ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Оглавление

Аксиомы динамики. Инерциальная система отсчета. 2

Дифференциальные уравнения движения точки в векторной форме и в проекциях на декартовы и естественные оси координат. 2

Две основные задачи динамики точки. Интегралы уравнений движения. 3

Диф. уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета. 3

Принцип относительности Галилея-Ньютона. 4

Центр масс системы материальных точек. Теорема о движении центра масс. Частные случаи. 4

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и интегральной формах. Частные случаи. 6

Диф. уравнения поступательного движения твердого тела. 7

Кинетический момент точки и системы материальных точек относительно центра и оси. 7

Теорема об изменении кинетического момента для точки и системы материальных точек. Законы сохранения кинетического момента. 9

Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения. 10

Диф. уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси. 11

Движение точки под действием центральной силы, теорема площадей. 11

Кинетический момент системы материальных точек при сложном движении. 13

1. Теорема об изменении кинетического момента системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру масс. 14

Диф. уравнения плоского движения твердого тела. 15

Элементарная и полная работа силы. Мощность. Работа равнодействующей силы. 16

Работа сил, приложенных к твердому телу, при его различных движениях. 18

Кинетическая энергия точки и системы материальных точек. Теорема Кенига. 19

Кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения. 20

Теорема об изменении кинетической энергии для точки и системы материальных точек. 21

Потенциальное силовое поле. Силовая функция и потенциальная энергия тела(точки). 23

2. Поверхности уровня и их свойства 25

Примеры вычисления силовых функций однородного поля силы тяжести и линейной силы упругости. 26

Закон сохранения полной механической энергии системы. 27

3. Принцип Даламбера для точки и системы материальных точек 27

Главный вектор и главный момент сил инерции в общем и частных случаях движения твердого тела. 29

Связи и их классификация. 30

Элементарная работа силы на возможном перемещении. Идеальные связи. Примеры. 31

Принцип возможных перемещений. 33

Общее уравнение динамики. 34

Обобщенные силы. Способы вычисления обобщенных сил. 34

Условия равновесия механической системы, выраженные в обобщенных силах. 37

Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода. 37

Момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через заданную точку в заданном направлении. 40
Эллипсоид инерции. Главные оси инерции симметричных твердых тел. 41
Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. 45
Кинетическая энергия твердого тела при движении вокруг неподвижной точки. 46
Вывод кинематических и динамических уравнений Эйлера. 46
Приближенная теория гироскопа. Основные понятия и допущения. 49
Особенности движения оси гироскопа. Теорема Резаля. Правило прецессии. 50
Гироскопический момент. Правило Жуковского. 52

Аксиомы динамики. Инерциальная система отсчета.

Инерциальная система координат – условно неподвижная система координат, а так же любая другая, тело отсчета которой перемещается поступательно, прямолинейно, равномерно.

Аксиомы динамики.

1) *Аксиома инерции(1ЗН):* существуют системы отсчета, называемые инерциальными, по отношению к которым материальная точка, не испытывающая действия сил или находящаяся под действием уравновешенной системы сил, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

2) *2ЗН*: в ИСО при действии на свободную материальную точку одной силы, ускорение, которое получает материальная точка относительно этой ИСО прямо пропорционально силе, действующей на эту точку и обратно пропорционально её массе:

$\bar{a} = \bar{F}/m$

3) *3ЗН*: материальные объекты взаимодействуют с силами, равными по модулю и противоположно направленными.

4) *Аксиома о связях*: состояние механической системы не изменится, если отбросить связи и заменить их реакциями

5) *Аксиома о суперпозиции действия сил*: ускорение, полученное точкой под действием системы сил, равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил

$\{\bar{F}_i\}_{i=1,n}$

$\bar{a}_i = \bar{F}_i/m$ => $\bar{a} = \sum \bar{a}_i = \frac{\sum \bar{F}_i}{m}$

Дифференциальные уравнения движения точки в векторной форме и в проекциях на декартовы и естественные оси координат.

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i$$

Где $\bar{F} = \sum \bar{F}_i$ – равнодействующая всех сил, приложенных к точке.

$\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$

Тогда получаем:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \bar{F}_i \quad \text{или} \quad m\ddot{\bar{r}} = \sum \bar{F}_i$$

$\bar{F}_i = \bar{F}_i(t, \bar{v}, \bar{r})$

В проекциях на декаторвы оси координат:	**В проекциях на естественные оси координат:**

$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = m\ddot{x} = \sum\limits_i F_{ix} \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = m\ddot{y} = \sum\limits_i F_{iy}; \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = m\ddot{z} = \sum\limits_i F_{iz} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathrm{m}a_\tau = \mathrm{m}\dfrac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{dt}} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{S}} = \sum\limits_{\mathrm{i}} \mathrm{F}_{\mathrm{i}\tau} \\ ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} = m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_{in} \\ ma_b = 0 = \sum\limits_i F_{ib} \end{cases}$ $v = \lvert\bar{v}\rvert = \lvert\bar{v}_\tau\rvert$

Две основные задачи динамики точки. Интегралы уравнений движения.

1.Прямая задача:

Дано: m, $\overline{F_i}$ $\quad \bar{r} = \bar{r}(t)$?

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = m\ddot{x} = \sum F_{ix} \\ m\frac{dv_y}{dt} = m\ddot{y} = \sum F_{iy}; \\ m\frac{dv_z}{dt} = m\ddot{z} = \sum F_{iz} \end{cases} \begin{cases} v_x = v_x(t, c_1, c_2, c_3) \\ v_y = v_y(t, c_1, c_2, c_3); \\ v_z = v_z(t, c_1, c_2, c_3) \end{cases} \begin{cases} x = x(t, c_1, \dots, c_6) \\ y = y(t, c_1, \dots, c_6); \\ z = z(t, c_1, \dots, c_6) \end{cases}$$

первый интеграл второй интеграл уравнения движения

+н.у. t=0; $v_x = v_{x0};\ v_y = v_{y0};\ v_z = v_{z0};$

$x = x_0; y = y_0; z = z_0$

2.Обратная задача:

Дано m, $\bar{r} = \bar{r}(t)$ $\quad \overline{F_i} = F_i(t)$–?

$\sum \overline{F}_i = m\ddot{\bar{r}}$

Диф. уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета.

__Неинерциальной__ является система отсчета, которая с ускорением движется относительно другой, инерциальной системы отсчета.

$m\bar{a} = \bar{F}$ – в ИСО.

Представим абсолютное ускорение точки в виде трех составляющих.

$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_К;$

Где $\bar{a}_r$-относительное ускорение; $\bar{a}_e$-переносное ускорение; $\bar{a}_К$- кориолисово ускорение.

Тогда $m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_К) = \bar{F};$

$$m\bar{a}_r = \bar{F} - m\bar{a}_e - m\bar{a}_К$$

$\bar{F}$- активные силы

$\overline{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$- переносная сила инерции;

$\overline{\Phi}_К = -m\bar{a}_К$ – Кориолисова сила инерции.

Тогда получаем уравнение движения точки в НСО:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_К$$

__Переносная сила инерции__ направлена в сторону, противоположную переносному ускорению и равна по величине произведению массы точки на её переносное ускорение.

Сила инерции Кориолиса направлена в сторону, противоположную ускорению Кориолиса и равна по величине произведению массы на ускорение Кориолиса.

$$\bar{a}_К = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$$

$\bar{\omega}_e$- *переносное угловое ускорение;*
$\bar{v}_r$- *скорость точки относительно подвижной системы координат.*

Частные случаи

1) $\bar{v}_r = \overline{const}$; $\bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_r}{dt} = 0$

Тогда $\bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_К = 0$ – условие равномерного и прямолинейного движения точки относительно подвижной системы координат.

2) $\bar{v}_r = 0$; $\bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_r}{dt} = 0$; $\bar{a}_К = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}_К = 0$

Тогда $\bar{F} + \bar{\Phi}_e = 0$ – условие покоя материальной точки относительно подвижной системы координат.

Принцип относительности Галилея-Ньютона.

Предположим, что подвижная система координат движется поступательно.

$$\bar{\omega}_e = 0; \Rightarrow \bar{a}_К = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}_К = 0$$

Тогда

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e$$

Предположим, что точка О – начало подвижной системы координат
$\Rightarrow \bar{v}_O = \overline{const} = \bar{v}_e$;

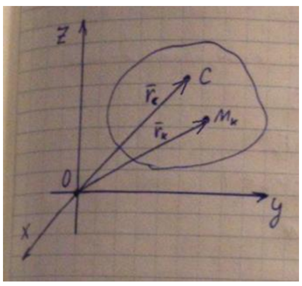
$$\bar{a}_e = \frac{d\bar{v}_e}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}_e = 0$$

Тогда $m\bar{a}_r = \bar{F}$

Принцип относительности Галилея-Ньютона: если существует хотя бы 1 инерциальная система отсчета, то существует и множество других инерциальных систем, движущихся поступательно и равномерно относительно 1-ой системы.

*Невозможно путем наблюдения за механическим движением тел отличить одну инерциальную систему отсчета от другой.

Центр масс системы материальных точек. Теорема о движении центра масс. Частные случаи.



N материальных точек;
$M_к$- произвольная точка системы;
$m_к$ – масса к-ой точки системы =const>0;
$\bar{r}_к$ – радиус-вектор к-ой точки;
М-масса всей системы

Массой материальной системы называют сумму масс точек, составляющих её, т.е. $M = \sum m_к = const > 0$

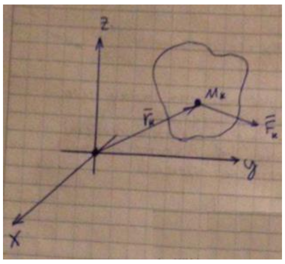
<u>Центром масс материальной системы</u> (центром инерции) называют точку, радиус вектор которой определяется следующим образом: $\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}$

$$\bar{r}_c = x_c\bar{i} + y_c\bar{j} + z_c\bar{k}; \ \ \bar{r}_к = x_к\bar{i} + y_к\bar{j} + z_к\bar{k}$$

Тогда $\boxed{x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M};\ y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M};\ z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}}$

$\sum m_k \bar{r}_k$ – статический момент масс точек системы относительно начала координат

$\sum m_k x_k;\ \sum m_k y_k;\ \sum m_k z_k$ – статические моменты масс точек системы относительно координатных плоскостей Oyz,Oxz,Oxy



<u>Теорема о движении центра масс.</u>

N - число точек;
$M_к$- произвольная точка системы;
$m_к$ – масса к-ой точки системы =const>0;
$\bar{r}_к$ – радиус-вектор к-ой точки;
$\bar{F}_к$- равнодействующая всех сил, приложенных к точке

$$m_к \bar{a}_к = \bar{F}_к$$

$$\bar{F}_к = \bar{F}_к^{(e)} + \bar{F}_к^{(i)} \Rightarrow \begin{cases} m_к \bar{a}_к = \bar{F}_к^{(e)} + \bar{F}_к^{(i)} \\ K = 1,\dots,N \end{cases}, \ \sum m_к \bar{a}_к = \sum \bar{F}_к^{(e)} + \cancelto{0}{\sum \bar{F}_к^{(i)}}$$

$$\sum m_к \bar{a}_к = \sum m_к \frac{d^2 \bar{r}_к}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\left(\sum m_к \bar{r}_к\right)}_{M\bar{r}_c} = \frac{d^2}{dt^2}(M\bar{r}_c) = M\bar{a}_c$$

Тогда $M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^{(e)}$ **(4)**

<u>Теорема о движении центра масс</u>: центр масс системы движется так же, как материальная точка, масса которой = массе системы, и к которой приложены все внешние силы, действующие на материальную систему.

