Теоретические сведения по курсу “Теоретическая механика”, 3 семестр

Под редакцией Д.А. Волошина

1. Аксиомы динамики. Инерциальная система отсчета.

1) Существуют системы отсчёта, называемые инерциальными, по отношению к которым материальная точка, не испытывающая действия или находящаяся под действием уравновешенной системы сил, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

2) Ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчёта пропорционально приложенной к точке силе и совпадает с ней по направлению ($m\bar{a} = \bar{F}$).

3) Силы взаимодействия двух материальных точек направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны и равны по модулю ($\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$).

4) Ускорение, полученное точкой под действием системы сил, равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил ($\bar{a} = \sum \bar{a}_k$, где $\bar{a}_k = \bar{F}_k/m$).

Инерциальные системы отсчёта являются воображаемыми и могут быть введены с той или иной степенью приближения.

2. Дифференциальные уравнения движения точки в векторной форме и в проекциях на декартовы и естественные оси координат.

Векторное дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}\left(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}\right)$$

В проекциях на декартовы оси:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases}$$

В проекциях на естественные оси (базис $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$):

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2} = F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n \\ F_b = 0 \end{cases}$$

где $v = |v_\tau| = |ds/dt|$, а ρ – радиус кривизны траектории. Третье уравнение является условием равновесия для проекций сил на бинормаль.

3. Дифференциальные уравнения движения точки в неинерциальной системе координат. Принцип относительности Галилея-Ньютона.

Неинерциальной называется система отсчёта, которая движется с ускорением относительно другой, инерциальной системы отсчёта.

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k$$

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_k), \qquad m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k$$

Дифференциальные уравнения движения точки в НСО:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx} \\ m\ddot{y} = F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky} \\ m\ddot{z} = F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz} \end{cases}$$

Принцип относительности Галилея-Ньютона: невозможно отличить одну инерциальную систему от другой путём наблюдения за механическим движением тел.

4. Центр масс системы материальных точек. Теорема о движении центра масс.

Центр масс характеризует распределение масс материальных точек в системе. Центр масс – это геометрическая точка C, положение которой определяется радиус-вектором $\bar{r}_c$:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{M}$$

Спроецировав на оси ДСК можно получить выражения для координат центра масс:

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{M},$$

где $\sum_i m_i x_i = S_{Oyz}$, $\sum_i m_i y_i = S_{Oxz}$, $\sum_i m_i z_i = S_{Oxy}$ – статические моменты массы системы относительно координатных плоскостей. Для сплошных однородных тел суммирование можно заменить интегрированием по dm.

Теорема о движении центра масс: произведение массы системы на ускорение её центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

Доказательство: дважды продифференцируем векторное уравнение для радиус-вектора центра масс:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{M} \bigg| dt^2 \quad \Longrightarrow \quad \bar{a}_c = \frac{\sum_i m_i \bar{a}_i}{M}$$

Разделим все силы, действующие на материальные точки на две категории: внешние и внутренние. Равнодействующая сил, действующих на -ю точку – $\bar{F}_i$. Сила, с которой на i-ю точку действует k-я точка – $\bar{f}_{k,i}$. Тогда $m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i + \sum_k \bar{f}_{k,i}$, $\quad \sum_i m_i \bar{a}_i = \sum_i \bar{F}_i + \sum_i \sum_k \bar{f}_{k,i}$. Сумма внутренних сил равна нулю (согласно 3-й аксиоме динамики), поэтому $\sum_i m_i \bar{a}_i = \sum_i \bar{F}_i$. Тогда:

$$\bar{a}_c = \frac{\sum_i m_i \bar{a}_i}{M} = \frac{\sum_i \bar{F}_i}{M} \quad \blacksquare$$

5. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

При поступательном движении тела его угловая скорость и, следовательно, главный момент количества движения относительно центра масс тождественно равны нулю.

Д.У. поступательного движения твёрдого тела в векторном виде:

$$m\bar{a} = \sum_i \bar{F}_i^{(e)},$$

где $\bar{a}$ – ускорение центра масс тела.

Д.У. поступательного движения твёрдого тела в проекциях на оси ДСК:

$$m\ddot{x} = \sum_i F_{ix}^{(e)}, \ \ m\ddot{y} = \sum_i F_{iy}^{(e)}, \ \ m\ddot{z} = \sum_i F_{iz}^{(e)}$$

Д.У. поступательного движения твёрдого тела в проекциях на естественные оси:

$$m\ddot{s} = \sum_i F_{i\tau}^{(e)}, \ \ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum_i F_{in}^{(e)}, \ \ 0 = \sum_i F_{ib}^{(e)}$$

6. Теорема об изменении количества движений точки и системы материальных точек в дифференциальной и интегральной формах.

Количеством движения материальной точки называют вектор:

$$\bar{q} = m\bar{v}$$

Количеством движения механической системы называют вектор:

$$\bar{Q} = \sum_i \bar{q}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i = M\bar{v}_c$$

Элементарный импульс силы $\bar{F}$, действующий в течение времени dt: $d\bar{S}(\bar{F}) = \bar{F}dt$. Полный импульс силы $\bar{F}$, действующий на материальную точку в течение времени t: $\bar{S}(\bar{F}) = \int_0^t \bar{F}dt$.

Теорема об изменении количества движения материальной точки в **дифференциальной форме**:

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F}$$

Домножив обе части уравнения на dt и проинтегрировав от 0 до t получим теорему в **интегральной форме**:

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}(\bar{F}),$$

Где $\bar{S}(\bar{F})$ – полный импульс равнодействующей за время t.

Теорема об изменении количества движения механической системы в **дифференциальной форме**:

$$\frac{d(M\bar{v}_c)}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_i \bar{F}_i^{(e)}$$

Домножив обе части уравнения на dt и проинтегрировав от 0 до t получим теорему в **интегральной форме**:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_i \bar{S}_i^{(e)}$$

7. Движение точки переменной массы. Уравнение Мещерского. I-я задача Циолковского.

Для вывода уравнения движения точки переменной массы воспользуемся теоремой об изменении количества движения механической системы. Для этого рассмотрим механическую систему, состоящую из частиц постоянной массы, которые в момент времени t составляют материальную точку $\mathcal{M}$ (с массой M и скоростью $\bar{v}$) и за время Δt присоединятся к материальной точке $\mathcal{M}$ (обозначим их массы $\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_{N_1}^{(1)}$, скорости в момент времени $t - \bar{v}_1^{(1)}, \dots, \bar{v}_{N_1}^{(1)}$). Пусть $\mu_1^{(2)}, \dots, \mu_{N_1}^{(2)}$ – массы тех частиц, которые за время Δt отделятся от точки $\mathcal{M}$, а $\bar{v}_1^{(2)}, \dots, \bar{v}_{N_1}^{(2)}$ – их абсолютные скорости в момент времени $t + \Delta t$.

Введём также обозначения:

$$\bar{v}_1 = \frac{\sum \mu_i^{(1)} \bar{v}_i^{(1)}}{\Delta m_1}, \quad \bar{v}_2 = \frac{\sum \mu_i^{(2)} \bar{v}_i^{(2)}}{\Delta m_2},$$

где $\Delta m_1 = \sum \mu_i^{(1)}, \quad \Delta m_2 = \sum \mu_i^{(2)}$.

Запишем количество движения этой механической системы в моменты времени t и $t + \Delta t$:

$$\bar{Q}(t) = M\bar{v} + \Delta m_1 \bar{v}_1$$

$$\bar{Q}(t + \Delta t) = (M + \Delta m_1 - \Delta m_2)(\bar{v} + \Delta\bar{v}) + \Delta m_2 \bar{v}_2$$

$$\Delta\bar{Q}(t) = \bar{Q}(t + \Delta t) - \bar{Q}(t) = M\Delta\bar{v} + \Delta m_1(\bar{v} - \bar{v}_1) - \Delta m_2(\bar{v} - \bar{v}_2) + (\Delta m_1 - \Delta m_2)\Delta\bar{v}$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{Q}(t)}{\Delta t} = M\frac{d\bar{v}}{dt} + (\bar{v} - \bar{v}_1)\frac{dm_1}{dt} - (\bar{v} - \bar{v}_2)\frac{dm_2}{dt}$$

Запишем теорему об изменении количества движения системы $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_i^{(e)}$ и получим **обобщённое уравнение Мещерского**:

$$\boxed{M\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + (\bar{v}_1 - \bar{v})\frac{dm_1}{dt} - (\bar{v}_2 - \bar{v})\frac{dm_2}{dt}}$$

Первая задача Циолковского.

