

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 12.

Кратные интегралы, ряды, ТФКП, Зс, ИУ1,2

1. Сформулировать признак Коши (с радикалом) для знакоположительных числовых рядов и его предельный вариант. Доказать предельный вариант. (6 баллов)
2. Классификация конечных изолированных особых точек аналитической функции. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие устранимой особой точки. (6 баллов)
3. Задача из комплекта №1. (6 баллов)
4. Задача из комплекта №3. (6 баллов)
5. Дополнительные вопросы. (6 баллов)

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 -----
Заведующий кафедрой ФН-12 А.П. Крищенко (А.П. Крищенко)

Кафедра математического
моделирования

Кратные интегралы, ряды, ТФКП, Зс, ИУ1,2 Экзамен

Задача 3.16 (6 баллов)

Найти все разложения функции

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$$

в ряд по степеням $z - 3$.

Кратные интегралы, ряды, ТФКП, Зс, ИУ1,2 Экзамен

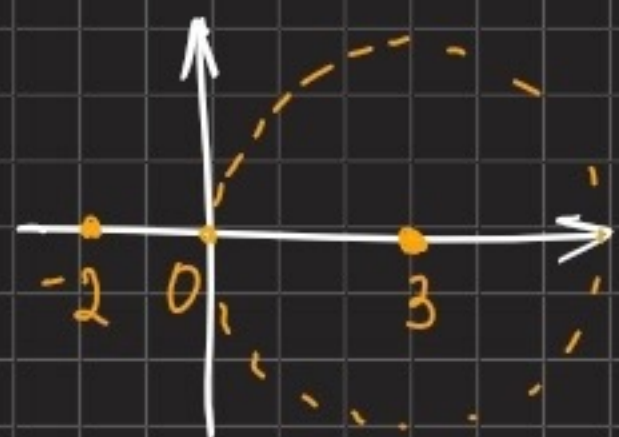
Задача 1.31 (6 баллов)

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 9$, $z = 4$, $z = 0$.

$$\textcircled{1} \quad f(z) = \frac{1}{z(z+2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2}$$

$$Az + 2A + Bz = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+2}$$



$$|z-3| < 3:$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+z-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z-3}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{3}\right)^n$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{5+z-3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-3}{5}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{5}\right)^n$$

$$\text{Illega: } f(z) = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{3}\right)^n - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{5}\right)^n$$

$$3 < |z-3| < 5$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{5+z-3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-3}{5}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{5}\right)^n$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+z-3} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{z-3}} = \frac{1}{z-3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{z-3}\right)^n$$

Illega:

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{(z-3)^{n+1}} - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{5}\right)^n$$

$$|z-3| > 5:$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+z-3} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{z-3}} = \frac{1}{z-3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{z-3}\right)^n$$

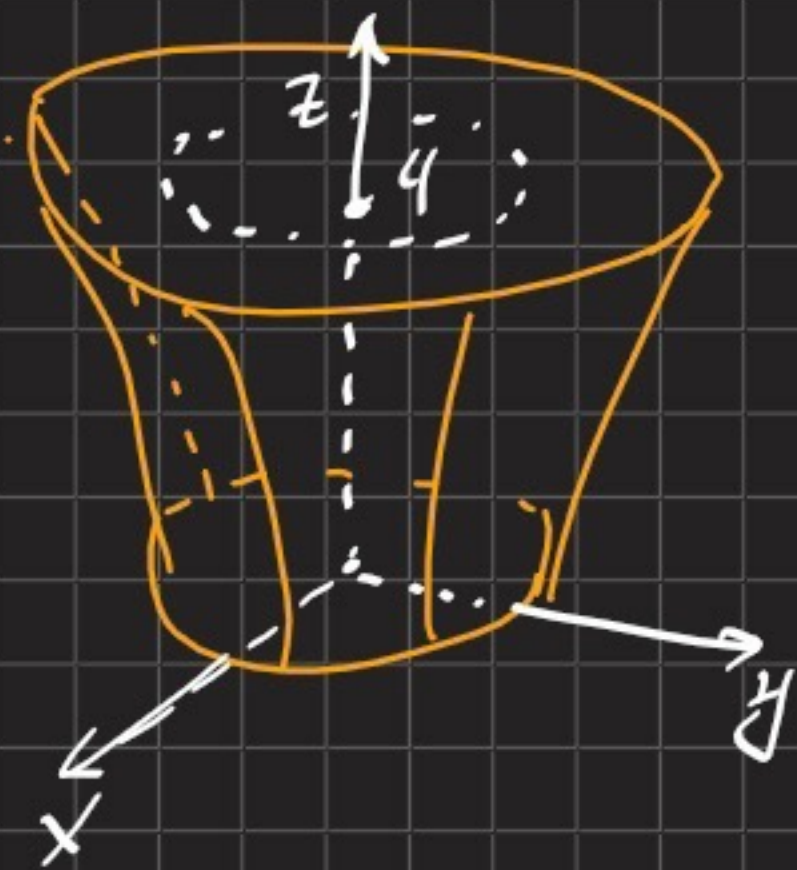
$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{5+z-3} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1+\frac{5}{z-3}} = \frac{1}{z-3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{z-3}\right)^n$$