<u>Частные случаи.</u>

1. Если $\sum \bar{F}_k^{(e)} = \overline{R^{(e)}} = 0$, то из (4) получаем $\bar{a}_c = \frac{d\bar{v}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{v}_c = \overline{const} = \bar{v}_c(0)$

Если при t=0 $\bar{v}_c(0)$=0, то $\bar{v}_c = \bar{v}_c(0) = 0$

$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{r}_c = \overline{const}$ (т.е. центр масс остается неподвижным)

<u>Если главный вектор внешний сил</u>, приложенных к точкам материальной системы =0, то центр её масс относительно ИСО движется равномерно, прямолинейно или сохраняет состояние покоя(v_c=0)

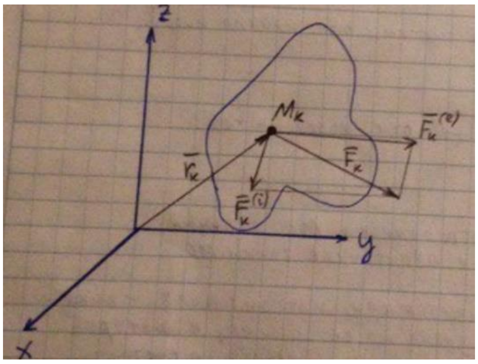
2. Если $\sum {F_{kx}}^{(e)} = 0$, то из (4) $M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^{(e)}$

на x: $m\frac{dv_{cx}}{dt} = \sum {F_{kx}}^{(e)} = 0 \ \Rightarrow \frac{dv_{cx}}{dt} = 0 \Rightarrow v_{cx} = const = v_{cx}(0)$

если $v_{cx}(0) = 0 \ \Rightarrow v_{cx} = 0$. Т.к. $v_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = 0 \ \Rightarrow x_c = const$

<u>*Если проекция главного вектора всех внешних сил*</u>, приложенных к материальной системе, на какую-либо координатную ось =0, то центр масс системы в направлении этой оси движется с постоянной скоростью $v_{cx} = const$, либо сохраняет относительно неё состояние покоя $x_c = const$

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и интегральной формах. Частные случаи.



N точек;
Oxyz –ИСО
Мк – точка системы
$m_к$ – масса к-ой точки системы
$\bar{r}_к$ – радиус-вектор к-ой точки;
$\bar{F}_к$- равнодействующая всех сил, приложенных к точке

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}$$

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} ; \quad \bar{a}_k = \frac{d\bar{v}_k}{dt}$$

$$\begin{cases} m_k \dfrac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} \\ k = 1, \dots, N \end{cases} \rightarrow \sum m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)} + \cancel{\sum \bar{F}_k^{(i)}}^{\,0}$$

Количеством движения механической системы **называют вектор $\bar{Q}$, равный геометрической сумме количеств движения точек системы:**

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{N} \bar{q}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k . \qquad (15.25)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum m_k \bar{v}_k\right)}_{\bar{Q}} = \sum \bar{F}_k^{(e)} \Rightarrow \boxed{\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}}$$

-теорема об изменении количества движения системы материальных точек в дифференциальной форме

<u>*Дифференциал от количества движения*</u> материальной системы по времени = сумме всех внешних сил, приложенных к точкам системы.

$$t=0 : \quad \bar{Q}(0) = \bar{Q}_0$$
$$t=t : \quad \bar{Q}(t) = \bar{Q}$$

$$\int_{\bar{Q}_0}^{\bar{Q}} d\bar{Q} = \int_0^t \sum \bar{F}_k^{(e)} dt \Rightarrow \bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^t \bar{F}_k^{(e)} dt$$

$$\int_0^t \bar{F}_k^{(e)} dt = \bar{S}_k^{(e)}$$ — полный импульс внешних сил, приложенных к к-ой точке за время t

Тогда $\boxed{\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^{(e)}}$ - теорема импульсов системы мат.точек в интегральной форме

Изменение количества движения материальной системы за конечный промежуток времени t = сумме полных импульсов внешних сил, приложенных к точкам системы за тот же период времени.

Частные случаи

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(e)} = \bar{R}^{(e)}. \qquad (15.29)$$

1. Пусть главный вектор всех внешних сил, приложенных к точкам системы $\overline{R^{(e)}} = 0$. Тогда из уравнения (15.29) следует, что:

$$\bar{Q} = \overline{const}$$

Если главный вектор всех внешних сил, приложенных к точкам механической системы, равен нулю, то вектор количества движения системы постоянен при движении системы.

2. Пусть проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось координат $R_x^{(e)} = \sum F_{kx}{}^{(e)} = 0$. Тогда из пункта 1 следует, что Q_x=*const*
   Если проекция главного вектора внешних сил, действующих на точки механической системы, на какую-либо ось равна нулю, то проекция вектора количества движения системы на ту же ось постоянна при движении системы.

Диф. уравнения поступательного движения твердого тела.

Пусть твердое тело движется поступательно.

Поступательное движение – такое движение, при котором траектории скорости, ускорения одинаковы.

т.С – центр масс; М-масса тела.

$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^{(e)}$

Т.к. ускорение центра масс = ускорению любой точки твердого тела(т.к. поступательно движется), $\bar{a}_{\text{c}} = \bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, тогда

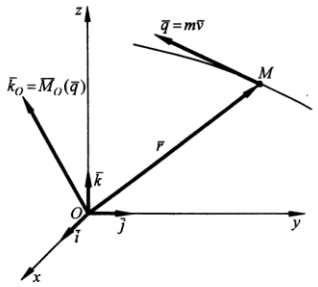
$$M\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

Дифференциальное уравнение поступательного движения твердого тела в проекциях на оси в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^{(e)} \\ M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^{(e)} \\ M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^{(e)} \end{cases}$$

Кинетический момент точки и системы материальных точек относительно центра и оси.

Кинетический момент точки относительно центра – векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора материальной точки, проведенного из этого центра, на количество движения точки:



$$\bar{k}_o = \bar{M}_o(\bar{q}) = \bar{r} \times \bar{q} = \bar{r} \times m\bar{v}$$

$\bar{k}_o$ – приложен к центру, относительно которого он вычисляется.

$$\overline{k_0} = k_x\bar{i} + k_y\bar{j} + k_z\bar{k}$$

Так как

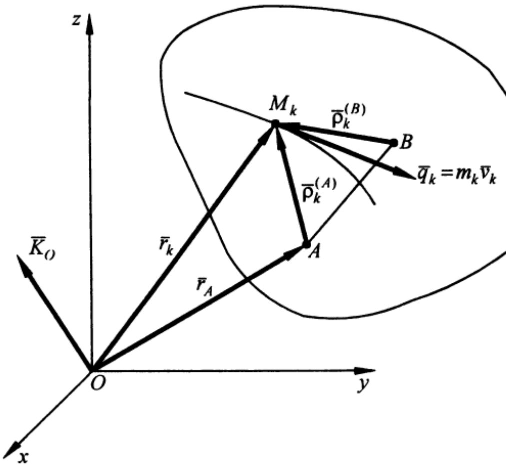
$$\bar{k}_O = \overline{M}_O(\bar{q}) = \bar{r} \times m\bar{v} = m\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} k_x = m(yv_z - zv_y) \\ k_y = m(zv_x - xv_z) \\ kz = m(xv_y - yv_x) \end{cases}$$

Единица измерения момента количества движения в СИ – килограмм-метр в квадрате на секунду (кг*м^2/с)

Кинетическим моментом системы материальных точек относительно центра О называют геометрическую сумму кинетических моментов материальных точек системы относительно того же центра О:

$$\overline{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \bar{k}_{Ok} = \sum_{k=1}^{N} \overline{M}_O(\bar{q}_k) = \sum_{k=1}^{N} \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k \ .$$



С учетом (15.38) запишем главные моменты количеств движения механической системы относительно осей координат:

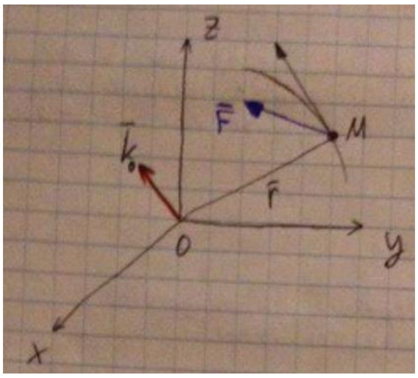
$$K_x = \sum_{k=1}^{N} M_x(m_k\bar{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k);$$

$$K_y = \sum_{k=1}^{N} M_y(m_k\bar{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k); \qquad (15.39)$$

$$K_z = \sum_{k=1}^{N} M_z(m_k\bar{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k).$$

Кинетический момент относительно центра О приложен в центре, отсительно которого вычисляется.

Теорема об изменении кинетического момента для точки и системы материальных точек. Законы сохранения кинетического момента.



m – масса
$\bar{F}$- равнодействующая сила;
$\bar{r}$- радиус-вектор

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}; \quad \Rightarrow \quad \bar{r}\times m\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{r}\times\bar{F}$$

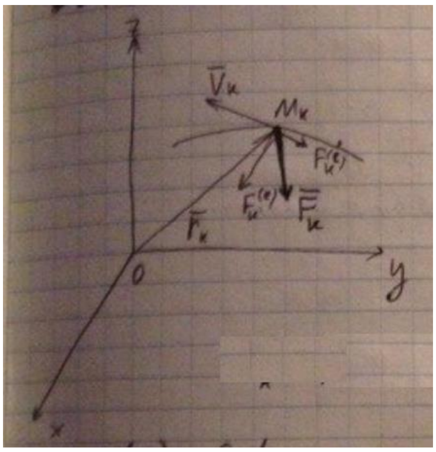
$\bar{r}\times\bar{F}=\bar{M}_0(\bar{F})$ - момент силы относительно начала координат

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{\bar{r}\times m\bar{v}}_{\bar{k}_0})=\overbrace{\underbrace{\frac{d\bar{r}}{dt}}_{\bar{v}}\times m\bar{v}}^{0}+\bar{r}\times m\frac{d\bar{v}}{dt};$$

Тогда $\boxed{\frac{d\bar{k}_0}{dt}=\bar{M}_0(\bar{F})}$ - теорема об изменении кинетического момента материальной точки

Производная по времени от кинетического момента материальной точки относительно некоторого центра равна моменту силы, приложенной в точке, относительно того же центра.

Для системы материальных точек:



N точек;
Mк – точка системы
$m_к$ – масса к-ой точки системы
$\bar{r}_к$ – радиус-вектор к-ой точки;
$\bar{v}_k$- скорость к-ой точки;
$\bar{F}_к$- равнодействующая всех сил (и внутренних, и внешних), приложенных к к-ой точке

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(e)}) + M_o(\bar{F}_k^{(i)}) \\ k = 1, \dots, N \end{cases}$$

$$\sum \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(i)})$$

$\sum \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(i)}) = \bar{L}_o^{(i)} = 0$ – главный момент (=0 по св-ву внутр. сил)

$\sum \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{L}_o^{(e)}$

$\bar{K}_o$ – кинетический момент системы мат. точек относ. центра O

$$\sum \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \frac{d}{dt} \overbrace{\sum (\underbrace{\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k}_{\bar{k}_{ok}})}^{\bar{K}_o}$$

тогда $\boxed{\dfrac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{L}_o^{(e)}}$ – теорема об изменении кинет. момента м. системы

Производная по времени от кинетического момента точек материальной системы относительно некоторого центра = главному моменту всех внешних сил, приложенных к точкам системы относительно того же центра.

Законы сохранения кинетического момента

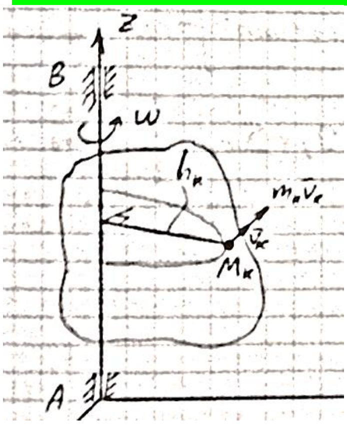
1) Пусть $\bar{L}_o^{(e)} = \sum \bar{M}_o\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) = 0$

$\dfrac{d\bar{K}_o}{dt} = \bar{L}_o^{(e)} = 0 \; => \bar{K}_o = \overline{const}$

2) Пусть $L_{ox}^{(e)} = 0 => \frac{dK_x}{dt} = L_{ox}^{(e)} = 0 => \; K_x = const$

Кинетический момент внешних сил, приложенных к точкам системы в проекциях на какую-либо ось декартовой системы координат const по величине, если =0 проекция на эту ось главного момента внешних сил, приложенных к точкам системы.

Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения.



$$\bar{K}_0 = \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k)$$

Определим относительно Oz:

$$K_z = \sum M_z(m_k \bar{v}_k)$$

~~$M_{kz} = h_k \cdot m_k \cdot v_k$~~

$$M_z(m_k \bar{v}_k) = m_k h_k v_k; \quad v_k = \omega \cdot h_k$$

Тогда $\begin{cases} M_z(m_k \bar{v}_k) = m_k \omega h_k^2 \\ k = 1, \dots, n \end{cases} \Rightarrow K_z = \sum m_k \omega h_k^2 = \omega \sum m_k h_k^2$

$\sum m_k h_k^2 = I_z$ - момент инерции тв. тела отн. оси вращения

Тогда $\boxed{K_z = I_z \omega}$

Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость вращения тела.

