ПРОГРАММА ПО КУРСУ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
Для подготовки к экзаменам за 3 сем. Для приборных специальностей (2/2)

1. Аксиомы динамики. Инерциальная система отсчета.
2. Дифференциальные уравнения движения точки в векторной форме и в проекциях на декартовы и естественные оси координат.
3. Диф. уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета.
4. Центр масс системы материальных точек. Теорема о движении центра масс.
5. Диф. уравнения поступательного движения механической системы.
6. Теорема об изменении количества движения точки и системы материальных точек в дифференциальной и интегральной формах. Движение точки переменной массы.
7. Уравнение Мещерского. 1-я задача Циолковского.
8. Кинетический момент точки и системы материальных точек относительно центра и оси.
9. Теорема об изменении кинетического момента для точки и системы материальных точек.
10. Диф. уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.
11. Формула для кинетического момента механической системы при сложном движении.
12. Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс
13. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела
14. Элементарная и полная работы силы. Мощность. Работа равнодействующей силы.
15. Работа силы, приложенной к твердому телу, при его различных движениях.
16. Кинетическая энергия точки и механической системы. Теорема Кенига.
17. Теорема об изменении кинетической энергии для точки и системы материальных точек.
18. Потенциальное силовое поле. Силовая функция и потенциальная энергия поля.
19. Вычисление силовых функций однородного поля силы тяжести и линейной силы упругости.
20. Закон сохранения механической энергии.
21. Принцип Даламбера для точки и системы материальных точек.
22. Главный вектор и главный момент сил инерции в общем и частных случаях движения твердого тела.
23. Возможные перемещения точки и механической системы. Принцип возможных перемещений.
24. Связи и их классификация.
25. Общее уравнение динамики.
26. Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы.
27. Обобщенные силы, способы вычисления обобщенных сил.
28. Условия равновесия системы, выраженные в обобщенных силах.
29. Уравнения Лагранжа 2-го рода (вывод).
30. Диф. уравнения малых колебаний механической системы с одной степенью свободы в общем случае.
31. Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы.
32. Затухающие колебания механической системы при наличии вязкого трения.
33. Апериодические затухающие колебания.
34. Вынужденные колебания. Интегрирование дифференциального уравнения. Собственные и вынужденные колебания
35. Основные свойства установившихся вынужденных колебаний. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.
36. Резонанс при наличии и отсутствии вязкого трения.
37. Момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через заданную точку в заданном направлении
38. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции однородных симметричных тел.
39. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.
40. Динамические и кинематические уравнения Эйлера.
41. Основные допущения приближенной теории гироскопа.
42. Особенности движения оси гироскопа. Теорема Резаля. Правило прецессии.
43. Гироскопический момент. Правило Жуковского.

Аксиомы динамики. Инерциальная система отсчета

Аксиома 1 (закон инерции). Существует такая система отсчета, в которой изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.
Такую систему отсчета называют *инерциальной.*
Аксиома 2 (основной закон динамики). **В** инерциальной системе отсчета ускорение материальной точки прямо пропорционально действующей на точку силе (рис. 9.1) и обратно пропорционально массе точки.
Аксиома 3 (закон действия и противодействия). Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей точки, в противоположные стороны.
Аксиома 4 (принцип независимости действия сил). Ускорение материальной точки, находящейся под действием нескольких сил, равно *векторной сумме* ускорений, сообщаемых точке каждой из этих сил в отдельности.
Следствие. Несколько сил, действующих на материальную точку, можно заменить од ной *равнодействующей* силой, равной их векторной сумме, т.е.

Дифференциальные уравнения движения точки в векторной форме и в проекциях на декартовы и естественные оси координат

3.2. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки

Основное уравнение динамики материальной точки

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad \vec{F} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \qquad (1)$$

Сила $\vec{F}$, действующая на точку, может зависеть от положения точки, т.е. от ее радиус-вектора $\vec{r}$, скорости $\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}}$ и времени *t:*

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

10

$$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\,(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \qquad (2)$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на декартовы оси координат.

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Диф. уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета

Основной закон относительного движения материальной точки.

Рассмотрим движение материальной точки относительно неинерциальной системы координат, т.е. относительно системы координат, движущейся произвольным образом относительно неподвижной.

В случае сложного движения точки абсолютное ускорение определяется по теореме Кориолиса:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \qquad (1)$$

где $\bar{a}_e$ - переносное ускорение, $\bar{a}_r$ - относительное ускорение, $\bar{a}_c$ - ускорение Кориолиса.

Умножим равенство (1) на массу движущейся материальной точки:

$$m\bar{a} = m\bar{a}_e + m\bar{a}_r + m\bar{a}_k.$$

Выделим в подученном равенстве слагаемое, характеризующее относительное движение материальной точки

$$m\bar{a}_r = m\bar{a} - m\bar{a}_e - m\bar{a}_c$$

В соответствии со вторым законом Ньютона заменим $m\bar{a} = \bar{F}$, где $\bar{F}$ - равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке.

Введем обозначения: $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$, $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$.

Тогда

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c \qquad (2)$$

Вектор $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ называется переносной силой инерции, вектор $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$ - силой инерции Кориолиса.

Равенство (2) представляет собой основной закон относительного движения материальной точки:

Относительно неинерциальной (подвижной) системы отсчета материальная точка движется так, как будто к ней, кроме действующей силы, приложены переносная сила инерции и сила инерции Кориолиса.

Векторы $\bar{\Phi}_e$ *и* $\bar{\Phi}_c$ можно рассматривать как поправки ко второму закону

Ньютона для материальной точки, движение которой рассматривается относительно неинерциальной системы отсчета.

Частные случаи.

1. Пусть подвижная система отсчета по отношению к инерциальной системе движется поступательно. В этом случае угловая скорость переносного движения $\overline{\omega}_e = 0$, следовательно, будут равняться нулю ускорение Кориолиса и сила инерции Кориолиса: $\overline{a}_c = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r = 0$, $\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}_c = 0$.

Закон относительного движения материальной точки (2) принимает вид:

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{\Phi}_e$$

2. Пусть подвижная система отсчета движется поступательно прямолинейно и равномерно. При таком движении $\overline{a}_e = 0$, следовательно, $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e = 0$. Кроме того, $\overline{\omega}_e = 0$, $\overline{a}_c = 0$, $\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}_c = 0$. Тогда равенство (2) принимает вид:

$$m\overline{a}_r = \overline{F}$$

Следовательно, основной закон относительного движения точки в этом случае совпадает с основным законом движения точки по отношению к

инерциальной системе отсчета. Отсюда вытекает принцип относительности, открытый Галилеем:

Никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное, прямолинейное движение по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета.

Таким образом, все системы отсчета, движущиеся поступательно, равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы, являются инерциальными.

3. Условие относительного равновесия. ***В этом случае*** $\overline{V}_r = 0$ и $\overline{a}_r = 0$, следовательно, $\overline{a}_c = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r = 0$, $\overline{\Phi}_c = -m\,\overline{a}_c = 0$.

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\overline{F} + \overline{\Phi}_e = 0 \qquad (4)$$

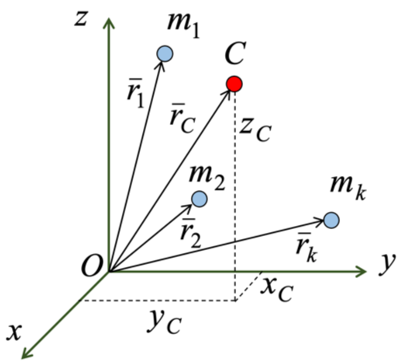
Это уравнение называется уравнением относительного равновесия материальной точки.

Центр масс системы материальных точек. Теорема о движении центр масс

Центр масс механической системы.

МГ
Н.Э.

Движение механической системы зависит не только от действующих сил, но и от ее суммарной массы и распределения масс внутри системы.



Рассмотрим механическую систему, состоящую из точек $M_k(m_k), k = \overline{1,N}$.

Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему:

$$M = \sum m_k$$

Для описания движения системы в целом вводится геометрическая точка, называемой ***центром масс***, радиус-вектор которой определяется выражением:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum \bar{r}_k m_k}{M}.$$

Координаты центра масс:

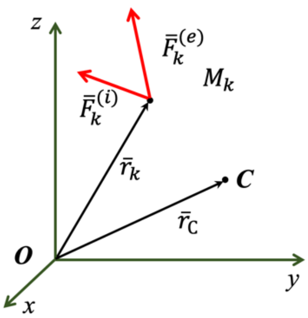
$$x_C = \frac{\sum x_k m_k}{M}; \quad y_C = \frac{\sum y_k m}{M}; \quad z_C = \frac{\sum z_k m_k}{M}.$$

Центр масс является геометрической, а не материальной точкой и может не совпадать ни с одной точкой системы.

Для тела, находящегося в однородном поле тяготения (g=*const*), положения центра тяжести и центра масс совпадают. Однако понятие о центре масс является более общим, чем понятие о центре тяжести и сохраняет свой смысл для тела, находящегося в любом силовом поле, и, как характеристика распределения масс имеет смысл не только для тела, но и для любой механической системы.

Теорема о движении центра масс механической системы.

М ТУ им.
Н.Э. Баумана



$$M_k(m_k), \ k = \overline{1,N}$$

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)}, k = \overline{1,N}$$

Просуммируем данные уравнения по всем точкам системы:

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \cancel{\sum \bar{F}_k^{(i)}} + \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\bar{R}^{(i)} = \sum \bar{F}_k^{(i)} = 0$$

В левой части уравнения поменяем порядок суммирования и дифференцирования:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum m_k \bar{r}_k = \sum \bar{F}_k^{(e)}, \qquad M\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k, \qquad \sum \bar{F}_k^{(e)} = \bar{R}^{(e)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(M\bar{r}_C) = \bar{R}^{(e)}, \qquad \boxed{M\bar{a}_C = \bar{R}^{(e)}}$$ – ***теорема о движении центра масс механической системы***

Центр масс механической системы движется как материальная точка, как бы обладающая массой системы под действием всех внешних сил, действующих на точки системы.

Диф. Уравнения поступательного движения механической системы

Дифференциальные уравнения поступательного движения.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Для описания поступательного движения тела, достаточно задать движение любой одной его точки.
В качестве этой точки в динамике принимается центр масс тела.

Свободное твердое тело при поступательном движении имеет три степени свободы, и его движение можно задать, определив движение центра масс в декартовой системе координат.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)}, \\ m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)}, \\ m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^{(e)}. \end{cases}$$

– дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

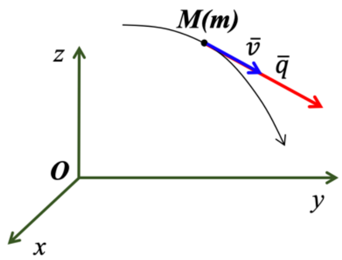
Начальные условия:

$$x_C(0) = x_{C0};\ \ y_C(0) = y_{C0};\ \ \ z_C(0) = z_{C0};$$
$$\dot{x}_C(0) = \dot{x}_{C0};\ \ \dot{y}_C(0) = \dot{y}_{C0};\ \ \ \dot{z}_C(0) = \dot{z}_{C0}.$$

Теорема об изменении количества движения точки и системы материальных точек в дифференциальной и интегральной формах. Движение точки переменной массы

Количество движения точки и механической системы.

Одной из мер движения точки или системы является количество их движения.



Количеством движения материальной точки называется вектор $\bar{q}$, равный произведению массы точки m на ее скорость $\bar{v}$:

$$\bar{q} = m\bar{v}.$$

Проекции на декартовы оси:

$$q_x = m\dot{x}; \quad q_y = m\dot{y}; \quad q_z = m\dot{z}.$$

Количеством движения механической системы называется векторная величина $\bar{Q}$, равная геометрической сумме количеств движения точек системы:

$$\bar{Q} = \sum \bar{q}_k = \sum m_k \bar{v}_k.$$

Вектор $\bar{Q}$ также называют ***главным вектором количеств движения точек*** механической системы.