Illega:

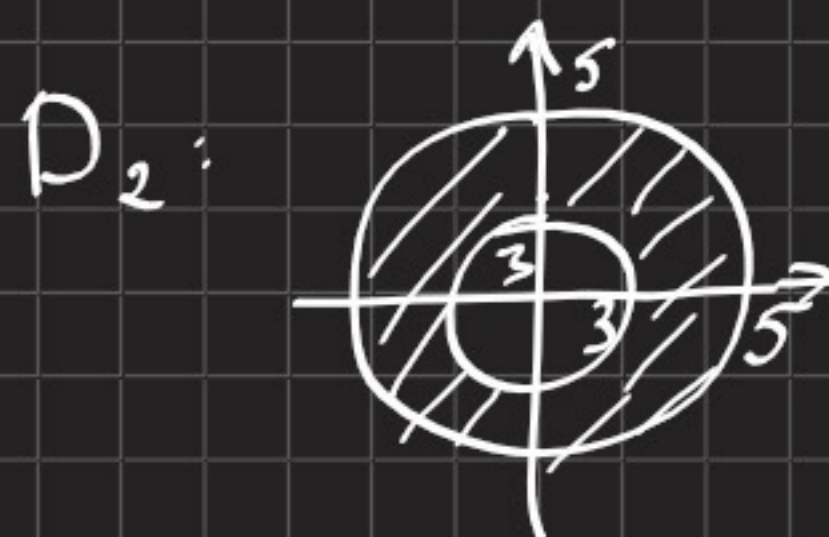
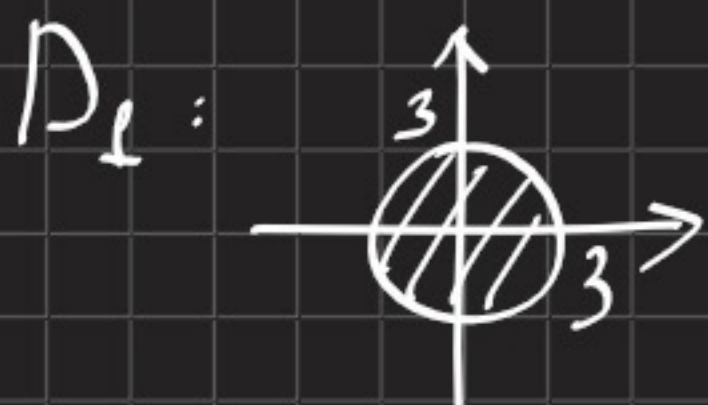
$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{(z-3)^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5^n}{(z-3)^{n+1}}$$

$x^2 + y^2 - z^2 = 9$ - однополостный гиперболоид.

при $z=0$: $x^2 + y^2 = 3^2$; $z > 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$
 $z=4$: $x^2 + y^2 = 5^2$



$$V = \iint_{D_1} (4-0) dx dy + \iint_{D_2} (4 - \sqrt{x^2 + y^2 - 9}) dx dy$$



Перейдем в полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$|J| = r$$

$$D_1: 0 \leq r \leq 3 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$D_2: 3 \leq r \leq 5 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 4r dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 4r dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 r \cdot \sqrt{r^2 - 9} dr =$$

$$= 4\pi (r^2) \Big|_0^3 + 4\pi (r^2) \Big|_3^5 - \pi \int_3^5 \sqrt{r^2 - 9} d(r^2 - 9) =$$

$$= 100\pi - \frac{2}{3}\pi (r^2 - 9)^{3/2} \Big|_3^5 = 100\pi - \frac{2}{3}\pi \cdot 64 = \frac{172\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{172\pi}{3}$