Диф. уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}); \\ &K_z = I_z \omega = I_z \dot{\varphi} \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{d}{dt}(I_z \dot{\varphi}) = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)})}$$

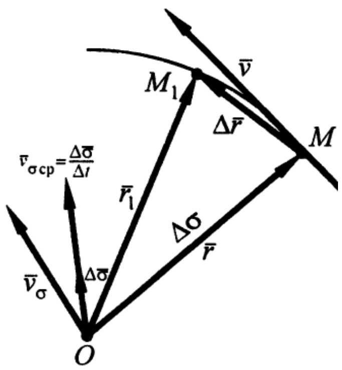
Произведение момента инерции твердого тела относительно оси вращения на его угловое ускорение = сумме моментов всех внешних сил, приложенных к точкам системы относительно этой же оси.

Частный случай:

если $\sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = 0 \Rightarrow I_z \dot{\varphi} = const \Rightarrow \boxed{I_z^0 \omega_0 = I_z \omega_z = const}$

Движение точки под действием центральной силы, теорема площадей.

Теорема площадей



$$\bar{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \left(\bar{r} \times \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{v}) = \frac{1}{2}\overline{M}_O(\bar{v}), \quad (15.69)$$

где $\overline{M}_O(\bar{v})$ — момент скорости точки M относительно центра O.

Теорема площадей. Запишем выражение для момента количества движения материальной точки (15.36), используя формулу (15.69) для секторной скорости:

$$\bar{k}_O = \overline{M}_O(\bar{q}) = \bar{r} \times m\bar{v} = 2m\bar{v}_\sigma. \quad (15.71)$$

Преобразуем уравнение (15.54), выражающее теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра O, с учетом (15.71):

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = 2m\frac{d\bar{v}_\sigma}{dt} = \bar{r} \times \overline{F}, \quad (15.72)$$

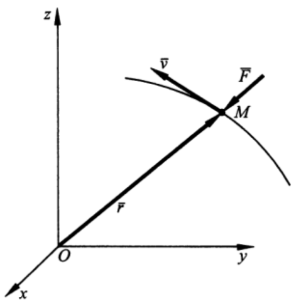
или

$$2m\frac{d\bar{v}_\sigma}{dt} = \overline{M}_O(\overline{F}). \quad (15.73)$$

Записанную в виде (15.73) теорему об изменении момента количества движения материальной точки называют ***теоремой площадей***.

Движение точки под действием центральной силы

Движение точки под действием центральной силы. Рассмотрим движение точки M массой m под действием силы $\overline{F}$, линия действия которой проходит через центр O во все время движения точки M (рис. 15.23). Такую силу называют *центральной*. Центральными являются силы взаимодействия Солнца с планетами Солнечной системы, в частности с Землей.



Согласно определению центральной силы, момент силы $\bar{F}$ относительно точки O

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = 0,$$

и из (15.72) следует, что

$$\frac{d\,\bar{k}_O}{dt} = 0, \text{ или } \bar{k}_O = \overline{\text{const}}. \qquad (15.74)$$

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат, согласно (15.37), имеем

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = C_1;\; k_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = C_2; \qquad (15.75)$$
$$k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_3.$$

C_1, C_2, C_3 — постоянные.

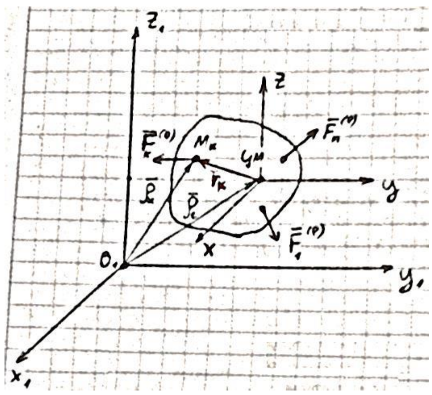
Умножая первое уравнение (15.75) на x, второе — на y, третье — на z и складывая полученные выражения, получаем

$$xk_x + yk_y + zk_z = C_1x + C_2y + C_3z = 0,$$

т. е. координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению плоскости, проходящей через начала координат.

Итак, *траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской кривой, лежащей в плоскости, проходящей через центр силы.*

Кинетический момент системы материальных точек при сложном движении.



$O_1x_1y_1z_1$ – ИСО
cxyz – подвижная система координат, движущаяся вместе с центром масс системы поступательно;
Мк-точка;
$m_к$-масса к-ой точки;
$\bar{\rho}_к$ – радиус-вектор точки в ИСО;
$\bar{\rho}_c$ – радиус вектор центра масс относительно ИСО;
$\bar{r}_к$ – радиус-вектор точки относительно центра масс системы
с – точка центра масс

$$\bar{\rho}_к = \bar{\rho}_c + \bar{r}_к \Rightarrow \frac{d\bar{\rho}_к}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_c}{dt} + \frac{d\bar{r}_к}{dt}$$

$\frac{d\bar{\rho}_к}{dt} = \bar{v}_к$ – скорость к-ой точки относительно неподвижной системы координат;

$\frac{d\bar{\rho}_c}{dt} = \bar{v}_c = \bar{v}_{\text{к}e}$ – скорость центра масс = переносная скорость движения точки;

$\frac{d\bar{r}_{\text{к}}}{dt} = \bar{v}_{\text{к}}^{(r)}$ – относительная скорость по отношению к центру масс;

Тогда $\bar{v}_{\text{к}} = \bar{v}_c + \bar{v}_{\text{к}}^{(r)}$

$$\bar{K}_{O_1} = \sum \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum (\bar{\rho}_c + \bar{r}_k) \times m_k (\bar{v}_c + \bar{v}_k^{(r)}) = \sum \bar{\rho}_c \times m_k \bar{v}_c + \sum \bar{\rho}_c \times m_k \bar{v}_k^{(r)} + \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_c + \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k^{(r)}$$

$$\sum \bar{\rho}_c \times m_k \bar{v}_c = \bar{\rho}_c \times \bar{v}_c \sum m_k = \bar{\rho}_c \times M \bar{v}_c \text{ —}$$

- кинетический момент центра масс системы как, если бы в нем была сосредоточена вся его масса относительно неподвижной точки.

$$\sum \bar{\rho}_c \times m_k \bar{v}_k^{(r)} = \bar{\rho}_c \times \sum m_k \bar{v}_k^{(r)} = \bar{\rho}_c \times \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{\rho}_c \times \frac{d}{dt}(\underbrace{\sum m_k \bar{r}_k}_{\underbrace{M\bar{r}_c}_{0}}) = 0$$

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_c = \underbrace{\sum \bar{r}_k m_k}_{\underbrace{M\bar{r}_c}_{0}} \times \bar{v}_c = 0$$

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k^{(r)} = \bar{K}_c^{(r)} \text{ —}$$

- кинетический момент системы материальных точек в относительном её движении по отношению к подвижной системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс системы.

тогда $$\boxed{\bar{K}_{O_1} = \bar{\rho}_c \times M \bar{v}_c + \bar{K}_c^{(r)}}$$

__Кинетический момент системы материальных точек__ при её сложном движении относительно неподвижного центра = сумме кинетического момента центра масс системы относительно этого центра, как если бы в центре масс была сосредоточена масса всей материальной системы и кинетического момента материальной системы в её относительном движении в подвижной системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс системы.

1. Теорема об изменении кинетического момента системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру масс.

$$\frac{d\bar{K}_{O_1}}{dt} = \sum \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k^{(e)}) = \sum \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\frac{d\bar{K}_{O_1}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\rho}_c \times M\bar{v}_c + \bar{K}_c^{(r)}) = \sum (\bar{\rho}_c + \bar{r}_k) \times \bar{F}_k^{(e)} = \sum \bar{\rho}_c \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\frac{d\bar{\rho}_c}{dt} \times M\bar{v}_c + \bar{\rho}_c \times M \underbrace{\frac{d\bar{v}_c}{dt}}_{\bar{a}_c} + \frac{d\bar{K}_c^{(r)}}{dt} = \sum \bar{\rho}_c \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\frac{d\rho_c}{dt} \times M\bar{v}_c = \bar{v}_c \times M\bar{v}_c = 0$$

$$\rho_c \times \left(M\bar{a}_c - \Sigma \bar{F}_k^{(e)}\right) + \frac{d\bar{K}_c^{(e)}}{dt} = \Sigma \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$$

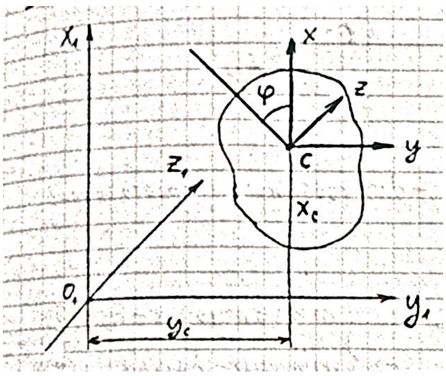
Согласно теореме о движении центра масс м. системы,

$$M\bar{a}_c = \Sigma \bar{F}_k^{(e)} \Rightarrow M\bar{a}_c - \Sigma \bar{F}_k^{(e)} = 0$$

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_c^{(e)}}{dt} = \Sigma \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}}$$

Производная по времени от кинетического момента системы материальных точек относительно центра масс в её относительном движении относительно подвижной системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс = сумме моментов всех внешних сил, приложенных к точкам системы относительно её центра масс.

Диф. уравнения плоского движения твердого тела.



$O_1x_1y_1z_1$ – ИСО

S-сечение твердого тела, движущегося поступательно (тела, участвующего в плоском движении)

c –центр масс

$$\begin{cases} x_c = f_1(t) \\ y_c = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases}$$

$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

пр.x: $M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^{(e)}$

пр.y: $M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^{(e)}$

пр.z: $M\ddot{z}_c = 0$

$$\frac{d\bar{K}_c^{(r)}}{dt} = \sum \bar{M}_c(\bar{F}_k^{(e)})$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{пр.z:}\ \dfrac{dK_{cz}}{dt} = \sum M_{cz}(\bar{F}_k^{(e)}) \\ K_{cz} = I_{cz}\omega = I_{cz}\dot{\varphi} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d(I_{cz}\dot{\varphi})}{dt} = \sum M_{cz}(\bar{F}_k^{(e)}) \Rightarrow I_{cz}\ddot{\varphi} = \sum M_{cz}(\bar{F}_k^{(e)})$$

Тогда

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^{(e)} \\ M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^{(e)} \end{array}\right\} \text{описыв. поступательную часть движения вместе с его центром масс} \\ I_{cz}\ddot{\varphi} = \sum M_{cz}(\bar{F}_k^{(e)}) \end{cases}$$

$I_{cz}\ddot{\varphi} = \sum M_{cz}(\bar{F}_k^{(e)})$ – описыв. вращательную составляющую плоского движения тв. тела относительно оси, проход. через ц. масс ⊥ плоскости его движения.

Элементарная и полная работа силы. Мощность. Работа равнодействующей силы.

$$dA = \bar{F}d\bar{r}$$

Элементарной работой силы называется скалярное произведение вектора силы на дифференциал радиус-вектора точки её приложения.

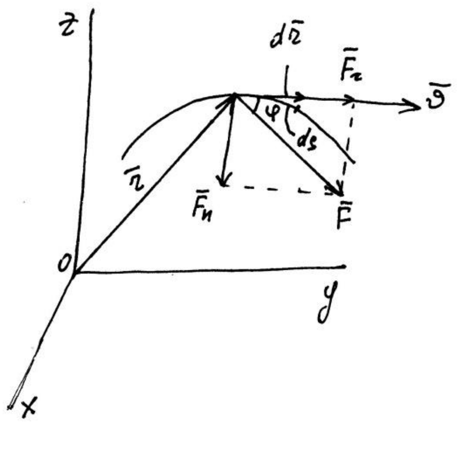
$$\bar{F} = F_x\bar{\imath} + F_y\bar{\jmath} + F_z\bar{k}$$
$$d\bar{r} = dx\bar{\imath} + dy\bar{\jmath} + dz\bar{k}$$

Тогда

$$dA = \bar{F}d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

(аналитическая форма записи элементарной работы)

$$dA = \bar{F}d\bar{r} = |\bar{F}|\cdot|d\bar{r}|\cdot\cos\varphi = F\cos\varphi\, dr$$



Oxyz – ИСО

$|d\bar{r}| = ds \Rightarrow \boxed{dA = F\cos\varphi\, ds}$

$F\cos\varphi = F_\tau \Rightarrow \boxed{dA = F_\tau\, ds}$

$dA = \bar{F}d\bar{r} = \bar{F}\cdot\bar{v}dt = \bar{F}dt\,\bar{v}$

$$\boxed{dA = \bar{F}dt\,\bar{v}}$$

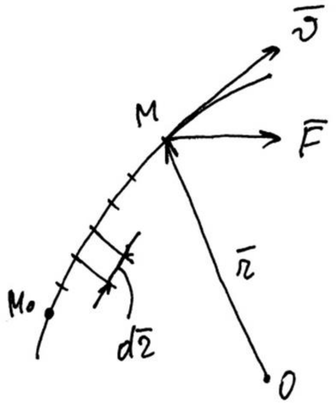
$dA = F_\tau ds$ - элементарная работа силы равна произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.

