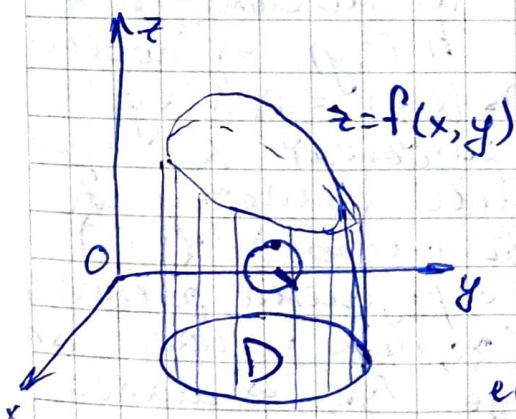


① Знать определение двойного интеграла и его основные свойства. Доказательство теоремы о среднем для двойного интеграла, а также следствие из нее.

② 2 задачи (несколько задач), приводящих к понятию двойного интеграла

1. Задача об объеме цилиндрического тела.

Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и рассмотрим тело Q , ограниченное снизу ограниченной замкнутой областью D на координатной плоскости xOy , сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, || оси Oz , и сверху поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, причем $f(x, y)$ неотрицательна при $(x, y) \in D$.



Тело Q - z -цилиндрическое.

Объем V такого тела Q естественно искать след. образом:

Разобьем основание D произвольными кривыми на n частичных областей D_i , не имеющих общих внутренних точек. $\Rightarrow$ все тело можно представить состоящим из n цилиндрических столбиков Q_i , $i = \overline{1, n}$, основания которых - частичные области D_i . В каждой частичной области выберем некоторую $(\zeta_i, \eta_i) \in D_i$. $\approx$ $\Rightarrow$ $f(\zeta_i, \eta_i)$ - высота Q_i . $\Rightarrow$ ΔV_i - объем отдельного столбика $Q_i \approx f(\zeta_i, \eta_i) \Delta S_i$, где ΔS_i - площадь частичной области D_i . $\Rightarrow$ объем тела Q : $V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i) \Delta S_i$

Для ↑ точности уменьшаем размеры частичных областей D_i , увеличивая их кол-во.

Точное значение V принимаем предел Σ_i при стремлении $\max$ диаметра d среди диаметров множеств D_i , $i = \overline{1, n}$ к 0.

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

Диаметр множества - это точная верхняя грань расстояний между двумя произвольными $(\cdot)$ этого множества.

2. Задача о массе пластины

Пусть на ограниченной замкнутой области D в координатной плоскости xOy распределена масса с поверхностной плотностью $\rho_s(x, y)$. Пример - пластина из однородного мат-ла с const плотностью ρ_0 но имеющую переменную толщину $h(x, y) \Rightarrow$ поверхностная плотность пластины $\rho_s(x, y) = \rho_0 h(x, y)$.

Для вычисления массы m разобьем D произвольным образом на n частичных областей D_i , $i = \overline{1, n}$, в каждой выберем произвольную $(\cdot)$ (ξ_i, η_i) . Если $\approx$ принять, что масса D_i распределена равномерно с поверхностной плотностью $\rho_s(\xi_i, \eta_i) \Rightarrow$ масса $\Delta m_i \approx \rho_s(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$, где ΔS_i - площадь D_i . $\Rightarrow$ масса всей пластины:

$$m \approx \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \sum_{i=1}^n \rho_s(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

Точное значение массы при $d \rightarrow 0$,

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho_s(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

Определение и простейшие св-ва двойного интеграла.

Пусть в области G плоскости xOy определена ф-ия $z = f(x, y) = f(P)$ $P(\cdot)$ плоскости xOy с коорд. (x, y)

Выполним следующие действия:

1) Разобьем область G на n малых областей $\Delta G_1, \dots, \Delta G_n$ так чтобы $\sum$ их площадей была = площади всей области G объединение множеств

$$S(G) = \sum_{i=1}^n S(\Delta G_i) \quad \text{и} \quad G = \bigcup_{i=1}^n \Delta G_i$$

Совокупность таких областей наз. разбиением области G и обозначим $T = \{\Delta G_1, \dots, \Delta G_n\}$

2) В каждой малой области ΔG_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$. Множество $\{P_1, \dots, P_n\}$ таких $(\cdot)$ наз. разметкой разбиения T области G и обозначим ξ .

Разбиение T и разметку ξ наз. размеченным разбиением области G и обозначим T_ξ .

3) Составим Σ : $S_f(T_\xi) = \sum_{i=1}^n f(P_i) S(\Delta G_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) S(\Delta G_i)$

интегральная сумма составленная для ф-ии $z = f(P) = f(x, y)$ по размеченному разбиению T_ξ

4) Предположим, что $\uparrow$ предел интегральных сумм $S_f(T_\xi)$ при неограниченном $\uparrow$ числа n малых областей и стягивании каждой из них в точку и что этот предел не зависит от способа разбиения области G на малые области ΔG_i и от выбора в каждой из них точек $P_i(x_i, y_i)$. Этот предел наз. двойным интегралом от ф-ии $z = f(P) = f(x, y)$ по области G и обозначают:

$$\iint_G f(P) dG = \iint_G f(x, y) dx dy$$

$f(x, y)$ - интегрируемая в области G

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta G_i$$

G - область интегрирования

$f(x, y)$ - подынтегральная ф-ия

$f(x, y) dx dy$ - подынтегральное выражение

∇ непрерывная в ограниченной области G ф-ия интегрируема в ней.

Св-ва двойного интеграла:

$$1) \iint_G \sum_{k=1}^N C_k f_k(x_1, x_2) d\sigma = \sum_{k=1}^N C_k \iint_G f_k(x_1, x_2) d\sigma \quad \text{линейность}$$

$$2) \iint_G C d\sigma = C \cdot m(G) \quad C = \text{const}$$

$$3) \{G = \bigcup_{k=1}^N G_k\} \wedge \{m(G_k \cap G_j) = 0, \forall k \neq j\} \Rightarrow \iint_G f(x_1, x_2) d\sigma =$$

$$4) \{f \geq 0, \forall (x_1, x_2) \in G\} \Rightarrow \iint_G f(x_1, x_2) d\sigma \geq 0 \quad \left\{ = \sum_{k=1}^N \iint_{G_k} f(x_1, x_2) d\sigma \right\}$$

$$5) \{f \geq 0 \wedge f \neq 0, \forall (x_1, x_2) \in G\} \Rightarrow \iint_G f(x_1, x_2) d\sigma > 0$$

$$6) \{f \leq \varphi \wedge f \neq \varphi, \forall (x_1, x_2) \in G\} \Rightarrow \iint_G f(x_1, x_2) d\sigma < \iint_G \varphi(x_1, x_2) d\sigma$$

$$7) \left| \iint_G f(x_1, x_2) d\sigma \right| \leq \iint_G |f(x_1, x_2)| d\sigma$$

Теорема о среднем.

f и φ непрерывны в замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^2$ имеющей ненулевую $d(G)$ и $m(G)$ и хотя одна из них знакопостоянна в G (пусть φ) $\Rightarrow \exists (x_{10}, x_{20}) \in G$:

$$\iint_G (f \cdot \varphi) d\sigma = f(x_{10}, x_{20}) \iint_G \varphi d\sigma$$

Док-во:

Пусть для определенности в G $\varphi > 0 \Rightarrow \forall (x_1, x_2) \in G \quad m \triangleq \min_G f \leq f \leq M \triangleq \max_G f \Leftrightarrow m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi, \forall (x_1, x_2) \in G$

Случай $f \equiv \text{const}$ на G тривиален. По св-вам двойного интеграла:

$$m \iint_G \varphi d\sigma < \iint_G f\varphi d\sigma < M \iint_G \varphi d\sigma$$

Таким образом $\exists \mu \in (m, M) : \mu = \iint_G f\varphi d\sigma / \iint_G \varphi d\sigma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists (x_{10}, x_{20}) \in G : f(x_{10}, x_{20}) = \mu$$

Опр двойного I-ла ; следствие из теор о среднем.

Следствие

$$\text{if } \varphi \equiv 1 \text{ в } G \Rightarrow \exists (x_{10}, x_{20}) \in G : \iint_G f d\sigma = f(x_{10}, x_{20}) \cdot m(G)$$

Короткое определение двойного интеграла:

Пусть в замкнутой области G плоскости $x_1 O x_2$ конечной площади $\sigma = m(G)$ и конечного диаметра $d(G)$ определена скалярная функция $z = f(x_1, x_2)$.

Пусть $\{G_k\}$ - произвольное разбиение G на систему подобластей пересекающихся, быть может, лишь по границам, а $M_k = (x_{1k}, x_{2k}) \in G_k$ - произвольная отмеченная точка. if вне зависимости от выбора разбиения $\{G_k\}$ и системы отмеченных точек $\{M_k\}$

$\lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} \sum_k f(M_k) \cdot m(G_k)$ то его называют двойным интегралом ф-ии $f(x_1, x_2)$ по области G и обозначают

$$\iint_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad \text{или} \quad \iint_G f(x_1, x_2) d\sigma$$

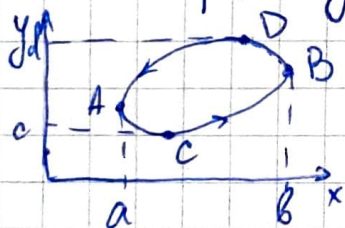
② Доказательство теоремы о формуле Грина для выпуклой односвязной области в $\mathbb{R}^2$. Доказательство ее применимости в случае нарушения условия выпуклости области, а также в случае нарушения условия односвязности области.

Формула Грина.

Область $G \subset \mathbb{R}^2$ ограниченную замкнутой кривой L , будем называть односвязной, если L замкнута и контур $L \subset G$ может быть стянут в точку без пересечения L с G . $G \subset \mathbb{R}^2$

Замкнутая область y -правильная, если имеет вид:
 $G = \{(x, y) (x \in [a, b]) \wedge (y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \forall x \in [a, b])\}$ и
 ф-ии $y_1(x), y_2(x)$ непрерывны при $x \in [a, b]$.

Аналогично замкнутая область $G \subset \mathbb{R}^2$ x -правильная, если имеет вид: $G = \{(x, y) (y \in [c, d]) \wedge (x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \forall y \in [c, d])\}$ и ф-ии $x_1(y), x_2(y)$ непрерывны при $y \in [c, d]$.