Пусть ТПМ движется в безвоздушном пространстве вне силового поля, причём имеет место лишь процесс отделения частиц. Движение такой точки моделирует движение ракеты в космосе (учитывая различные пренебрежения). Тогда $\bar{F} = 0$ и из уравнения Мещерского получим векторное уравнение движения ракеты:

$$M\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{u}_r \frac{dM}{dt},$$

где $\bar{u}_r$ – относительная скорость отделения продуктов сгорания топлива. Полагая, что $\bar{u}_r$ постоянна по величине и направлена противоположно скорости $\bar{v}$ ракеты, найдём скорость и закон движения ракеты.

Направим ось Ox вдоль вектора скорости $\bar{v}$ ракеты. В проекции на ось Ox уравнение Мещерского с учётом, что $v_x = v, \quad u_{rx} = -u_r$, имеет вид:

$$Mdv = -u_r dM$$

Разделяя переменные и интегрируя найдём:

$$v = v_0 + u_r \ln\left(\frac{M_0}{M(t)}\right)$$

Так как $M_0 = M_{\text{к}} + M_{\text{т}}$, где $M_{\text{к}}$ – масса корпуса ракеты, $M_{\text{т}}$ – масса топлива в начальный момент времени, из полученной формулы можно найти предельную скорость, которую получит ракета, когда всё топливо будет израсходовано:

$$v_к = v_0 + u_r \ln\left(1 + \frac{M_т}{M_к}\right)$$

Путь, пройденный ракетой, зависит от закона сгорания топлива. Полагая $x(0) = 0$ получим:

$$x(t) = v_0 t + u_r \int_0^t \ln\left(\frac{M_0}{M(t)}\right) dt$$

8. Кинетический момент точки и системы материальных точек относительно центра и оси.

Кинетический момент (момент количества движения) точки относительно центра O:

$$\bar{k}_O = \bar{M}_O(\bar{q}) = \bar{r} \times \bar{q} = \bar{r} \times m\bar{v}$$

Проекции $\bar{k}_O$ на оси равны кинетическим моментам относительно соответствующих осей:

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \;\; k_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \;\; k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Кинетический момент механической системы относительно центра O:

$$\bar{K}_O = \sum_i \bar{k}_{Oi} = \sum_i \bar{M}_O(\bar{q}_i) = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$$

Проекции $\bar{K}_O$ на оси равны главным кинетическим моментам относительно соответствующих осей:

$$K_x = \sum_i m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i), \;\; K_y = \sum_i m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i), \;\; K_z = \sum_i m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i)$$

Главный кинетический момент относительно оси вращения при вращательном движении твёрдого тела:

$$K_z = \sum_i M_z(m_i\bar{v}_i) = \sum_i m_i v_{\tau i} h_i = \sum_i \omega_z m_i h_i^2 = \omega_z \sum_i m_i h_i^2 = \omega_z J_z$$

9. Теорема об изменении кинетического момента для точки и системы материальных точек.

Уравнение движения материальной точки:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

Домножим его слева векторно на $\bar{r}$:

$$\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}$$

Преобразуем левую часть:

$$\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{r} \times m\bar{v})}{dt} - \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \frac{d(\bar{r} \times m\bar{v})}{dt} - \bar{v} \times m\bar{v} = \frac{d(\bar{r} \times m\bar{v})}{dt}$$

$$\frac{d(\bar{r} \times m\bar{v})}{dt} = \frac{d(\bar{k}_O)}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O(\bar{F})$$

Теорема об изменении кинетического момента для точки:

$$\boxed{\frac{d(\bar{k}_O)}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F})}$$

Для механической системы запишем сумму теорем об изменении кинетического момента для всех точек:

$$\sum_i \frac{d(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)}{dt} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(e)}$$

Преобразуем левую часть:

$$\sum_i \frac{d(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i\right) = \frac{d\bar{K}_O}{dt}$$

$$\sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(e)} = \bar{L}_O^{(e)}$$

Теорема об изменении кинетического момента для механической системы:

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{L}_O^{(e)}}$$

10. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Теорема об изменении главного кинетического момента механической системы относительно оси вращения Oz:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_i M_z\left(\bar{F}_i^{(e)}\right)$$

Для твёрдого тела $\bar{K}_z = \omega_z J_z = \dot{\varphi} J_z$, тогда имеем Д.У. вращения твёрдого тела вокруг оси Oz:

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_i M_z\left(\bar{F}_i^{(e)}\right)$$

11. Формула для кинетического момента механической системы при сложном движении (теорема Кенига).

Введём подвижную С.К. $CXYZ$, которая движется поступательно по отношению к инерциальной С.О. $Oxyz$ и начало которой связано с центром масс C системы. Запишем уравнение радиус-вектора точки в неподвижной С.К.: $\bar{r}_i = \bar{r}_C + \bar{\rho}_i$ и продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d\bar{r}_C}{dt} + \frac{d\bar{\rho}_i}{dt}$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_C + \bar{v}_i^{(r)}$$

Главный момент количеств движения механической системы относительно неподвижного центра O для абсолютного движения системы:

$$\bar{K}_O = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_i (\bar{r}_C + \bar{\rho}_i) \times m_i\left(\bar{v}_C + \bar{v}_i^{(r)}\right)$$

$$= \bar{r}_C \times \bar{v}_C \sum_i m_i + \bar{r}_C \sum_i m_i \bar{v}_i^{(r)} + \sum_i m_i \bar{\rho}_i \times \bar{v}_C + \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \bar{v}_i^{(r)}$$

$$\sum_i m_i \bar{\rho}_i = M\bar{\rho}_C = 0, \qquad \sum_i m_i \bar{v}_i^{(r)} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \bar{\rho}_i\right) = 0$$

$$\boxed{\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C^{(r)} = \bar{M}_O(\bar{Q}) + \bar{K}_C^{(r)}}$$

12. Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс (относительно осей Кенига).

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(e)}, \;\; \bar{r}_i = \bar{r}_C + \bar{\rho}_i, \;\; \bar{K}_O = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C^{(r)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}_C \times \bar{Q} + \bar{K}_C^{(r)}\right) = \frac{d\bar{r}_C}{dt} \times \bar{Q} + \bar{r}_C \frac{d\bar{Q}}{dt} + \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \sum_i (\bar{r}_C + \bar{\rho}_i) \times \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\frac{d\bar{r}_C}{dt} \times \bar{Q} = \bar{v}_C \times M\bar{v}_C = 0, \;\; \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_i \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \bar{r}_C \times \left(\sum_i \bar{F}_i^{(e)} - \frac{d\bar{Q}}{dt}\right) + \sum_i \bar{\rho}_i \times \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \sum_i \bar{\rho}_i \times \bar{F}_i^{(e)} = \bar{L}_C^{(e)}}$$

13. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Введём неподвижную С.К. $Oxyz$, в которой для центра масс имеем: $m\ddot{\bar{r}}_c = \sum_i \bar{F}_i^{(e)}$, а также подвижную С.К. $CXYZ$, имеющую начало в центре масс тела и перемещающуюся относительно $Oxyz$ поступательно, причём плоскости CXY и Oxy будем считать совпадающими с плоскостью, в которой движется центр масс тела. Тогда теорема об изменении главного кинетического момента в проекции на ось CZ:

$$\frac{dK_{CZ}^{(r)}}{dt} = \sum_i M_{CZ}\left(F_i^{(e)}\right), \;\; K_{CZ}^{(r)} = J_{CZ}\omega_z$$

Тогда Д.У. вращения тела относительно оси CZ:

$$J_{CZ}\ddot{\varphi} = \sum_i M_{CZ}\left(F_i^{(e)}\right)$$

Эти два Д.У. полностью описывают плоское движение твёрдого тела.

