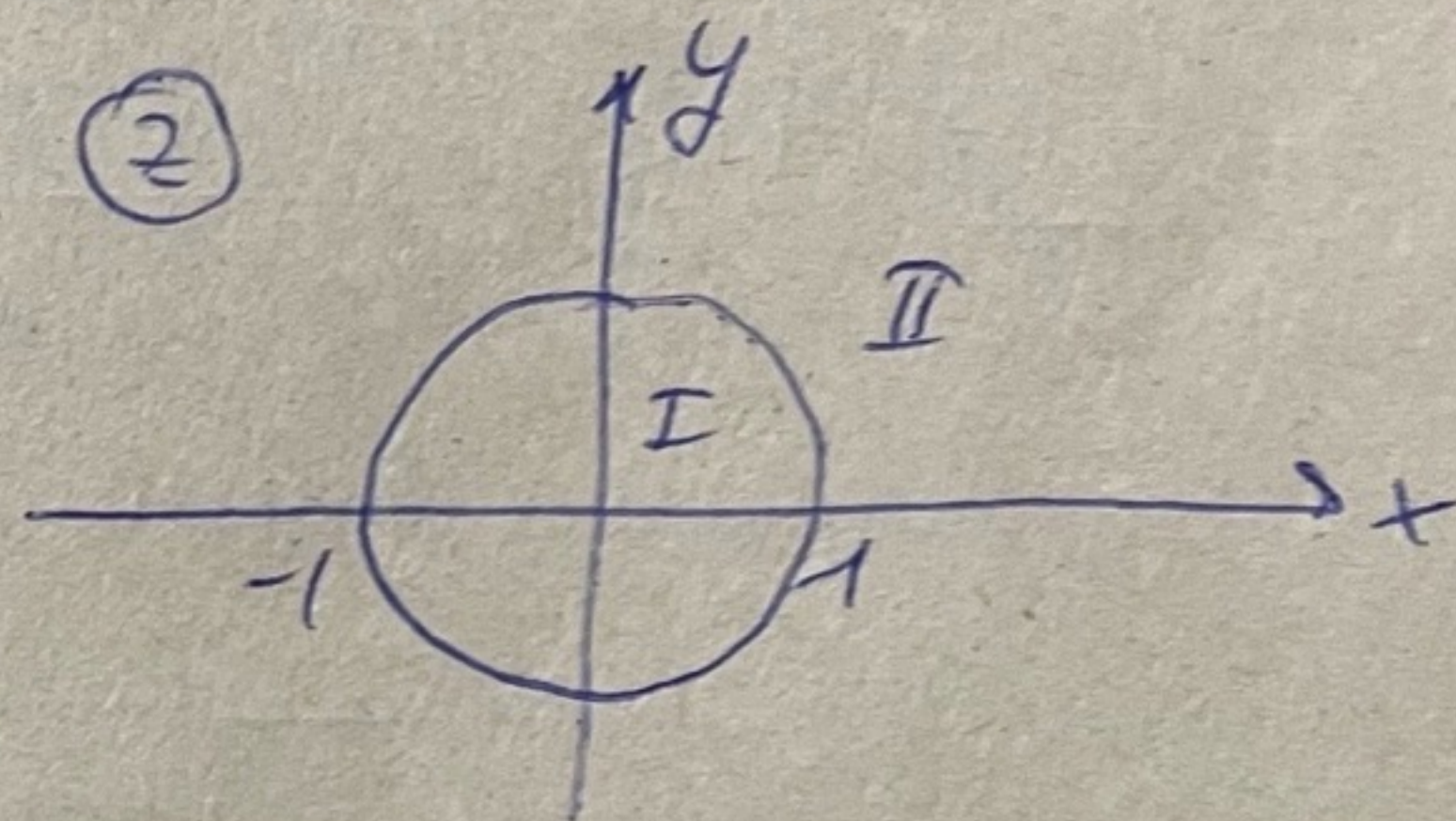
$$\underline{N1} \quad f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+1} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}$$

$$Az^2 + Az + Bz + B + Cz^2 = 1$$

$$z^2: A+C=0 \quad A=-1$$

$$z: A+B=0 \Rightarrow B=1$$

$$1: B=1 \quad C=1$$



Observe I: $|z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Observe II: $|z| > 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} = \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

N2

$$f(z) = \frac{\cos z}{(4z^2 - \pi^2)^2} = \frac{\cos z}{(2z - \pi)^2 (2z + \pi)^2} = \frac{\cos z}{16(z - \frac{\pi}{2})^2 (z + \frac{\pi}{2})^2}$$