$dA = (\bar{F}dt)\bar{v}$ - элементарная работа силы равна скалярному произведению элементарного импульса силы ($\bar{F}dt$) на скорость точки её приложения.

Если скалярное произведение записать в аналитическом виде, то:

$$dA = \bar{F}\bar{v}dt = (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})dt$$

Полная работа силы



$$A = \lim_{n\to\infty} \Sigma \bar{F} d\bar{r}$$

$$A = \int_{M_0}^{M} \bar{F} d\bar{r} = \int_{M_0}^{M} \bar{F} d\bar{r} = \int_{M_0}^{M} dA(\bar{F})$$

Полная работа силы на некотором перемещении = сумме элементарных работ этой силы на бесконечно малых участках траектории, на которые мы произвольным образом делим её.

$$A = \int_{M_0}^{M} \bar{F} d\bar{r} = \int_{M_0}^{M} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$

*Работа силы зависит от характера движения точки приложения силы. Так, A=0, если сила приложена к неподвижной точке или к точке, скорость которой во время движения равна нулю (например, в МЦС).

$$A = \int_0^t (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\,dt$$

Мощность

$$\boxed{W = \frac{dA}{dt}} \qquad [W] = Вт$$

Мощность – отношение элементарной работы силы к промежутку времени, за которое оно произошло.

$$dA = \bar{F}d\bar{r} \Rightarrow W = \bar{F}\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\bar{v}$$

$$\boxed{W = \bar{F}\bar{v}}$$

Таким образом, мощность силы равна скалярному произведению силы на скорость точки её приложения.

Работа равнодействующей силы

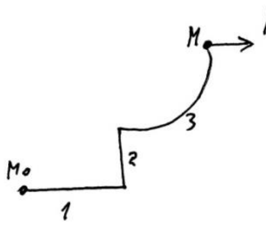
$$(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_N) \backsim \bar{R}$$

$$dA = dA(\bar{R}) = \bar{R}d\bar{r} = (\bar{F}_1 + \ldots + \bar{F}_N)d\bar{r} = \underbrace{\bar{F}_1 d\bar{r}}_{dA(\bar{F}_1)} + \ldots + \underbrace{\bar{F}_N d\bar{r}}_{dA(\bar{F}_N)}$$

$$\boxed{dA(\bar{R}) = \sum_{i=1}^{N} dA(\bar{F}_i)}$$

$$A(\bar{R}) = \int_{M_0}^{M} \sum_{i=1}^{N} dA(\bar{F}_i) = \Sigma \int_{M_0}^{M} dA(\bar{F}_i)$$

<u>Работа равнодействующей силы некоторой системы сил, приложенных к точке</u> = сумме работ сил, составляющих равнодействующую на перемещении точки из одного положения в другое.



<u>Работа силы</u>, приложенной к материальной точке на некотором перемещении равна сумме работ этой силы на участках, на которые произвольным образом поделена траектория её движения.

$$A(\bar F) = A_1(\bar F) + A_2(\bar F) + A_3(\bar F)$$

Работа сил, приложенных к твердому телу, при его различных движениях.

1) <u>Работа силы при поступательном движении твердого тела</u>

$$dA(\bar F) = \bar F \cdot \bar v_K \, dt$$

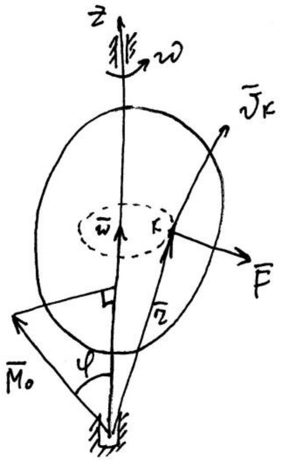
$\bar v_K = \bar v$ (т.к. поступательно)

$$dA = \bar F \bar v \, dt = \bar F d\bar r$$

$\bar v$ и $\bar r$ - скорость и радиус-вектор произвольной точки тела

$$A(\bar F) = \int_0^t \bar F \bar v \, dt = \int_{\bar r_0}^{\bar r} \bar F d\bar r$$

2) <u>Работа силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси</u>



$$dA = \bar F \bar v \, dt$$

$\bar v = \bar\omega \times \bar r$ - ф-ла Эйлера

$$dA = \bar F(\bar\omega \times \bar r)\, dt = \bar\omega(\underbrace{\bar r \times \bar F}_{\bar M_0(\bar F)})\, dt =$$

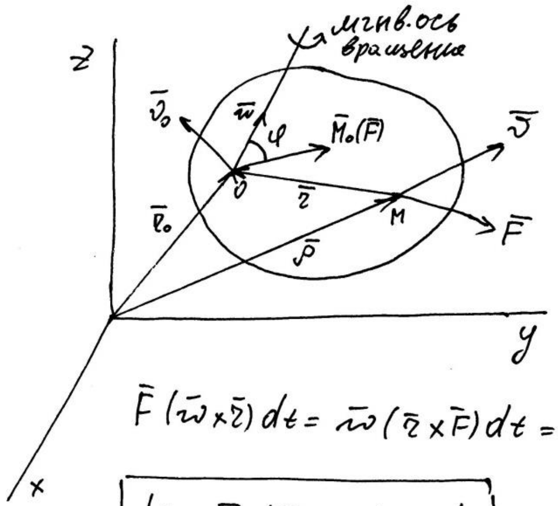
$$= \bar\omega \bar M_0(\bar F)\, dt = \omega M_0 \cos\varphi \, dt =$$

$$= \underbrace{\omega \, dt}_{d\varphi} \cdot \underbrace{M_0 \cos\varphi}_{M_z(\bar F)}$$

$$\boxed{dA = M_z(\bar F)\, d\varphi}$$

<u>Элементарная работа силы, приложенной к некоторой точке тела</u>, вращающегося вокруг неподвижной оси равна произведению момента силы относительно оси вращения тела на элементарный угол его поворота вокруг оси.

3) Работа силы, приложенной к свободному твердому телу.



$$dA = \bar{F}\bar{v}\,dt$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r}$$

$$dA = \bar{F}\bar{v}_0\,dt + \bar{F}(\bar{\omega}\times\bar{r})\,dt$$

$$\bar{F}\bar{v}_0\,dt = \bar{F}\,d\bar{r}_0$$

$$\bar{F}(\bar{\omega}\times\bar{r})dt = \bar{\omega}(\bar{r}\times\bar{F})dt = \bar{\omega}\,dt\,\bar{M}_0(\bar{F}) = \omega\underbrace{M_0\cos\varphi}_{M_\omega}\cdot dt = M_\omega\,d\varphi$$

$$\boxed{dA = \bar{F}\,d\bar{r}_0 + M_\omega\,d\varphi}$$

Элементарная работа силы, приложенная к какой-либо точке твердого тела, участвующего в свободном движении = сумме элементарной работе этой силы на перемещении полиса О тела и элементарной работе момента этой силы при вращении тела вокруг этого полиса.

Частные случаи:

1)если т.О неподвижна, то

$dA = M_\omega(\bar{F})d\varphi$ – сферическое движение твердого тела

2)если т.О принадлежит неподвижной оси, то

$dA = M_z(\bar{F})d\varphi$ - плоское движение твердого тела

3)если т.О принадлежит МЦС, тогда

$dA = M_{Pz}(\bar{F})d\varphi$ P_z – ось, проходящая через МЦС перпендикулярно плоскости его движения

Кинетическая энергия точки и системы материальных точек. Теорема Кенига.

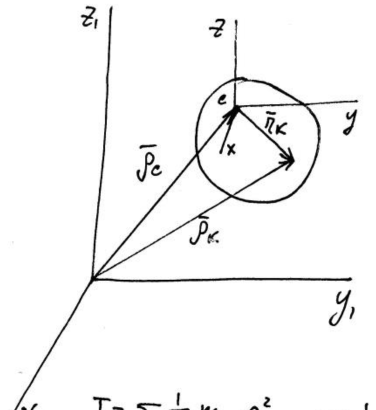
Кинетической энергией материальной точки называют половину произведения массы точки на квадрат её скорости:

$$\mathrm{T} = \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетической энергией системы материальных точек называют сумму кинетических энергий точек, её составляющих.

$$\mathrm{T} = \sum\frac{m_k\bar{v}_k^2}{2} = \sum\frac{m_k v_k^2}{2}$$

Теорема Кенига:



$O_1x_1y_1z_1$ – ИСО

т. C – ц. масс

$Cxyz$ движется поступательно относительно ИСО

$$\bar\rho_k = \bar\rho_c + \bar r_k$$

$$\frac{d\bar\rho_k}{dt} = \frac{d\bar\rho_c}{dt} + \frac{d\bar r_k}{dt} \Rightarrow \bar v_k = \bar v_c + \bar v_{kr}$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum \frac{1}{2} m_k (\bar v_c + \bar v_{kr})^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_k v_c^2 + 2\sum m_k \bar v_c \bar v_{kr} + \sum m_k v_{kr}^2\right)$$

$$\sum m_k v_c^2 = v_c^2 \sum m_k = M v_c^2$$

$$2\sum m_k \bar v_c \bar v_{kr} = 2\bar v_c \sum m_k \bar v_{kr} = 2\bar v_c \sum m_k \frac{d\bar r_k}{dt} = 2\bar v_c \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum m_k \bar r_k\right)}_{\underbrace{M\bar r_c}_{0}}$$

Тогда $T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_k v_{kr}^2}_{T_c^{(r)}}$

$T_c^{(r)} = \sum \frac{1}{2} m_k v_{kr}^2$ – кинетическая энергия твердого тела в его относительном движении по отношению к подвижной системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс тела.

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T_c^{(r)}}$$

Теорема Кенига

т.Кенига: кинетическая энергия тела при его сложном движении равна сумме кинетической энергии центра масс тела, как если бы в нем была сосредоточена вся его масса и кинетической энергии тела в его относительном движении по отношению к центру масс.

Кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения.

1) Поступательное движение твердого тела

$T = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2$

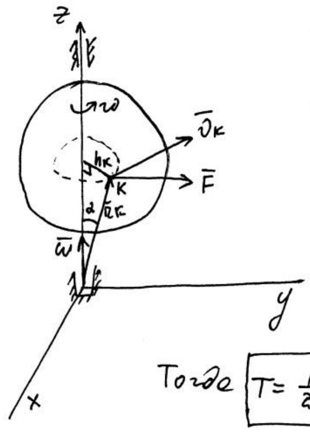
$v_k = v$, где v – скорость любой точки тв. тела

$T = \sum \frac{1}{2} m_k v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum m_k = \frac{1}{2} M v^2$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v^2}$$

Кинетическая энергия равна половине произведения массы тела на квадрат скорости любой его точки.

2) Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



$$T=\sum \frac{1}{2} m_K v_K^2$$

$$\bar{v}_K = \bar{\omega} \times \bar{r}_K \Rightarrow v_K = |\bar{\omega} \times \bar{r}_K| = \omega r_K \sin\alpha$$

$$h_K = r_K \cdot \sin\alpha \Rightarrow v_K = \omega h_K$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_K \omega^2 h_K^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_K h_K^2$$

$$\sum m_K h_K^2 = I_z$$

Тогда $\boxed{T = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси = половине произведения момента инерции тела на квадрат угловой скорости.

3) Плоское движение твердого тела

Согласно теореме Кенига имеем:

$$T_C^{(r)} = \sum \frac{1}{2} m_K v_{Kr}^2 = \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2}$$

Теорема об изменении кинетической энергии для точки и системы материальных точек.

$m;\ \bar{F}$

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \quad \Big| \cdot (d\bar{r}) \quad \rightarrow \quad m \frac{d\bar{v}}{dt} d\bar{r} = \bar{F} d\bar{r}$$

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} d\bar{r} = m \frac{d\bar{r}}{dt} d\bar{v} = m \bar{v} d\bar{v} \quad ; \quad m\bar{v}\, d\bar{v} = \bar{F} d\bar{r}$$

Тогда $\boxed{d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = \bar{F} d\bar{r}}$

(дифференциальная форма записи теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки)

$\frac{m\bar{v}^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки;

$\bar{F} d\bar{r} = dA$ – элементарная работа силы.