Д.У. в проекциях на оси инерциальной системы:

$$m\ddot{x}_c = \sum_i F_{xi}^{(e)}, \;\; m\ddot{y}_c = \sum_i F_{yi}^{(e)}$$

Д.У. в проекциях на оси естественной системы координат:

$$m\ddot{s}_c = \sum_i F_{\tau i}^{(e)}, \;\; m\frac{\dot{s}_c^2}{\rho} = \sum_i F_{ni}^{(e)}$$

14. Движение точки под действием центральной силы. Теорема площадей.

Центральная сила – сила, линия действия которой проходит через центр O во всё время движение точки. Согласно определению центральной силы:

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = 0,$$

следовательно, $\frac{d\bar{k}_O}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{k}_O - const.$

В проекциях на оси Д.С.К.:

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = C_1, \;\; k_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = C_2, \;\; k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_3$$

Умножая первое уравнение на x, второе на y и третье на z и складывая все выражения получим:

$$xk_x + yk_y + zk_z = C_1x + C_2y + C_3z = 0,$$

то есть координаты точки удовлетворяют уравнению плоскости, проходящей через начало координат. Траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской кривой, лежащей в плоскости, проходящей через центр силы.

Секторная скорость.

Рассмотрим положения точки в моменты времени t и $t + \Delta t$ при её движении по траектории. Площадь $\Delta\bar{\sigma}$, ометаемая радиус-вектором $\bar{r}$ за время Δt приближённо равна $\Delta\bar{\sigma} \approx \frac{1}{2}(\bar{r} \times \Delta\bar{r})$. Наряду с вектором скорости вводят понятие **секторной скорости** $\bar{v}_\sigma$ точки:

$$\bar{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \left(\bar{r} \times \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{v})$$

Для полярной системы координат:

$$v_\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$$

Выразим кинетический момент точки через секторную скорость:

$$\bar{k}_O = \bar{M}_O(\bar{q}) = \bar{r} \times m\bar{v} = 2m\bar{v}_\sigma$$

Продифференцируем по dt с учётом теоремы об изменении количества движения:

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = 2m\frac{d\bar{v}_\sigma}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}$$

Теорема площадей:

$$2m\frac{d\bar{v}_\sigma}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F})$$

15. Элементарная и полная работа силы. Мощность. Работа равнодействующей силы.

Элементарная работа силы:

$$d'A(\bar{F}) = F \cdot ds \cdot \cos(\alpha) = F_\tau ds$$

Учитывая, что $ds = |d\bar{r}|$, можно записать:

$$d'A(\bar{F}) = F \cdot ds \cdot \cos(\alpha) = |\bar{F}||d\bar{r}|\cos(\alpha) = \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Так как $d\bar{r} = \bar{v}dt$, можно записать:

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \bar{v}dt = (\bar{F}dt) \cdot \bar{v}$$

Полная работа силы:

$$A(\bar{F}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d'A_i = \int_{M_0}^{M} d'A = \int_{M_0}^{M} F_\tau ds = \int_{0}^{t} \bar{F} \cdot \bar{v}dt$$

Мощность:

$$W = \frac{d'A}{dt} = \frac{\bar{F} \cdot \bar{v}dt}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

Работа равнодействующей силы:

$$\bar{R}^* = \sum_i \bar{F}_i$$

$$A(\bar{R}^*) = \int_{M_0}^{M} d'A = \int_{M_0}^{M} \bar{R}^* \cdot d\bar{r} = \sum_i \int_{M_0}^{M} \bar{F}_i \cdot d\bar{r} = \sum_i A_i$$

16. Работа силы, приложенной к твердому телу, при его различных движениях.

Работа силы при поступательном движении твёрдого тела. При поступательном движении твёрдого тела векторы скоростей, а также элементарные перемещения всех точек тела одинаковы. Тогда элементарная работа силы:

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \bar{v}_k dt = \bar{F} \cdot \bar{v}dt = \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Полная работа на каком-либо перемещении:

$$A(\bar{F}) = \int_{M_0}^{M} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Работа силы при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Разложим силу $\bar{F}$, приложенную в произвольной точке по естественным осям τ, n, b: $\bar{F} = \bar{F}_\tau + \bar{F}_n + \bar{F}_b$. Работы составляющих силы по нормали и бинормали равны нулю, так как они всегда направлены перпендикулярно к вектору скорости точки приложения силы. Следовательно, элементарная работа силы $\bar{F}$ совершается только её составляющей $\bar{F}_\tau$ по касательной к траектории, т.е. $d'A(\bar{F}) = F_\tau ds$. Поскольку $ds = hd\varphi$, то $d'A(\bar{F}) = F_\tau hd\varphi$, где h – кратчайшее расстояние от точки приложения силы до оси вращения. Учитывая, что $F_\tau h = M_z(\bar{F})$ – момент силы относительно оси Oz, получаем:

$$d'A(\bar{F}) = M_z(\bar{F})d\varphi$$

$$A(\bar{F}) = \int_{0}^{\varphi} M_z(\bar{F})d\varphi$$

Работа силы в общем случае движения твёрдого тела. Скорость точки приложения силы в этом случае: $\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}$. Тогда:

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \bar{v}dt = \bar{F} \cdot \bar{v}_A dt + \bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r})dt = \bar{F} \cdot d\bar{r}_A + \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{F})dt = \bar{F} \cdot d\bar{r}_A + \bar{\omega} \cdot \bar{M}_A(\bar{F})dt$$

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot d\bar{r}_A + M_\omega(\bar{F})d\varphi$$

17. Кинетическая энергия точки и механической системы. Теорема Кенига.

Кинетическая энергия материальной точки:

$$\mathrm{T} = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия механической системы:

$$\mathrm{T} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Введём неподвижную С.К. $Oxyz$, а также подвижную С.К. $CXYZ$, имеющую начало в центре масс тела и перемещающуюся относительно $Oxyz$ поступательно. Положение произвольной точки системы по отношению к неподвижному центру O: $\bar{r}_i = \bar{r}_C + \bar{\rho}_i$ и продифференцировав его по времени найдём абсолютную скорость произвольной точки системы:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_C + \bar{v}_i^{(r)}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\bar{v}_C + \bar{v}_i^{(r)}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_C^2 + \sum_i m_i \bar{v}_C \bar{v}_i^{(r)} + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\bar{v}_i^{(r)}\right)^2$$

$$\sum_i m_i \bar{v}_C \bar{v}_i^{(r)} = \bar{v}_C \sum_i m_i \bar{v}_i^{(r)} = \bar{v}_C \sum_i m_i \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \bar{v}_C \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \bar{\rho}_k\right) = 0$$

Теорема Кенига:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\bar{v}_i^{(r)}\right)^2$$

18. Теорема об изменении кинетической энергии для точки и системы материальных точек.

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \quad \Longrightarrow \quad md\bar{v} = \bar{F}dt \quad \Longrightarrow \quad \bar{v}md\bar{v} = \bar{v}\bar{F}dt \quad \Longrightarrow \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}d\bar{r}$$

Теорема об изменении кинетической энергии для точки:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A(\bar{F})$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = W, \qquad \mathrm{T} - \mathrm{T}_0 = A(\bar{F})$$

Для механической системы:

$$d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = d'A\left(\bar{F}_i^{(e)}\right) + d'A\left(\bar{F}_i^{(i)}\right)$$

$$d\left(\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum_i d'A\left(\bar{F}_i^{(e)}\right) + \sum_i d'A\left(\bar{F}_i^{(i)}\right)$$

$$d\mathrm{T} = \sum_i d'A\left(\bar{F}_i^{(e)}\right) + \sum_i d'A\left(\bar{F}_i^{(i)}\right)$$

19. Потенциальное силовое поле. Силовая функция и потенциальная энергия поля.