Особые точки: $z = \frac{\pi}{2}, z = -\frac{\pi}{2}$

1) $z = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{16(z - \frac{\pi}{2})^2 (z + \frac{\pi}{2})^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \text{~~lim~~}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(z - \pi/2)}{16(z - \frac{\pi}{2})^2 (z + \frac{\pi}{2})^2} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(z - \pi/2)}{16(z - \frac{\pi}{2})^2 (z + \frac{\pi}{2})^2} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{16(z - \frac{\pi}{2})(z + \frac{\pi}{2})^2} = \left[\frac{-1}{0} \right] = -\infty$$

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(z) (z - \frac{\pi}{2}) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{16(z - \frac{\pi}{2})(z + \frac{\pi}{2})^2} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(z - \pi/2)}{16(z - \frac{\pi}{2})(z + \frac{\pi}{2})^2} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{16(z + \frac{\pi}{2})^2} = \frac{-1}{16\pi^2}$$

$z = \frac{\pi}{2}$ - полюс I порядка

2) $z = -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{16(z - \frac{\pi}{2})^2 (z + \frac{\pi}{2})^2} = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(z + \frac{\pi}{2})}{16(z - \frac{\pi}{2})^2 (z + \frac{\pi}{2})^2} = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16(z - \frac{\pi}{2})^2 (z + \frac{\pi}{2})^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(z) (z + \frac{\pi}{2}) = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16(z - \frac{\pi}{2})^2} = \frac{1}{16\pi^2}$$

$z = -\frac{\pi}{2}$ - полюс I порядка.

3) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\cos z}{(4z^2 - \pi^2)^2} = \left[\frac{-1 \dots +1}{\infty} \right] = 0$

$z = \infty$ - устранимая точка.

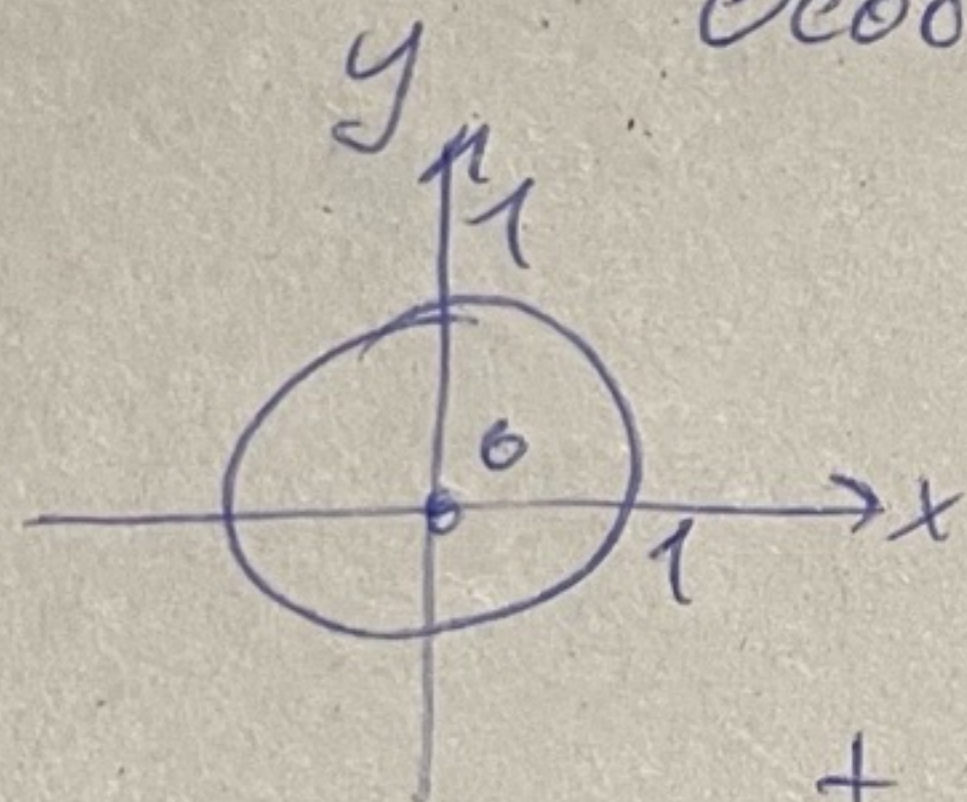
N3

$$f(z^2 e^{-1/2} + e^{z^2} \operatorname{sh} z)$$

$$|z|=1$$

Особая точка: $z=0$

разложим в ряд Лорана:



$$z^2 e^{-1/2} + e^{z^2} \operatorname{sh} z = z^2 \left(1 - \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) +$$
$$+ \left(z^2 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \dots \right) \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right)$$

коэфф. при $\frac{1}{z}$: $C_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$

тогда получим: $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = -\frac{1}{6}$