Теорема (о ф-ле Грина)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ - односвязная область, ограниченная кусочно-заданной замкнутой кривой L и в замкнутой области $G \cup L$ определены и непрерывны скалярные ф-ии $P(x, y), P'_x(x, y), Q(x, y), Q'_y(x, y)$. Тогда имеет место следующая формула (ф-ла Грина для односвязной области):

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_G \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx dy$$

Док-во от-лы Грина, нарушение условия выпуклости

Док-во:

Пусть для простоты G явл. x и y -правильной. Тогда $\Gamma_{\text{пр}} G = [a; b]$, $\Gamma_{\text{пр}} G = [c; d]$, и участки контура L описываются ур-ниями

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ACB} : y &= \varphi_1(x) \\ \overrightarrow{BDA} : y &= \varphi_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DAC} : x &= \psi_1(y) \\ \overrightarrow{CBD} : x &= \psi_2(y) \end{aligned}$$

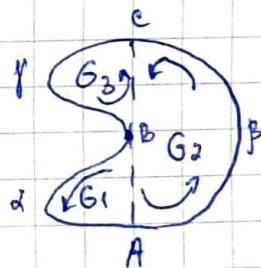
$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy &= \oint_L P dx + \oint_L Q dy = \int_{\overrightarrow{ACB}} P(x, y) dx + \int_{\overrightarrow{BDA}} P(x, y) dx + \\ &+ \int_{\overrightarrow{DAC}} Q(x, y) dy + \int_{\overrightarrow{CBD}} Q(x, y) dy = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx + \\ &+ \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy + \int_d^c Q(\psi_2(y), y) dy = - \int_a^b \left[P(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \right] dx + \\ &+ \int_c^d \left[Q(x, y) \Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \right] dy = - \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy + \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx = \\ &= \iint_G \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx dy \end{aligned}$$

Замечание 1. Пусть область G не явл. x и y -правильной, но остальные усл. выполняются.

Согласно свойствам криволинейного интеграла:

$$\text{Тогда: } \oint_{\Gamma_G} = \oint_{\overrightarrow{BA}} + \oint_{\overrightarrow{AB}} = 0 = \oint_{\overrightarrow{BC}} + \oint_{\overrightarrow{CB}} + \oint_{\overrightarrow{CA}} + \oint_{\overrightarrow{AC}} =$$

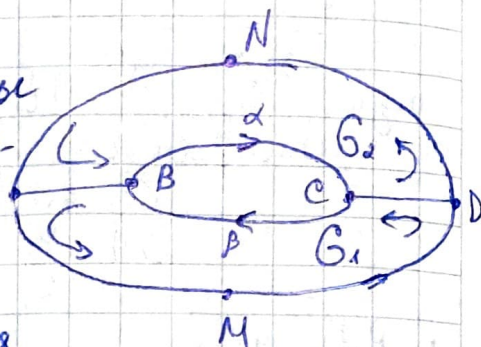
$$\begin{aligned} &= \iint_{G_1} \{ Q'_x - P'_y \} dx dy + \iint_{G_2} \{ Q'_x - P'_y \} dx dy + \iint_{G_3} \{ Q'_x - P'_y \} dx dy = \\ &= \iint_G \{ Q'_x - P'_y \} dx dy \Rightarrow \text{от-ла Грина применима для невы-} \\ &\quad \text{пуклых областей.} \end{aligned}$$



Нарушение усл. односвязности

Замечание 2.

Пусть при выводе ф-лы Грина нарушено условие односвязности области G . Пусть, для примера, G - двухсвязная область с положительной ориентацией Γ_G : при ее обходе G остается слева.



Разрежем AB и CD , превратим G в две односвязные области G_1 и G_2 :

$$\oint_{\Gamma_G} = \left\{ \int_{\overrightarrow{AMD}} + \int_{\overrightarrow{DC}} + \int_{\overrightarrow{CB}} + \int_{\overrightarrow{BA}} \right\} + \left\{ \int_{\overrightarrow{DNA}} + \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{BC}} + \int_{\overrightarrow{CD}} \right\} =$$

$$= \iint_{G_1} \{Q'_x - P'_y\} dx dy + \iint_{G_2} \{Q'_x - P'_y\} dx dy = \iint_G \{Q'_x - P'_y\} dx dy$$

$\Rightarrow$ ф-ла Грина применима и для неодносвязных областей.

③ Теорема о четырех эквивалентных условиях независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (с док-вом).

Теор. If $P(x, y), P'_y(x, y), Q(x, y), Q'_x(x, y)$ определены и непрерывны в замкнутой ограниченной односвязной области $G \cup L$, где $L \cong \bar{G} \Rightarrow$ следующие 4 условия эквивалентны:

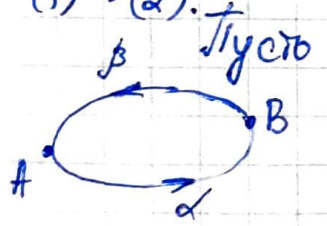
- 1) $\oint P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \forall l \in G;$
- 2) $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от профиля $\vec{AB} \in G$
- 3) в G определена ор-ия $u(x, y): du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$
- 4) $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \forall (x, y) \in G$

Док-во:

Достаточно доказать, что $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (1).$

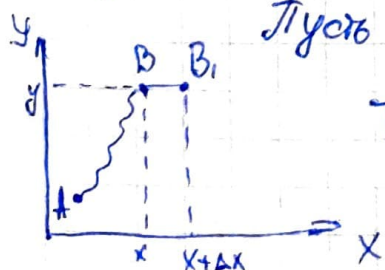
$(1) \rightarrow (2).$

Пусть (1) имеет место. Тогда $0 \equiv \oint_{(A \rightarrow B) \cup (B \rightarrow A)} \equiv \int_{A \rightarrow B} + \int_{B \rightarrow A} \equiv \int_{A \rightarrow B} - \int_{A \rightarrow B},$ т.е. $\int_{AB}$ не зависит от профиля $\vec{AB} \in G$



$(2) \rightarrow (3).$

Пусть 2 имеет место. Пусть (1) $A = [x_0, y_0]^T \in G$ фиксирована и (2) $B = [x, y]^T$ произвольна. Тогда $u(x, y) \triangleq \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{BB_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \equiv \{ \text{т.к. } BB_1 \parallel OX \} \equiv$$

$$\equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(x, y)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) \Big|_{0 \leq \theta \leq 1} = P(x, y),$$

т.к. $P(x, y)$ непрерывна в G .

Аналогично доказывается $u'_y = Q(x, y)$.

Таким образом: $du = u'_x dx + u'_y dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ ■

(3) $\rightarrow$ (4).

Пусть (3) имеет место, т.е. $\exists u(x, y): du(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.
Т.к. $P'_y(x, y)$ и $Q'_x(x, y)$ определены и непрерывны в $G \cup \partial G$, то по теор. о смешанных производных имеем: $Q'_x = (u'_y)'_x = (u'_x)'_y = P'_y(x, y)$ в G ■

(4) $\rightarrow$ (1).

Пусть (4) имеет место и Γ - ∇ замкнутый контур, охватывающий область $D \subset G$. Тогда выполняются все условия реализации ф-лы Грина и

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D [Q'_y(x, y) - P'_x(x, y)] dx dy = \iint_D 0 \cdot dx dy = 0 \quad \blacksquare$$

Опр. числовой ряд: сходящийся; теор. необходимый признак сходимости. - док-во. Коши

① Знать определение числового ряда сходящегося, числового ряда, знакоположительного числового ряда, знакпеременного и знакчередующегося числовых рядов. Доказательство необходимого признака сходимости числового ряда. Критерий Коши сходимости числового ряда.

Опр. Пару числовых последовательностей $\{a_k\}_{k \geq 1}, \{S_n\}_{n \geq 1}$ наз. числовым рядом, if их э-ты являются вещественными числами и $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \forall n \geq 1$. При этом a_n наз. k-ым или общим членом ряда, а S_n - n-ой частичной суммой ряда.

Опр. Числовой ряд $\{a_k\}_{k \geq 1}$ наз. сходящимся, if $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ и $|S| < \infty$. При этом число S наз. суммой сходящегося числового ряда $\{a_k\}_{k \geq 1}$ и пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теор. (необходимый признак сходимости)

if числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Док-во: По условию $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ и $|S| < \infty$. А т.к. $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$ 

Теор. (Критерий Коши сходимости числового ряда)

Числовой ряд $\{a_k\}_{k \geq 1}$ сходится тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N(\varepsilon)$ и любого $m \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

знакоположит. ряд; знакоперемен.; знакопеременный.

Опр. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. знакоположительным рядом,
if $a_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$

Опр. Ряды, элементами которых являются действительные числа, имеющие различные знаки, наз. знакопеременными

Опр. Ряды, элементы которых последовательно изменяют знак, наз. знакопеременными

⑤ Доказать признак сравнения и предельный признак сравнения числовых рядов.

Теор. (признак сравнения)

Пусть $\{a_n\}_{n \geq 1}$ и $\{b_n\}_{n \geq 1}$ - два знакоположительных числовых ряда и $\exists N \geq 1: \forall n \geq N, a_n \geq b_n$. В этом случае из сходимости ряда $\{a_n\}_{n \geq 1} \Rightarrow$ сходимости ряда $\{b_n\}_{n \geq 1}$, а из расходимости ряда $\{b_n\}_{n \geq 1} \Rightarrow$ расходимости ряда $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

Док-во:

По усл. $\forall p \geq 1$ имеем $\sum_{k=N}^{N+p} a_k \geq \sum_{k=N}^{N+p} b_k$

1) if знакоположительный числовой ряд $\{a_n\}_{n \geq 1}$ сходится, то $\sum_{k=N}^{N+p} b_k \leq \sum_{k=N}^{N+p} a_k < \sum_{k=N}^{\infty} a_k < \infty$.
Таким образом, последовательность частичных сумм для знакоположительного числового ряда $\{b_k\}_{k \geq 1}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, т.е. она имеет конечный предел и ряд $\{b_k\}_{k \geq 1}$ - сходится.

2) if ряд $\{b_n\}_{n \geq 1}$ расходится $\Rightarrow \sum_{k=N}^{N+p} a_k \geq \sum_{k=N}^{N+p} b_k \rightarrow \infty$ и ряд $\{a_n\}_{n \geq 1}$ - расходится.