Силовое поле – часть пространства, в котором на материальную точку действует сила, зависящая от координат точки и времени: $\bar{F} = \bar{F}(x, y, z, t)$. Если сила не зависит от времени, то силовое поле называется стационарным.

Потенциальное силовое поле – силовое поле, которое можно представить как градиент скалярной функции $U(x, y, z)$: $\bar{F} = \mathrm{grad}U$. Функция U называется **силовой функцией**.

Свойства стационарного потенциального поля:

1) $d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$;
2) $A = \int_{M_0}^{M} d'A = \int_{M_0}^{M} dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$;
3) $\oint \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$;
4) Необходимое и достаточное условие потенциальности силового поля: $\mathrm{rot}\bar{F} = 0$.

Для потенциального силового поля наряду с силовой функцией U используют другую функцию, характеризующую запас энергии в данной точке поля – потенциальную энергию Π в этой точке.

$$\Pi = A_{MM_0} = \int_{M}^{M_0} dU = U(M_0) - U(M) = C_0 - U,$$

где M_0 – точка, условно принимаемая за нулевую. Продифференцировав это выражение и домножив на dt получим:

$$d\Pi = -dU$$

20. Вычисление силовых функций однородного поля силы тяжести и линейной силы упругости.

Однородное поле силы тяжести. Рассмотрим материальную точку массой m, находящуюся в однородном поле силы тяжести. Направим ось Oz вертикально вверх, а оси Ox и Oy произвольно в горизонтальной плоскости. Проекции силы тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$ на оси координат: $P_x = P_y = 0$, $P_z = -mg$. Элементарная работа силы тяжести:

$$d'A = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mgdz = d(-mgz)$$

Поскольку $d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = dU$, имеем:

$$U = -mgz + C_1$$

Поле линейной силы упругости. Линейная сила упругости подчиняется закону Гука: $\bar{F} = -c\bar{r}$. Элементарная работа этой силы:

$$d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = -c\bar{r} \cdot d\bar{r} = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right)$$

Поскольку $d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = dU$, имеем:

$$U = -\frac{cr^2}{2} + C_1$$

21. Закон сохранения механической энергии.

Пусть все силы, действующие на механическую систему потенциальны, то есть $\bar{F}_i = \mathrm{grad} U$. Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме:

$$d\mathrm{T} = \sum_i \bar{F}_i d\bar{r}_i = \sum_i (\bar{F}_i^{(e)} + \bar{F}_i^{(i)}) d\bar{r}_i$$

Поскольку $d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = dU$, имеем:

$$d\mathrm{T} = \sum_i \bar{F}_i d\bar{r}_i = dU = -d\Pi$$

$$d\mathrm{T} + d\Pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad d(\mathrm{T} + \Pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T} + \Pi - const.$$

22. Принцип Даламбера для точки и системы материальных точек.

В соответствии с аксиомами динамики основное уравнение движения материальной точки:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R},$$

где $\bar{F}$ – равнодействующая активных сил; $\bar{R}$ – равнодействующая реакций связи. Это уравнение можно переписать в виде:

$$\bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}) = 0$$

Слагаемое $(-m\bar{a})$ обозначают $\bar{\Phi}$ и называют деламберовой силой инерции. Тогда основное уравнение динамики материальной точки:

$$\boxed{\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0}$$

Так как указанные выше силы образуют систему сходящихся сил, то уравнение можно рассматривать как условие равновесия системы сил. Этот принцип называется **принципом Деламбера** для материальной точки.

Рассмотрим механическую систему и применим к каждой точке принцип Деламбера:

$$\sum_i \bar{F}_i + \sum_i \bar{R}_i + \sum_i \bar{\Phi}_i = 0$$

Можно домножить это уравнение слева векторно на $d\bar{r}$, тогда получим:

$$\sum_i \bar{M}_O(\bar{F}_i) + \sum_i \bar{M}_O(\bar{R}_i) + \sum_i \bar{M}_O(\bar{\Phi}_i) = 0$$

Если разложить силы не на активные и реакции связей, а на внутренние и внешние, получим:

$$\sum_i \bar{F}_i^e + \sum_i \bar{\Phi}_i = 0, \quad \sum_i \bar{M}_O\left(\bar{F}_i^{(e)}\right) + \sum_i \bar{M}_O\left(\bar{\Phi}_i\right) = 0$$

23. Главный вектор и главный момент сил инерции в общем и частных случаях движения твердого тела.

Главный вектор сил инерции:

$$\bar{R}_{\text{ин.}} = \sum_i \bar{\Phi}_i = -\sum_i m_i \bar{a}_i = -\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i \bar{r}_i\right) = -M\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{M}\right) = -M\frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2}$$

$$\bar{R}_{\text{ин.}} = -M\bar{a}_c$$

Главный момент сил инерции:

Для некоторого неподвижного центра O:

$$\bar{L}_{O\text{ ин.}} = \sum_i \bar{M}_O(\bar{\Phi}_i) = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{\Phi}_i = -\sum_i \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}$$

$$\bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)$$

$$\bar{L}_{O\text{ ин.}} = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i\right) = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}$$

Если движение точек рассматривать как сложное, то есть $\bar{r}_i = \bar{r}_C + \bar{\rho}_i$, то $\bar{K}_O = \bar{K}_C^r + \bar{r}_C \times M\bar{v}_C$, где $\bar{K}_C^r = \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \bar{v}_i^{(r)}$.

Тогда главный момент сил инерции:

$$\bar{L}_{O\text{ ин.}} = -\frac{d\bar{K}_O}{dt} = -\frac{d\bar{K}_C}{dt} - M\bar{r}_C \times \bar{a}_C$$

При поступательном движении тела:

$$\bar{R}_{\text{ин.}} = -M\bar{a}_c$$

$$\bar{L}_{C\text{ ин.}} = 0$$

При вращении вокруг неподвижной оси z, являющейся главной осью инерции:

$$\bar{R}_{\text{ин.}} = 0$$

$$\bar{L}_{O\text{ ин.}} = -J_z \varepsilon_z \bar{k}$$

24. Возможные перемещения точки и механической системы. Принцип возможных перемещений.

Возможное перемещение материальной точки – любое допускаемое связями перемещение материальной точки из положения, занимаемого ею в данный момент времени, в бесконечно близкое положение, которое она может занимать в тот же момент времени.

$$\delta\bar{r} = \delta x\bar{\imath} + \delta y\bar{\jmath} + \delta z\bar{k}$$

Возможное перемещение системы – любая совокупность возможность перемещений всех её точек.

$$\delta\bar{r}_k = \sum_i \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i$$

Возможная работа силы – работа силы на любом возможном перемещении точки её приложения.

$$\delta A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \delta\bar{r}$$

Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа): чтобы данное положение механической системы со стационарными идеальными связями было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении системы из этого положения была равна нулю.

Условие равновесия системы:

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0}$$

25. Связи и их классификация.

Связи – ограничения, которые накладываются на координаты/скорости точек системы.

Механические связи реализуются в виде различных устройств или тел. Аналитически связь описывается уравнением вида $f(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t) = 0,\ \ i \in \mathbb{Z}$.

Идеальные связи – связи, суммарная возможная работа всех реакций которых на любых возможных перемещениях равна нулю ($\sum \bar{R}_i\, \delta\bar{r}_i = 0$).

Голономные связи – связи, которые описываются уравнением вида $f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$. Они накладывают ограничение на координаты точек, то есть на положение системы в пространстве, поэтому их называют **геометрическими**.

Неголономные связи – связи, которые описываются уравнением вида $f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0$. Они накладывают ограничение на координаты точек и на скорости точек, поэтому их называют **кинематическими**.

Стационарные связи – связи, не зависящие от времени в явном виде.

Нестационарные связи – связи, зависящие от времени в явном виде.