В отличие от вектора количества движения точки, вектор количества движения системы является ***свободным вектором*** и н имеет точки приложения.

Проекции на декартовы оси:

$$Q_x = \sum m_k \dot{x}_k; \quad Q_y = \sum m_k \dot{y}_k; \quad Q_z = \sum m_k \dot{z}_k.$$

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k = \frac{d}{dt}\sum m_k \bar{r}_k = \frac{d}{dt} M\bar{v}_C.$$

Если система состоит из твердых тел, то:

$$\bar{Q} = \sum \bar{Q}_k = \sum M_k \bar{v}_{Ck}.$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Основное уравнение динамики точки: $m\bar{a} = \bar{F}$

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F}.$$

$\boxed{\dfrac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F}}$ – теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме.

Первая производная по времени от вектора количества движения точки равна равнодействующей активных сил и реакций связей, действующих на точку.

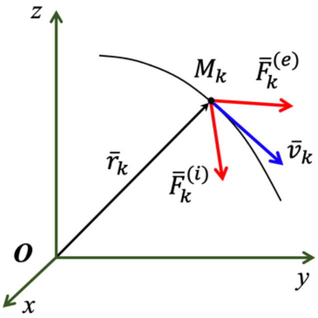
$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F} \;|\cdot dt \quad \Rightarrow \quad d\bar{q} = \bar{F}dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\bar{q} = d\bar{S}}$$

Дифференциал количества движения точки равен элементарному импульсу равнодействующей силы, действующей на точку.

$$\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} d(m\bar{v}) = \int_0^t \bar{F}dt \quad \Rightarrow \boxed{m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}}$$ – теорема об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме.

Изменение количества движения точки за промежуток времени от 0 до t равно полному импульсу равнодействующей силы, действующей на точку за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения механической системы.



$$M_k(m_k),\ k=\overline{1,N}$$

$$\frac{d}{dt}(m_k\bar{v}_k)=\bar{F}_k^{(i)}+\bar{F}_k^{(e)},k=\overline{1,N}$$

Просуммируем данные уравнения по всем точкам системы:

$$\sum\frac{d}{dt}(m_k\bar{v}_k)=\cancel{\sum\bar{F}_k^{(i)}}+\sum\bar{F}_k^{(e)}$$

$$\bar{R}^{(i)}=\sum\bar{F}_k^{(i)}=0$$

В левой части уравнения поменяем порядок суммирования и дифференцирования:

$\frac{d}{dt}\sum m_k\bar{v}_k=\sum\bar{F}_k^{(e)}$, $\boxed{\frac{d\bar{Q}}{dt}=\sum\bar{F}_k^{(e)}=\bar{R}^{(e)}}$ – теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме.

Первая производная по времени от вектора количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на точки этой системы.

Теорема об изменении количества движения механической системы.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

$\boxed{d\bar{Q}=\sum\bar{F}_k^{(e)}dt=\sum d\bar{S}(\bar{F}_k^{(e)})}$ *Дифференциал количества движения механической системы равен сумме элементарных импульсов внешних сил, действующих на точки системы.*

$$\int_{\bar{Q}_0}^{\bar{Q}}d\bar{Q}=\int_0^t\sum\bar{F}_k^{(e)}dt=\sum\int_0^t\bar{F}_k^{(e)}dt=\sum\bar{S}_k^{(e)}$$

$\boxed{\bar{Q}-\bar{Q}_0=\sum\bar{S}_k^{(e)}}$ – теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме.

Изменение количества движения системы за время t равно векторной сумме полных импульсов внешних сил, действующих на точки механической системы за то же время.

Законы сохранения количества движения механической системы.

1. Пусть $\bar{R}^{(e)}=\sum\bar{F}_k^{(e)}=0$.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt}=0;\quad\Rightarrow\quad\bar{Q}=\overline{const}.$$

Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то вектор количества движения системы постоянен.

$Q_x=C_1;\ \ Q_y=C_2;\ \ Q_z=C_3$ – первые интегралы уравнений движения системы.

2. Пусть ${R_x}^{(e)}$ =0. $\frac{dQ_x}{dt}=0\quad\Rightarrow\quad Q_x=const.$

Если проекция главного вектора внешних сил, действующих на точки системы, на какую-либо ось равна нулю, то проекция вектора количества движения системы на ту же ось остается постоянной величиной.

Уравнение Мещерского. 1-я задача Циолковского

7 Уравнение Мещерского.

1-я задача Циолковского.

Тела переменной массы

$$\boxed{M(t)\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm_1}{dt}\cdot(\bar{v}_1-\bar{v}) - \frac{dm_2}{dt}(\bar{v}_2-\bar{v})}$$

$\bar{v}_1-\bar{v}$ – относит. скорость присоединяющ.

$\bar{v}_2-\bar{v}$ – относит. скорость отделяющ. частиц.

1-я з. Циолковского

v_r – относит. скорость отделен.

$$M\frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt}v_r$$

В качестве иллюстрации применения уравнения Мещерского рассмотрим поступательное прямолинейное движение ракеты под действием одной лишь реактивной силы, предполагая, что ракета движется вне поля тяготения и не встречает сопротивления среды. Пусть относительная скорость $\overline{V}_r$ отделения частиц будет постоянна и направлена противоположно скорости ракеты $\overline{V}$ (рис. 47). Определим скорость, достигаемую ракетой по окончании процесса сгорания горючего.

Рис. 47

Составим уравнение движения ракеты, используя уравнение (7.6), которое в рассматриваемом случае ($\overline{F} = 0$) примет вид:

$$M\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{\Phi}_r = \frac{dM}{dt}\overline{V}_r.$$

Проектируя правую и левую части этого уравнения на направление скорости $\overline{V}$ (рис. 47), получим:

$$M\frac{dV}{dt} = -\frac{dM}{dt}V_r$$

или

$$dV = -V_r\frac{dM}{M}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем:

$$V = -V_r \ln M + C, \quad (7.7)$$

где C – постоянная интегрирования.

Пусть в начальный момент (t = 0) масса M = M_0, а скорость $V = V_0$, тогда при t = 0 находим:

$$V_0 = -V_r \ln M_0 + C,$$

отсюда

$$C = V_0 + V_r \ln M_0.$$

Подставляя это значение постоянной в выражение (7.7), получим:

$$V = V_0 + V_r \ln\frac{M_0}{M}. \quad (7.8)$$

Обозначим через $M_к$ постоянную массу корпуса ракеты со всем оборудованием, а через $M_г$ – всю переменную массу горючего. Тогда, очевидно, $M_0 = M_к + M_г$, а масса ракеты, когда все горючее будет израсходовано, будет равна $M_к$. Подставляя эти значения в выражение (7.8), получим:

$$V = V_0 + V_r \ln\left(1 + \frac{M_г}{M_к}\right). \quad (7.9)$$

Соотношение (7.9) представляет собой формулу Циолковского. Она определяет скорость ракеты, когда все ее горючее израсходовано, то есть скорость в конце так называемого активного участка.

Из соотношения (7.9) следует, что скорость ракеты в конце активного участка зависит от:

- начальной скорости ракеты V_0;
- относительной скорости отбрасывания от ракеты частиц – V_r;
- относительного запаса горючего $\frac{M_г}{M_к}$ – числа Циолковского.

При этом скорость ракеты в конце активного участка не зависит от закона расхода топлива.

Из соотношения (7.9) также видно, что для увеличения скорости ракеты необходимо увеличивать $V_0, V_r, \frac{M_г}{M_к}$, причем увеличение V_0 и V_r предпочтительнее, чем увеличение $\frac{M_г}{M_к}$.

При запуске спутников, космических кораблей для увеличения V_0 и числа Циолковского $\frac{M_г}{M_к}$ (за счет уменьшения $M_к$) применяется многоступенчатая ракета, ступени которой по мере израсходования содержащегося в них горючего автоматически отделяются от последней ступени, получающей в результате дополнительную начальную скорость и уменьшение $M_к$. Что касается увеличения V_r и $\frac{M_г}{M_к}$, то оно связано с видом горючего и конструкцией ракеты.

Кинетический момент точки и системы материальных точек относительно центра и оси

8. Кинетический момент точки и системы материальных точек относительно центра и оси.

Кинетический момент (момент количества движения) точки относительно центра O:

$$\bar{k}_O = \bar{M}_O(\bar{q}) = \bar{r} \times \bar{q} = \bar{r} \times m\bar{v}$$

Проекции $\bar{k}_O$ на оси равны кинетическим моментам относительно соответствующих осей:

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \;\; k_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \;\; k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Кинетический момент механической системы относительно центра O:

$$\bar{K}_O = \sum_i \bar{k}_{Oi} = \sum_i \bar{M}_O(\bar{q}_i) = \sum_i \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i$$

Проекции $\bar{K}_O$ на оси равны главным кинетическим моментам относительно соответствующих осей:

$$K_x = \sum_i m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i), \;\; K_y = \sum_i m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i), \;\; K_z = \sum_i m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i)$$

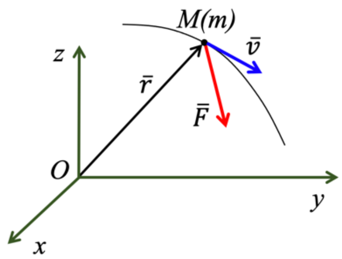
Главный кинетический момент относительно оси вращения при вращательном движении твёрдого тела:

$$K_z = \sum_i M_z(m_i\bar{v}_i) = \sum_i m_i v_{\tau i} h_i = \sum_i \omega_z m_i h_i^2 = \omega_z \sum_i m_i h_i^2 = \omega_z J_z$$

Теорема об изменении кинетического момента для точки и системы материальных точек

Теорема об изменении момента количества движения точки.

МГТУ им. Н.Э. Баумана



Основное уравнение динамики точки: $m\bar{a} = \bar{F}$

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \quad \Big| \ \bar{r}\times$$

$$\bar{r}\times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r}\times\bar{F}$$

$$\bar{r}\times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v}) - \cancel{\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v}}$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v} = \bar{v}\times m\bar{v} = 0; \qquad \frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v}) = \frac{d\bar{k}_o}{dt}; \qquad \bar{r}\times\bar{F} = \bar{M}_o(\bar{F}).$$

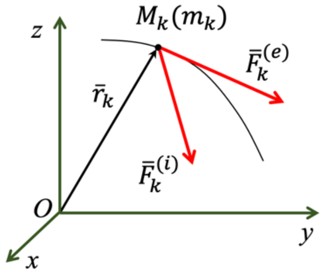
$\boxed{\dfrac{d\bar{k}_o}{dt} = \bar{M}_o(\bar{F})}$ – теорема об изменении кинетического момента точки.

Первая производная по времени от момента количества движения точки относительно центра O равна моменту равнодействующей силы относительно того же центра O.

В проекциях на оси:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\bar{F}); \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\bar{F}); \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\bar{F}).$$

Теорема об изменении момента количества движения механической системы.



Рассмотрим движение механической системы, состоящей из точек M_k, массой m_k, $k = \overline{1, N}$ под действием внешних и внутренних сил.

Для *k*-той точки:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}.$$

Просуммируем данные уравнения по всем точкам системы:

$$\sum \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum \cancel{\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}}; \qquad \bar{L}_O^{(i)} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0.$$

В левой части уравнения поменяем порядок суммирования и дифференцирования:

$$\sum \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \frac{d}{dt} \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \frac{d\bar{K}_O}{dt}$$

$\boxed{\dfrac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{L}_O^{(e)}}$ – теорема об изменении момента количества движения механической системы.

Первая производная по времени от главного момента количеств движения механической системы относительно неподвижного центра O равна главному моменту внешних сил, приложенных к точкам системы, относительно того же центра.