Теорема: дифференциал кинетической энергии материальной точки=элементарной работе силы, определяемой как скалярное произведение силы, приложенной к точке на дифференциал радиус-вектора точки приложения силы.

в положении $\begin{matrix} M_0 - \bar{v}_0 \\ M - \bar{v} \end{matrix} \rightarrow \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} d\left(\frac{m\bar{v}^2}{2}\right) = \int_0^t \bar{F} d\bar{r}$

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_0^t \bar{F} d\bar{r}$$

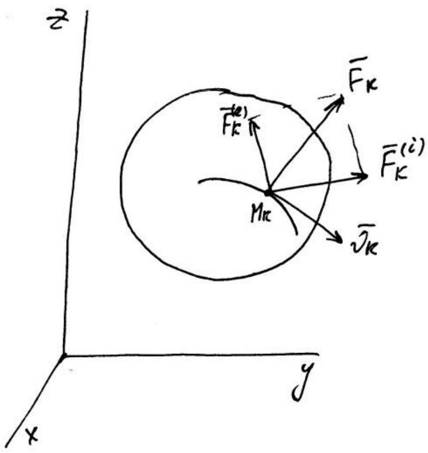
$\int_0^t \bar{F} d\bar{r} = A$ – полная работа силы на перемещении точки за время t.

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} - \frac{m\bar{v}_0^2}{2} = A$$

(интегральная (полная) форма записи теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки)

Теорема: изменение кинетической энергии материальной точки при её перемещении из одного положения в другое = полной работе силы, приложенной к точке на её перемещение.

Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек



N точек

$M_к$ - произв. точка

$m_к$ - её масса

$\bar{v}_к$ - скорость

$\bar{F}_к$ - равнодейств.

$$\bar{F}_к = \bar{F}_к^{(e)} + \bar{F}_к^{(i)}$$

$$d\left(\frac{m_к v_к^2}{2}\right) = \bar{F}_к\, d\bar{r}_к = \bar{F}_к^{(e)} d\bar{r}_к + \bar{F}_к^{(i)} d\bar{r}_к = dA_к^{(e)} + dA_к^{(i)}$$

$dA_к^{(e)}$- элементарная работа всех внешних сил, приложенных к данной точке;

$dA_к^{(i)}$- элементарная работа всех внутренних сил, приложенных к данной точке

$$\begin{cases} d\left(\frac{m_к \bar{v}_к^2}{2}\right) = dA_к^{(e)} + dA_к^{(i)} \\ k = 1, \ldots, N \end{cases}$$

$$d\sum \frac{m_к v_к^2}{2} = \sum dA_к^{(e)} + \sum dA_к^{(i)}$$

$\sum \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} = T$ – кинетическая энергия системы материальных точек

Тогда $\boxed{dT = \sum dA_к^{(e)} + \sum dA_к^{(i)}}$ - теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек в дифференциальной форме

Дифференциал кинетической энергии системы материальных точек = сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к точкам системы.

$t=0 \rightarrow T(0)=T_0$

$t\neq 0 \rightarrow T(t)=T$

$$\int_{T_0}^{T} dT = \sum \int_{M_{K_0}}^{M_K} dA_K^{(e)} + \sum \int_{M_{K_0}}^{M_K} dA_K^{(i)}; \quad \sum \int_{M_{K_0}}^{M_K} dA_K^{(e)} = \sum A_K^{(e)}$$

$$\sum \int_{M_{K_0}}^{M_K} dA_K^{(i)} = \sum A_K^{(i)}$$

$$\boxed{T - T_0 = \sum A_K^{(e)} + \sum A_K^{(i)}}$$

(теорема об изменении кинетической энергии механической системы)

Теорема: изменение кинетической энергии системы при её перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек приложения этих сил.

Потенциальное силовое поле. Силовая функция и потенциальная энергия тела(точки).

Если материальная точка движется через пространство под действием сил, величина и направление которых зависит от положения точки в этом пространстве, то это пространство называется силовым полем.

Силовым полем называется такое пространство, в котором на материальную точку действуют силы, зависящие от положения (координат) точки в этом пространстве.

Если силы поля не зависят от времени, то такое поле – стационарное.

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$$

Если силы силового поля зависят от времени, то такое поле называется нестационарным.

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z, t)$$

Силовое поле называется потенциальным, если работа сил поля не зависит от траектории движения точки их приложения и однозначно определяется (работа сил) начальным и конечным положениями точки в пространстве силового поля.

Силы такого поля называются потенциальными.

Силовая функция

Стационарное силовое поле называется потенциальным, если существует такая функция, которая однозначно определяет проекции сил поля на оси системы отчета в любой точке силового поля U=U(x,y,z) – силовая функция поля

$$F_x \frac{\partial U}{\partial x}; F_y \frac{\partial U}{\partial y}\ ;\ F_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\bar{F} = \overline{grad U}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_z}{\partial y}&=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y}\\ \frac{\partial F_y}{\partial z}&=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\end{aligned}\right|\Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z}\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=0}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial z}&=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\\ \frac{\partial F_z}{\partial x}&=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\end{aligned}\right|\Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}=0}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_y}{\partial x}&=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}\\ \frac{\partial F_x}{\partial y}&=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\end{aligned}\right|\Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0}$$

условия сущесв. силовой функции поле

Если использовать вектор вихря

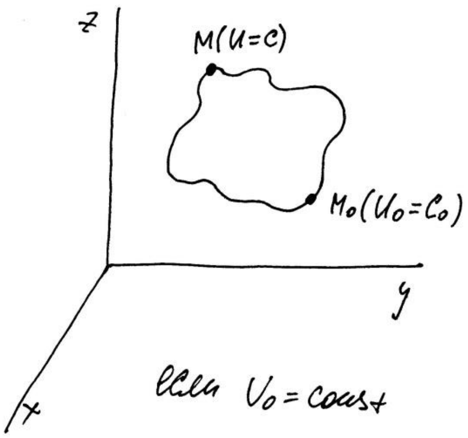
$$\operatorname{rot}\bar{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\bar{k},$$

То $\operatorname{rot}\bar{F}=0$.

Для того, чтобы стационарное силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Потенциальная энергия тела

Потенциальной энергией материальной точки в потенциальном силовом поле называют РАБОТУ, которую совершает сила поля при перемещении точки её приложения из данного положения в положение, принимаемое за ноль отсчета.



$$A_{MM_0} = -A_{M_0M} = \cdot$$

$$A_{MM_0} = U_0 - U = П$$

$$\boxed{П = U_0 - U}$$

если $U_0 = const$

$$\boxed{П = -U + const = -U}$$

$$dA\Big|_{M_0}^{M} = dU = -dП$$

$$\boxed{dП = -dU}$$

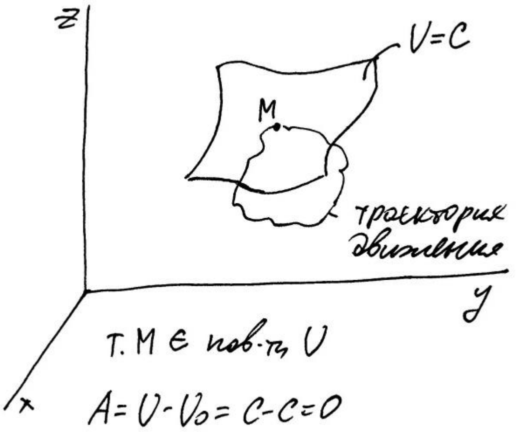
$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial П}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial П}{\partial y}$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial П}{\partial z}$$

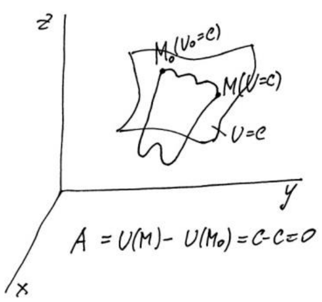
2. Поверхности уровня и их свойства(не понятна строчка про угол(последняя) в свойстве 3).

Поверхностью уровня потенциального силового поля называют поверхность, образованную множеством точек поля, силовая функция которого в этих точках принимает одно и то же значение.
U(x,y,z)=const=C

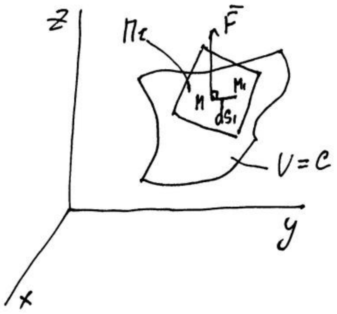


Свойства

1) *Работа силы потенциального* силового поля на перемещении точки её приложения, на котором начальное и конечное положения принадлежат одной и той же поверхности уровня, =0.



2) *<u>Сила потенциального силового поля всегда</u>* перпендикулярна поверхности уровня в данной точке поля.



$ds_1 \neq 0$

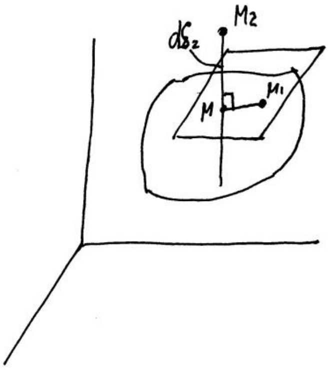
$dA = U(M_1) - U(M_0) = C - C = 0$

$dA = F\,ds_1 \cos(\bar F, \overline{MM_1}) = 0$

$\Downarrow$

$\left.\begin{matrix} F \neq 0 \\ ds_1 \neq 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \cos(\bar F, \overline{MM_1}) = 0 \Rightarrow \boxed{\bar F \perp \Pi_2}$

3) *<u>Сила потенциального силового поля всегда</u>* направлена в сторону возрастающих значений силовой функции поля.



$ds_2 \neq 0$

$M_2 \to U = C_2 > C$

$dA = U(M_2) - U(M) = C_2 - C > 0$

$dA = F \cdot ds_2 \cdot \cos(\bar F, \overline{MM_2}) > 0$

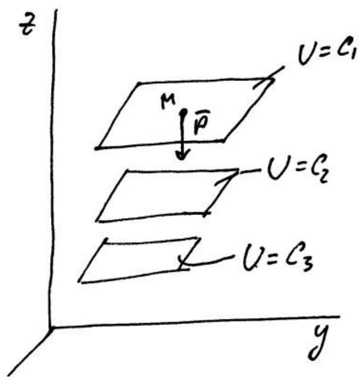
$\cos(\bar F, \overline{MM_2}) > 0$

$\angle(\bar F, \overline{MM_2}) = 0$

4) *<u>Сила потенциального силового поля</u>*, которая представлена поверхностями уровня, больше там, где поверхности уровня расположены друг к другу ближе.

Примеры вычисления силовых функций однородного поля силы тяжести и линейной силы упругости.

1) <u>Однородного поля силы тяжести</u>



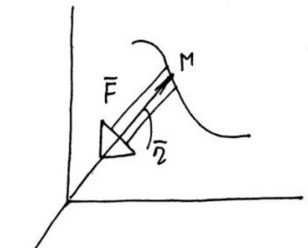
$dA = \bar P d\bar r = P_x dx + P_y dy + P_z dz$

$\bar P(P_x = 0;\ P_y = 0;\ P_z = -mg)$

$dA = -mg\,dz = d(-mgz) = dU$

$\boxed{U = -mgz + const}$

2) <u>Линейной силы упругости</u>



$\bar F = -c\bar r$

$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$F_x = -cx$

$F_y = -cy$

$F_z = -cz$

$dA = -c\underbrace{(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}_{r\,dr} = -c\,r\,dr = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) = dU$

$\boxed{U = -\frac{cr^2}{2} + const = -\frac{c\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}{2} + const}$

Закон сохранения полной механической энергии системы.

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)} = \sum \int_{M_{k0}}^{M_k} dA_k = U - U_0 = П_0 - П$$

$$T - T_0 = П_0 - П$$

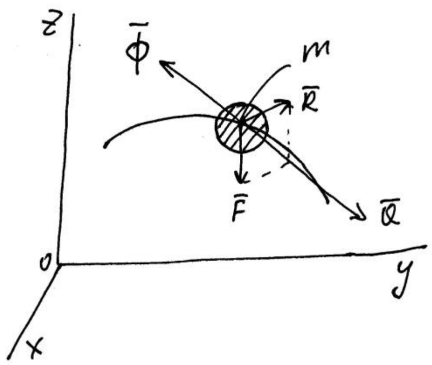
$$T_0 + П_0 = T + П = const$$

$T + П = E$ – полная механическая энергия системы

$$\boxed{E = const}$$

При движении материальной системы в потенциальном силовом поле, полная механическая энергия всех внутренних и внешних сил постоянна по величине.