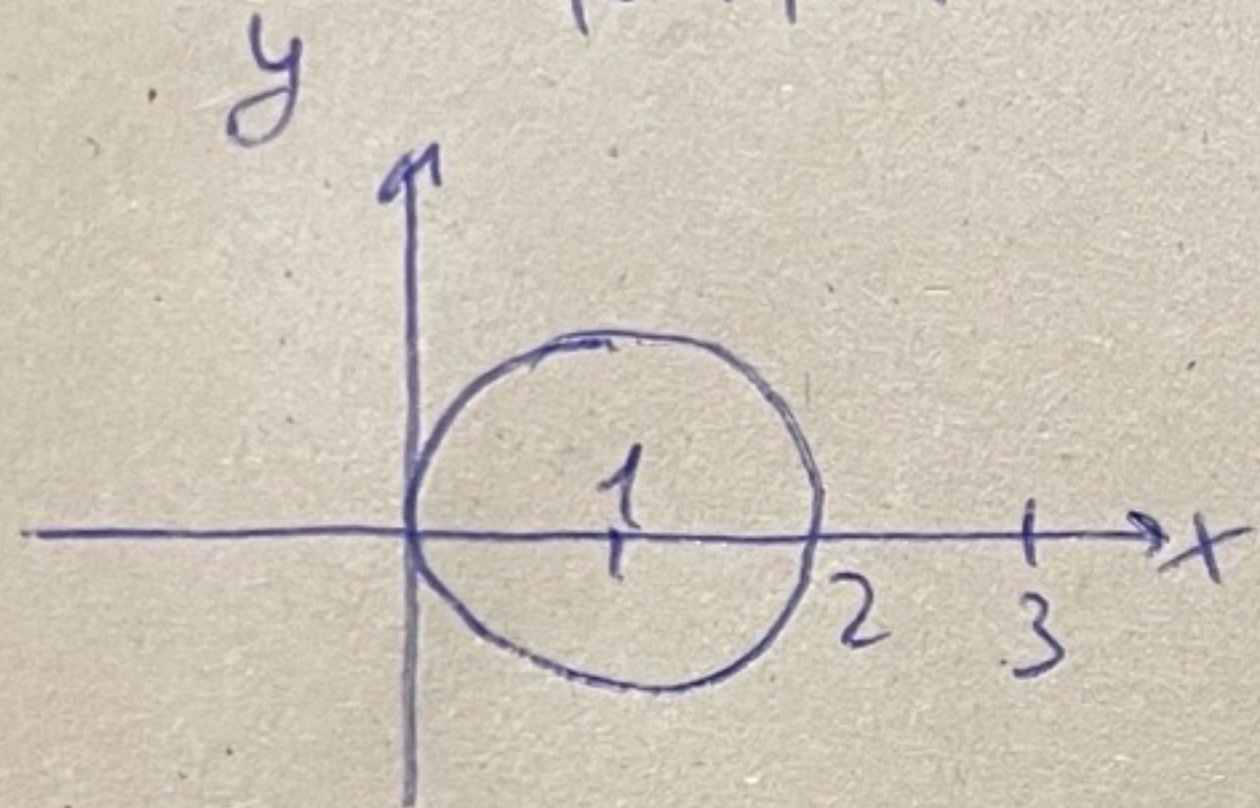
по теореме Коши:

$$\oint = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{\pi i}{3}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{3^n}$$

N4

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)} dz$$



Особые точки:

$z=1$ — полюс II порядка

$z=3$ — полюс I порядка

Вычисл. во внутренней точке $z=1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-3} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi z}{4} \cdot (z-3) - \sin \frac{\pi z}{4}}{(z-3)^2} = \\ &= \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-2) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(-\frac{\pi}{2} - 1 \right) = -\frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

по теореме Коши:

$$\oint = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \right) = \underline{\underline{-\frac{i\pi\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right)}}$$

N5

$$v = \operatorname{sh} 3x \sin 3y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3 \operatorname{ch} 3x \sin 3y; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 9 \operatorname{sh} 3x \sin 3y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3 \operatorname{sh} 3x \cos 3y; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -9 \operatorname{sh} 3x \sin 3y$$

имеет вид
линейной комбинации.

Условия Коши-Рунге:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \Rightarrow u = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx = \int 3 \operatorname{sh} 3x \cos 3y dx = \operatorname{ch} 3x \cos 3y + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -3 \operatorname{ch} 3x \sin 3y + \varphi'(y) = -3 \operatorname{ch} 3x \sin 3y$$

$$\varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = C$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \operatorname{ch} 3x \cos 3y + C$$

$$f(z) = u + iv = \operatorname{ch} 3x \cos 3y + C + i \operatorname{sh} 3x \sin 3y = \operatorname{ch} 3x \operatorname{ch}(3yi) + C + \operatorname{sh} 3x \operatorname{sh}(3yi) = \operatorname{ch}(3x + 3yi) + C = \underline{\underline{\operatorname{ch}(3z) + C}}$$