В проекциях на оси: $\dfrac{dK_x}{dt} = L_x^{(e)}; \qquad \dfrac{dK_y}{dt} = L_y^{(e)}; \qquad \dfrac{dK_z}{dt} = L_z^{(e)}.$

Формула для кинетического момента механической системы при сложном движении

Кинетический момент системы при ее сложном движении.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

В абсолютном движении:

$$\bar{K}_O = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum(\bar{r}_C + \bar{\rho}_k) \times m_k(\bar{v}_C + \bar{v}_k^{(r)}) = \sum \bar{r}_C \times m_k \bar{v}_C + \cancel{\sum \bar{r}_C \times m_k \bar{v}_k^{(r)}} + \cancel{\sum \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_C} + \sum \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^{(r)}$$

$$\sum \bar{r}_C \times m_k \bar{v}_C = \bar{r}_C \times M \bar{v}_C$$

$$\sum \bar{r}_C \times m_k \bar{v}_k^{(r)} = \bar{r}_C \times \left(\frac{d}{dt} \sum m_k \bar{\rho}_k\right) = \bar{r}_C \times \left(\frac{d}{dt} M \bar{\rho}_C\right) = 0$$

$$\sum \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_C = \sum(\bar{\rho}_k m_k) \times \bar{v}_C = M \bar{\rho}_C \times \bar{v}_C = 0$$

$$\sum \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^{(r)} = \bar{K}_C^{(r)}$$

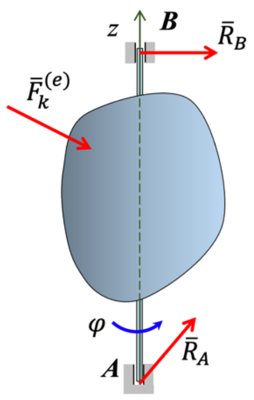
$$\boxed{\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M \bar{v}_C + \bar{K}_C^{(r)} = \bar{M}_O(\bar{Q}_C) + \bar{K}_C^{(r)}}$$

При сложном движении механической системы ее кинетический момент относительно неподвижного центра О для абсолютного движения равен векторной сумме момента вектора количества абсолютного движения системы (приложенного в центре масс) относительно того же центра О, и кинетического момента системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к центру масс.

Диф. уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана



$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right)$$

$$K_z = J_z\omega_z, \quad \omega_z = \dot{\varphi}$$

$$\boxed{J_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right)}$$

– дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Начальные условия: $\varphi(0) = \varphi_0$; $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$.

Частные случаи.

1) Пусть $\sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$

$J_z\ddot{\varphi} = 0, \quad \omega_z = const$ – равномерное вращение по инерции.

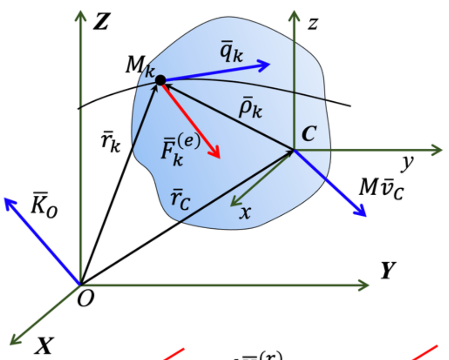
2) Пусть $L_z^{(e)} = const$

$\varepsilon_z = \ddot{\varphi} = \dfrac{L_z^{(e)}}{J_z} = const$ – равнопеременное вращение.

Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс

Теорема об изменении кинетического момента системы для относительного движения по отношению к центру масс.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана



Пусть $Cxyz$ – Кёнигова система отсчета.

В абсолютном движении:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}; \quad \bar{K}_O = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C^{(r)}; \quad \bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{\rho}_k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C^{(r)}\right) = \sum (\bar{r}_C + \bar{\rho}_k) \times \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C^{(r)}\right) = \cancel{\frac{d\bar{r}_C}{dt} \times M\bar{v}_C} + \bar{r}_C \times \frac{d(M\bar{v}_C)}{dt} + \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{r}_C}{dt} \times M\bar{v}_C = \bar{v}_C \times M\bar{v}_C = 0; \qquad \frac{d(M\bar{v}_C)}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\cancel{\bar{r}_C \times \sum \bar{F}_k^{(e)}} + \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \cancel{\bar{r}_C \times \sum \bar{F}_k^{(e)}} + \sum \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)}; \qquad \sum \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)} = \bar{L}_C^{(e)}.$$

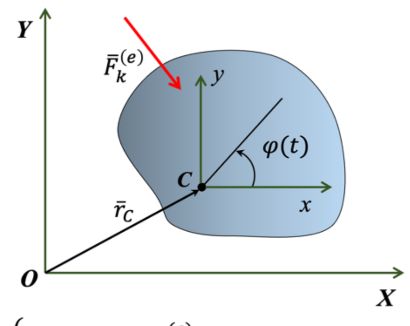
$$\boxed{\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \bar{L}_C^{(e)}}$$

Первая производная по времени от главного момента количеств движения системы, вычисленного относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к центру масс, равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы, относительно центра масс.

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана



Рассмотрим плоское движение твердого тела как сложное по отношению к неподвижной системе координат OXY.

Свяжем подвижную систему координат с центром масс тела.

Поступательное переносное движение описывается теоремой о движении центра масс:

$$m\ddot{\bar{r}}_C = \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

Для относительного движения: $\frac{dK_{Cz}^{(r)}}{dt} = L_{Cz}^{(e)}.$

Т.к. относительное движение вращательное, то: $K_{Cz} = J_{Cz}\omega_z.$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)}, \\ m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)}, \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum M_{Cz}(\bar{F}_k^{(e)}). \end{cases}$$

– *дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.*

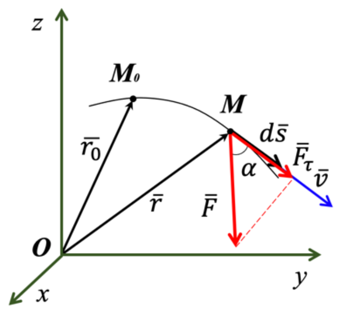
Начальные условия:

$$x_C(0) = x_{C0}; \quad y_C(0) = y_{C0}; \quad \varphi(0) = \varphi_0;$$
$$\dot{x}_C(0) = \dot{x}_{C0}; \quad \dot{y}_C(0) = \dot{y}_{C0}; \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0.$$

Элементарная и полная работы силы. Мощность. Работа равнодействующей силы

Элементарная работа силы.

МГТУ им. Н.Э. Баумана



$$d'A(\bar{F}) = Fds \cdot cos\alpha, \qquad Fcos\alpha = F_\tau$$

$$\boxed{d'A(\bar{F}) = F_\tau ds}$$

Элементарная работа силы *равна произведению элементарного перемещения точки приложения силы на проекцию силы на это перемещение.*

В общем случае элементарная работа не является полным дифференциалом.

$$ds = |d\bar{r}| = dr$$

$$d'A(\bar{F}) = Fdr \cdot cos\alpha \qquad \boxed{d'A(\bar{F}) = \bar{F}d\bar{r}}$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению вектора силы и дифференциала радиус-вектора точки ее приложения.

$$dr = \bar{v}dt, \quad d'A(\bar{F}) = \bar{F}\bar{v}dt = (\bar{F}dt)\bar{v} = d\bar{s}(\bar{F}) \cdot \bar{v} \qquad \boxed{d'A(\bar{F}) = d\bar{s}(\bar{F}) \cdot \bar{v}}$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки ее приложения.

$$\bar{F} = F_x\bar{\imath} + F_y\bar{\jmath} + F_z\bar{k}; \qquad d\bar{r} = dx\bar{\imath} + dy\bar{\jmath} + dz\bar{k};$$

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F}d\bar{r} = F_xdx + F_ydy + F_zdz$$

Полная работа силы.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Полная работа силы $\bar{F}$ на перемещении из положения M_0 в положение M:

$$A(\bar{F}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} d'A_k$$

где $d'A_k$ - работа силы $\bar{F}$ на k-том элементарном перемещении, на которые разбита дуга M_0M.

$$A(\bar{F}) = \int_{M_0}^{M} d'A = \int_{M_0}^{M} F_\tau ds = \int_{M_0}^{M} \bar{F}d\bar{r} = \int_{M_0}^{M} F_xdx + F_ydy + F_zdz = \int_{0}^{t} \bar{F}\bar{v}dt$$

Работа равнодействующей силы.

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N) \sim \bar{R}^*; \qquad \bar{R}^* = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k$$

$$A(\bar{R}^*) = \int_{M_0}^{M} d'A = \int_{M_0}^{M} \bar{R}^*d\bar{r} = \int_{M_0}^{M}\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\,d\bar{r} = \sum_{k=1}^{N}\int_{M_0}^{M}\bar{F}_kd\bar{r} = \sum_{k=1}^{N}A(\bar{F}_k).$$

$$A(\bar{R}^*) = \sum_{k=1}^{N}A(\bar{F}_k).$$

Мощность силы. Работа внутренних сил неизменяемой системы.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Мощностью силы называется отношение элементарной работы силы к элементарному промежутку времени, за который эта работа была совершена.

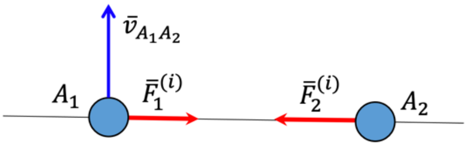
$$W = \frac{d'A(\bar{F})}{dt}; \quad d'A(\bar{F}) = \bar{F}\bar{v}dt \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\bar{F}\bar{v}dt}{dt} = \bar{F}\bar{v}.$$

$$\boxed{W = \bar{F}\bar{v}dt}$$

Неизменяемой называется механическая система, в которой расстояние между каждыми двумя взаимодействующими точками остается во все время движения постоянным (например – абсолютно твердое тело).

Теорема: *Работа внутренних сил неизменяемой системы равна нулю.*

Доказательство:



$$\bar{F}_1^{(i)} = -\bar{F}_2^{(i)}$$

$$d'A\left(\bar{F}_1^{(i)}\right) + d'A(\bar{F}_2^{(i)}) = \bar{F}_1^{(i)}\bar{v}_{A_1}dt + \bar{F}_2^{(i)}\bar{v}_{A_2}dt =$$

$$= \bar{F}_1^{(i)}(\bar{v}_{A_1} - \bar{v}_{A_2})dt = \bar{F}_1^{(i)}\bar{v}_{A_1A_2}dt = 0$$

$$\bar{v}_{A_1} = \bar{v}_{A_2} + \bar{v}_{A_1A_2}$$

$$\bar{v}_{A_1A_2} = \frac{d\overline{A_1A_2}}{dt}; \quad \bar{v}_{A_1A_2} \perp \overline{A_1A_2}; \quad \bar{v}_{A_1A_2} \perp \bar{F}_1^{(i)}$$

$$\sum d'A(\bar{F}_k) = 0$$

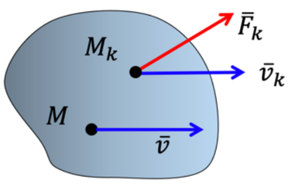
$$\sum A(\bar{F}_k) = 0$$

Работа силы, приложенной к твердому телу, при его различных движениях

Работа силы в частных случаях движения твердого тела.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

1. Поступательное движение.