3. Принцип Даламбера для точки и системы материальных точек.(нужно ли продолжение?)



Oxyz – неподвижная ИСО
$\bar{F}$ – равнодействующая активных сил
$\bar{R}$ – равнодействующая реакций

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R};$$
$$\bar{F} + \bar{R} - m\bar{a} = 0$$

$\bar{Ф} = -m\bar{a}$ – сила инерции материальной точки (Даламберова сила инерции)

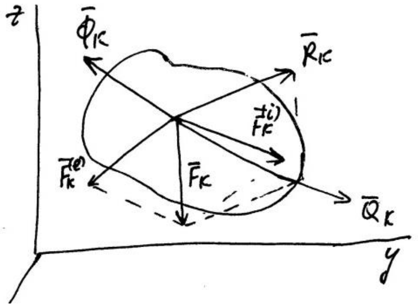
Тогда $\bar{F} + \bar{R} + \bar{Ф} = 0$ – принцип Даламбера для материальной точки

При движении материальной точки, приложенная к точке активная сила и реакция связи вместе с её силой инерции образуют уравновешенную систему сил. $(\bar{F}, \bar{R}, \bar{Ф}) \backsim 0$

$\bar{Ф} = -m\bar{a}$ – сила инерции.
$(\bar{F} + \bar{R})$ – приложенные к точке силы со стороны других материальных объекторв, которые вызывают движение точки массой m с ускорением $\bar{a}$.

В соответствии с 3 законом Ньютона, сила действия = силе противодействия.
$\bar{Ф} = -(\bar{F} + \bar{R})$ – сила, с которой материальная точка противодействует материальным объектам, вызывающим движение точки с ускорением $\bar{a}$.

Принцип Даламбера для системы



N материальных точек;
Мк- произвольная точка;
$m_к$- масса к-ой точки;
$\bar{F}$ – равнодействующая активных сил
$\bar{R}$ – равнодействующая реакций связей

$$\begin{cases} \bar{F}_к + \bar{R}_к + \bar{\Phi}_к = 0 \\ \bar{\Phi}_к = -m_к \bar{a}_к \\ k = 1, \dots, N \end{cases}$$

– <u>принцип Даламбера для системы материальных точек</u>

<u>При движении механической системы относительно неподвижной ИСО</u> для каждой её точки, приложенные к ней активные силы и реакции отброшенных связей вместе с силой инерции точки, образуют уравновешенную систему сил. (Сила инерции НЕ приложена к точке)

$$\begin{cases} \bar{r}_K \times \bar{F}_K + \bar{r}_K \times \bar{R}_K + \bar{r}_K \times \bar{\Phi}_K = 0 \\ K = 1, \dots, N \end{cases}$$

. тогда

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_K + \sum \bar{R}_K + \sum \bar{\Phi}_K = 0 \\ \sum \bar{M}_0(\bar{F}_K) + \sum \bar{M}_0(\bar{R}_K) + \sum \bar{M}_0(\bar{\Phi}_K) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

<u>(следствие из пр. Даламбера)</u>

пусть $\sum \bar{\Phi}_K = \bar{\Phi}^u$ - главный в-р сил инерции

$\sum \bar{M}_0(\bar{\Phi}_K) = \bar{L}_0^u$ - главный момент сил инерции

Спроецируем (1) на оси декартовой с.к.

$$\begin{cases} \sum F_{Kx} + \sum R_{Kx} + \sum \Phi_{Kx} = 0 \\ \sum F_{Ky} + \sum R_{Ky} + \sum \Phi_{Ky} = 0 \\ \sum F_{Kz} + \sum R_{Kz} + \sum \Phi_{Kz} = 0 \\ \sum M_x(\bar{F}_K) + \sum M_x(\bar{R}_K) + \sum M_x(\bar{\Phi}_K) = 0 \\ \sum M_y(\bar{F}_K) + \sum M_y(\bar{R}_K) + \sum M_y(\bar{\Phi}_K) = 0 \\ \sum M_z(\bar{F}_K) + \sum M_z(\bar{R}_K) + \sum M_z(\bar{\Phi}_K) = 0 \end{cases}$$

- условие равновесия произвольной пространственной системы сил

Главный вектор и главный момент сил инерции в общем и частных случаях движения твердого тела.

$\bar{\Phi}^{и} = \sum \bar{\Phi}_к = -\sum m_к \bar{a}_к$ – главный в-р сил инерции

$\bar{F}_к + \bar{R}_к = \bar{F}_к^{(e)} + \bar{F}_к^{(i)}$

$\bar{F}_к^{(e)}$ – главный вектор всех внешних сил к-ого точки

$\bar{F}_к^{(i)}$ – главный вектор всех внутренних сил к-ого точки

$$\begin{cases} \bar{F}_к + \bar{R}_к + \bar{\Phi}_к = \bar{F}_к^{(e)} + \bar{F}_к^{(i)} + \bar{\Phi}_к = 0 \\ к = 1, \dots, N \end{cases} \to \sum \bar{F}_к^{(e)} + \cancel{\sum \bar{F}_к^{(i)}}^{\,0} + \sum \bar{\Phi}_к = 0 \qquad (1)$$

$\sum \bar{F}_к^{(i)} = \bar{R}^{(i)} = 0$ – главный вектор всех внутренних сил

Тогда $\sum \bar{F}_к^{(e)} + \sum \bar{\Phi}_к = 0$

По т. об изменении кол-ва движения: $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_к^{(e)}$

Тогда $\boxed{\bar{\Phi}^{и} = \sum \bar{\Phi}_к = -\frac{d\bar{Q}}{dt}}$

$\bar{Q} = M\bar{v}_c \Rightarrow \boxed{\bar{\Phi}^{и} = -M\bar{a}_c}$

__Главный вектор сил инерции системы материальных точек__ всегда равен произведению массы системы на ускорение центра её масс, взятое со знаком «-».

$\sum \bar{M}_o(\bar{\Phi}_к) = \bar{L}_o^{и}$ – главный момент сил инерции

Домножим (1) на $\bar{r}_к$ векторно: $\sum \bar{r}_к \times \bar{F}_к^{(e)} + \sum \bar{r}_к \times \bar{F}_к^{(i)} + \sum \bar{r}_к \times \bar{\Phi}_к = 0$

$r_к \times \sum F_к^{(e)} + r_к \times \sum$ $\quad \sum \bar{M}_o(\bar{F}_к^{(e)}) + \cancel{\sum \bar{M}_o(\bar{F}_к^{(i)})}^{\,0} + \sum \bar{M}_o(\bar{\Phi}_к) = 0$

$\sum \bar{M}_o(\bar{F}_к^{(i)}) = \bar{L}_o^{(i)} = 0$ – главный момент всех внутренних сил

Тогда $\sum \bar{M}_o(\bar{F}_к^{(e)}) + \sum \bar{M}_o(\bar{\Phi}_к) = 0$

По т. об изменении кинетического момента системы мат. точек:

$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum \bar{M}_o(\bar{F}_к^{(e)}) \Rightarrow \boxed{\bar{L}_o^{и} = \sum \bar{M}_o(\bar{\Phi}_к) = -\frac{d\bar{K}_o}{dt}}$

__Главный момент сил инерции точек системы__ относительно неподвижного центра равен взятой со знаком «-» производной от кинетического момента системы относительно того же центра.

__Частные случаи:__

1) __Поступательное движение__

$$\bar{\Phi}^u = -m\bar{a}_c$$

$$\bar{L}^u = -\frac{d\bar{K}_0}{dt}$$

$\bar{a}_c = \bar{a}$ (т.к. движение поступательно)

тогда $\boxed{\bar{\Phi}^u = -m\bar{a}}$, $\bar{a}$ – ускорение любой точки

$$\bar{L}^u_c = -\frac{d\bar{K}_c}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\Sigma \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k\right) \ominus$$

$\bar{r}_k$ – радиус-в-р к-ой точки относ. ц. масс тела

$$\ominus -\frac{d}{dt}\left(\Sigma m_k \bar{r}_k \times \bar{v}_k\right) = -\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\Sigma m_k \bar{r}_k}_{M\bar{r}_c = 0}\right) \times \bar{v}_k = 0$$

$$\boxed{\bar{L}^u_c = 0}$$

При поступательном движении твердого тела, силы инерции его точек приводятся только к главному вектору, проходящему через центр масс тела.

2) Вращательное движение (вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела)

$$\bar{\Phi}^u = -M\bar{a}_c \quad \text{т.к. } \bar{a}_c = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{\Phi}^u = 0}$$

$$\bar{L}^u_o = -\frac{d\bar{K}_o}{dt} = -\left(\frac{dK_x}{dt}\bar{i} + \frac{dK_y}{dt}\bar{j} + \frac{dK_z}{dt}\bar{k}\right)$$

$K_x = I_x \omega_x$; $K_y = I_y \omega_y$; $K_z = I_z \omega_z$

z-ось вращения

тогда $\bar{\omega}(\omega_x = 0;\ \omega_y = 0;\ \omega_z \neq 0) \Rightarrow \bar{L}^u_o = -\frac{d\bar{K}_o}{dt} = -\frac{dK_z}{dt}\bar{k}$

$$L^u_z = -\frac{d(I_z \omega_z)}{dt} = -I_z \varepsilon_z$$

$$\boxed{L^u_z = -I_z \varepsilon_z}$$

3) Плоское движение твердого тела

Выберем в качестве центра приведения сил инерции твердого тела, его центр масс. Тогда

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\Phi}^u &= -M\bar{a}_c \\ L_{cz} &= -I_{cz}\varepsilon_z \end{aligned}}$$

Знак «-» в выражении, определяющем проекцию главного момента сил инерции тела на ось вращения означает, что пара сил этого момента направлена в сторону, противоположную направлению углового ускорения тела при его вращении.

Связи и их классификация.

Свободной механической системой называется такая система материальных точек, точки которой могут перемещаться произвольным образом относительно друг друга.

В противном случае, системы называется несвободной.

Связи – это ограничения, которые накладываются на движения точек материальной системы.

Классификация

1) Связи голономные и неголономные.

Голономные – связи, которые описываются либо уравнениями (неравенствами) относительно координат точек, либо дифференциальными уравнениями (неравенствами), интегрируемыми относительно координат.
f(x,y,z)=0.

Это связи накладывают ограничения на координаты точек, а значит, на положение системы в пространстве, поэтому их называют геометрическими связями.

Неголономные – связи, которые описываются дифференциальными уравнениями, не интегрируемые относительно координат точек.

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$$

Эти связи накладывают ограничения на скорости точек, поэтому их называют кинематическими.

2) Связи стационарные и нестационарные.

Стационарные связи – связи, которые не зависят от времени.
f(x,y,z)=0.

Нестационарные связи – связи, которые зависят от времени.
f(x,y,z,t)=0.

Например, жесткий стержень длиной l, прикрепленный к неподвижной опоре, является стационарной связью для материальной точки, находящейся на его свободном конце. Уравнение связи в декартовой системе координат, начало которой совпадает с точкой закрепления стержня, имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$. (При вращении стержня вокруг опоры точка находится на сфере радиусом l.) Если длина стержня изменяется по заданному закону, то связь является нестационарной и ее уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0$.

3) Связи удерживающие и неудерживающие.

Удерживающие (двусторонние) – связи, которые описываются уравнением.

Неудерживающие (односторонние) – связи, которые описываются неравенством.

ством. Например, если математический маятник представляет собой тонкий стержень длиной l, вращающийся вокруг неподвижной оси и к свободному концу которого прикреплен груз (материальная точка), то связь для груза будет удерживающая. Если же груз прикреплен к свободному концу нерастяжимой нити длиной l, то связь будет неудерживающая, поскольку груз может находиться как на поверхности сферы радиусом l, так и внутри нее.

Элементарная работа силы на возможном перемещении. Идеальные связи. Примеры.

Возможным перемещением материальной точки называют мыслимое бесконечно малое перемещение её допускаемыми связями, наложенными на точку в данный момент времени.

Если связь, наложенная на точку, стационарна, то действие перемещения $d\bar{r}$ за время dt всегда совпадает с одним из возможных её перемещений $d\bar{r} = \delta\bar{r}$.

Если связь зависит от времени, то $d\bar{r} = \delta\bar{r} + d\bar{r}_e$.

Возможным перемещением системы материальных точек называют совокупность возможных перемещений её точек $(\delta\bar{r}_1, \dots, \delta\bar{r}_N)$.

Даже если одна точка системы получила возможное перемещение, то возможное перемещение системы $\neq 0$.