Удерживающая (двухсторонняя) связь – связь, которая описывается равенством.

Неудерживающая (односторонняя) связь – связь, которая описывается неравенством.

26. Общее уравнение динамики.

Умножим скалярно уравнение принципа Деламбера для -й материальной точки на $\delta\bar{r}_i$:

$$\left(\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{\Phi}_i\right) \cdot \delta\bar{r}_i = 0$$

Просуммировав получим основное **уравнение динамики**:

$$\boxed{\sum_i \left(\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{\Phi}_i\right) \cdot \delta \bar{r}_i = 0}$$

Это уравнение является условием совместного со связями движения системы под действием заданных активных сил.

27. Обобщенные силы. Способы вычисления обобщенных сил.

Возможная работа сил, приложенных к точкам системы:

$$\sum_i \delta A(\bar{F}_i) = \sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i$$

Если механическая система при наложенных на неё голономных удерживающих связях имеет n степеней свободы, то положение этой системы определяется n обобщёнными координатами. Возможное перемещение -й точки:

$$\delta \bar{r}_k = \sum_i \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

Подставив эту формулу в выражение для возможной работы получим:

$$\sum_i \delta A(\bar{F}_i) = \sum_i \bar{F}_i \cdot \left(\sum_i \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) \delta q_i = \sum_i \left(\sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) \delta q_i$$

Скалярную величину

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i}$$

называют **обобщённой силой**, соответствующей -й обобщённой координате.

Способы вычисления обобщённых сил:

1) **Аналитический** (по определению):

$$Q_i = \sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_i \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_i}\right)$$

2) **По возможной работе**:

$$Q_i = \frac{\left(\sum_i \delta A(\bar{F}_i)\right)_{q_i}}{\delta q_i}$$

3) **По потенциальной энергии**:

$$\bar{F}_i = \mathrm{grad} U$$

$$Q_i = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad U = -\Pi + const$$

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

28. Условия равновесия системы, выраженные в обобщенных силах.

Возможное перемещение -й точки:

$$\delta\bar{r}_k = \sum_i \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i$$

Согласно принципу возможных перемещений, система будет находиться в состоянии равновесия, если:

$$\sum_k \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$$

Подставим в условие равновесия уравнение возможного перемещения -й точки:

$$\sum_k \bar{F}_k \cdot \left(\sum_i \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i\right) = 0, \;\; \sum_k \left(\sum_i \bar{F}_k \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i\right) = 0, \;\; \sum_i Q_i\delta q_i = 0 \quad \Longrightarrow$$

Условие равновесия механической системы:

$$\boxed{Q_i = 0}$$

Если силы, приложенные к точкам механической системы, потенциальные, то:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

Тогда условия равновесия системы:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0} \quad \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0}$$

29. Уравнения Лагранжа II-го рода (вывод).

Уравнения Лагранжа второго рода – Д.У. движения несвободной механической системы, составленные в обобщённых координатах.

Рассмотрим систему из N материальных точек с наложенными идеальными голономными удерживающими связями. Общее уравнение динамики для такой системы:

$$\sum_k (\bar{F}_k - m_k\ddot{\bar{r}}_k) \cdot \delta\bar{r}_k = 0$$

Пусть система имеет n степеней свободы и её положение определяется n обобщёнными координатами. Тогда возможное перемещение -й точки:

$$\delta\bar{r}_k = \sum_i \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i$$

Подставим выражение для возможного перемещения в основное уравнение динамики:

$$\sum_k (\bar{F}_k - m_k\ddot{\bar{r}}_k) \cdot \sum_i \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i = 0$$

$$\sum_i \left(\sum_k (\bar{F}_k - m_k \ddot{\bar{r}}_k) \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0$$

$$\sum_i \left(\sum_k \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} - \sum_k m_k \frac{d\dot{\bar{r}}_k}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \right) \delta q_i = 0$$

$$\sum_k \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i, \qquad \frac{d\dot{\bar{r}}_k}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right)$$

Получим первое **тождество Лагранжа**:

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_i \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right) \right)$$

$$\sum_k m_k \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_k \frac{m_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

Рассмотрим $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right)$. Так как $\bar{r}_k = f(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, то $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ – функция обобщённых координат и времени, поэтому:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_n \partial q_i} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_i}$$

В то же время:

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_i \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}$$

Получим второе **тождество Лагранжа**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}}$$

$$\sum_k m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \sum_k m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \frac{m_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right) = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i}$$

Учитывая два тождества Лагранжа и выражение обобщённой силы, перепишем основное уравнение динамики и получим **уравнения Лагранжа второго рода**:

$$\sum_i \left(Q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i \in \mathbb{Z}}$$

30. Устойчивость положения равновесия. Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы (без док-ва).

Устойчивое положение равновесия – положение системы, в котором при достаточно малом отклонении системы от положения равновесия, она стремится вернуться назад.

При устойчивом положении равновесия система после достаточно малого начального возмущения совершает колебания около положения равновесия или возвращается в это положение без колебаний.

Неустойчивое положение равновесия – положение системы, в котором при достаточно малом отклонении системы от положения равновесия, она удаляется от положения равновесия.

При неустойчивом положении равновесия система после любого начального возмущения при дальнейшем движении все более удаляется от положения равновесия.

Безразличное положение равновесия – положение системы, в котором при достаточно малом отклонении системы от положения равновесия, она остаётся в отклонённом положении.

Если при устойчивом положении равновесия $\lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0$ и $\lim_{t\to\infty} \dot{q}_i(t) = 0$, то это положение равновесия называется **асимптотически устойчивым**.

Достаточное условие устойчивости положения равновесия консервативной системы определяется **теоремой Лагранжа-Дирихле**: достаточным условием устойчивости положения равновесия консервативной системы является наличие нём локального минимума потенциальной энергии.

31. Дифференциальные уравнения малых колебаний механической системы с одной степенью свободы в общем случае.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек и имеющую одну степень свободы, на которую наложены голономные, стационарные и неосвобождающие связи. Предположим, что система имеет устойчивое положение равновесия, от которого будем отсчитывать обобщённую координату q.

В соответствии с предположением о малости колебаний обобщённую координату, её скорость и ускорение полагаем величинами первого порядка малости. В Д.У. будем учитывать величины первого порядка малости, а в выражениях для кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции Рэлея – величины до второго порядка малости (так как использование уравнения Лагранжа второго рода приводит к понижению порядка малости на единицу).

В общем случае сила, действующая на -ю точку системы может быть функцией от положения точки, её скорости и времени: $\bar{F}_i = f(\bar{r}_i, \bar{v}_i, t)$. С учётом малости колебаний представим $\bar{F}_i$ в виде:

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i'(\bar{r}_i) + \bar{F}_i''(\bar{v}_i) + \bar{P}_i(t),$$

где силы $\bar{F}_i'(\bar{r}_i)$ – потенциальные, $\bar{F}_i''(\bar{v}_i)$ – диссипативные и линейно зависящие от скорости:

$$\bar{F}_i''(\bar{v}_i) = -h_i\bar{v}_i$$

Кинетическая энергия системы:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\bar{v}_i^2$$

В силу стационарности наложенных связей радиус-векторы точек зависят только от обобщённой координаты: $\bar{r}_i = f(q)$. Тогда:

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q}\dot{q}$$

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q}\right)^2\dot{q}^2=\frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$$

Разложим $A(q)$ в окрестности положения равновесия ($q=0$):

$$A(q)=A(0)+\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2}+\cdots$$

В силу малости колебаний в выражении для кинетической энергии будем учитывать величины не выше второго порядка малости. Поскольку в этом выражении есть величина второго порядка малости – $\dot{q}^2$, то в разложении учитываем только первый член. Он называется **обобщённый коэффициент инерции**:

$$a=A(0)$$

Тогда имеем:

$$\boxed{\mathrm{T}=\frac{1}{2}a\dot{q}^2}$$

Представим обобщённую силу Q в виде:

$$Q=Q_\Pi+Q_Д+Q(t),$$

где Q_Π – составляющая обобщённой силы от потенциальных сил, $Q_Д$ – составляющая обобщённой силы от диссипативных сил, $Q(t)$ – составляющая обобщённой силы от внешних сил, зависящих от времени.