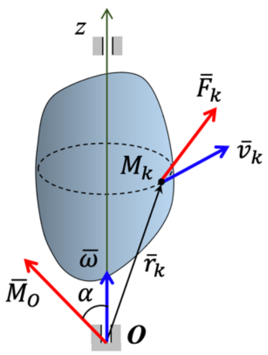
Скорости всех точек одинаковы по модулю и направлению.

$$d'A(\bar{F}_k) = \bar{F}_k\bar{v}_k dt = \bar{F}_k\bar{v}dt = \bar{F}_k d\bar{r}$$

$$\sum d'A_k = \sum \bar{F}_k d\bar{r} = \bar{R}d\bar{r}$$

$$\sum A(\bar{F}_k) = \sum \int_{M_0}^{M} \bar{F}_k d\bar{r} = \int_{M_0}^{M} \sum \bar{F}_k d\bar{r} = \int_{M_0}^{M} \bar{R}d\bar{r}$$

2. Вращательное движение.



$$d'A(\bar{F}_k) = \bar{F}_k\bar{v}_k dt = \bar{F}_k(\bar{\omega}\times\bar{r}_k)dt = \bar{\omega}\,(\bar{r}_k\times\bar{F}_k)dt =$$

$$= \bar{\omega}\,\bar{M}_O(\bar{F}_k)dt = \omega\,|\bar{M}_O(\bar{F}_k)|cos\alpha\,dt = \omega\,M_z(\bar{F}_k)dt =$$

$$= M_z(\bar{F}_k)d\varphi$$

$$\boxed{d'A(\bar{F}_k) = M_z(\bar{F}_k)d\varphi}$$

$$\sum d'A(\bar{F}_k) = \sum M_z(\bar{F}_k)d\varphi = L_z d\varphi$$

$$\sum A(\bar{F}_k) = \sum \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z(\bar{F}_k)d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sum M_z(\bar{F}_k)d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} L_z d\varphi$$

Кинетическая энергия точки и механической системы. Теорема Кенига

Кинетическая энергия. Теорема Кёнига.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

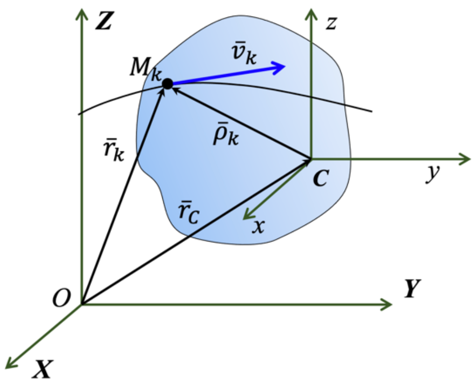
Кинетической энергией материальной точки называется положительная скалярная величина, численно равная:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех точек этой системы:

$$\mathrm{T} = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

Кинетическая энергия механической системы при ее сложном движении. Теорема Кёнига.



OXYZ – неподвижная система отсчета.

Cxyz – Кёнигова система отсчета (имеет начало в центре масс системы и движется поступательно относительно OXYZ).

$$\bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{\rho}_k; \quad \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d\bar{r}_C}{dt} + \frac{d\bar{\rho}_k}{dt};$$

$$\bar{\omega}_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \frac{\tilde{d}\,\bar{\rho}_k}{dt} = \bar{v}_k^{(r)};$$

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_k^{(r)}.$$

Теорема Кёнига.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

$$\mathrm{T} = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k(\bar{v}_C + \bar{v}_k^{(r)})^2}{2} = \sum \frac{m_k v_C^2}{2} + \sum \frac{m_k \bar{v}_k^{(r)^2}}{2} + \sum \frac{m_k}{\cancel{2}} \cancel{2} \bar{v}_C \bar{v}_k^{(r)}$$

$$\sum \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{M v_C^2}{2}$$

$$\sum \frac{m_k \bar{v}_k^{(r)^2}}{2} = T_C^{(r)}$$ – кинетическая энергия относительного движения системы по отношению к центру масс.

$$\sum \frac{m_k}{2} 2\bar{v}_C \bar{v}_k^{(r)} = \bar{v}_C \sum m_k \bar{v}_k^{(r)} = \bar{v}_C \left(\frac{d}{dt} \sum m_k\, \bar{\rho}_k\right) = \bar{v}_C \left(\frac{d}{dt} M \bar{\rho}_C\right) = 0$$

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{M v_C^2}{2} + T_C^{(r)}}$$ ***– теорема Кёнига.***

Кинетическая энергия системы в ее абсолютном движении равна сумме кинетической энергии центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.

Теорема об изменении кинетической энергии для точки и системы материальных точек

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Основное уравнение динамики точки:

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

$$\frac{md\bar{v}}{dt} = \bar{F} \qquad \Big| \cdot \bar{v}$$

$$\frac{m\bar{v}d\bar{v}}{dt} = \bar{F}\bar{v}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\bar{v}; \qquad \boxed{\frac{dT}{dt} = W(\bar{F})}$$

Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности силы, приложенной к точке.

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\bar{v}dt = \bar{F}d\bar{r} = d'A(\bar{F}); \qquad \boxed{dT = d'A(\bar{F})}$$

Дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, приложенной к точке.

$$\int_{v_0}^{v} dT = \int_{M_0}^{M} d'A(\bar{F}); \qquad \boxed{T - T_0 = A(\bar{F})}$$

Изменение кинетической энергии точки на каком-либо перемещении равно работе силы, действующей на точку на том же перемещении.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Для k-ой точки системы: $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \bar{F}_k^{(e)}\bar{v}_k + \bar{F}_k^{(i)}\bar{v}_k; \quad k = \overline{1,N}$

Просуммируем данные уравнения по всем точкам системы: $\sum \frac{d}{dt}\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum \bar{F}_k^{(e)}\bar{v}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)}\bar{v}_k\,;$

$$\sum \frac{d}{dt}\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\sum\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \frac{dT}{dt}; \qquad \boxed{\frac{dT}{dt} = \sum W_k^{(e)} + \sum W_k^{(i)}}$$

Первая производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, действующих на точки системы.

$$dT = \sum \bar{F}_k^{(e)}\bar{v}_k dt + \sum \bar{F}_k^{(i)}\bar{v}_k\, dt = \sum \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k = \sum d'A_k^{(e)} + \sum d'A_k^{(i)} \qquad \boxed{dT = \sum d'A_k^{(e)} + \sum d'A_k^{(i)}}$$

Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на точки системы.

$$\int_{v_0}^{v} dT = \sum \int_{M_0}^{M} \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \sum \int_{M_0}^{M} \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k\,; \qquad \boxed{T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)}}$$

Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил , действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек приложения этих сил.

Потенциальное силовое поле. Силовая функция и потенциальная энергия поля

Потенциальное силовое поле.

Силовое поле – часть в пространства в котором на материальную точку действует сила, зависящая от ее координат и времени:

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z, t).$$

Силовое поле называется ***стационарным***, если сила в явном виде не зависит от времени.

Стационарное силовое поле называется ***потенциальным***, если существует скалярная функция $U(x, y, z)$ такая, что проекции силы $\bar{F}$ на оси декартовой системы координат имеют вид:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

или $\quad \bar{F} = \overline{grad}U;$

$$\overline{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.$$

Функция U называется ***силовой функцией***, а силы действующие в потенциальном поле называются потенциальными силами.

Поскольку для определения проекций силы на оси требуются только частные производные, то силовая функция определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Потенциальная энергия.

Потенциальной энергией материальной точки в рассматриваемой точке потенциального силового поля называется работа, которую совершают силы поля, действующие на материальную точку при перемещении ее из рассматриваемой точки поля в начальную, условно принятую за нулевую.

$$\Pi = A_{MM_0} = \int_M^{M_0} dU = U_0 - U; \quad d'A = dU = -d\Pi; \quad F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z};$$

$$A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из точек M_k, массы m_k, $k = \overline{1, N}$ в стационарном потенциальном поле.

$$U = U(x_k, y_k, z_k); \qquad F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; \quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}$$

$$\sum d'A_k = \sum (F_{kx}dx_k + F_{ky}dy_k + F_{kz}dz_k) = \sum (\frac{\partial U}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k}dz_k) = dU$$

$$\sum A_k = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi$$

Потенциальной энергией потенциального силового поля для механической системы называется сумма работ сил поля при перемещении системы из произвольного положения в начальное положение, условно принятое за ноль.

Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения механической энергии.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)} = \sum A_k$$

При движении системы в стационарном потенциальном силовом поле:

$$\sum A_k = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi$$

Тогда:

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi \quad \text{или} \quad T + \Pi = \Pi_0 + T_0$$

$E = T + \Pi$ – полная механическая энергия системы

$\boxed{E = T + \Pi = const}$ – закон сохранения механической энергии системы.

Полная механическая энергия при движении системы в стационарном потенциальном силовом поле внешних и внутренних сил является постоянной величиной.

Механические системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называются ***консервативными***.

Принцип Даламбера для точки и системы материальных точек

Принцип Даламбера для материальной точки.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Представим основное уравнение динамики несвободной точки в виде:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}$$

где $\bar{F}$ – равнодействующая активных сил; $\bar{R}$ – равнодействующая реакций связей.

Перепишем это уравнение в виде:

$$\bar{F} + \bar{R} - m\bar{a} = 0$$

$\bar{\Phi} = -m\bar{a}$ – ***даламберова сила инерции*** (или просто сила инерции)

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0$$

$(\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi})$ – система сходящихся сил, тогда:

$\boxed{(\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}) \sim 0}$ – принцип Даламбера для материальной точки.

При движении материальной точки в любой момент времени приложенные к ней активные силы, реакции связей и сила инерции образуют систему эквивалентную нулю.

В проекциях на оси Декартовой системы координат:

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0; \quad F_y + R_y + \Phi_y = 0; \quad F_z + R_z + \Phi_z = 0;$$

$$\Phi_x = -m\ddot{x}; \quad \Phi_y = -m\ddot{y}; \quad \Phi_z = -m\ddot{z}.$$

Принцип Даламбера для материальной точки.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

В естественных осях:

$$F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau = 0; \quad F_n + R_n + \Phi_n = 0; \quad F_b + R_b = 0; \qquad \Phi_\tau = -m\frac{dv_\tau}{dt}; \quad \Phi_n = -m\frac{v^2}{\rho}.$$

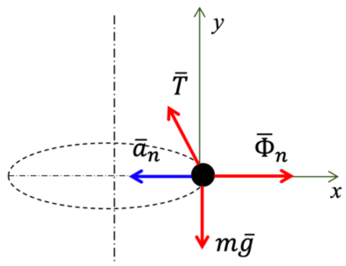
В случае сложного движения точки:

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_r + \bar{\Phi}_к; \qquad \bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e; \quad \bar{\Phi}_r = -m\bar{a}_r; \quad \bar{\Phi}_к = -m\bar{a}_к.$$

Пример:

Груз массы m подвешен на тросе длиной l и движется по круговой траектории в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью. Угол отклонения троса от вертикали равен α. Определить натяжение троса и скорость груза.

Решение:



$$a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad \bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n; \quad \Phi_n = m\frac{v^2}{\rho} = m\frac{v^2}{l\sin\alpha}.$$

$$\sum F_{ky} = 0: \;\; T\cos\alpha - mg = 0 \qquad \Rightarrow \;\; T = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

$$\sum F_{xk} = 0: \;\; -T\sin\alpha + \Phi_n = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha + m\frac{v^2}{l\sin\alpha} = 0.$$

$$v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.$$

Принцип Даламбера для механической системы.

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из точек M_k, массой m_k, $k = \overline{1,N}$.

Для каждой точки системы имеем:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0$$

или

$$\left(\bar{F}_k, \bar{R}_k, \bar{\Phi}_k\right) \sim 0, \qquad k = \overline{1,N}.$$

При движении механической системы в любой момент времени приложенные к каждой точке системы активные силы и реакции связей вместе с силами инерции образуют систему сил эквивалентную нулю.

Представим силы, действующие на точки системы в виде:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = \bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)} + \bar{\Phi}_k = 0$$

Умножим эти уравнения векторно слева на радиус-вектор k-ой точки:

$$\bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)} + \bar{\Phi}_k = 0 \quad \Big| \; \bar{r}_k \times$$

$$\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0$$

Принцип Даламбера для механической системы.

В проекциях на оси декартовой системы координат с центром в точке O, имеем 6 уравнений движения в виде уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx}^{(e)} + \sum \Phi_{kx} = 0;$$

$$\sum F_{ky}^{(e)} + \sum \Phi_{ky} = 0;$$

$$\sum F_{kz}^{(e)} + \sum \Phi_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) + \sum M_x\left(\bar{\Phi}_k\right) = 0;$$

$$\sum M_y\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) + \sum M_y\left(\bar{\Phi}_k\right) = 0;$$

$$\sum M_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) + \sum M_z\left(\bar{\Phi}_k\right) = 0.$$

$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{R}^{(\Phi)}$ – главный вектор сил инерции.