Элементарная работа силы на возможном перемещении:

***Возможной работой силы** называется работа силы на любом возможном перемещении точки ее приложения*:

$$\delta A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \delta \bar{r}\ .$$

$$\delta A(\bar{F}) = |\bar{F}||\delta\bar{r}|cos\alpha$$

где a – угол между вектором силы и вектором возможного перемещения

Для вычисления возможной работы можно применять известные формулы для элементарной работы силы, подставляя вместо элементарного действительного $d\bar{r}$ возможное $\delta\bar{r}$ перемещение точки. При использовании декартовых координат

$$\delta A(\bar{F}) = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z\ .$$

Если к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси Oz приложена сила $\bar{F}$, момент которой относительно оси равен M_z, то

$$\delta A(\bar{F}) = M_z \delta\varphi\ ,$$

где $\delta\varphi$ — возможный угол поворота тела вокруг оси Oz.

Идеальные связи:

Связи называются идеальными, если равна нулю сумма элементарных работ реакций этих связей на любом возможном перемещении системы (из занимаемого в данный момент времени положения).

Для идеальных связей

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{N} \left(R_{kx}\delta x_k + R_{ky}\delta y_k + R_{kz}\delta z_k \right) = 0\ .$$

Примеры:

1. Гладкая поверхность (плоскость) для материальной точки (рис. 18.6). В этом случае

$$\delta A(\bar{R}) = \bar{R} \cdot \delta\bar{r} = \left|\bar{R}\right| \cdot \left|\delta\bar{r}\right| \cos(\bar{R}, \delta\bar{r}) = 0\ ,$$

так как вектор $\bar{R}$ расположен вдоль нормали к поверхности и, следовательно, ортогонален вектору $\delta\bar{r}$ возможного перемещения точки.

2. Нерастяжимая нить. Реакция нити — сила ее натяжения — ортогональна возможному перемещению точки ее приложения. Поэтому

$$\bar{R} \cdot \delta\bar{r} = 0\ .$$

3. Цилиндрические и сферические шарниры, если поверхности соприкасающихся тел считаются идеально гладкими. Если твердое тело при помощи шарнира прикреплено к неподвижной опоре (рис. 18.7, a), то реакция приложена к неподвижной точке. Возможное перемещение такой точки равно нулю и

$$\delta A(\bar{R}) = \bar{R}\delta\bar{r}_0 = 0\ .$$

Если два твердых тела при помощи шарнира с идеально гладкими поверхностями соединены между собой, то

$$\delta A(\overline{R}_1) + \delta A(\overline{R}_2) = \overline{R}_1 \cdot \delta\overline{r}_0 + \overline{R}_2 \cdot \delta\overline{r}_0 = (\overline{R}_1 + \overline{R}_2) \cdot \delta\overline{r}_0 = 0,$$

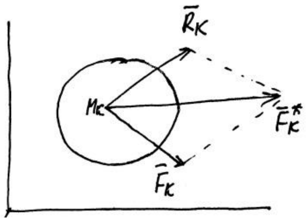
поскольку $\overline{R}_2 = -\overline{R}_1$ (силы действия и противодействия).

4. Твердая шероховатая поверхность для цилиндрического катка при качении без скольжения. Контакт катка с поверхностью происходит по линии. Поэтому реакцией связи является система сил, распределенных вдоль линии контакта. Возможная работа сил реакции равна нулю, так как они приложены к неподвижным в каждый момент времени точкам — МЦС сечений катка.

Принцип возможных перемещений.

Для того, чтобы данное положение системы материальных точек было положением её равновесия относительно ИСО при голономных стационарных удерживающих связях, наложенных на неё, необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ активных сил и реакций наложенных связей = 0 на любом возможном перемещении системы из предполагаемого положения её равновесия.

$\boxed{\sum \delta A(\bar{F}_к) = \sum \bar{F}_к \delta \bar{r}_к = 0}$



$\bar{F}_к^*$ – равнодейств. всех сил

$\bar{F}_к^* = \bar{F}_к + \bar{R}_к$

активных

реакция связей

$$\sum \delta A = \sum \bar{F}_к^* \delta \bar{r}_к = \sum (\bar{F}_к + \bar{R}_к) \delta \bar{r}_к = \sum \bar{F}_к \delta \bar{r}_к + \sum \bar{R}_к \delta \bar{r}_к = 0$$

$\sum \bar{R}_к \delta \bar{r}_к = 0$ – если так, то такие связи – идеальные.

Принцип Лагранжа: для того, чтобы данное положение системы было положением её равновесия, необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ всех активных сил, приложенных к её точкам при связях (голономных, идеальных, стационарных, удерживающих), наложенных на неё была = 0 при любых возможных перемещениях системы из положения предполагаемого её равновесия.

$$\sum \delta \mathrm{A} = \sum \bar{F}_к \delta \bar{r}_к = 0 \text{ – } \textit{общее уравнение статики}$$

Если наложенные на систему связи идеальные, то $\sum_{k=1}^{N} \overline{R}_k \cdot \delta\overline{r}_k = 0$

и условие $\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \delta\overline{r}_k = 0$ является необходимым условием равновесия системы.

Общее уравнение динамики.

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. В соответствии с принципом Даламбера, приложенные к каждой точке активные силы, реакции связей и силы инерции в любой момент времени образуют уравновешенную систему сходящихся сил. Эта система сил удовлетворяет условию равновесия

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0 , \qquad (18.12)$$

где $\overline{F}_k$ и $\overline{R}_k$ — равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к k-й точке; $\overline{\Phi}_k = -m_k \overline{a}_k$.

Умножим обе части уравнения (18.12) скалярно на возможное перемещение $\delta\overline{r}_k$ k-й точки и просуммируем полученные для всех точек системы произведения. В результате имеем

$$\sum_{k=1}^{N} (\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k) \cdot \delta\overline{r}_k = 0 . \qquad (18.13)$$

Это уравнение называется ***общим уравнением динамики***.

$\overline{\Phi}_k = -m\overline{a}_k = -m\ddot{\overline{r}}_k$, тогда $\Sigma(-m_k\ddot{\overline{r}}_k + \overline{F}_k + \overline{R}_k)\delta\overline{r}_k = 0$

В проекции на оси дек.с.к:

$$\boxed{\Sigma[(-m_k\ddot{x}_k + F_{kx} + R_{kx})\delta x_k + (-m_k\ddot{y}_k + F_{ky} + R_{ky})\delta y_k + (-m_k\ddot{z}_k + F_{kz} + R_{kz})\delta z_k] = 0}$$

Если голономные стационарные удерж. связи идеальны, то

$\Sigma\delta A(\overline{R}_k) = \Sigma\overline{R}_k\delta\overline{r}_k = 0$; тогда

$\Sigma(\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k)\delta\overline{r}_k = 0$

В проекции на оси д.с.к:

$$\boxed{\Sigma[(-m_k\ddot{x}_k + F_{kx})\delta x_k + (-m_k\ddot{y}_k + F_{ky})\delta y_k + (-m_k\ddot{z}_k + F_{kz})\delta z_k] = 0}$$

Принцип Даламбера-Лагранжа: если на систему материальных точек наложены голономные, идеальные, стационарные, удерживающие связи, то сумма возможных работ, приложенных к точкам активных сил вместе с силами их инерции и силами реакций связей = 0 на любом возможном перемещении системы из положения, занимаемого в данный момент времени.

Обобщенные силы. Способы вычисления обобщенных сил.

Обобщенными координатами материальной системы называются такие параметры системы, которые однозначно определяют положение системы в пространстве, т.е. декартовые координаты всех её точек.

q – обобщенная координата

Число q данной системе всегда равно числу её степеней свободы

$[q] = м, рад, м^2, м^3$

$$\begin{cases} \bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n, t) \\ k = 1, \dots, N \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_k = x_k(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, t) \\ y_k = y_k(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, t) \\ z_k = z_k(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, t) \\ k = 1, \dots, N \end{cases}$$

$(\delta q_i,\ i = 1, \dots, n)$ - возможные изменения (вариации) i-ой обобщенной координаты

$(\delta q_1, \dots, \delta q_i, \dots, \delta q_n)$ - возможные перемещения системы в обобщенных координатах

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, t)$$

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \dots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i + \dots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n$$

тогда $\boxed{\delta\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i}$

<u>Обобщенные силы</u>

N - число мат. точек

n- число степеней свободы

q_i ; $i=1,\dots,n$ - обобщ. координаты

Зададим обобщенное перемещение $(\delta q_1, \dots, \delta q_i, \dots, \delta q_n)$

Найдем сумму работ

$$\sum_{k=1}^{N}\delta A_k = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\,\delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i}$$

тогда

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N}\delta A_k = \sum_{i=1}^{n}Q_i\,\delta q_i = Q_1\delta q_1 + \dots + Q_i\delta q_i + \dots + Q_n\delta q_n}$$

<u>*Обобщенной силой, соответствующей данной обобщенной координате м.системы*</u> с голономными идеальными удерживающими связями, называют коэффициент, стоящий при вариации соответствующих обобщенных координат в выражении суммы возможных работ всех активных сил на любом возможном перемещении её в данный момент времени.

[Q]=[A]/[q]; если [A]=Н*м, [q]=м, то [Q]=Н=[F]

если [q]=рад, то [Q]=Н*м=[A]

Способы вычисления:

1. Согласно определению, обобщенная сила

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i}.$$

Принимая во внимание, что $\overline{r}_k = x_k \overline{i} + y_k \overline{j} + z_k \overline{k}$, получаем

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

Этот способ определения обобщенных сил называют аналитическим.

Второй способ:

Зададим системе частное обобщенное возможное перемещение

$$(\delta q_1 = 0; \ldots, \delta q_{i-1} = 0, \delta q_i \neq 0, \delta q_{i+1} = 0, \ldots, \delta q_n = 0)$$

Тогда $\sum_{k=1}^{N} \delta A_k = \underbrace{Q_1 \delta q_1}_{0} + \ldots + \underbrace{Q_{i-1} \delta q_{i-1}}_{0} + Q_i \delta q_i + \underbrace{Q_{i+1} \delta q_{i+1}}_{0} + \ldots + \underbrace{Q_n \delta q_n}_{0}$

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A_k \Big|_{\delta q_i} = Q_i \delta q_i$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Q_i = \frac{\sum_{k=1}^{N} \delta A_k \Big|_{\delta q_i}}{\delta q_i}}$$

Индекс q_i в (18.6) означает, что возможная работа сил, действующих на систему, определяется на перемещениях точек приложения этих сил, соответствующих вариации только одной *i*-й обобщенной координаты.

Третий способ:

$U(x_k, y_k, z_k, k=1,\ldots,N)$ - силовая ф-ия

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; \quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}$$

Зададим перемещение $(\delta q_1, \ldots, \delta q_i, \ldots, \delta q_n)$

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A_k = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

т.к. $U = -П$, то $\boxed{Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial П}{\partial q_i}}$

Условия равновесия механической системы, выраженные в обобщенных силах.

Пусть данное положение материальной системы опред.

q_i° ; $i=1,\dots,n$ – значением обобщенной координаты в положении равновесия системы

В соотв. с принципом возможных перемещений

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A_k = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A_k^\circ = \sum_{i=1}^{n} Q_i^\circ \delta q_i = 0$$

$$(\delta q_1, \dots, \delta q_{i-1} = 0; \ \delta q_i \neq 0; \ \delta q_{i+1} = 0, \dots, \delta q_n = 0)$$

Тогда $\sum_{k=1}^{N} \delta A_k^\circ = \sum_{i=1}^{n} Q_i^\circ \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_{i-1} \delta q_{i-1} + Q_i \delta q_i + Q_{i+1} \delta q_{i+1} + \dots + Q_n \delta q_n =$

$= Q_i^\circ \delta q_i = 0$; т.к. $\delta q_i \neq 0 \Rightarrow \boxed{Q_i^\circ = 0, \ i=1,\dots,n}$

Префикс ° означает, что значения соответствующей обобщенной силы вычисляется в положении равновесия системы.

Для того, чтобы данное положение системы, определяемое некоторой совокупностью обобщенных координат $(q_i^\circ \ ; i=1,\dots,n)$ было положением её равновесия, необходимо и достаточно, чтобы обобщенные силы, соответствующие этим обобщенным координатам =0 в указанном положении.

Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода.

Рассмотрим движение материальной системы с голономными идеальными удерживающими связями относительно ИСО.