Теор. (предельный признак сравнения)

if $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q \in (0, \infty) \Rightarrow$ ряды $\{a_n\}_{n \geq 1}$ и $\{b_n\}_{n \geq 1}$ сходятся или расходятся одновременно

Док-во: Согласно определению предела имеем:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q \right) \Leftrightarrow \left((\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) > 0) : (n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - q \right| < \varepsilon \right)$$

Пусть $\varepsilon = \frac{q}{2}$. Тогда $\forall n \geq N(\frac{q}{2})$:

$$\left(\left| \frac{a_n}{b_n} - q \right| < \frac{q}{2} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{q}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3q}{2} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n < 1.5q b_n \quad (*) \\ a_n > 0.5q b_n \quad (**) \end{array} \right.$$

Согласно (*) из сходимости ряда $\{b_n\}_{n \geq 1} \Rightarrow$ сходимости $\{a_n\}_{n \geq 1}$, а из расходимости ряда $\{a_n\}_{n \geq 1} \Rightarrow$ расходимости $\{b_n\}_{n \geq 1}$.
Согласно (**) из сходимости ряда $\{a_n\}_{n \geq 1} \Rightarrow$ сходимости $\{b_n\}_{n \geq 1}$, а из расходимости ряда $\{b_n\}_{n \geq 1} \Rightarrow$ расходимости $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

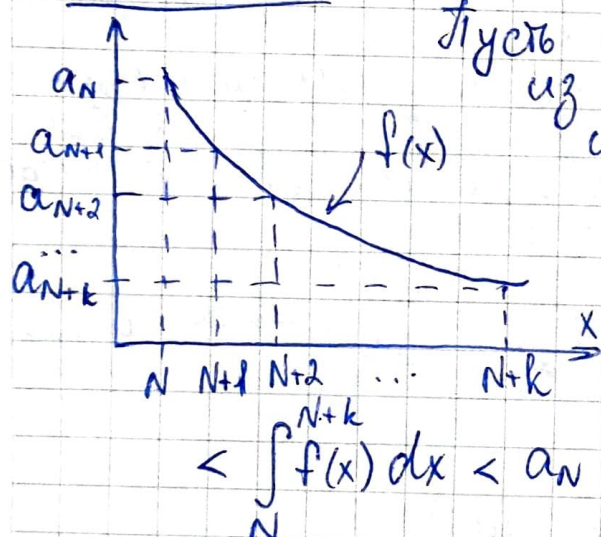
теор. интегральный признак Коши + док-во

⑥ Доказать интегральный признак Коши для
знакоположительных числовых рядов. Ряды
Дирихле.

Теор. (интегральный признак Коши)

и, начиная с некоторого номера N члены знакоположительного числового ряда $\{a_k\}$, могут быть представлены как значения некоторой непрерывной, положительной, монотонно убывающей ф-ии $f(x) : a_k = f(k) ; \forall k \geq N \Rightarrow$ исходный ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_N^{\infty} f(x) dx$.

Dok-bo.



Пусть выполняются усл. теоремы. Тогда из свойств площадей объемных и объемлющих плоских фигур $\Rightarrow$ (тут $\sum_{n=1}^m \sigma_{n+1}$ - та же частная сумма остатка R_{n+1} искомого ряда):

$$\begin{aligned} \bigcup_{N+1}^m \Delta &\equiv a_{N+1} + \dots + a_{N+k} < \\ \bigcup_{N+1}^{k-1} &\equiv a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+k-1} \end{aligned}$$

1) Пусть рассматриваемый интеграл сходится. Тогда

$$G_{N+1}^k < \int_N^{N+k} f(x) dx < \int_N^{\infty} f(x) dx < \infty, \forall k \geq 1.$$
 Последовательность частичных сумм остатка ряда монотонно возрастает и ограничена сверху $\Rightarrow$ остаток ряда R_{N+1} сходится. По теореме об остатках исходный ряд сходится.

2) Пусть рассматриваемый интеграл расходится
Т.к. $\int_{n+1}^{n+k} f(x) dx < a_n + \varepsilon_{n+1}^k \cdot \forall k \geq 1$ то знаменательная числовая последовательность $\{\varepsilon_{n+1}^k\}_{k \geq 1}$ монотонно неограниченно возрастает, что означает расходимость остатка R_{n+1} и, как следствие (см. теор. об остатках), расходимость исходного ряда.

3) Пусть сходится исходный числовой ряд. Тогда одновременно с ним сходится и все его остатки, т.е.
 $a_n + b_{n+1}^{k-1} \leq b < \infty$, и, как следствие, имеют место неравенства
 $\int_N^{n+k} f(x) dx < a_n + b_{n+1}^{k-1} < b < \infty$, из которых $\Rightarrow$ сходимость рассматриваемого несобственного интеграла.

4) Пусть исходный числовой ряд расходится. Тогда $b_{n+1}^k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и из неравенства $b_{n+1}^k < \int_N^{n+k} f(x) dx \Rightarrow$ расходимость рассматриваемого несобственного интеграла.

Ряды Дирихле.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{ряд Дирихле.}$$

Исследование на сходимость

• if $p \leq 0$, данный ряд расходится согласно необходимому признаку.

• if $p > 0$. В этом случае $f(x) = 1/x^p$ неотрицательна и монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Можно применить интегральный признак Коши, и мы заключаем, что сходимость ряда эквивалентна сходимости соответствующего интеграла, который можно вычислять непосредственно:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_1^{+\infty} \quad \begin{cases} \text{сходится при } p > 1 \\ \text{расходится при } p \leq 1 \end{cases}$$

теор. признак Даламбера + док-во; теор. предельный признак Даламбера + док-во

④ Доказать признак Даламбера для знакоположительных числовых рядов и его предельный вариант.

Теор. (признак Даламбера)

if $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что для $\forall n \geq N$ имеет место неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow$ знакоположительный числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится ~~сходится~~ и расходится, if $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$

Док-во:

1) Пусть $\forall n \geq N$ имеет место неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. Тогда $a_{n+1} \leq q a_n$; $a_{n+2} \leq q a_{n+1} \leq q^2 a_n$, ..., $a_{n+p} \leq q^p a_n$

Т.к. $a_n - \text{const}$ и $0 < q < 1$, то ряд $\sum_{p=1}^{\infty} q^p a_n$ сходится как сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Тогда числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения.

2) Пусть $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1 \forall n \geq N$, тогда $a_{n+p} \geq q^p a_n \forall p \geq 1$
Т.к. $\lim_{p \rightarrow \infty} q^p a_n = \infty \neq 0$ (или не существует), то ряд $\sum_{p=1}^{\infty} q^p a_n$ расходится и по признаку сравнения расходится и исследуемый ряд.

Теор. (предельный признак Даламбера)

if $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ и $q < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
if $q > 1 \Rightarrow$ ряд расходится.

Док-во:

Т.к. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 0$ по определению предела имеем: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0: (n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$
Тогда $q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon \forall n \geq N(\varepsilon)$

1) Пусть $0 < q < 1$. Выбрав $\varepsilon = (1-q)/2$, получаем, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < (q+1)/2 < 1.$$

док. во (продолж.)

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку Даламбера.

2) Пусть $q > 1$. Выбрав $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$, получаем, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{q+1}{2} > 1$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится по признаку Даламбера.

теор. признак Коши с радикалом + док-во;
теор. предел. признак Коши с радикал. + док-во

8) Доказать признак Коши (с радикалом) для знакоположительных числовых рядов и его предельный вариант.

Теор. (радикальный признак Коши)

if $\exists N \geq 1$ такой, что для $\forall n \geq N$ имеет место неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, if $\sqrt[n]{a_n} \geq q > 1 \Rightarrow$ исходный ряд расходится.

Док-во:

1) Пусть $\forall n \geq N$ имеет место неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q \leq 1$. Тогда $a_n \leq q^n$, где $q < 1$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится как сумма бесконечно убывающей прогрессии. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения.

2) Пусть $\sqrt[n]{a_n} \geq q > 1 \forall n \geq N$. Тогда $a_n \geq q^n$. Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty \neq 0$ (или не существует) $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ расходится по необходимому признаку, а исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится по признаку сравнения.

Теор. (предельный радикальный признак Коши).

if $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \Rightarrow$ при $q < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и при $q > 1$ - расходится.

Док-во: Т.к. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то по определению предела имеем: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$. Тогда $q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$

1) Пусть $0 < q < 1$. Выбрав $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$, получим, что $\sqrt[n]{a_n} < \frac{q+1}{2} < 1$. Тогда исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по радикальному признаку Коши.

2) Пусть $q > 1$. Выбрав $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$, получим, что $\sqrt[n]{a_n} > \frac{q+1}{2} > 1$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится по радикальному признаку Коши.

Теор. признак Лейбница + док-во остаток ряда

③ Доказать признак Лейбница сходимости знакопередающегося ряда. Оценка остатка ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница.

Теор. (Лейбница)

if знакопередающийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$,
 $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям:
1) $a_1 > a_2 > \dots > a_k > a_{k+1} > \dots > 0$
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

то данный знакопередающийся ряд сходится и его сумма $S < a$

Док-во: Рассмотрим частную сумму $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k =$
 $\equiv (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) > 0$, т.к. $a_{2k-1} > a_{2k} > 0$,
 $\forall k \geq 1$

Таким образом, последовательность $\{S_{2n}\}$ является знакоположительной и монотонно возрастает. При этом
 $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$,
т.к. $a_{2k} > a_{2k+1}$

Таким образом, по признаку Вейерштрасса, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S < a$
С другой стороны, $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$,
т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S < a$

Следствие (про остаток ряда)

if знакопередающийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$,
 $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям признака Лейбница, то $|R_n| \leq a_{n+1}$, где
 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ - k -ый остаток ряда.

Замечание (об оценке остатка)

Анализируя док-во, можно получить: $|S_n - S| \leq a_{n+1}$
Значит, сумма остатка знакопередающегося ряда не превосходит первого отброшенного члена. Таким образом, можно оценить остаток ряда.

Например, чтобы вычислить приближенно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ с точностью 0,001, нужно взять 1000 первых членов ряда.

теор. о сходимости абс. сходящегося ряда + док-во; теор. о перестановках

10) Доказать теорему о сходимости абсолютно сходящегося числового ряда. Сформулировать теоремы о перестановках членов абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теор. (о сходимости абсолютно сходящегося ряда)
Любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

Док-во:

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Тогда, согласно критерию Коши имеем:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(\varepsilon) \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k| < \varepsilon$

Т.к. $|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k| < \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k|$, то согласно критерию Коши, сходится и исходный ряд.