$\sum \bar{M}_O\left(\bar{\Phi}_k\right) = \bar{L}_O^{(\Phi)}$ – главный вектор сил инерции.

Главный вектор и главный момент сил инерции в общем и частных случаях движения твердого тела

Главный вектор и главный момент сил инерции.

Главный вектор сил инерции.

$$\bar{R}^{(\Phi)} = \sum \bar{\Phi}_k = -\sum m_k \bar{a}_k \,; \qquad \bar{a}_k = \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}$$

$$\bar{R}^{(\Phi)} = -\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = -\frac{d^2}{dt^2}\sum m_k \bar{r}_k = -M\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}\right) = -M\frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = -M\bar{a}_C$$

$$\boxed{\bar{R}^{(\Phi)} = -M\bar{a}_C}$$

Главный момент сил инерции относительно произвольного центра.

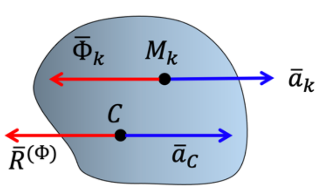
$$\bar{L}_O^{(\Phi)} = \sum \bar{M}_O\left(\bar{\Phi}_k\right) = \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = -\sum \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = -\sum \frac{d}{dt}\left(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k\right) + \sum \left(\cancel{\frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{v}_k}\right) =$$

$$= -\frac{d}{dt}\sum \left(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k\right) = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}$$

$$\boxed{\bar{L}_O^{(\Phi)} = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}}$$

Приведение сил инерции при различных случаях движения тела.

1) Поступательное движение.



Ускорения всех точек одинаковы по модулю и направлению.

$$\bar{a}_k = \bar{a}_C$$

Силы инерции $\bar{\Phi}_k$ образуют систему параллельных сил, которая приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через центр масс тела.

$$\bar{R}^{(\Phi)} = -M\bar{a}_C$$

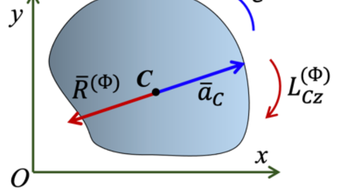
Главный момент сил инерции относительно центра масс равен нулю.

2) Вращательное движение (ось вращения – главная центральная ось).

$\bar{R}^{(\Phi)} = -M\bar{a}_C$; т.к. центр масс расположен на оси вращения, то $\bar{a}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}^{(\Phi)} = 0.$

$$L_{Cz}^{(\Phi)} = -\frac{dK_{Cz}}{dt}; \qquad K_{Cz} = J_{Cz}\omega; \;\; L_{Cz}^{(\Phi)} = -J_{Cz}\frac{d\omega}{dt} = -J_{Cz}\varepsilon.$$

3) Плоское движение.



Пусть плоскость Oxy является плоскостью материальной симметрии. Выберем за центр приведения сил инерции центр масс.

$$\bar{R}^{(\Phi)} = -M\bar{a}_C$$

$$L_{Cz}^{(\Phi)} = -\frac{dK_{Cz}}{dt} = -J_{Cz}\varepsilon$$

Связи и их классификация

Аналитическая механика. Классификация связей.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Аналитическая механика – раздел теоретической механики устанавливающий общие, единые методы изучения движения и равновесия механических систем на основе общих принципов механики (дифференциальных или интегральных).

Связи в аналитической механике рассматриваются как некоторые условия, налагаемые на систему, которые должны удовлетворяться в процессе движения системы. Они содержат соотношения (уравнения или неравенства) между координатами, компонентами скоростей и ускорений и, времени.

Классификация связей.

I. По интегрируемости.

Геометрические – связи, накладывающие ограничения на положение (координаты) точек системы.

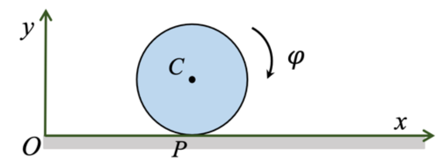
$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0$$

Кинематические – связи, накладывающие ограничения на движение (скорости) точек системы.

$$f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$$

Голономные – все геометрические или интегрируемые в квадратурах к конечному виду кинематические связи.

Например, качение диска без проскальзывания:



$y_C = R$ – геометрическая связь;

$\dot{x}_C = R\dot{\varphi}$ – кинематическая интегрируемая связь;

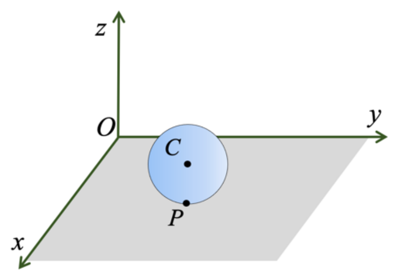
$x_C = R\varphi + C$

Классификация связей.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Неголономные – неинтегрируемые кинематические связи.

Например, качение шара без проскальзывания:



$$z_C = R$$
$$\bar{v}_P = \bar{v}_C + \bar{\omega} \times \overline{CP} = 0$$
$$\dot{x}_C - R\omega_y = 0$$
$$\dot{y}_C + R\omega_x = 0$$
$$\omega_x = \dot{\varphi} sin\theta sin\psi + \dot{\theta} cos\psi;$$
$$\omega_y = -\dot{\varphi} sin\theta cos\psi + \dot{\theta} sin\psi;$$

II. По зависимости от времени.

Склерономные (стационарные) – в уравнение связи в явном виде не входит время.

$$f(x_k, y_k, z_k) = 0$$

Реономные (нестационарные) – в уравнение связи в явном виде входит время.

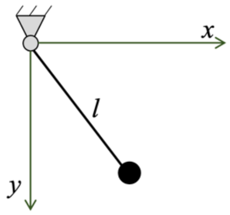
$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0$$

Классификация связей.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

III. По освобождаемости.

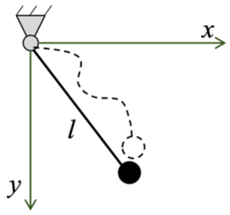
Неосвобождающие (удерживающие или двухсторонние) – описываются уравнением.



Например жесткий стержень.

$x^2 + y^2 = l$

Освобождающие (неудерживающие или односторонние) – выражаются неравенством.



Например нить.

$x^2 + y^2 \leq l$

IV. Идеальные и реальные связи.

25. Связи и их классификация.

Связи – ограничения, которые накладываются на координаты/скорости точек системы.

Механические связи реализуются в виде различных устройств или тел. Аналитически связь описывается уравнением вида $f(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t) = 0, \;\; i \in \mathbb{Z}$.

Идеальные связи – связи, суммарная возможная работа всех реакций которых на любых возможных перемещениях равна нулю ($\sum \bar{R}_i \, \delta\bar{r}_i = 0$).

Голономные связи – связи, которые описываются уравнением вида $f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$. Они накладывают ограничение на координаты точек, то есть на положение системы в пространстве, поэтому их называют **геометрическими**.

Неголономные связи – связи, которые описываются уравнением вида $f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0$. Они накладывают ограничение на координаты точек и на скорости точек, поэтому их называют **кинематическими**.

Стационарные связи – связи, не зависящие от времени в явном виде.

Нестационарные связи – связи, зависящие от времени в явном виде.

Удерживающая (двухсторонняя) связь – связь, которая описывается равенством.

Неудерживающая (односторонняя) связь – связь, которая описывается неравенством.

Возможные перемещения точки и механической системы. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа).

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Для равновесия механической системы, подчиненной идеальным, стационарным и неосвобождающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы, если скорости точек системы в рассматриваемый момент времени равны нулю.

$$\boxed{\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0}$$

Доказательство. 1. Необходимость: есть равновесие системы, доказать, что $\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0$.

Если система находится в равновесии, то для каждой точки системы должно выполняться условие равновесия:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0 \qquad k = \overline{1, N} \quad \Big| \cdot \delta \bar{r}_k, \ \sum$$

$$\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \cancel{\sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k} = 0;$$ Т.к. связи идеальные, то $\sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$

2. Достаточность: если условие $\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0$ выполнено, доказать, что система находится в равновесии.

Пусть хотя бы для одной точки условие равновесия не выполняется:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k \neq 0 \quad \Big| \cdot \delta \bar{r}_k, \ \sum$$ Т.к. связи стационарные, то $\delta \bar{r}_k = d \bar{r}_k$.

$$\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \cancel{\sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k} > 0;$$ Т.к. связи идеальные, то $\sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0$

$\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k > 0.$ Это противоречит условию $\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0 \ \Rightarrow$ система находится в равновесии.

Общее уравнение динамики

Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа).

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из точек M_k, массой m_k, $k = \overline{1,N}$ с наложенными на нее удерживающими связями.

В соответствии с принципом Даламбера, для каждой точки системы выполняется уравнение равновесия:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0 \quad \Big| \cdot \delta\bar{r}_k,\ \Sigma$$

$$\boxed{\sum \bar{F}_k\ \delta\bar{r}_k + \sum \bar{R}_k\ \delta\bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k \delta\bar{r}_k = 0}$$ – общее уравнение динамики

При движении механической системы в любой момент времени сумма работ активных сил, сил реакций связи и сил инерции на любом возможном перемещении из занимаемого положения равна нулю.

$$\sum \bar{F}_k\ \delta\bar{r}_k + \sum \bar{R}_k\ \delta\bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k \delta\bar{r}_k = \sum[(F_{kx} + \Phi_{kx} + R_{kx})\delta x_k + (F_{ky} + \Phi_{ky} + R_{ky})\delta y_k + (F_{kz} + \Phi_{kz} + R_{kz})\delta z_k] = 0$$

$$\Phi_{kx} = -m_k \ddot{x}_k, \qquad \Phi_{ky} = -m_k \ddot{y}_k, \qquad \Phi_{kz} = -m_k \ddot{z}_k$$

$$\sum[(F_{kx} + R_{kx} - m_k \ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} + R_{ky} - m_k \ddot{y}_k)\delta y_k + (F_{kz} + R_{kz} - m_k \ddot{z}_k)\delta z_k] = 0$$

Если связи идеальные, то $\sum \bar{R}_k \delta\bar{r}_k = 0$

$$\boxed{\sum \bar{F}_k\ \delta\bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k \delta\bar{r}_k = 0}$$

Общее уравнение динамики в обобщенных силах.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k)\delta\bar{r}_k = 0$$

Перейдем к обобщенным координатам: $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_i, t)$, $\delta\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$.

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k)\delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k) \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i; \qquad \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i^{(\Phi)}$$ – обобщенная сила инерции.

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i + Q_i^{(\Phi)})\delta q_i = 0.$$

В силу независимости вариаций обобщенных координат:

$$\boxed{Q_i + Q_i^{(\Phi)} = 0, \qquad i = \overline{1,n}}$$ – общее уравнение динамики в обобщенных силах.

Обобщенные силы, способы вычисления обобщенных сил

Обобщенные силы.

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы, с наложенными на нее голономными неосвобождающими связями.

Ее положение в пространстве определяется обобщенными координатами $q_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad \bar{r}_k = \bar{r}_k(q_i, t), \quad k = \overline{1, N}.$

Возможное перемещение k-ой точки: $\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i.$

Рассмотрим возможную работу сил, приложенных к точкам системы:

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

$$\boxed{Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}}$$ – ***обобщенная сила***.

Обобщенной силой, соответствующей i-ой обобщенной координате, называется величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил, действующих на механическую систему.

Размерность обобщенной силы определяется размерностью обобщенной координаты $[Q_i] = \frac{[A]}{[q_i]}$

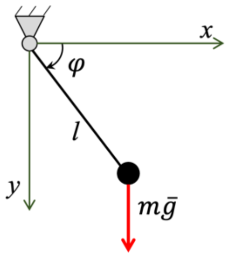
$[q_i] = м \quad \Rightarrow \quad [Q_i] = Н; \qquad [q_i] = рад \quad \Rightarrow \quad [Q_i] = Н{\cdot}м$

Способы вычисления обобщенных сил.