Составляющая обобщённой силы от потенциальных сил:

$$\boxed{Q_\Pi=-\frac{\partial\Pi}{\partial q}},$$

где $\Pi(q)$ – потенциальная энергия системы, отсчитываемая от положения равновесия. Так как обобщённая координата также отсчитывается от положения равновесия, то $\Pi(0)=0$. Разложим потенциальную энергию в окрестности положения равновесия ($q=0$):

$$\Pi(q)=\Pi(0)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2}+\cdots$$

Первый и второй члены равны нулю (так как в положении равновесия Π имеет экстремум), четвёртый и последующие члены отбрасываем, так как в силу предположения о малости колебаний потенциальная энергия должна содержать члены не выше второго порядка малости. Тогда:

$$\Pi(q)=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2}$$

Обозначим коэффициент при $q^2/2$ через c и назовём его **обобщённым коэффициентом упругости**:

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0=c$$

Тогда

$$\Pi(q)=\frac{1}{2}cq^2$$

Составляющая обобщённой силы от диссипативных сил:

$$Q_Д=\sum_i\bar{F}_i''\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q}=-\sum_i h_i\bar{v}_i\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q}=-\sum_i h_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q}$$

Учитывая 1-е тождество Лагранжа, получим:

$$Q_{\text{Д}} = -\sum_i h_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_i \frac{h_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2}}{2} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_i \frac{h_i \bar{v}_i^2}{2} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_i \frac{h_i v_i^2}{2}$$

Введём функцию, называемую **диссипативной функцией Рэлея**:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_i h_i v_i^2$$

Тогда

$$\boxed{Q_{\text{Д}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}}$$

Подставим в диссипативную функцию Рэлея выражение для скорости:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_i h_i \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i h_i \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2$$

По аналогии с коэффициентом в выражении кинетической энергии введём **обобщённый диссипативный коэффициент**:

$$b = B(0)$$

Тогда

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$$

Составляющая обобщённой силы от внешних сил:

$$\boxed{Q(t) = \frac{\sum \delta A_i}{\delta}}$$

Учитывая полученные выражения, запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = Q$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = Q_{\text{П}} + Q_{\text{Д}} + Q(t)$$

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t)$$

Разделив стороны Д.У. на a получим:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon \dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a} Q(t),$$

где $\varepsilon = b/2a$, $\omega^2 = c/a$.

32. Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы.

В случае консервативной системы $b = 0$, поэтому Д.У. примет форму:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Его решение:

$$q = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

Начальные условия: $q(0) = q_0,\ \dot{q}(o) = \dot{q}_0$, отсюда $C_1 = q_0,\ C_2 = \dot{q}_0/\omega$.

Введём новые постоянные:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\ \ \alpha = \arctan(C_1/C_2)$$

Тогда решение Д.У.:

$$q = A\sin(\omega t + \alpha)$$

Свободные колебания в консервативной системе с одной степенью свободы являются гармоническими с периодом $T = 2\pi/\omega$.

33. Затухающие колебания механической системы при наличии вязкого трения. Декремент и логарифмический декремент.

При наличии вязкого трения Д.У.:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = 0,$$

где $\varepsilon = b/2a$ – **коэффициент затухания**.

Характеристический полином Д.У.:

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega^2 = 0$$

Его корни:

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$$

Характер движения системы будет существенно зависеть от соотношения между ε и ω. Возможны следующие три случая:

1) $\varepsilon < \omega$ – случай малого сопротивления, комплексно-сопряжённые корни;
2) $\varepsilon = \omega$ – случай критического сопротивления, кратные корни;
3) $\varepsilon > \omega$ – случай большого сопротивления, вещественные отрицательные корни.

1. Случай малого сопротивления: $\varepsilon < \omega,\ \ \lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega_1,\ \ \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$

Общее решение Д.У.:

$$q = e^{-\varepsilon t}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t))$$

$$q = Ae^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

При Н.У.: $C_1 = q_0,\ C_2 = (\dot{q}_0 + \varepsilon q_0)/\omega_1$

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\dot{q}_0 + \frac{\varepsilon q_0}{\omega_1}\right)^2},\ \ \alpha = \arctan\left(\frac{q_0\omega_1}{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}\right)$$

В этом случае колебания затухающие, они не являются периодическими, но сохраняют некоторые их свойства (условно-периодические колебания).

Декремент затуханий Δ – отношение двух последовательных (взятых через условный период $T_1 = 2\pi/\omega_1$) максимальных значений обобщённой координаты.

$$\Delta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\varepsilon T_1}$$

Логарифмический декремент затуханий δ – натуральный логарифм от декремента затуханий.

$$\delta = \ln(\Delta) = \varepsilon T_1$$

34. Апериодические затухающее движение. Критический случай.

2. Случай критического сопротивления: $\varepsilon = \omega,\ \ \lambda_{1,2} = -\varepsilon$

Общее решение Д.У.:

$$q = C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 t e^{-\varepsilon t} = e^{-\varepsilon t}(C_1 + C_2 t)$$

$$\lim_{t \to \infty} q = 0$$

Движение не имеет колебательного характера, признаки периодичности отсутствуют. Такое движение называется **апериодическим**, а в случае критического сопротивления – **предельно апериодическим**.

3. Случай большого сопротивления: $\varepsilon > \omega,\ \ \lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm k,\ \ k = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$

Общее решение Д.У.:

$$q = e^{-\varepsilon t}\left(C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}\right)$$

Движение в случае сопротивления, большего критического, также имеет апериодический характер.

35. Вынужденные колебания. Интегрирование дифференциального уравнения. Собственные и вынужденные колебания.

Д.У. вынужденных колебаний имеет вид:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t)$$

При гармоническом возбуждении:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_0 \sin(pt + \beta) \qquad \ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(pt + \beta)$$

Решение Д.У. будем искать в виде суммы общего решения ЛОДУ и частного решения НДУ.

Общее решение ЛОДУ:

$q_{o.o} = e^{-\varepsilon t}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t))$ при $\varepsilon < \omega$

$q_{o.o} = e^{-\varepsilon t}(C_1 + C_2 t)$ при $\varepsilon = \omega$

$q_{o.o} = e^{-\varepsilon t}\left(C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}\right)$ при $\varepsilon > \omega$

Для определения частного решения воспользуемся методом комплексных амплитуд. Известно, что $f_0 e^{i(pt+\beta)} = f_0 \cos(pt+\beta) + i f_0 \sin(pt+\beta)$. Поэтому $f_0 \sin(pt+\beta) = \mathrm{Im} f_0 e^{i(pt+\beta)}$. Введём вспомогательное уравнение:

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = f_0 e^{i(pt+\beta)}$$

Найдём его частное решение $y_{\text{ч.н}}$ и получим $q_{\text{ч.н}}$ как $\mathrm{Im} y_{\text{ч.н}}$.

Задав $y_{\text{ч.н}}$ в виде $y_{\text{ч.н}} = G e^{i(pt+\beta)}$, где G – комплексная амплитуда, и подставив это выражение во вспомогательное Д.У. получим:

$$(\omega^2 - p^2 + 2\varepsilon i p) G = f_0$$

$$G = \frac{f_0}{(\omega^2 - p^2 + 2\varepsilon i p)} = \frac{f_0}{D^* e^{i\gamma}}$$

$$D^* = \sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}, \;\; \gamma = \arctan\left(\frac{2\varepsilon p}{\omega^2 - p^2}\right)$$

$$G = D e^{-i\gamma}, \;\; y_{\text{ч.н}} = D e^{i(pt+\beta-\gamma)}$$

$$D = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}}$$

$$q_{\text{ч.н}} = \mathrm{Im} y_{\text{ч.н}} = D \sin(pt + \beta - \gamma)$$

Общее решение Д.У.:

$q = e^{-\varepsilon t}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)) + D \sin(pt + \beta - \gamma)$ при $\varepsilon < \omega$

$q = e^{-\varepsilon t}(C_1 + C_2 t) + D \sin(pt + \beta - \gamma)$ при $\varepsilon = \omega$

$q = e^{-\varepsilon t}\left(C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}\right) + D \sin(pt + \beta - \gamma)$ при $\varepsilon > \omega$

С течением времени общее решение ЛОДУ стремится к нулю, и в решении неоднородного Д.У. остаётся только частное решение. В этом случае говорят об **установившихся вынужденных колебаниях**.