Теор. (перестановка членов абсолютно сходящихся рядов)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из исходного ряда перестановкой членов, тоже сходится абсолютно, причем $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теор. (перестановка членов условно сходящихся рядов)

1) Пусть действительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда для любого действительного числа S можно перестановкой членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ получить условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, сумма которого $= S$.

2) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопеременный числовой ряд. Рассмотрим числовые ряды, представленные своими членами:

$$b_n \triangleq \frac{1}{2}(|a_n| + a_n) = \begin{cases} a_n & ; a_n > 0 \\ 0 & ; a_n < 0 \end{cases}$$

$$c_n \triangleq \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) = \begin{cases} 0 & ; a_n > 0 \\ a_n & ; a_n < 0 \end{cases}$$

При этом

$$(A) \quad a_n = b_n - c_n \quad \text{и} \quad |a_n| = b_n + c_n$$

$$(B) \quad b_n \leq |a_n| \quad \text{и} \quad c_n \leq |a_n|$$

перестановки (продолж.)

Тогда:

1) if ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится $\Rightarrow$ согласно (Б), по признаку сравнения сходится знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ как $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ и согласно (А) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ как линейная комбинация.

Таким образом, абсолютно сходится числовой ряд $\rightarrow$ сходится.

2) if одновременно сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow$ согласно (А), сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

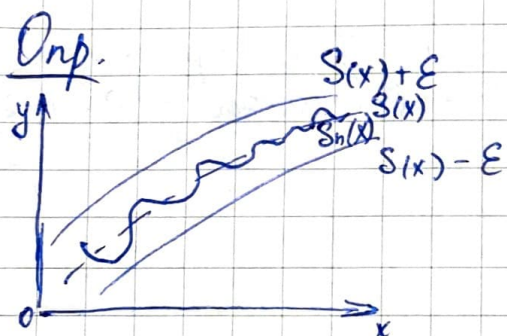
3) if ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится $\Rightarrow$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ не могут сходиться одновременно, а могут лишь одновременно расходиться.

4) if ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ - расходится или наоборот $\Rightarrow$ расходится и числовой ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Функциональный ряд; равномерная сходимость функций
ряда; признак Вейерштрасса + док-во

19) Знать определение функционального ряда
равномерной сходимости функционального ряда.
Уметь доказывать: теорему о равномерной сходимости
степенного ряда, признак Вейерштрасса.

Опр. Пусть $a_k = a_k(x)$, $\forall k \geq 1$ - скалярная ф-ия,
определенная на некотором множестве Ω .
Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ - функциональный ряд с общим
членом $a_k(x)$, $x \in \Omega$. При этом совокупность зна-
чений аргумента, при каждом из которых соот-
ветствующий числовой ряд сходится, наз. областью
 D сходимости функционального ряда.



Говорят, что функциональный
ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равно-
мерно на множестве
 $M \subset D \subset \Omega$, if $(\forall \epsilon > 0) (\exists N(\epsilon) \geq 1):$
 $|S(x) - S_n(x)| < \epsilon, (\forall n \geq N(\epsilon)) \wedge (\forall x \in M)$

Теор. (признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
if на множестве $M \subset D$ для функционального
ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ существует мажоранта $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, т.е.
 $|a_k(x)| \leq b_k, \forall k \geq 1, \forall x \in M$ и знакоположительный числовой
ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится на мно-
жестве $M \subset D$ абсолютно и равномерно.

Док-во:

Пусть выполнены условия теоремы, т.е.
 $|a_k(x)| \leq b_k, (\forall k \geq 1) \wedge (\forall x \in M \subset D)$. Т.к. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ско-
дится, то по признаку сравнения в каждой точке
 $x \in M$ исходный функциональный ряд сходится
абсолютно.

Пусть теперь $R_n(x) \triangleq a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x) + \dots$ - n -ый
остаток исходного функционального ряда и $b_{n+m} \triangleq$
 $\triangleq a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)$ - m -ая частичная сумма этого n -ого
остатка.

Признак Вейерштрасса (док-во) продолж.; теор. о равномерной сходимости степен. рядов + док-во.

Т.к. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится на МСД абсолютно, то он сходится на МСД и $S_n(x) \rightarrow R(x)$ при $n \rightarrow \infty$ $\forall x \in \text{МСД}$.
 Т.к. знакочередующийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \geq 1): b_{n+1} + \dots + b_{n+m} \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_{n+k} < \varepsilon, (\forall n \geq N(\varepsilon)) (\forall m \geq 1)$.
 Таким образом, $(\forall n \geq N(\varepsilon)) (\forall x \in \text{МСД}) (\forall m \geq 1)$;
 $|S_{n+m}(x) - S_n(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^m a_{n+k}(x) \right| \leq \sum_{k=1}^m b_{n+k} < \varepsilon$, т.е.
 $|R_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |S_{n+m}(x) - S_n(x)| < \varepsilon, (\forall n \geq N(\varepsilon)) (\forall x \in \text{МСД})$ ■

абсолютной и внутри интервала сходимости
Теор. (о равномерной сходимости степенного ряда)

если $R > 0$ - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Rightarrow$ этот ряд будет сходиться равномерно и абсолютно на отрезке $[-\varepsilon; \varepsilon] \subset (-R; R)$

Док-во. если $0 < \varepsilon < R \Rightarrow$ при $|x| = \varepsilon$ исходный ряд сходится абсолютно, т.е. сходится знакочередующийся числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \varepsilon^k$. Тогда при $\forall x \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ имеет $|x| \leq \varepsilon$ т.е. $|a_k x^k| = |a_k| |x|^k \leq |a_k| \varepsilon^k$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \varepsilon^k$ является мажорантой для исходного степенного ряда. По теор. Вейерштрасса ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится равномерно на $x \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ ■

↑ (12) вопрос

Теор. (о равномерной сходимости)

То же самое, что и для предыдущей теоремы или признак Вейерштрасса (он про равномерную сходимость)

хен. ряд; интервал сход-ти

⑫ Знать определение степенного ряда и интервала сходимости степенного ряда. Доказать теорему об абсолютной и равномерной сходимости внутри интервала сходимости.

Опр. if $a_k(x) = \alpha_k (x - x_0)^k \quad \forall k \geq 0$ где α_k - вещественное или комплексное число $\Rightarrow$ функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k$ наз. степенным рядом

Опр. Интервалом сходимости вещественного степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ наз. множество $(-R; R) \subset \mathbb{R}^1$, в каждой точке которого исходный ряд сходится абсолютно и расходится при $|x| > R$, где R наз. радиусом сходимости.

Теор. (об абсолютной и равномерной сходимости внутри интервала сходимости)

Док-во На предыдущей стр. (вопрос ⑪)

Теор. о почленном дифф-ии + док-во;
теор. о почлени. $\int$ -ии + док-во

(13) Доказать теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов.

Теор. (о почленном дифференцировании)

Сумму $S(x)$ степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ с радиусом сходимости $R > 0$ можно почленно дифференцировать в интервале сходимости произвольное число раз. При этом все производные степенные ряды $S'(x) = (\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k \alpha_k x^{k-1}$ и т.д. имеют тот же радиус сходимости R .

Док-во:

По теор. об абсолютной и равномерной сходимости внутри интервала сходимости исходный ряд сходится равномерно на $\forall$ отрезке $[-\varepsilon; \varepsilon] \subset (-R; R)$ и, $\Rightarrow$, его сумму можно почленно дифференцировать.

Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$ - производный степенной ряд, т.е. $\beta_k = (k+1) \alpha_{k+1}$, $\forall k \geq 0$.

$$\text{Таким образом } R^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\beta_k|}{|\beta_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1) |\alpha_{k+1}|}{(k+2) |\alpha_{k+2}|} = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k+2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_{k+2}|} = R$$

Теор. (о почленном интегрировании)

Сумму $S(x)$ степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ с радиусом сходимости $R > 0$ можно почленно интегрировать в интервале сходимости произвольное число раз. При этом полученный степенной ряд $\int_0^x S(t) dt = \int_0^x (\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k x^{k+1}}{k+1}$ и т.д. имеет тот же радиус сходимости R .

Док-во:

Поскольку исходный степенной ряд сходится равномерно на $\forall$ отрезке $[-\varepsilon; \varepsilon] \subset (-R; R)$, то допустимо почленное интегрирование его суммы.

Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$ - новый степенной ряд, полученный путем интегрирования исходного ряда при $|x| < R$. $\int_0^x \alpha_k t^k dt = \frac{\alpha_k x^{k+1}}{k+1}$, т.е. $\beta_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1}}{k+2}$ и $\beta_{k+1} = \frac{\alpha_k}{k+1}$. Тогда

$$R^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\beta_{k+1}}{\beta_{k+2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+2) |\alpha_k|}{(k+1) |\alpha_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{k+1} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} = R$$

теор Абеля + док-во, следствия

(14) Доказать теорему Абеля. Следствия из теоремы Абеля (в св-тв, св-во об абсолютной сходимости на границе круга сходимости с доказательством)

Теор. (Абеля)

if степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ с комплексными членами сходится при $z=0$ некоторой $z = z_1 \neq 0 \Rightarrow$ он абсолютно сходится $\forall z: |z| < |z_1|$. if он расходится при некоторой $z = z_2 \neq 0 \Rightarrow$ он расходится $\forall z \in \mathbb{C}: |z_1| > |z_2|$

Док-во:

Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ сходится. Тогда по необходимости признаку, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k z_1^k = 0$, т.е. $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) > 0)$: $|a_n z_1^n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $|z| < |z_1|$. Тогда $|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \cdot \left(\frac{z}{z_1}\right)^n = |a_n z_1^n| \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n < \varepsilon \cdot q^n$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$, где $q \triangleq \frac{|z|}{|z_1|} < 1$ откуда и следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ при $|z| < |z_1|$.

Пусть теперь $z_* \in \mathbb{C}$ и $|z_*| > |z_2|$. Предположим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_*^k$ сходится. Тогда согласно уже доказанному, в точке z_2 ряд должен сходиться абсолютно, т.к. $|z_2| < |z_*|$, что невозможно $\Rightarrow$ ряд расходится в $z_* \in \mathbb{C}: |z_1| > |z_2|$

Следствия:

1) Для каждого комплексного степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ в $\mathbb{C}$ $\exists$ круг с центром в 0 и радиусом R , в каждой внутренней точке которого исходный ряд сходится абсолютно и расходится в каждой внешней точке.