1) Аналитический способ.

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}; \quad \bar{r}_k = x_k \bar{\imath} + y_k \bar{\jmath} + z_k \bar{k}; \quad Q_i = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

Пример. Q_φ – ?



$$Q_\varphi = (mg)_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + (mg)_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$x = l\cos\varphi, \qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -l\sin\varphi$$

$$y = l\sin\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = l\cos\varphi$$

$$(mg)_x = 0, \qquad (mg)_y = mg$$

$$Q_\varphi = mgl\cos\varphi$$

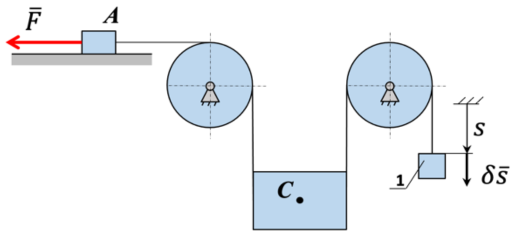
Способы вычисления обобщенных сил.

2) Последовательное вычисление с учетом независимости вариаций обобщенных координат.

Сообщим системе возможное перемещение вида: $(0,0,\dots,\delta q_i,0,\dots,0)$.

$$\sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar F_k)=\left[\sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar F_k)\right]_{q_i}=Q_i\delta q_i;\qquad \Rightarrow\qquad Q_i=\frac{\left[\sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar F_k)\right]_{q_i}}{\delta q_i}.$$

Пример. Определить обобщенные силы Q_s и Q_φ. Масса груза 1 равна m, масса блока 2 равна M, его радиус r. Центр масс блока 2 движется вдоль вертикали, нить по блоку не скользит.



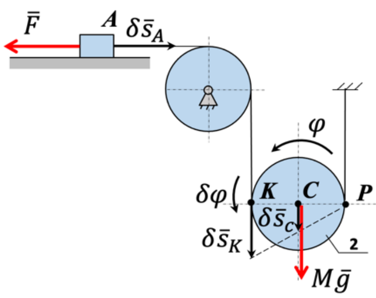
Решение.

1) $Q_s-?$

$\delta\varphi=0;\quad \delta s>0$

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Способы вычисления обобщенных сил.



2) $Q_\varphi-?$

$\delta s=0;\quad \delta\varphi>0$

$\delta s_C=r\delta\varphi,\quad \delta s_K=\delta s_A=2\delta s_C=2r\delta\varphi,$

$$Q_\varphi=\frac{\left[\sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar F_k)\right]_{\varphi}}{\delta\varphi}=\frac{Mg\delta s_C-F\delta s_A}{\delta\varphi}=$$

$$=\frac{Mgr\delta\varphi-F2r\delta\varphi}{\delta\varphi}=(Mg-2F)r$$

3) Случай потенциальных сил.

$$\bar F_k=\frac{\partial U}{\partial x_k}\bar\imath+\frac{\partial U}{\partial y_k}\bar\jmath+\frac{\partial U}{\partial z_k}\bar k$$

$$Q_i=\sum_{k=1}^{N}\bar F_k\frac{\partial\bar r_k}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$U=-\Pi+const;\qquad Q_i=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}$$

Условия равновесия системы, выраженные в обобщенных силах

Условия равновесия механической системы в обобщенных силах.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

В соответствии с принципом возможных перемещений, условия равновесия механической системы имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0$$

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_i, t), \qquad i = \overline{1, n}$$

Выразим возможные перемещения через вариации обобщенных координат: $\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i.$

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0$$

В силу независимости вариаций обобщенных координат:

$$\boxed{Q_i = 0, \qquad i = \overline{1, n}}$$

Для равновесия механической системы, подчиненной голономным удерживающим связям, необходимо и достаточно, чтобы обобщенные силы, соответствующие всем обобщенным координатам системы, были равны нулю.

В случае потенциальных сил:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}; \qquad \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \overline{1, n}}$$

Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы

26 **Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы.**

(Достат. условия устойчив. равновесия системы)

Для 1 степен. свободы

$$\frac{\partial П}{\partial q} = 0$$ – условие равновесия

$$\frac{\partial^2 П}{\partial q^2} > 0$$ – условие устойчивости

в случае нескольких переменных:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$$ – равновесие

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \, \partial q_j} = C_{ij}$$

$$|C_{ij}| = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ & & & \\ C_{n1} & \dots & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}$$

Если $\begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} > 0$

Устойчивое – когда определитель положительный.

Уравнения Лагранжа 2-го рода (вывод)

Тождества Лагранжа.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Пусть система имеет с n степеней свободы, тогда ее положение в пространстве определяется обобщенными координатами q_i, $i = \overline{1, n}$.

Первое тождество Лагранжа.

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}}$$

Доказательство.

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k\big(q_i(t)\big) \qquad i = \overline{1, n}$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \cdot \frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$$

Т. к. $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ и $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$ не зависят от $\dot{q}_i$, то:

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \qquad \text{ч.т.д.}$$

Тождества Лагранжа.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Второе тождество Лагранжа.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}}$$

Доказательство. $\dot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t} \qquad (1)$$

$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = f(q_i(t), \mathrm{t})$ – сложная функция времени.

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t} \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} \qquad \text{ч.т.д.}$$

Уравнения Лагранжа II рода.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Уравнения Лагранжа II рода – дифференциальные уравнения движения несвободной механической системы, составленные в обобщенных координатах.

Рассмотрим механическую систему состоящую из N материальных точек, с наложенными на нее голономными, идеальными, удерживающими связями.

Общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{N}(\bar{F}_k - m_k\ddot{\bar{r}}_k)\delta\bar{r}_k = 0.$$

Пусть система имеет с n степеней свободы, тогда ее положение в пространстве определяется обобщенными координатами q_i, $i = \overline{1,n}$; $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_i, t)$.

Возможное перемещение k-ой точки: $\delta\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i.$

$$\sum_{k=1}^{N}(\bar{F}_k - m_k\ddot{\bar{r}}_k)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{N}m_k\ddot{\bar{r}}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0; \quad \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i.$$

Уравнения Лагранжа II рода.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\ddot{\bar{r}}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d\dot{\bar{r}}_k}{dt}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right) - \dot{\bar{r}}_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right)\right) \boxed{= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{по первому тождеству Лагранжа}\\ \dfrac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot{q}_i} = \dfrac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\end{matrix}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\dot{r}_k^{\,2}}{2}\right)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\dot{r}_k^{\,2}}{2}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_{k-1}^{N}\frac{m_k\dot{r}_k^{\,2}}{2}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)$$

$$\dot{\bar{r}}_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{по второму тождеству Лагранжа}\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \dfrac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}\end{matrix}\right\} = \dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\dot{r}_k^{\,2}}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\dot{r}_k^{\,2}}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k-1}^{N}\frac{m_k\dot{r}_k^{\,2}}{2}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Уравнения Лагранжа II рода.

Тогда уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

Обобщённая координата q_α называется ***циклической***, если она в явном виде не входит в функцию Лагранжа.

Если q_α - циклическая, то: $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$ и уравнение Лагранжа принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = C_\alpha$$ – первый циклический интеграл.

Порядок составления уравнений Лагранжа.

1) Определить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты.

2) Вычислить кинетическую энергию системы в ***абсолютном*** движении и выразить ее через обобщённые координаты и обобщенные скорости.

3) Определить обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам.

4) Вычислить производные от кинетической энергии.

5) Подставить все вычисленные величины в уравнения Лагранжа.

Уравнения Лагранжа II рода.

Общее уравнение динамики принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[Q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0;$$

В силу независимости вариаций обобщенных координат:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = \overline{1,n}}$$ – уравнения Лагранжа II рода.

Уравнения Лагранжа в потенциальном поле.

Если силы, действующие на систему потенциальные, то: $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i};$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}; \qquad L = T - \Pi$$ – функция Лагранжа (кинетический потенциал).

$$\Pi = \Pi(q_i), \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Порядок составления уравнений Лагранжа.

1) Определить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты.

2) Вычислить кинетическую энергию системы в ***абсолютном*** движении и выразить ее через обобщённые координаты и обобщенные скорости.

3) Определить обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам.

4) Вычислить производные от кинетической энергии.

5) Подставить все вычисленные величины в уравнения Лагранжа.

Диф. уравнения малых колебаний механической системы с одной степенью свободы в общем случае

Разделив стороны Д.У. на a получим:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a}Q(t),$$

где $\varepsilon = b/2a$, $\omega^2 = c/a$.

Особенности движения оси гироскопа. Теорема Резаля. Правило прецессии.

42 Особенности движения оси гироскопа. Теорема Резаля. Правило прецессии.

1 Свободный трёхстепенной гироскоп

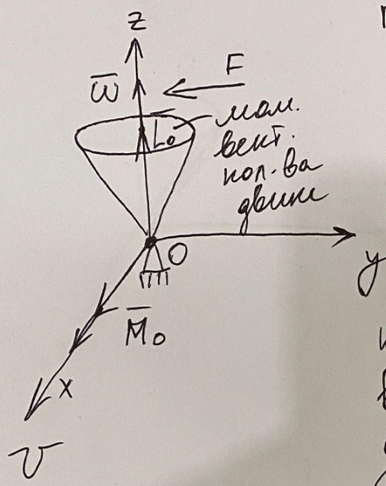
$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{L}_0^{(e)}$$

$$\overline{L}_0^{(e)} = 0 \Rightarrow \overline{K}_0 = \overline{const}$$

Т. к. направление $\overline{K}_0$ и оси гироскопа все время совпадают – ось своб. гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве по отнош. к инерц. сист. отсчета.

Теорему Резаля можно сформулировать так: *при движении механический системы скорость точки, совпадающей с концом вектора кинетического момента при движении по годографу этого вектора, равна по величине и параллельна по направлению главному моменту всех внешних сил системы.* Точка, относительно которой вычисляются кинетический момент системы и главный момент внешних сил, одна и та же.

Гироскоп



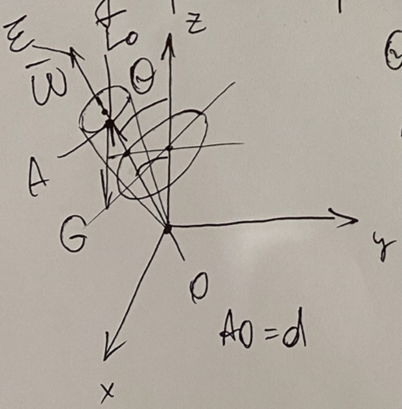
т. об изм. момента кол-ва движ.

$$\boxed{\frac{d\bar{L}_0}{dt}} = \bar{M}_0(\bar{F})$$

отн. т. О

по т. Резаля нечто иное, как скорость ~~вектора~~ конца вектора момента кол-ва движения (кинетический момент)

Регулярная прецессия



AO = d

θ - угол прецессии

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0(\bar{F})$$

$$M_0 = G d \sin\theta = \omega_1 L_0 \sin\theta = \omega_1 \omega J_\xi \sin\theta$$

ω - дано

ω_1 - ?

$$\omega_1 = \frac{Gd}{J_\xi \omega}$$

моменте сил учесть момент силы тяжести.

Сформулируем следующее правило прецессии: *если к вращающемуся вокруг оси гироскопу приложить внешние силы, создающие момент сил относительно его неподвижной точки, то та часть оси гироскопа, по которой направлен кинетический момент, начнет прецессировать в направлении векторного момента этих сил.*

Выведем приближенную формулу для оценки угла прецессии φ

Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы

31. $\ddot{q} + k^2 q = 0$ - свободные колебания

ну $t=0$ $q = \dots$
$\dot{q} = \dots$

32. $\underbrace{\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0}_{\text{3 случая}}$ - св. колеб с трением обоб.