36. Основные свойства установившихся вынужденных колебаний. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.

Основные свойства установившихся вынужденных колебаний:

1) Это незатухающие колебания, они длятся так долго, как долго действует возмущающая сила;
2) Эти колебания не зависят от начальных условий;
3) При гармоническом возбуждении они происходят с частотой возмущающей силы;
4) Эти колебания отстают по фазе от возмущающей силы н величину γ, изменяющуюся от 0 до π.

Амплитуда D установившихся вынужденных колебаний и сдвиг по фазе γ зависят от соотношения между частотами p и ω и от коэффициента затухания ε. Эти зависимости называются амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристикой.

Введём безразмерный **коэффициент затухания** d:

$$d = 2\varepsilon/\omega$$

Введём **коэффициент расстройки** z:

$$z = p/\omega$$

Разделив числитель и знаменатель амплитуды D на ω^2, получим:

$$D = D_{\text{ст.}}\lambda,\quad D_{\text{ст.}} = \frac{Q_0}{c},\quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + d^2z^2}}$$

λ – **коэффициент динамичности** при наличии вязкого сопротивления. Зависимость $\lambda(z)$ – **амплитудно-частотная характеристика**.

Разделив числитель и знаменатель аргумента арктангенса в выражении для γ на ω^2, получим:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\frac{2\varepsilon}{\omega}\frac{p}{\omega}}{1 - p^2/\omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{dz}{1-z^2}\right)$$

Зависимость $\gamma(z)$ – **фазо-частотная характеристика**.

$$\gamma(0) = 0$$
$$\gamma(1) = \pi/2$$
$$\gamma(\infty) = \pi$$

37. Резонанс при наличии и отсутствии вязкого трения.

В случае совпадения частоты возмущающей силы с частотой свободных колебаний (собственной частотой) $p = \omega$ возникает **резонанс**.

При **отсутствии сил вязкого сопротивления** в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний, нарастая во времени, стремится к бесконечности.

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(pt + \beta)$$

$$q = q_{o.o} + q_{\text{ч.н}}$$

$$q_{o.o} = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$$

$$q_{\text{ч.н}} = Gt\cos(pt+\beta),\quad \ddot{q}_{\text{ч.н}} = -2Gp\sin(pt+\beta) - Gtp^2\cos(pt+\beta)$$

Подставим в Д.У. с учётом $p = \omega$: $-2Gp\sin(pt+\beta) - Gtp^2\cos(pt+\beta) + \omega^2 Gt\cos(pt+\beta) = f_0\sin(pt+\beta)$

$$G = -f_0/2p$$

$$q_{\text{ч.н}} = Gt\cos(pt+\beta) = -\frac{f_0 t}{2p}\cos(pt+\beta) = \frac{f_0 t}{2p}\sin\left(pt+\beta-\frac{\pi}{2}\right)$$

Видно, что условная амплитуда растёт по линейному закону: $A = f_0 t/2p$.

При **наличии сил вязкого сопротивления** в случае резонанса наблюдается экстремум функции амплитудно-частотной характеристики.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + d^2z^2}}$$

При резонансе $p = \omega \quad \Longrightarrow \quad z = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1/d = Д$, где Д – добротность системы. Таким образом, лобротность Д представляет собой значение коэффициента динамичности при резонансе.

38. Момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через заданную точку в заданном направлении.

Пусть ось Ol проходит через данную точку O. Выберем прямоугольную ДСК с началом в точке O, с осями которой ось Ol образует углы α, β, γ. Момент инерции механической системы относительно оси Ol:

$$J_l = \sum_i m_i h_i^2$$

Из прямоугольного треугольника OM_iA_i имеем $h_i = r_i \sin(\delta)$. Запишем векторное произведение:

$$\bar{l}_0 \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} =$$
$$= \bar{\imath}(z_i \cos(\beta) - y_i \cos(\gamma)) + \bar{\jmath}(x_i \cos(\gamma) - z_i \cos(\alpha)) + \bar{k}(y_i \cos(\alpha) - x_i \cos(\beta))$$

$$\left|\bar{l}_0 \times \bar{r}_i\right|^2 = (1 \cdot r_i \cdot \sin(\delta))^2 = h_i^2 =$$
$$= (z_i \cos(\beta) - y_i \cos(\gamma))^2 + (x_i \cos(\gamma) - z_i \cos(\alpha))^2 + (y_i \cos(\alpha) - x_i \cos(\beta))^2$$

$$h_i^2 = \left(x_i^2 + y_i^2\right)\cos^2(\gamma) + \left(x_i^2 + z_i^2\right)\cos^2(\beta) + \left(y_i^2 + z_i^2\right)\cos^2(\alpha) - 2x_i y_i \cos(\alpha)\cos(\beta) -$$
$$- 2x_i z_i \cos(\alpha)\cos(\gamma) - 2y_i z_i \cos(\beta)\cos(\gamma)$$

$$J_l = \cos^2(\alpha)\sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) + \cos^2(\beta)\sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) + \cos^2(\gamma)\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$
$$- 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\sum_i m_i x_i y_i - 2\cos(\alpha)\cos(\gamma)\sum_i m_i x_i z_i - 2\cos(\beta)\cos(\gamma)\sum_i m_i y_i z_i$$

$$\boxed{J_l = J_x \cos^2(\alpha) + J_y \cos^2(\beta) + J_z \cos^2(\gamma) - 2J_{xy}\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2J_{xz}\cos(\alpha)\cos(\gamma) - 2J_{yz}\cos(\beta)\cos(\gamma)}$$

J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} – центробежные моменты инерции относительно осей x,y и z соответственно.

39. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции однородных симметричных тел.

Эллипсоид инерции – поверхность второго порядка, построенная в любой точке тела – характеризует спектр моментов инерции тела относительно осей, проходящих через эту точку. Для построения этой поверхности на каждой оси Ol, проходящей через точку O, откладывают от этой точки отрезок $OK = 1/\sqrt{J_l}$.

Геометрическое место концов отрезков OK (точек K) и является эллипсоидом инерции.

Подставим выражения $\cos(\alpha) = x/OK = \sqrt{J_l}x, \quad \cos(\beta) = y/OK = \sqrt{J_l}y, \quad \cos(\gamma) = z/OK = \sqrt{J_l}z$ в выражение для J_l и получим:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1$$

Получили уравнение центральной поверхности второго порядка. Оси симметрии эллипсоида инерции, построенного в точке твёрдого тела, называются **главными осями инерции** для данной точки тела. Эллипсоид инерции, построенный в центре масс тела, называется **центральным эллипсоидом инерции**. Моменты инерции тела относительно главных осей инерции в точке называются **главными моментами инерции** для этой точки тела.

Если оси координат направить по главным осям эллипсоида инерции (OX, OY, OZ), то его уравнение примет вид:

$$J_X X^2 + J_Y Y^2 + J_Z Z^2 = 1$$

Сравнив это уравнение с каноническим уравнением эллипсоида получим:

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_X}},\ \ b = \frac{1}{\sqrt{J_Y}},\ \ c = \frac{1}{\sqrt{J_Z}}$$

То есть большей оси эллипсоида инерции соответствует меньший главный момент инерции тела для данной точки.

40. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Твёрдое тело с закреплённой точкой при движении в любой момент времени имеет угловую скорость $\overline{\omega}$. Главный момент количеств движения тела относительно неподвижной точки:

$$\overline{K}_O = \sum \overline{r}_i \times m_i \overline{v}_i,$$

где $\overline{v}_i = \overline{\omega} \times \overline{r}_i$.

$$K_x = \sum m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iz}) = \sum m_i \Big(y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i) \Big) =$$
$$= \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i$$

Аналогично находятся зависимости для K_y и K_z. Заменив суммы на осевые и центробежные моменты инерции получим:

$$K_x = J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z$$
$$K_y = -J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z$$
$$K_z = -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z$$
$$\overline{K}_O = K_x\overline{\imath} + K_y\overline{\jmath} + K_z\overline{k}$$

41. Динамические и кинематические уравнения Эйлера.

Линия узлов – линия пересечения координатных плоскостей Oxy (неподвижная СК) и OXY (подвижная СК).

Углы Эйлера:

Угол прецессии $\boldsymbol{\psi}$ – угол между линией узлов и осью Ox (неподвижная ось). Вращение вокруг Oz (ось прецессии).

Угол нутации $\boldsymbol{\theta}$ – угол между Oz (неподвижная ось) и OZ (подвижна ось). Вращение вокруг линии узлов (ось нутации).

Угол собственного вращения $\boldsymbol{\varphi}$ – угол между линией узлов и осью OX (подвижная ось). Вращение вокруг OZ (ось собственного вращения).

Кинематические уравнения Эйлера:

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin(\theta)\sin(\varphi) + \dot{\theta}\cos(\varphi)$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\sin(\theta)\cos(\varphi) - \dot{\theta}\sin(\varphi)$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos(\theta) + \dot{\varphi}$$

Теорема об изменении главного кинетического момента и теорема об изменении кинетической энергии:

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{L}_O,\ \ \dot{T} = W^{(e,i)}$$

Помимо инерциальной системы отсчёта S_0 с осями Ox, Oy, Oz и ортами $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ введём жёстко связанную с твёрдым телом вспомогательную систему координат S с началом в точке O, осями OX, OY, OZ и ортами $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$. Направим оси системы S не произвольно, а так, чтобы они совпадали с главными осями инерции твёрдого тела в точке O. В таких осях:

$$K_X = A\omega_X,\ \ K_Y = B\omega_Y,\ \ K_Z = C\omega_Z$$

$$T = K_O\omega\cos(\alpha)/2 = (\omega_X K_X + \omega_Y K_Y + \omega_Z K_Z)/2$$

A, B, C – соответствующие осевые моменты инерции тела относительно трёх главных осей инерции.

По формуле Бура:

$$\frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O = \bar{L}_O$$

Спроецировав на оси системы S, получим **динамические уравнения Эйлера**:

$$A\dot{\omega}_X + (\mathrm{C} - B)\omega_Y\omega_Z = L_X$$

$$B\dot{\omega}_Y + (A - C)\omega_Z\omega_X = L_Y$$

$$C\dot{\omega}_Z + (B - A)\omega_X\omega_Y = L_Z$$

42. Основные допущения приближенной теории гироскопа.

Гироскопом называют симметричное твердое тело, совершающее движение вокруг неподвижной точки O, расположенной на оси симметрии OZ. Ось OZ гироскопа, как ось симметрии, является одновременно его главной центральной осью инерции.

Основные допущения:

1) Угловая скорость ω_Z вращения гироскопа вокруг оси OZ много больше угловой скорости, которую может иметь сама ось OZ при ее повороте вместе с гироскопом вокруг точки: $\omega_Z^2 \gg \omega_X^2 + \omega_Y^2$.
2) Проекция вектора $\bar{\omega}$ на ось постоянна по модулю: $\omega_Z - const$.
3) Модуль проекции вектора $\bar{K}_O$ на ось OZ много больше остальных проекций: $K_Z^2 \gg K_X^2 + K_Y^2$.
4) Вектор $\bar{K}_O$ имеет постоянный модуль, равный его проекции на ось OZ: $K_O = \sqrt{(A\omega_X)^2 + (B\omega_Y)^2 + (C\omega_Z)^2} \approx C\omega_Z = K_Z - cosnt.$
5) Вектор $\bar{K}_O$ направлен по оси OZ: $\bar{K}_O = A\omega_X\bar{I} + B\omega_Y\bar{J} + C\omega_Z\bar{K} \approx C\omega_Z\bar{K}$

43. Особенности движения оси гироскопа. Теорема Резаля. Правило прецессии.

Свойства движения оси OZ:

1) Если на некотором интервале времени $\overline{L}_O \equiv 0$, то $\dot{\overline{K}}_O \equiv 0$. Следовательно, на этом интервале времени ось OZ не имеет вынужденной прецессии ($\Omega \equiv 0$) и сохраняет своё направление в инерциальной системе отсчёта.
2) Вынужденное прецессионное движение оси OZ не обладает инерционным свойством. То есть ось OZ становится неподвижной сразу же как только $\overline{L}_O \equiv 0$.
3) Чем больше модуль скорости $\dot{\varphi}$ собственного вращения тела, тем больше главный кинетический момент $\overline{K}_O$ и меньше скорость прецессии $\overline{\Omega}$.
4) Если на точку, расположенную на оси OZ вращающегося гироскопа подействовать силой, перпендикулярной оси OZ, то этак точка начнёт двигаться не в направлении силы, а перпендикулярно ей – в направлении вектора момента силы относительно неподвижной точки O.
5) Вектор $\overline{\Omega}$ вынужденной прецессии оси OZ перпендикулярен вектору $\overline{L}_O$.

44. Гироскопический момент. Правило Жуковского.

Гироскопический момент:

$$\overline{L}_r = \overline{\omega}_z \times J_z\overline{\Omega}$$
$$L_r = J_z\omega_z\Omega\sin(\theta)$$

Правило Жуковского: направление круговой стрелки скорости прецессии $\overline{\Omega}$ совпадает с направлением кратчайшего поворота вектора $\overline{K}_O$ к вектору $\overline{L}_O$.

45. Теорема Штейнера-Гюйгенса. Моменты инерции простейших тел (стержень, диск, цилиндр).

Выберем две системы прямоугольных декартовых координат $Oxyz$ и $CXYZ$, оси которых параллельны, расстояние между осями d, а точка C – центр масс системы. Моменты инерции относительно осей Oz и CZ будут:

$$J_{Oz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2), \;\; J_{CZ} = \sum_i m_i(X_i^2 + Y_i^2)$$

Координаты точки M_i в рассматриваемых системах связаны уравнениями:

$$x_i = X_i + x_C, \;\; y_i = Y_i + y_C$$

$$J_{Oz} = \sum_i m_i((X_i + x_C)^2 + (Y_i + y_C)^2) = \sum_i m_i(X_i^2 + Y_i^2) + 2x_C\sum_i m_iX_i + 2y_C\sum_i m_iY_i + (x_C^2 + y_C^2)\sum_i m_i$$

$$\sum_i m_i = M, \;\; \sum_i m_iX_i = 0, \;\; \sum_i m_iY_i = 0, \;\; x_C^2 + y_C^2 = d$$

Подставив, получим **теорему Штейнера**:

$$J_{Oz} = J_{CZ} + Md^2$$

Моменты инерции однородных тел:

Стержень: $J_z = \int y^2dm = \int y^2\rho dl = \int y^2M/l\,dy = M/l\int_0^l y^2dy = Ml^2/3$.

Диск: $J_z = \int r^2dm = \int r^2(2\pi rdr\rho) = \int r^2(2\pi rdr(M/\pi R^2)) \; = 2M/R^2\int_0^R r^3dr = MR^2/2$.

Цилиндр: $J_z = \int r^2dm = \int r^2(\rho dV) = \int r^2(M/VdV) = \int r^2((M/\pi R^2H)(H2\pi rdr)) \; = \int r^2((2M/R^2)rdr) = 2M/R^2\int_0^R r^3dr = MR^2/2$.