2) Радиус, круга сходимости степенного ряда $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_{k+1}/a_k|}$

3) if R -радиус сходимости $\Rightarrow$ в $\forall$ круге $K_\varepsilon = \{z: |z| \leq \varepsilon < R\}$ исходный степенной ряд сходится равномерно

4) if хоть в одной точке окружности $I_R \triangleq \{z \in \mathbb{C}: |z| = R\}$ круга сходимости исходный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ он сходится абсолютно в каждой точке окружности I_R .

Док-во: Пусть $z_0 \in I_R$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ сходится абсолютно, т.е. сходится знакоположительной числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z_0|^k$. Тогда $\forall z \in I_R$ имеют место равенства $|a_k z^k| = |a_k| \cdot |z|^k = |a_k| \cdot |z_0|^k = |a_k| R^k \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сходится абсолютно $\forall z \in I_R$

5) if хоть в одной точке окружности I_R круга сходимости исходный ряд расходится по необходимому признаку $\Rightarrow$ он расходится в каждой точке этой окружности (док-во аналогично 4 пункту)

6) if $\exists z_0 \in I_R$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ сходится условно $\Rightarrow$ в точках окружности I_R исходный ряд может как расходиться, так и сходиться условно.

теор. о необход. усл. дифференцируемости ф-ии комплекс. перемен. + док-во + следствие.

15) Доказать теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции комплексного переменного. Сформулировать следствие из нее.

Теор. (необходимое усл. дифференцируемости)

if $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in G \Rightarrow$ в этой точке выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}; \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x},$$

где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$

Док-во:

Т.к. по условию ф-ия дифференцируема, то $\forall \Delta z: z_0 + \Delta z \in G; \Delta f(z_0) = \Delta u(x_0, y_0) + i \Delta v(x_0, y_0) = A \Delta z + o(|\Delta z|) = f'(z_0) \Delta z + o(|\Delta z|) = (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|)$.
Т.к. $\Delta z \rightarrow 0 \Leftrightarrow (\Delta x \rightarrow 0) \wedge (\Delta y \rightarrow 0)$, то $\Delta u(x_0, y_0) + i \Delta v(x_0, y_0) = (\alpha \Delta x - \beta \Delta y) + i(\alpha \Delta y + \beta \Delta x) + o_u(|\Delta z|) + o_v(|\Delta z|)$,
где $o_u(|\Delta z|) = \operatorname{Re} o(|\Delta z|)$ и $o_v(|\Delta z|) = \operatorname{Im} o(|\Delta z|)$.
Воспользовавшись определением равенства комплексных чисел, получаем:

$$\Delta u(x_0, y_0) = \alpha \Delta x - \beta \Delta y + o_u(|\Delta z|)$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = \beta \Delta x + \alpha \Delta y + o_v(|\Delta z|)$$

Таким образом, мы доказали, что в точке (x_0, y_0) ф-ии $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы, причем

$$\alpha = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}; \quad \beta = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

$$\beta = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}; \quad \alpha = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

откуда и следует искомое утверждение.

Следствие:

if $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in G \Rightarrow$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} =$$
$$= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Теор. о дост. усл. дифф-ти функц. комплекс. перемен + док-во

(16) Доказать теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции комплексного переменного.

Теор. Если ф-ия $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ определена в G , а в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in G$ ф-ии $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы и в этой точке выполняются условия Коши-Римана $\Rightarrow$ в точке z_0 $\exists f'(z_0)$

Док-во:

П.к. ф-ии $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) , то

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + o_u(|\Delta z|)$$

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + o_v(|\Delta z|),$$

где $o_u(|\Delta z|)$ и $o_v(|\Delta z|)$ - бесконечно малые при $\Delta z \rightarrow 0$ более высокого порядка, чем Δz .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \Delta f(z) &= \Delta u(x_0, y_0) + i \Delta v(x_0, y_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + o_u(|\Delta z|) + i \left(\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + o_v(|\Delta z|) \right) \\ &= \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(|\Delta z|) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} (\Delta x + i \Delta y) + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + o(|\Delta z|) \\ &= \left\{ \text{п.к. } o(|\Delta z|) = o_u(|\Delta z|) + i o_v(|\Delta z|) \text{ и } \Delta z = \Delta x + i \Delta y \right\} \end{aligned}$$

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y \Rightarrow \left(\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \right) \Delta z + o(|\Delta z|) = \Delta f(z)$$

$$\text{Следовательно } f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \right) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Действ. и мнимая части как сопряж. гармонич. ф-ии; нахождение аналит. ф-ии по действ. или мним. части.

14) Действительная и мнимая части аналитической функции как сопряженные гармонические функции. Нахождение аналитической функции по ее действительной (мнимой) части.

1. Сопряженные гармонические функции.

Пусть $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ является аналитической в области $G \subset \mathbb{C}$, т.е. в каждой точке G выполняются условия Коши-Римана: $(u'_x = v'_y) \wedge (u'_y = -v'_x)$.

Дифференцируя первое равенство по x , а второе по y (далее будет показано, что аналитическая в G ф-ия бесконечно дифференцируема в G), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Складывая эти два равенства и учитывая равенство смешанных производных в силу их непрерывности в каждой точке области G , получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad \forall (x, y) \in G$$

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической ф-ии - гармонические ф-ии.

2. Опр.

Пару гармонических функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющих условиям Коши-Римана, наз. сопряженными гармоническими ф-иями

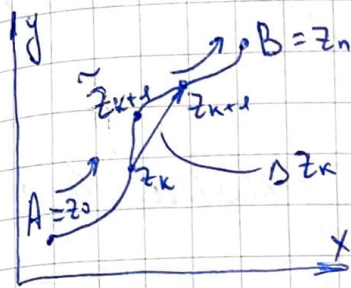
3. Нахождение аналитической функции.

Зная одну из сопряженных в области G ф-ий $u(x, y)$ или $v(x, y)$, используя условия Коши-Римана, можно восстановить другую, определенную с точностью до произвольной постоянной. Таким образом, аналитическая ф-ия $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ может быть восстановлена по своей действительной или мнимой части.

Опр. интеграла от ф-ии комплекс. перемен.; его св-ва

18) Дать определение интеграла от функции комплексного переменного. Сформулировать его основные свойства.

Опр.



Пусть $L \subset \mathbb{C}$ - гладкая или кусочно-гладкая ориентированная дуга, соединяющая две фиксированные точки A и B комплексной плоскости и $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ определена и непрерывна во всех точках L . Дугу L точками $\{z_k\}_{k=0}^n$ разбиваем на n элементарных дуг $\{z_k, z_{k+1}\}_{k=0}^{n-1}$.

произвольным образом, где $z_0 = A$ и $z_n = B$.

На каждой элементарной дуге z_k, z_{k+1} произвольным образом выбираем точку $\tilde{z}_{k+1} \in z_k, z_{k+1}$ и составим интегральную сумму $S_n(f) \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{z}_{k+1}) \cdot \Delta z_{k+1}$, где $\Delta z_{k+1} \triangleq z_{k+1} - z_k$, f вне зависимости от выбора точек $\{z_k\}$ и $\{\tilde{z}_k\} \in L$ $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} S_n(f)$, где $\Delta z = \max |\Delta z_k| \Rightarrow$ его наз. интегралом от ф-ии $f(z)$ комплексного переменного по

кривой $L \subset \mathbb{C}$ и обозначают $\int f(z) dz$

Таким образом $\int f(z) dz = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{z}_{k+1}) \cdot \Delta z_{k+1}$

Кривая L - путь интегрирования

Свойства:

Пусть $f(z), f_m(z)$ - непрерывные ф-ии, а L, L_k - кусочно-гладкие кривые.

Тогда:

1) Линейность. $\int_L \sum_{m=1}^N \lambda_m f_m(z) dz = \sum_{m=1}^N \lambda_m \int_L f_m(z) dz$

2) Аддитивность. if $L = \bigcup_{k=1}^m L_k$ и дуги L_k, L_{k+1} имеют лишь одну общую точку $\forall k = 1, m-1 \Rightarrow \int_L f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{L_k} f(z) dz$

3) Ориентированность. if дуги L и L^* отличаются лишь направлением обхода $\Rightarrow \int_L f(z) dz = - \int_{L^*} f(z) dz$

4) Оценка интеграла. * $|\int f(z) dz| \leq \int |f(z)| dz$
* if $|f(z)| < N \quad \forall z \in L$ и длина L дуги L равна $m(L) \Rightarrow \int_L |f(z) dz| \leq N \cdot m(L)$

теор. Коши для односвяз. области + следствие

(19) Сформулировать и доказать теорему Коши для односвязной области и следствие из нее.

Теор. (Коши для односвязной области)
 if ф-ия $f(z)$ является аналитической в односвязной области $G \cup \Gamma_G \subset \mathbb{C}$ и Γ_G - кусочно-гладкий замкнутый контур $\Rightarrow \oint_{\Gamma_G} f(z) dz = 0$

Док-во: Пусть, дополнительно, $f'(z)$ непрерывна в $G \cup \Gamma_G$
 и $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Тогда

$$\oint_{\Gamma_G} f(z) dz = \oint_{\Gamma_G} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \oint_{\Gamma_G} v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

Т.к. $f(z)$ аналитическая в замкнутой односвязной области $G \cup \Gamma_G$, то $\forall z \in (G \cup \Gamma_G)$ выполнены условия Коши-Римана: $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right) \wedge \left(\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

Выполнение условия $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ обеспечивает равенство нулю криволинейного интеграла $\oint v dx + u dy$, а условие $\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$ - криволинейного интеграла $\oint u dx - v dy$. Таким образом $\oint_{\Gamma_G} f(z) dz = \oint_{\Gamma_G} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \oint_{\Gamma_G} v(x, y) dx + u(x, y) dy = 0$ ■

Следствие: if в условии теор. Коши $G \subset \mathbb{C}$ - двусвязная область, ограниченная внешним контуром J , то $\oint_L f(z) dz = \oint_J f(z) dz$

Док-во:



Разрезом АВ превращаем исходную область в односвязную. В силу свойства аддитивности и ориентированности интеграла от ф-ии комплексного переменного по теор. Коши получаем $0 = \oint_L f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz + \oint_J f(z) dz$
 $\Rightarrow \oint_{AB} f(z) dz = \oint_L f(z) dz + \oint_J f(z) dz$

Следствие (продолж.)