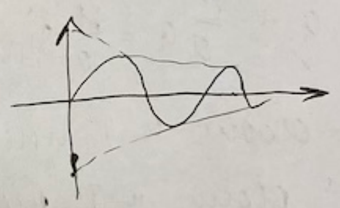
n - коэф затухания [рад/с]

k - собств. част. колеб [рад/с]

1 случай:

$\boxed{n \leq\leq k}$ $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{k^2 - n^2}$

$\sqrt{k^2 - n^2} = k_1$



$q = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$

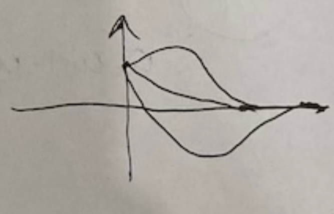
k_1 - частота св затух колеб.

$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}$; $T_1 < T$ - условный период

2 случай: $\boxed{\text{Апериодические}}$

$\boxed{n > k}$ $\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$

$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, $t \to \infty$, $q \to 0$



Апериодические затухающие колебания

31. $\ddot{q} + k^2 q = 0$ - свободные колебания

ну $t=0$ $q = \ldots$

$\dot{q} = \ldots$

32. $\underbrace{\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0}_{\text{3 случая}}$ - св. колеб с трением

обоб.

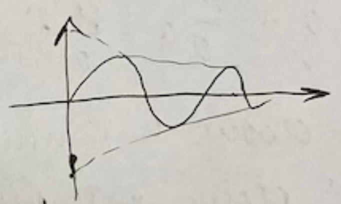
n - коэф затухания [рад/с]

k - собств. част. колеб [рад/с]

1 случай:

$\boxed{n \ll k}$ $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{k^2 - n^2}$

$\sqrt{k^2 - n^2} = k_1$



$q = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$

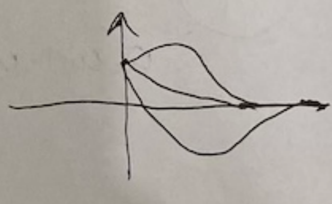
k_1 - частота св. затух колеб.

$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}$; $T_1 < T$ - условный период

2 случай: $\boxed{\text{Апериодические}}$

$\boxed{n > k}$ $\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$

$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, $t \to \infty$, $q \to 0$



3 случай $\boxed{k = n}$ **Апериодические**

$$\lambda_{1,2} = -n$$

$$q = e^{-nt}(C_1 + C_2 t) \quad (1)$$

$$\dot{q} = \ldots\ldots \quad (2)$$

НУ $\rightarrow$ C_1 и C_2

Вынужденные:

$$\ddot{q} + \frac{c}{a} q = \frac{H}{a} \sin(pt + \beta)$$

a - обобщ. к-т инерции

c - обобщ. к-т жесткости

H - амплитуда возм. силы

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin(pt + \beta) \qquad [h] = \frac{м}{с^2}, \frac{рад}{с}$$

h - ~~коэф.~~ ампл. возм. ускорение

$$q = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt - \beta)$$

амплитуда вынужд.

Вынужденные колебания. Интегрирование дифференциального уравнения. Собственные и вынужденные колебания

35. Вынужденные колебания. Интегрирование дифференциального уравнения. Собственные и вынужденные колебания.

Д.У. вынужденных колебаний имеет вид:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t)$$

При гармоническом возбуждении:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_0 \sin(pt + \beta) \qquad \ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(pt + \beta)$$

Решение Д.У. будем искать в виде суммы общего решения ЛОДУ и частного решения НДУ.

Общее решение ЛОДУ:

$q_{o.o} = e^{-\varepsilon t}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t))$ при $\varepsilon < \omega$

$q_{o.o} = e^{-\varepsilon t}(C_1 + C_2 t)$ при $\varepsilon = \omega$

$q_{o.o} = e^{-\varepsilon t}\left(C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}\right)$ при $\varepsilon > \omega$

Приведем ДУ к общему виду

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin pt$$

$h = \frac{b}{2a} = 2$ рад/с ; $k = \sqrt{\frac{c}{a}} \approx 7$ рад/с

$h = \frac{H}{a} = \frac{490}{125} = 3{,}92$;

Основные свойства установившихся вынужденных колебаний. Амплитуд-но- частотная и фазо-частотная характеристики

36. Основные свойства установившихся вынужденных колебаний. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.

Основные свойства установившихся вынужденных колебаний:

1) Это незатухающие колебания, они длятся так долго, как долго действует возмущающая сила;
2) Эти колебания не зависят от начальных условий;
3) При гармоническом возбуждении они происходят с частотой возмущающей силы;
4) Эти колебания отстают по фазе от возмущающей силы н величину γ, изменяющуюся от 0 до π.

Амплитуда D установившихся вынужденных колебаний и сдвиг по фазе γ зависят от соотношения между частотами p и ω и от коэффициента затухания ε. Эти зависимости называются амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристикой.

Введём безразмерный **коэффициент затухания** d:

$$d = 2\varepsilon/\omega$$

Введём **коэффициент расстройки** z:

$$z = p/\omega$$

Разделив числитель и знаменатель амплитуды D на ω^2, получим:

$$D = D_{\text{ст.}}\lambda, \quad D_{\text{ст.}} = \frac{Q_0}{c}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + d^2 z^2}}$$

λ – **коэффициент динамичности** при наличии вязкого сопротивления. Зависимость $\lambda(z)$ – **амплитудно-частотная характеристика**.

Разделив числитель и знаменатель аргумента арктангенса в выражении для γ на ω^2, получим:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\frac{2\varepsilon}{\omega}\frac{p}{\omega}}{1 - p^2/\omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{dz}{1-z^2}\right)$$

Зависимость $\gamma(z)$ – **фазо-частотная характеристика**.

$$\gamma(0) = 0$$
$$\gamma(1) = \pi/2$$
$$\gamma(\infty) = \pi$$

Резонанс при наличии и отсутствии вязкого трения

q_2 – вынужденное колебание системы.

частота p – вынужд. причины

частота k – собств.

Два случая:

1. Отсутствие резонанса $p \neq k$
2. Резонанс $p = k$

1.) $q_2 = D\sin(pt+\beta)$

$$D = \frac{h}{k^2-p^2} \quad ; \quad q_2 = \frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\beta)$$

A и α опред. из начальных условий.

если $p<k$:

$$q_2 = \frac{h}{|k^2-p^2|}\sin(pt+\beta)$$

сдвиг фаз $=0$

если $p>k$:

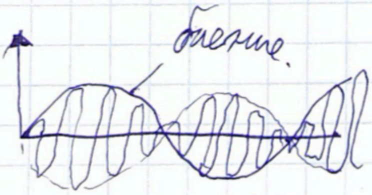
$$q_2 = -\frac{h}{|k^2-p^2|}(\sin(pt+\beta))$$

сдвиг фаз π

2)

$$q(t) = \frac{h}{k^2-p^2}(\cos pt - \cos kt)$$

1. $p \approx k$; $p \neq k$



2. $p = k$; $q(t) = \frac{ht}{2p} t\cos(pt-\frac{\pi}{2})$

Момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через заданную точку в заданном направлении

38. Момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через заданную точку в заданном направлении.

Пусть ось Ol проходит через данную точку O. Выберем прямоугольную ДСК с началом в точке O, с осями которой ось Ol образует углы α, β, γ. Момент инерции механической системы относительно оси Ol:

$$J_l = \sum_i m_i h_i^2$$

Из прямоугольного треугольника OM_iA_i имеем $h_i = r_i \sin(\delta)$. Запишем векторное произведение:

$$\bar{l}_0 \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \\ = \bar{\imath}(z_i \cos(\beta) - y_i \cos(\gamma)) + \bar{\jmath}(x_i \cos(\gamma) - z_i \cos(\alpha)) + \bar{k}(y_i \cos(\alpha) - x_i \cos(\beta))$$

$$\left|\bar{l}_0 \times \bar{r}_i\right|^2 = (1 \cdot r_i \cdot \sin(\delta))^2 = h_i^2 = \\ = (z_i \cos(\beta) - y_i \cos(\gamma))^2 + (x_i \cos(\gamma) - z_i \cos(\alpha))^2 + (y_i \cos(\alpha) - x_i \cos(\beta))^2$$

$$h_i^2 = \left(x_i^2 + y_i^2\right) \cos^2(\gamma) + \left(x_i^2 + z_i^2\right) \cos^2(\beta) + \left(y_i^2 + z_i^2\right) \cos^2(\alpha) - 2x_i y_i \cos(\alpha) \cos(\beta) - \\ - 2x_i z_i \cos(\alpha) \cos(\gamma) - 2y_i z_i \cos(\beta) \cos(\gamma)$$

$$J_l = \cos^2(\alpha) \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) + \cos^2(\beta) \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) + \cos^2(\gamma) \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \\ - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) \sum_i m_i x_i y_i - 2\cos(\alpha)\cos(\gamma) \sum_i m_i x_i z_i - 2\cos(\beta)\cos(\gamma) \sum_i m_i y_i z_i$$

$$\boxed{J_l = J_x \cos^2(\alpha) + J_y \cos^2(\beta) + J_z \cos^2(\gamma) - 2J_{xy} \cos(\alpha)\cos(\beta) - 2J_{xz} \cos(\alpha)\cos(\gamma) - 2J_{yz} \cos(\beta)\cos(\gamma)}$$

J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} – центробежные моменты инерции относительно осей x,y и z соответственно.

Эллипсоид инерции. Главные оси инерции однородных симметричных тел

39. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции однородных симметричных тел.

Эллипсоид инерции – поверхность второго порядка, построенная в любой точке тела – характеризует спектр моментов инерции тела относительно осей, проходящих через эту точку. Для построения этой поверхности на каждой оси Ol, проходящей через точку O, откладывают от этой точки отрезок $OK = 1/\sqrt{J_l}$.

Геометрическое место концов отрезков OK (точек K) и является эллипсоидом инерции.

Подставим выражения $\cos(\alpha) = x/OK = \sqrt{J_l}x, \quad \cos(\beta) = y/OK = \sqrt{J_l}y, \quad \cos(\gamma) = z/OK = \sqrt{J_l}z$ в выражение для J_l и получим:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1$$

Получили уравнение центральной поверхности второго порядка. Оси симметрии эллипсоида инерции, построенного в точке твёрдого тела, называются **главными осями инерции** для данной точки тела. Эллипсоид инерции, построенный в центре масс тела, называется **центральным эллипсоидом инерции**. Моменты инерции тела относительно главных осей инерции в точке называются **главными моментами инерции** для этой точки тела.

Если оси координат направить по главным осям эллипсоида инерции (OX, OY, OZ), то его уравнение примет вид:

$$J_X X^2 + J_Y Y^2 + J_Z Z^2 = 1$$

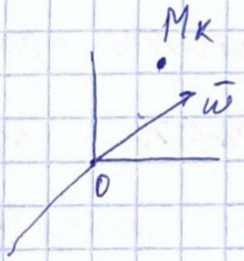
Сравнив это уравнение с каноническим уравнением эллипсоида получим:

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_X}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_Y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_Z}}$$

То есть большей оси эллипсоида инерции соответствует меньший главный момент инерции тела для данной точки.

Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

39 Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки



$$\bar{K}_O = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k$$

$\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k$ – формула Эйлера

$$\bar{v}_k = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \bar{i}\,\underbrace{(\omega_y \cdot z_k - \omega_z \cdot y_k)}_{v_{kx}}$$

$$+ \bar{j}\,\underbrace{(\omega_z x_k - \omega_x z_k)}_{v_{ky}} + \bar{k}\,\underbrace{(\omega_x y_k - \omega_y x_k)}_{v_{kz}}$$

$$\bar{r}_k \times \bar{v}_k = \bar{i}\,(v_{kz} y_k - v_{ky} z_k) + \bar{j}\,(v_{kx} z_k - v_{kz} \cdot x_k)$$

$$+ \bar{k}\,(v_{ky} x_k - v_{kx} y_k)$$

$$K_x = \omega_x J_x - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{xz}$$

Для K_z и K_y – аналогично

$$\boxed{\bar{K}_0 = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k}}$$

$$\bar{K}_0 = J \cdot \bar{\omega}$$

Динамические и кинематические уравнения Эйлера

41. Динамические и кинематические уравнения Эйлера.