Следствие.

if в условиях теор. Коши $G \subset \mathbb{C}$ - связная область, ограниченная внешним L и внутренним $\{L_k\}_{k=1}^n$ кусочно-гладкими замкнутыми контурами $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} f(z) dz$$

Следствие.

if $f(z)$ - аналитическая ф-ия в некоторой связной области $D \Rightarrow$ для $\forall$ точек $A, B \in D$ значение $\int_{\gamma_{AB}} f(z) dz$ не зависит от кривой $\gamma_{AB} \subset D$, соединяющей точки A и B , а зависит только от положения начальной A и конечной B точек.

20) Сформулировать и доказать теорему об интегральной формуле Коши.

Теор. (об интегральной формуле Коши)
 Пусть $f(z)$ - аналитическая гр-ия в односвязной области G и на Γ_G . Тогда для $\forall$ точки $z_0 \in G$ верно:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Док-во:

Пусть гр-ия $f(z)$ является аналитической в односвязной области $G \cup \Gamma_G$, ограниченной кусочно-заданным замкнутым контуром Γ_G и z_0 является внутренней точкой области G . Тогда $\exists r > 0$: $r \triangleq \{z: |z - z_0| = r\} \subset G$. В этом случае гр-ия $\frac{f(z)}{z - z_0}$ является аналитической в двухсвязной области, ограниченной контурами Γ_G и r . Поэтому, согласно следствию из теор. Коши имеем:
$$\oint_{\Gamma_G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = - \oint_r \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_r \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (1)$$

Из аналитичности функции $f(z)$ во всех точках $G \cup \Gamma_G$ следует ее непрерывность во всех точках круга $K_r \triangleq \{z: |z - z_0| \leq r\} \subset G$. Тогда $(\forall \varepsilon > 0)(\exists r > 0): (|z - z_0| = r) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Следовательно
$$\left| \oint_r \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_r \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \oint_r \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \max_{z \in r} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \cdot m(r) < \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \varepsilon \quad (2)$$

Поскольку $\oint_r \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_r \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$ - не зависит от ε , то, согласно (1), неравенство (2) может быть представлено в виде:

$$\left| \oint_{\Gamma_G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < \varepsilon$$
, т.е. разность является бесконечно малой, а т.к. все входящие величины не зависят ни от $\varepsilon > 0$ ни от $r > 0$, то разность будет постоянной, т.е. равной нулю.

Опр. аналитичности; бесконечная дифф-еб аналит. ф-ии. + док-во

② Дать определение аналитичности функции комплексного переменного в области и в точке. Доказать бесконечную дифференцируемость аналитической функции.

Опр. 1) ф-ия $w = f(z)$ дифференцируема не только в точке z области G ее определения, но и в некоторой ее окрестности $\Rightarrow$ эту ф-ию наз. аналитической в этой точке.
 2) ф-ия является аналитической в каждой точке области G , $G_1 \subset G \Rightarrow$ ее наз. аналитической в этой области.

Теор. 1 о бесконечной дифференцируемости аналитической функции. Аналитическая в окрестности $U(z_0)$ точки z_0 функция $f(z)$ имеет в этой точке производную n порядка n , причем $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, где $\Gamma \subset U(z_0)$ — простой кусочно-линейный контур, охватывающий точку z_0 .

Док-во: Т.к. $f(z)$ аналитична в односвязной области $G \cup \Gamma$ и $z_0 \in G \subset U(z_0)$ — внутренняя точка, то $\forall \Delta z: |\Delta z| < \min_{z \in \Gamma} |z - z_0|$ имеем:
$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left\{ \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0 - \Delta z} - \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}$$

Можно показать, что в силу непрерывности $f(z)$ на Γ , верно

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}$$

Таким образом $f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned} \frac{f'(z_0 + \Delta z) - f'(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left\{ \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)^2} - \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2} \right\} = \\ &= \frac{1!}{2\pi i \Delta z} \oint_{\Gamma} \frac{(z - z_0)^2 - (z - z_0)^2 + 2\Delta z(z - z_0) - \Delta z^2}{(z - z_0 - \Delta z)^3 (z - z_0)^2} f(z) dz \end{aligned}$$

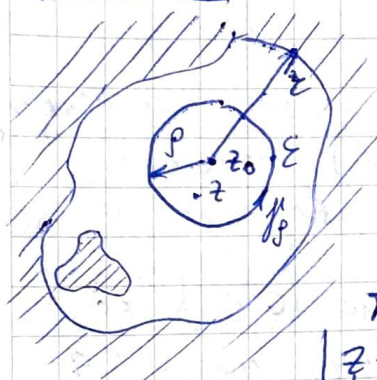
Таким образом $f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3}$ и т.д.

22) Доказать теорему Тейлора для функции $f(z)$, аналитической в области G .

Теор. (Тейлора)

Пусть ф-ия $f(z)$ является аналитической в области $G \subset \mathbb{C}$. If z_0 - внутренняя точка G и $\rho = \min_{z \in G} |z - z_0| > 0$ в круге $K_\rho = \{z, |z - z_0| \leq \rho < \infty\} \subset G$ ф-ия $f(z)$ представима в виде суммы степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, $|z - z_0| < \rho$

Док-во:



Пусть $\Gamma \triangleq \{ \varepsilon : |\varepsilon - z_0| = \rho < \infty \}$ - граница круга $K_\rho \subset G$ и z - внутренняя точка круга K_r , т.е. $|z - z_0| < \rho$, $\varepsilon \in \Gamma$. Тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - z}$

Преобразуем $\frac{1}{\varepsilon - z}$: $\frac{1}{\varepsilon - z} = \frac{1}{(\varepsilon - z_0)(z - z_0)} = \frac{1}{\varepsilon - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\varepsilon - z_0}}$

Т.к. при фиксированном z верно $\left| \frac{z - z_0}{\varepsilon - z_0} \right| < 1$, то $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\varepsilon - z_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\varepsilon - z_0}}$, где $q = \frac{z - z_0}{\varepsilon - z_0} < 1$.

Таким образом, при $\varepsilon \in \Gamma$ функциональный ряд $\frac{1}{\varepsilon - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\varepsilon - z_0)^{k+1}}$ имеет мажоранту $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{\rho}$ и, следовательно, по признаку Вейерштресса он сходится на Γ равномерно.

Следовательно, функциональный ряд $\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon - z} = \sum_{k=0}^{\infty} f(\varepsilon) \frac{(z - z_0)^k}{(\varepsilon - z_0)^{k+1}}$ также сходится равномерно.

Тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\varepsilon - z_0)^{k+1}} d\varepsilon =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{(\varepsilon - z_0)^{k+1}} \right) (z - z_0)^k$$

Таким образом, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$; $C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{(\varepsilon - z_0)^{k+1}} =$

$$= \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) \quad \forall k \geq 0$$

При этом $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ не зависит от z $\blacksquare$

классификация конеч. изолир особых ($\cdot$); теор. Лорана и дост. усл. устр. осад. точки + док-во.

(23) Классификация конечных изолированных особых точек аналитической функции. Доказать необходимое и достаточное условие устранимой особой точки, полюса порядка n . Доказать теорему о виде ряда Лорана в окрестности полюса n -ого порядка.

Опр. (классификация конечных изолированных особых точек).

Изолированную особую точку $z_0 \neq \infty$ ф-ии $f(z)$ наз.:

1) устранимой особой точкой (или правильной)

$$\text{if } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq \infty$$

2) полюсом

$$\text{if } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

3) существенно особой точкой

if $\nexists$ ни конечного, ни бесконечного предела ф-ии $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ ($\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$)

Теор. (необходимое и достаточное условие устранимой особой точки)

Пусть $f(z)$ является аналитической в кольце $K = \{z: 0 < |z - z_0| < r\}$. Точка $z_0 \neq \infty$ - устранимая особая точка $f(z)$ тогда и только тогда, когда $\exists$ окрестность точки z_0 , в которой $|f(z)| < M < \infty$

Док-во:

Пусть $z_0 \neq \infty$ - устранимая особая точка. Тогда $f(z)$ можно доопределить в точке z_0 конечным числом так, что $f(z)$ становится аналитической в круге $D = \{z: |z - z_0| < r\}$ и, как следствие, ограниченной в D .

Пусть теперь $|f(z)| < M$ в $D: \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Тогда в кольце $K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ имеем разложение в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k, \text{ где } C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_1\} \subset D$$

$$|C_k| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|f(\xi)| |d\xi|}{|\xi - z_0|^{k+1}} < \frac{M}{2\pi r_1^{k+1}} \oint_{\gamma} |d\xi| = \frac{M}{2\pi r_1^{k+1}} \cdot 2\pi r_1 = \frac{M}{r_1^k}$$

if $k < 0$ и $r_1 \rightarrow 0 \Rightarrow C_k = 0$ и мы получаем разложение Тейлора:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k, \text{ т.е. } f'(z_0) = C_0$$

Теор. необход. и дост. услов. полюса пор. m - док-во;
 Теор. о виде ряда Лорана в окр-ти полюса m пор. m - док-во.

Теор. (необходимое и достаточное условие полюса пор. m)

Углованная особая точка $z_0 \neq \infty$ однозначной аналитической ф-ии $f(z)$ является для нее полюсом порядка m тогда и только тогда, когда $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) = b$ и $0 < |b| < \infty$

Док-во:

Пусть $z_0 \neq \infty$ - полюс порядка m для $f(z)$, т.е. нуль порядка m для $F(z) \triangleq \frac{1}{f(z)}$. В этом случае $\exists$ аналитическая ф-ия $\varphi(z)$ такая, что $F(z) \triangleq \frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \cdot \varphi(z)$ и $\varphi(z_0) \neq 0$ и $\varphi(z_0) \neq \infty$. Но тогда $(z-z_0)^m f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ и $\frac{1}{\varphi(z_0)} = b$, где $0 < |b| < \infty$

Пусть $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) = b$ и $0 < |b| < \infty$. Тогда если $\varphi(z) \triangleq (z-z_0)^m f(z)$, то $\varphi(z)$ - аналитична в кольце $\{z: 0 < |z-z_0| < \delta\}$, а $z_0 \neq \infty$ - устранимая для $\varphi(z)$ в силу $\exists$ конечного предела. В круге $\{z \in \mathbb{C}: |z-z_0| < \delta\}$ ф-ия $\frac{1}{\varphi(z)}$ - аналитическая и $\frac{1}{\varphi(z_0)} = \frac{1}{b}$, где $0 < |b| < \infty$, т.е. $\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \frac{1}{\varphi(z)}$ и точка z_0 - нуль порядка m для $\frac{1}{f(z)}$. ■

Теор. (о виде ряда Лорана в окрестности полюса m порядка m)

Углованная особая точка $z_0 \neq \infty$ аналитической ф-ии $f(z)$ является полюсом порядка m тогда и только тогда, когда $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$ и $C_{-m} \neq 0$

Док-во:

Пусть $z_0 \neq \infty$ - полюс порядка m для $f(z)$, т.е. $\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Тогда $\frac{1}{\varphi(z)}$ - аналитическая и $\frac{1}{\varphi(z_0)} \notin \{0; \infty\}$ и по теор. Тейлора $\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ и $c_{-m} = a_0 \neq 0$

Пусть $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ и $c_{-m} \neq 0$, т.е. $f(z) = (z-z_0)^{-m} \{c_{-m} + c_{-m+1} \cdot (z-z_0) + \dots\} = (z-z_0)^{-m} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}$, где $\frac{1}{\varphi(z)} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} c_{-m+k} (z-z_0)^k$ - аналитическая и $\frac{1}{\varphi(z_0)} = c_{-m} \neq 0$

Тогда $\frac{1}{\varphi(z)} = (z-z_0)^m f(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая и $\varphi(z_0) = \frac{1}{c_{-m}}$, т.е. z_0 - нуль порядка m для $\frac{1}{f(z)}$ и полюс порядка m для $f(z)$. ■

Изолир. особая (.) z_0 : классификация бесконеч. удален.
изолир. особ. (.) ; вид ряда Лорана в их окрест-ти.

(24) Определение изолированной особой точки $z_0 = \infty$ аналитической функции. Классификация бесконечно удаленных изолированных особых точек аналитических функций и вид ряда Лорана в окрестности этих точек.

Опр. Бесконечно удаленную точку $z_0 = \infty$ наз. изолированной особой точкой однозначной аналитической ф-ии $f(z)$, if $\exists$ ее окрестность $B_N = \{z \in \mathbb{C} : |z| > N\}$, которая не содержит других особых точек.

Опр. (классификация бесконечно удаленных изолированных особых точек)

Изолированную особую точку $z_0 = \infty$ ф-ии $f(z)$ наз.:

1) устраняемой особой точкой (или правильной)
if $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \neq \infty$

2) полосой
if $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$

3) существенно особой
ф-ии $f(z)$ if $\nexists$ ни конечного, ни бесконечного предела при $z \rightarrow \infty$ ($\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$)

Опр. Лорановское разложение аналитической ф-ии $f(z)$, сходящееся всюду в B_N , за исключением, быть может, самой точки $z_0 = \infty$, наз. разложением $f(z)$ в окрестности $z_0 = \infty$:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in B_N$$

Вычет ф-ии комплекс. перем. в ее изолир. особой (1);
связь вычета с разложением в ряд Лорана

(25) Определение вычета функции комплексного переменного в ее изолированной особой точке (в том числе и бесконечно удаленной). Связь вычета с разложением в ряд Лорана в окрестности данной точки. Вывод формулы для вычисления вычета в полюсе порядка m .

Опр. if $z_0 \neq \infty$ - точка аналитичности или изолированная особая точка однозначной аналитической ф-ии $f(z)$ и L - замкнутый контур, охватывающий точку z_0 так, что на самом контуре L и всюду внутри него, за исключением, быть может, самой точки z_0 , ф-ия $f(z)$ является аналитической $\Rightarrow$ вычетом, $f(z)$ относительно точки z_0 наз. число $\text{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz$

Опр. Вычетом Res однозначной аналитической ф-ии $f(z)$ относительно бесконечно удаленной точки $z_0 = \infty$, являющейся изолированной особой точкой ф-ии $f(z)$ наз. число $\text{Res}_{z=\infty} f(z) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} f(z) dz$, где $N > 0$ столь велико, что в кольце $\Gamma_N = \{z \in \mathbb{C} : N < |z| < \infty\}$ ф-ия $f(z)$ является аналитической. При этом обход контура интегрирования - стандартный, т.е. область Γ_N остается слева.

К (1):

Замечание.

if z_0 - изолированная особая точка однозначной аналитической ф-ии $f(z) \Rightarrow \text{Res}_{z_0} f(z) = C_{-1}$, где C_{-1} - коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в Лорановском разложении ф-ии $f(z)$ в окрестности точки $z_0 \neq \infty$

К (2):

Теор. (вычет в бесконечно удаленной точке)

Вычет ф-ии $f(z)$ в бесконечно удаленной точке равен коэффициенту C_{-1} Лорановского разложения ф-ии $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$, взятому с обратным знаком, т.е. $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$

Док-во связи вычета и разлож. в ряд Лорана;
вывод ф-лы для вычисл. вычета в полюсе m порядка

Док-во. В области $B_N = \{z \in \mathbb{C} : N < |z| < \infty\}$ ф-ию $f(z)$ можно представить Лорановским разложением, коэф-циент C_{-1} которого находится по формуле: $C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=N} f(z) dz$.
Учитывая, что $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=N} f(z) dz$, получим, что $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$ ■

Вывод формулы для вычисления вычета в полюсе порядка m

Замечание к (1).

if $z_0 \neq \infty$ - полюс m -ого порядка однозначной аналитической ф-ии $f(z) \Rightarrow$ в проколотой окрестности z_0 имеет место разложение:

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k \quad \wedge C_{-m} \neq 0$$

Тогда для ф-ии $(z-z_0)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^{k+m}$ точка z_0 является устранимой особой точкой.

Тогда $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z) = (m-1)! C_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot \dots \cdot (k+2) C_k (z-z_0)^{k+1}$

Следовательно $\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{ (z-z_0)^m f(z) \}$

if $m=1$, т.е. z_0 - полюс 1-ого порядка $\Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \{ (z-z_0) f(z) \}$

теор Коши о вычетах т.д. - во; теор о Σ вычетов т.д. - во

(26) Сформулировать и доказать теорему Коши о вычетах и теорему о сумме вычетов аналитической функции, имеющей в $\mathbb{C}$ лишь изолированные особые точки.

Теор. (Коши о вычетах)

if $f(z)$ - однозначная аналитическая ф-ия в замкнутой области $G \cup \Gamma_G$, за исключением конечного числа изолированных точек $\{z_k\}_{k=1}^n$, охваченных кусочно-гладким замкнутым контуром $\Gamma_G \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_G} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$

Док-во:

Т.к. для $\forall$ номера $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ точка z_k является внутренней изолированной точкой, то каждую из них можно охватить окружностью L_k столь малого радиуса, чтобы она целиком лежала в $\{G \setminus \Gamma_G\}$ и не имела общих точек с другими окрестностями L_j , где $j \neq k$. Тогда по теор. Коши для многосвязных областей имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_G} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z) \quad \blacksquare$$

Теор. (о сумме вычетов)

if однозначная аналитическая ф-ия $f(z)$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ имеет лишь конечное число изолированных особых точек $z_k, k=1, n \Rightarrow$ сумма всех вычетов этой ф-ии, включая вычет в бесконечно удаленной точке, равна 0, т.е.

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

Док-во:

Пусть L - окрестность $|z|=R$, ориентированная против часовой стрелки, причем все точки $z_k, k=1, n$ лежат внутри L . По теор. Коши о вычетах имеем: $\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$

Поскольку $\oint_L f(z) dz = - \oint_{L'} f(z) dz$ и $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \oint_{L'} f(z) dz$, то

$$2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z) = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$$

Логарифм. ф-ия $\text{Ln} z$, ее св-ва, глав. знач-е $\text{Ln} z$;
общ. показат. и степен. ф-ии

24) Определение логарифмической функции $\text{Ln} z$ комплексного переменного z . Свойства $\text{Ln} z$. Главное значение $\text{Ln} z$ логарифмической функции $\text{Ln} z$. Общая показательная и степенная функции.

Опр. Ф-ия $W = \text{Ln} z$ определяется как ф-ия, обратная по отношению к показательной ф-ии $z = e^w$ при $z \neq 0$ ($i \text{Arg} z$)
if $w = u + iv$ и $z = |z| e^{i \text{Arg} z} \neq 0 \Rightarrow z = e^w \Leftrightarrow |z| e^{i \text{Arg} z} = e^{(u+iv)} = e^u \cdot e^{iv} \Leftrightarrow (|z| = e^u) \wedge (\text{Arg} z = v)$
Таким образом,
$$\text{Ln} z = \ln |z| + i \text{Arg} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k)$$

Замечание.

Значение логарифма $\text{Ln} z$ определено неоднозначно. Главным значением логарифма наз. значение $\text{Ln} z$ при $k=0$ и обозначается $\text{ln} z$.

Таким образом, $\text{ln} z = \ln |z| + i \arg z$

Свойства:

1) $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln} z_1 + \text{Ln} z_2$
◀ $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \ln |z_1 \cdot z_2| + i \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln \{|z_1| \cdot |z_2|\} + i \{\text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2\} = \ln |z_1| + i \text{Arg} z_1 + \ln |z_2| + i \text{Arg} z_2 = \text{Ln} z_1 + \text{Ln} z_2$ ▶

2) $\text{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Ln} z_1 - \text{Ln} z_2$
◀ $\text{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln \left\{\frac{|z_1|}{|z_2|}\right\} + i (\text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2) = \ln |z_1| + i \text{Arg} z_1 - (\ln |z_2| + i \text{Arg} z_2) = \text{Ln} z_1 - \text{Ln} z_2$

3) $\text{Ln}(z^n) = n \text{Ln} z$
◀ $\text{Ln}(z^n) = \ln |z^n| + i \text{Arg} z^n = n \ln |z| + i (n \text{Arg} z) = n \text{Ln} z$ ▶

4) $\text{Ln}(\sqrt[n]{z}) = \frac{1}{n} \text{Ln} z$
◀ $\text{Ln}(\sqrt[n]{z}) = \ln |\sqrt[n]{z}| + i \text{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \ln |z| + i \left(\frac{1}{n} \text{Arg} z\right) = \frac{1}{n} \text{Ln} z$ ▶

Замечание.