Линия узлов – линия пересечения координатных плоскостей Oxy (неподвижная СК) и OXY (подвижная СК).

Углы Эйлера:

Угол прецессии $\boldsymbol{\psi}$ – угол между линией узлов и осью Ox (неподвижная ось). Вращение вокруг Oz (ось прецессии).

Угол нутации $\boldsymbol{\theta}$ – угол между Oz (неподвижная ось) и OZ (подвижна ось). Вращение вокруг линии узлов (ось нутации).

Угол собственного вращения $\boldsymbol{\varphi}$ – угол между линией узлов и осью OX (подвижная ось). Вращение вокруг OZ (ось собственного вращения).

Кинематические уравнения Эйлера:

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin(\theta)\sin(\varphi) + \dot{\theta}\cos(\varphi)$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\sin(\theta)\cos(\varphi) - \dot{\theta}\sin(\varphi)$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos(\theta) + \dot{\varphi}$$

Теорема об изменении главного кинетического момента и теорема об изменении кинетической энергии:

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{L}_O,\ \ \dot{T} = W^{(e,i)}$$

Помимо инерциальной системы отсчёта S_0 с осями Ox, Oy, Oz и ортами $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ введём жёстко связанную с твёрдым телом вспомогательную систему координат S с началом в точке O, осями OX, OY, OZ и ортами $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$. Направим оси системы S не произвольно, а так, чтобы они совпадали с главными осями инерции твёрдого тела в точке O. В таких осях:

$$K_X = A\omega_X,\ \ K_Y = B\omega_Y,\ \ K_Z = C\omega_Z$$

$$T = K_O\omega\cos(\alpha)/2 = (\omega_X K_X + \omega_Y K_Y + \omega_Z K_Z)/2$$

A, B, C – соответствующие осевые моменты инерции тела относительно трёх главных осей инерции.

По формуле Бура:

$$\frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O = \bar{L}_O$$

Спроецировав на оси системы S, получим **динамические уравнения Эйлера**:

$$A\dot{\omega}_X + (C - B)\omega_Y\omega_Z = L_X$$

$$B\dot{\omega}_Y + (A - C)\omega_Z\omega_X = L_Y$$

$$C\dot{\omega}_Z + (B - A)\omega_X\omega_Y = L_Z$$

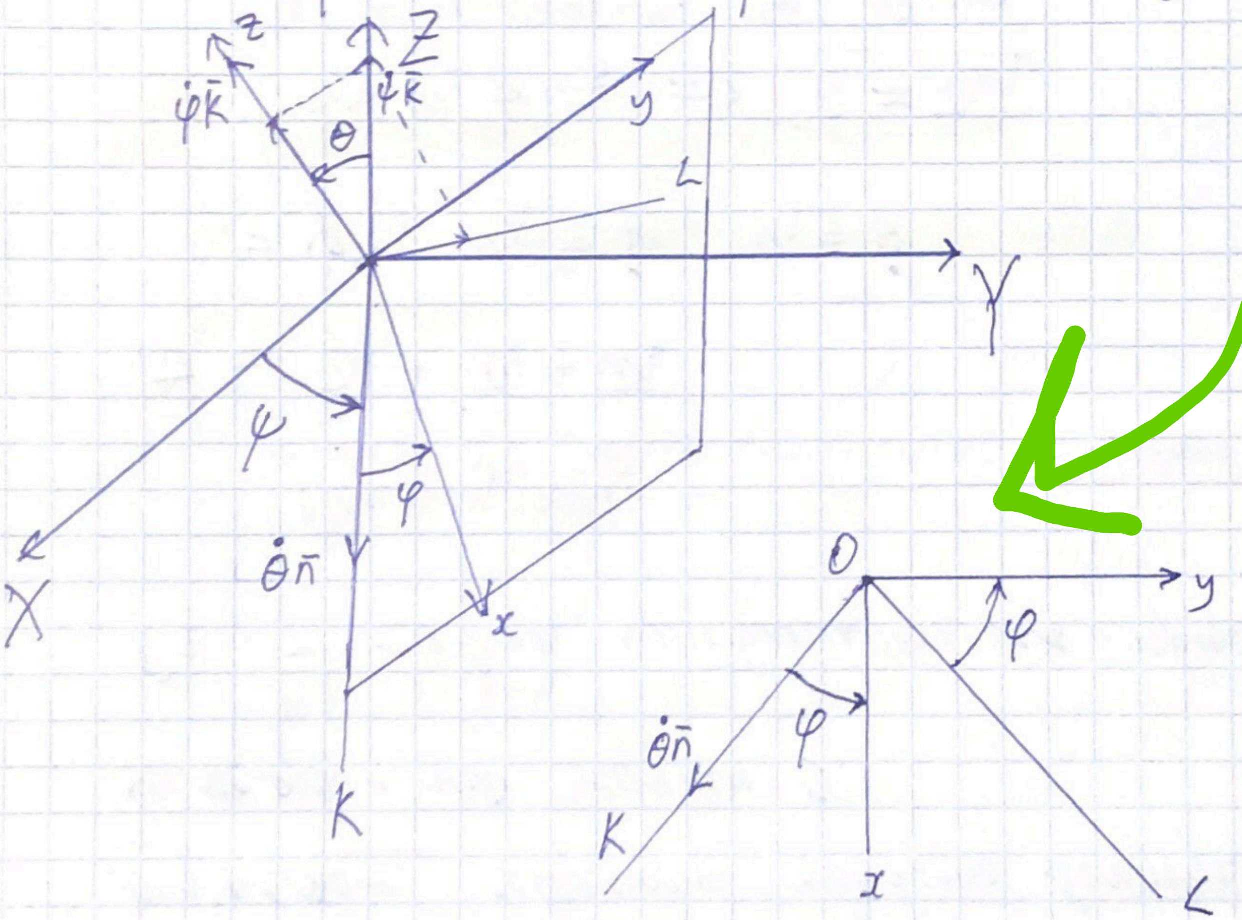
Кинематические уравнения

Эйлера

- ψ – прецессии
- φ – нутации
- θ – собств. вращ.

Получим проекции вектора

$\overline{\omega} = \dot{\varphi}\overline{k} + \dot{\theta}\overline{n} + \dot{\psi}\overline{K}$ на оси $Oxyz$



$$\boxed{\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{aligned}}$$

Основные допущения приближенной теории гироскопа

42. Основные допущения приближенной теории гироскопа.

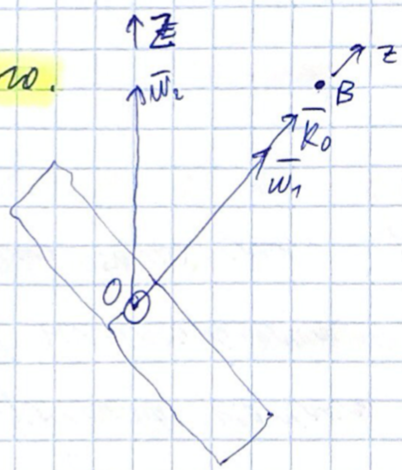
Гироскопом называют симметричное твердое тело, совершающее движение вокруг неподвижной точки O, расположенной на оси симметрии OZ. Ось OZ гироскопа, как ось симметрии, является одновременно его главной центральной осью инерции.

Основные допущения:

1) Угловая скорость ω_Z вращения гироскопа вокруг оси OZ много больше угловой скорости, которую может иметь сама ось OZ при ее повороте вместе с гироскопом вокруг точки: $\omega_Z^2 \gg \omega_X^2 + \omega_Y^2$.
2) Проекция вектора $\overline{\omega}$ на ось постоянна по модулю: $\omega_Z - const$.
3) Модуль проекции вектора $\overline{K}_O$ на ось OZ много больше остальных проекций: $K_Z^2 \gg K_X^2 + K_Y^2$.
4) Вектор $\overline{K}_O$ имеет постоянный модуль, равный его проекции на ось OZ: $K_O = \sqrt{(A\omega_X)^2 + (B\omega_Y)^2 + (C\omega_Z)^2} \approx C\omega_Z = K_Z - cosnt.$
5) Вектор $\overline{K}_O$ направлен по оси OZ: $\overline{K}_O = A\omega_X\overline{I} + B\omega_Y\overline{J} + C\omega_Z\overline{K} \approx C\omega_Z\overline{K}$

Гироскопический момент. Правило Жуковского

43 Гироскопический момент. Правило Жуковского.



$$\bar{u}_B = \bar{L}_0^{(e)}$$

$$\bar{u}_B = \bar{\omega}_2 \times \overline{OB} = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_0$$

$$\bar{K}_0 = J_z \bar{\omega}_1$$

$$\bar{u}_B = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_0 = J_z (\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1)$$

Применим следствие из принципа Даламбера: $\bar{L}_0^{(e)} + \bar{L}_0^{(\Phi)} = 0$

$\bar{L}_0^{(\Phi)}$ – момент сил инерции гироскопа относит. его неподв. точки – – гироскопический момент

$$\bar{L}_0^{(\Phi)} = -\bar{L}_0^{(e)} = J_z (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)$$

$$L_0^{(\Phi)} = L_Г = J_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta$$

Из формулы (1.9), выражающей закон прецессии, можно получить формулу момента внешней силы, вызывающего прецессионное движение:

$$L = H \cdot \omega_p$$

Этот момент внешней силы уравновешивается гироскопическим моментом $\overline{R}$, равным по значению и противоположным по направлению моменту $\overline{L}$, т. е. $\overline{R} = -\overline{L}$, поэтому

$R = H \cdot \omega_p$ (1.11)

Для определения направления вектора $\overline{R}$ гироскопического момента можно пользоваться правилом Jl. Фуко (правилом одноименного параллелизма осей вращения). Это правило для быстровращающегося гироскопа состоит в следующем (см. рис.): вектор гироскопического момента $\overline{R}$ направлен таким образом, что он стремится повернуть вектор кинетического момента $\overline{H}$ к вектору угловой скорости $\overline{\omega_p}$ прецессии или, что то же самое, вектор угловой скорости $\overline{\Omega}$ собственного вращения гироскопа к вектору $\overline{\omega_p}$. Это означает, что в правой системе координат вектор $\overline{R}$ направлен в ту сторону, откуда вращение от вектора $\overline{H}$ к вектору $\overline{\omega_p}$, совершается по кратчайшему расстоянию против часовой стрелки.

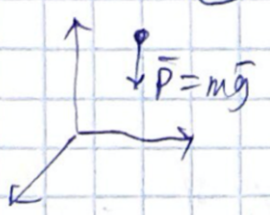
Возникновением гироскопического момента, уравновешивающего момент внешней силы, и объясняется тот факт, что прецессионное движение гироскопа происходит с постоянной угловой скоростью.

Правило Жуковского: Если **гироскопу** сообщают вынужденное прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил, стремящаяся сделать ось **гироскопа** параллельной оси симметрии, причем так, чтобы направления вращения стали одинаковыми после их совпадения.

Вычисление силовых функций однородного поля силы тяжести и линейной силы упругости

24 Вычисление силовых функций однородного поля силы тяжести и линейной силы упругости.

1



$$dA = P_x\,dx + P_y\,dy + P_z\,dz$$

$$mg \parallel z$$

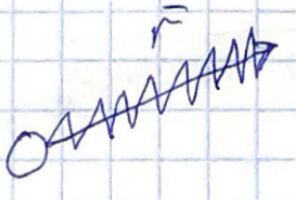
$$dA = P_z\,dz$$

$$dA = -mg\,dz$$

$$A = -mg\,\Delta z$$

$$\Pi = -A + const = mgz$$

2



$$\bar{F} = -k\bar{r}$$

$$dA = \bar{F}\cdot d\bar{r} = -k\cdot\bar{r}\,d\bar{r} = d\left(-\frac{kr^2}{2}\right)$$

$$A = -\frac{kr^2}{2};$$

$$\Pi = \frac{kr^2}{2} + const$$