1) Определим возведение комплексного числа в произвольную комплексную степень, как $a^z = e^{z \text{Ln} a}$, $a \neq 0$. При $a \neq 0$ это соотношение определяет обычную показательную ф-ию a^z .

2) Соотношение $z^a = e^{a \text{Ln} z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ определяет обычную степенную функцию.

$\cos z$ и $\sin z$; их св-ва

28) Определение функций $\sin z$ и $\cos z$ комплексного переменного z . Их свойства.

Опр. $\cos z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k}}{(2k)!}$; $\sin z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $|z| < \infty$

- Свойства:
- 1) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ - формулы Эйлера
 - 2) $\cos z$ и $\sin z$ - периодические ф-ии с периодом 2π
 - 3) Для $\cos z$ и $\sin z$ остаются корректными все формулы тригонометрии
 - 4) В $\mathbb{C}$ ф-ии $\cos z$ и $\sin z$ не являются ограниченными.

Док-во:

1) обоснование идентично обоснованию свойства 1 ф-ии e^z (в 29 вопр.)

2) следует из формулы Эйлера и свойства 2 ф-ии (в 29 вопр.)

3) Для примера рассмотрим следующие 2 равенства:

$$1) \sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i} (e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) = \frac{1}{2i} (e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}) = \frac{1}{2i} \times$$

$$\times ((\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) - (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)) =$$

$$= \cos z_1 \cdot \sin z_2 + \sin z_1 \cdot \cos z_2$$

$$2) \cos z_1 \cdot \cos z_2 = \frac{1}{2} (e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \cdot \frac{1}{2} (e^{iz_2} + e^{-iz_2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)}) \right) = \frac{1}{2} (\cos(z_1+z_2) + \cos(z_1-z_2))$$

4) Пусть $x = x + iy$. В этом случае $\cos z = \frac{1}{2} (e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)})$
 $= \frac{1}{2} (e^{-y} \cdot e^{ix} + e^y \cdot e^{-ix}) = \frac{1}{2} (e^{-y} (\cos x + i \sin x) + e^y (\cos x - i \sin x)) = \cosh y \cos x -$
 $i \sinh y \sin x$. Таким образом, $\operatorname{Re} \cos z = \cosh y \cos x$ и $\operatorname{Im} \cos z = -\sinh y \sin x$;
 $\sin z = \frac{1}{2i} (e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) = \frac{1}{2i} (e^{-y} (\cos x + i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x)) =$
 $= \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$ значит $\operatorname{Re} \sin z = \cosh y \sin x$, $\operatorname{Im} \sin z = \sinh y \cos x$.
 Поскольку $\cosh y$ и $\sinh y$ - неограниченные ф-ии, то $|\cos z|$
 и $|\sin z|$ - неограниченны в $\mathbb{C}$

(29) Определение функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного z . Вывести формулы Эйлера. Вывести свойства функции e^z .

Опр. $\cos z$ и $\sin z$ в вопросе (28)

Опр. $e^z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$; $|z| < \infty$

Свойства:

1) if φ - вещественное число $\Rightarrow \cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \cdot \frac{1}{2}$ и $\sin \varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \cdot \frac{1}{2i}$

При $z \equiv i\varphi$ имеем: $e^{i\varphi} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \varphi^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Пологая $z = i(-\varphi)$ получим $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$

Из полученных равенств и следуют искомые представления для $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$

2) e^z - периодическая ф-ия с периодом $2\pi i$
 $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$

3) if $z = x + iy \Rightarrow |e^z| = e^x$ и $\arg e^z = y$; $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$ и $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \{\cos y + i \sin y\}$, откуда и следуют искомые равенства

4) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
 $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^k \cdot z_2^n}{k! n!} =$
 $= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^m \frac{z_1^s \cdot z_2^{m-s}}{s! (m-s)!} =$
 $= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \sum_{s=0}^m \underbrace{\frac{m!}{s! (m-s)!}}_{C_m^s} z_1^s \cdot z_2^{m-s} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^m}{m!} = e^{z_1+z_2}$

30) Постановка и решение задачи о наилучшей аппроксимации. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля (формулировки). Ряд Фурье.

Теор. (о наилучшей аппроксимации)

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированная система ф-ий из $L^2[a; b]$ и $f(x) \in L^2[a; b]$. Тогда $\min_{c_k \in \mathbb{R}} \|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\| = \|f(x) - S_n(x)\| = \|f(x) - \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k(x)\|$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k(x)$ - n -ая частичная сумма ряда Фурье ф-ии $f(x)$ по ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Док-во:

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_n(x)\|^2 &= (f(x) - S_n(x), f(x) - S_n(x)) = (f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)) = \\ &= (f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k (f, \varphi_k) - \sum_{m=1}^n c_m (f, \varphi_m) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n c_k c_m (\varphi_k, \varphi_m) = \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n c_k f_k + \sum_{k=1}^n c_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (f_k^2 - 2c_k f_k + c_k^2) = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 + \sum_{k=1}^n (c_k - f_k)^2. \end{aligned}$$

Тогда $\min_{c_k \in \mathbb{R}} \|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2$, т.е. достигается при $c_k = (f, \varphi_k) = f_k$, $\forall k = \overline{1, n}$.

Теор. (неравенство Бесселя)

Для $\forall$ ф-ии $f(x) \in L^2[a; b]$ и $\forall$ ортонормированной в $L^2[a; b]$ системы ф-ий $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f(x), \varphi_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ сходится. При этом справедливо неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \|f(x)\|^2$.

Теор. (равенство Парсеваля)

Если ортонормированная система ф-ий $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $L^2[a; b]$ $\Rightarrow$ для $\forall f(x) \in L^2[a; b]$ верно равенство Парсеваля: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f(x)\|^2$.

Опр.

В бесконечномерном евклидовом пространстве $L^2[a; b]$ ортонормированной системы ф-ий $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ наз. замкнутой, если $\forall f(x) \in L^2[a; b]$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ такие, что $\|\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

Опр.

Рядом Фурье ф-ии $f(x) \in L^2[a; b]$ по ортонормированной системе ф-ий $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ наз. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$, где $f_k = (f(x), \varphi_k(x))$, $k \in \mathbb{N}$ - коэффициенты Фурье и обозначают $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$. $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k(x)$ - n -ая частичная сумма. Рассмотрим всевозможные $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$. Для фиксированной n необходимо найти $\{c_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}$ такие, что $\rho(f, S_n) = \|f(x) - S_n(x)\| \rightarrow \min_{\{c_k\}}$.

31) Сформулировать теорему Дирихле. Разложение в неполный тригонометрический ряд функций, заданных в интервале $(0; l)$ (разложение по синусам и косинусам). Разложение в тригонометрический ряд функций, заданных на произвольном интервале $(a; b)$.

Теор. (Дирихле)

1) на $\mathbb{R}$ определена ф-ия $f(x)$, такая что:

1) имеет период 2π

2) на $[-\pi; \pi]$ она кусочно-непрерывна, т.е. f может иметь лишь конечное число точек разрыва 1 рода.

3) на $[-\pi; \pi]$ она кусочно-монотонна, т.е. $[-\pi; \pi]$ можно разбить на конечное число участков монотонности

Тогда $y = f(x)$ может быть представлена суммой своего тригонометрического ряда Фурье, который сходится в $\forall$ точке $x \in \mathbb{R}$ и при этом:

1. в каждой точке непрерывной ф-ии $f(x)$ имеет место равенство $Sf(x) = f(x)$

2. в каждой точке разрыва $Sf(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$

3. $Sf(-\pi) = Sf(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$

Разложение в неполный тригонометрический ряд ф-ий (в инт-е $(-\pi; \pi)$)

• Пусть $y = f(x)$ определена на отрезке $[-\pi; \pi] \subset \mathbb{R}$ и удовлетворяет теор. Дирихле. Тогда $f(x) \sim Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, $k \geq 1$. При этом

1) if $f(x)$ - четная ф-ия, т.е. $f(-x) = f(x) \forall x \in [-\pi; \pi]$, $\Rightarrow Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$; $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$, $k \geq 0$

2) if $f(x)$ - нечетная ф-ия, т.е. $f(-x) = -f(x) \forall x \in [-\pi; \pi]$, $\Rightarrow Sf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$; $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$, $k \geq 1$

(в инт-е $(-l; l)$)

• if ф-ия $f(x)$ определена на отрезке $[-l; l]$ и удовлетворяет на нем условиям теор. Дирихле $\Rightarrow$ заменой $x = \frac{lt}{\pi}$ произведем взаимно-однозначное отображение отрезка $[-l; l]$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Ф-ия $\varphi(t) = f(\frac{lt}{\pi}) \equiv f(x)$ определена на отрезке $[-\pi; \pi]$ и удовлетворяет на нем условиям теор. Дирихле

Таким образом, $S\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \Leftrightarrow$

$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{\pi k x}{l}) + b_k \sin(\frac{\pi k x}{l})$

$a_k \geq 0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos(kt) dt = \left| \begin{matrix} t = \frac{\pi x}{l} \\ dt = \frac{\pi}{l} dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos(\frac{\pi k x}{l}) dx$

$$b_k \geq 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin(kt) dt = \left| \begin{matrix} t = \frac{\pi x}{l} \\ dt = \frac{\pi}{l} dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$$

При этом все ранее полученные результаты распространяются и на данный случай.

(на инт-ле $[a; b]$)

• Пусть ф-ия $f(x)$ определена и удовлетворяет условиям теор. Дирихле на отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Тогда $c = (a+b)/2$ - центр, а $l = (b-a)/2$ - полуразмах отрезка $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Тогда $x = \frac{b-a}{2\pi} t + \frac{a+b}{2}$ установили взаимно-однозначное соответствие между отрезками $[a; b]$ и $[-\pi; \pi]$.

Тригонометрическая система $\{1, \cos(\frac{\pi k x}{l}), \sin(\frac{\pi k x}{l})\}_{k=1}^{\infty}$ - является ортогональной на отрезке $[c, c+l]$, $\forall c, l \in \mathbb{R}$.

Таким образом, if $\varphi(t) = f(\frac{b-a}{2\pi} t + \frac{a+b}{2}) = f(x) \Rightarrow$ согласно приведенной выше замечанию (ф-ия $f(x)$ определена на отрезке $[-l; l]$), проводя аналогичные вычисления, получим:

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi k x}{b-a} dx, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi k x}{b-a} dx, \quad k \geq 1$$

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k x}{b-a} + b_k \sin \frac{2\pi k x}{b-a} \right)$$