N-число точек материальной системы;

n – число степеней свободы;

q_i, i=1,…,n – обобщенные координаты.

$$\sum_{\text{к}=1}^{N} (\bar{F}_\text{к} + \bar{\Phi}_\text{к}) \delta \bar{r}_\text{к} = 0 \quad (1)$$

При движении материальной системы с голономными идеальными удерживающими связями, сумма элементарных работ активных сил, приложенных к точкам системы вместе с силами инерции этих точек = 0 на любом возможном перемещении системы из положения её в данный момент времени.

$$\begin{cases} \bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n, t) \\ k = 1, \dots, N \end{cases}$$

$$d\bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (2)$$

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \ddot{\bar{r}}_k \qquad (3)$$

(2), (3) → (1)

$$\sum_{k=1}^{N}(-m_k \ddot{\bar{r}}_k + \bar{F}_k)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0 \qquad (4)$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt}\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \ddot{\bar{r}}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} + \dot{\bar{r}}_k\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\bar{r}}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} - \dot{\bar{r}}_k\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \qquad (5)$$

(5) → (4):

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) + \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0 \qquad (6)$$

Так как $\bar{v}_k = \dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$, то (7)

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}} \qquad (8)$$ – первое тождество Лагранжа

$$(7) \Rightarrow \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_i}\dot{q}_i + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_n \partial q_i}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_i} \qquad (9)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_i}\dot{q}_i + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t} \qquad (10)$$

из (9), (10) ⇒ $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}}$ (11) – второе тождество Лагранжа

(8), (11) → (6)

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}}_{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}}_{\frac{\partial T}{\partial q_i}}\right) + \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0 \qquad (12)$$

$$T=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\vartheta_k^2=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\dot{\bar{r}}_k^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\cdot 2\cdot\dot{\bar{r}}_k\,\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot q_i}\Rightarrow\boxed{\sum_{k=1}^{N}m_k\dot{\bar{r}}_k\,\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot q_i}=\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}}\quad(13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\cdot 2\cdot\dot{\bar{r}}_k\,\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}\Rightarrow\boxed{\sum_{k=1}^{N}m_k\dot{\bar{r}}_k\,\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}}\quad(14)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N}\bar F_k\frac{\partial\bar r_k}{\partial q_i}=Q_i}\quad(15)$$

(13), (14), (15) → (12)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)+Q_i\right]\delta q_i=0}\quad(16)$$ — общее уравнение динамики в обобщ. координатах

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i=\delta A(\bar\Phi_k)$$

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i\,\delta q_i=\delta A(\bar F_k)$$

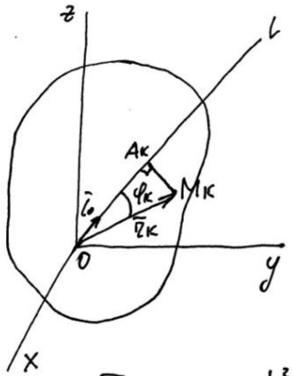
Тогда

$$\begin{cases}-\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot q_i}-\dfrac{\partial T}{\partial q_i}\right)+Q_i=0\\ i=1,\dots,n\end{cases}$$

$$(\delta q_1=0,\dots,\ \delta q_{i-1}=0,\ \delta q_i\neq0,\ \delta q_{i+1}=0,\dots,\ \delta q_n=0)$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot q_i}-\dfrac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i\\ i=1,\dots,n\end{cases}$$ — уравнения Лагранжа II-го рода

Момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через заданную точку в заданном направлении.



т. О - произв. точка тела

Ol - произвольная ось, прох. через т. О

$h_k = A_k M_k$ - кратчайшее расстояние от точки до оси

m_k - масса точки

$\bar l_0$ - единичный в-р оси l

$$I_l = \Sigma m_k h_k^2 \quad (1)$$

Рассмотрим $\triangle O A_k M_k$:

$$h_k^2 = OM_k^2 - OA_k^2 \; ; (2) \qquad OM_k = r_k \Rightarrow OM_k^2 = r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \quad (3)$$

$$OA_k = |\bar r_k| \cdot \cos\varphi_k = |\bar r_k| \cdot |\bar l_0| \cdot \cos\varphi_k = \bar r_k \bar l_0$$

$$\bar r_k = x_k \bar i + y_k \bar j + z_k \bar k;$$

α - угол м/д Ol и Ox

β - угол м/д Ol и Oy

γ - угол м/д Ol и Oz

Тогда $\bar l_0 = \cos\alpha\, \bar i + \cos\beta\, \bar j + \cos\gamma\, \bar k$

$$OA_k = \bar r_k \bar l_0 = x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma \quad (4)$$

(3), (4) $\to$ (2)

$$h_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2 =$$

$$= (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x_k^2 \cos^2\alpha + y_k^2 \cos^2\beta + z_k^2 \cos^2\gamma +$$

$$+ 2 x_k y_k \cos\alpha\cos\beta + 2 x_k z_k \cos\alpha \cos\gamma + 2 y_k z_k \cos\beta\cos\gamma) =$$

$$= (y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + (x_k^2 + z_k^2)\cos^2\beta + (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma - 2 x_k y_k \cos\alpha\cos\beta -$$

$$- 2 x_k z_k \cos\alpha\cos\gamma - 2 y_k z_k \cos\beta\cos\gamma \quad (5)$$

(5) $\to$ (1):

$$I_l = \cos^2\alpha\, \Sigma m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2\beta\, \Sigma m_k (x_k^2 + z_k^2) + \cos^2\gamma\, \Sigma m_k (x_k^2 + y_k^2) -$$

$$- 2\cos\alpha\cos\beta\, \Sigma m_k x_k y_k - 2\cos\alpha\cos\gamma\, \Sigma m_k x_k z_k - 2\cos\beta\cos\gamma\, \Sigma m_k y_k z_k$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m_k (y_k^2 + z_k^2) &= \Sigma m_k h_{kx}^2 = I_x \\ \Sigma m_k (x_k^2 + z_k^2) &= \Sigma m_k h_{ky}^2 = I_y \\ \Sigma m_k (x_k^2 + y_k^2) &= \Sigma m_k h_{kz}^2 = I_z \end{aligned}\right\}$$ моменты инерции относительно осей координат

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m_k y_k z_k &= I_{yz} \\ \Sigma m_k x_k z_k &= I_{xz} \\ \Sigma m_k x_k y_k &= I_{xy} \end{aligned}\right\}$$ центробежные моменты инерции относительно соотв. пары осей

Центробежными моментами инерции твердого тела называют сумму произведений масс точек тела на её координаты по этим осям.
Тогда

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma -$$
$$- 2J_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2J_{xz} \cos\alpha \cos\gamma - 2J_{yz} \cos\beta \cos\gamma.$$

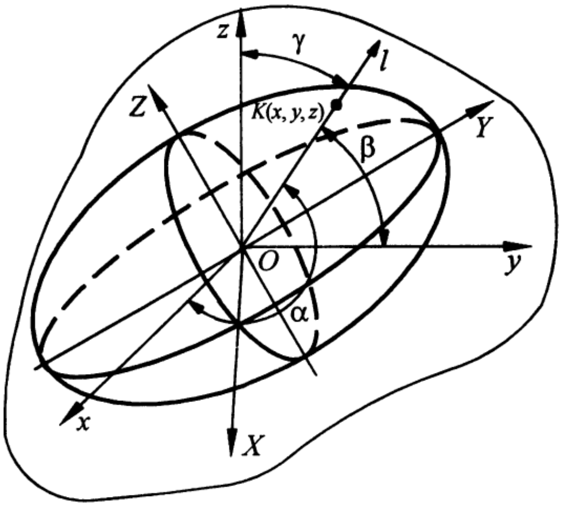
Очевидно, что момент инерции твердого тела относительно оси Ol зависит от:
1) распределения масс точек в объеме тела;
2) выбора точки O;
3) выбора осей системы координат с началом в точке O.

Эллипсоид инерции. Главные оси инерции симметричных твердых тел.

Эллипсоид инерции **— поверхность второго порядка, построенная в любой точке тела — характеризует спектр моментов инерции тела относительно осей, проходящих через эту точку. Для построения этой поверхности на каждой оси *Ol*, проходящей через точку *O*, откладывают от этой точки отрезок**

$$OK = 1/\sqrt{J_l}\ .$$

Геометрическое место концов отрезков *OK* (точек *K*) и является эллипсоидом инерции.



Получим уравнение эллипсоида инерции в системе координат *Oxyz* (рис. 14.18). Подставив выражения $\cos\alpha = x/OK = \sqrt{J_l}\,x$, $\cos\beta = y/OK = \sqrt{J_l}\,y$, $\cos\gamma = z/OK = \sqrt{J_l}\,z$ в формулу (14.13), получим

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1. \quad (14.15)$$

Так как $I_l \neq 0$ => точек бесконечно удаленных нет => поверхность представляет собой эллипсоид.
Эллипсоид, построенный для тела в точке O называется эллипсоидом инерции.
В каждой точке тела существует свой эллипсоид инерции.
$x_1 y_1 z_1$- оси симметрии эллипсоида инерции, построенного в точке O.
$I_{x1} I_{y1} I_{z1}$ – моменты инерции тела относительно $x_1 y_1 z_1$. Назовем эти моменты инерции главными моментами инерции тела в точке O.
$I_{x1} = 0;\ I_{y1} = 0;\ I_{z1} = 0$, тогда

$J_X X^2 + J_Y Y^2 + J_Z Z^2 = 1$. - уравнение эллипсоида в главных осях инерции тела в т.О.

$I_{x1} = I_1;\ I_{y1} = I_2;\ I_{z1} = I_3$

Тогда $I_l = I_1 cos^2\alpha + I_2 cos^2\beta + I_3 cos^2\gamma$

α, β, γ – углы между Ol и $x_1 y_1 z_1$

Главные оси инерции для данной точки тела – главные оси (оси симметрии) эллипсоида инерции, построенного в точке твердого тела.

Следовательно, в каждой точке тела имеются три главные оси инерции, которые являются главными осями эллипсоида инерции, построенного в данной точке.

Центральным эллипсоидом инерции называют эллипсоид инерции, построенный для центра масс тела.

Главными центральными осями инерции этого тела называются оси симметрии этого эллипсоида.

*Главными моментами инерции для этой точки тела называются моменты инерции тела относительно главных осей инерции в точке.

В формуле (14.16) это J_X, J_Y, J_Z.

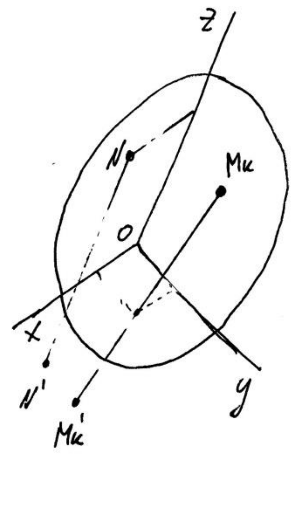
**Главными центральными моментами инерции тела* называются моменты инерции относительно главных центральных осей инерции

обозначают J_{CX}, J_{CY}, J_{CZ}.

Свойства главных осей инерции твердого тела

Теорема 1. Если какая-либо ось в твердом теле является главной осью инерции тела для точки О, через которую она проходит, то центробежные моменты инерции тела, содержащие в своей структуре координаты этой оси, равны нулю.

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{xz} xz - 2I_{xy} xy = 1$$



Oz - главная ось инерции в т.О

$M_к(x, y, z);\ M_к'(x, y, -z)$

$M_к:\ I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} zy = 1$

$M_к':\ I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} y(-z) = 1$ ⊖ - вычесть

$-4 I_{yz} yz = 0\ ;\ y \neq 0;\ z \neq 0$

$\Downarrow$

$\boxed{I_{yz} = 0}$

$N(x, 0, z):\ I_x x^2 + I_z z^2 - 2I_{xz} xz = 1$

$N'(x, 0, -z):\ I_x x^2 + I_z z^2 - 2I_{xz} x(-z) = 1$ ⊖

$-4 I_{xz} xz = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{I_{xz} = 0}$

Следствие: если каких-либо два центробежных моментов инерции в точке равны нулю, то ось, координата которой содержится в структуре обоих центробежных моментов инерции, является главной осью инерции.

Теорема 2: если тело имеет материальную ось симметрии, то она является главной осью инерции тела во всех своих точках.

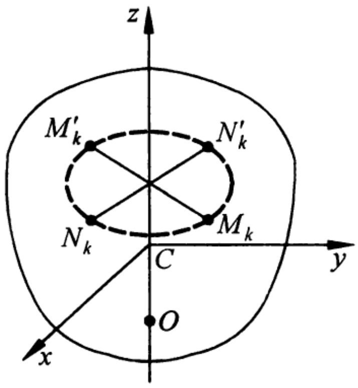
Oz - ось материальной симметрии

$M_k(x_k, y_k, z_k)$

$M_k'(-x_k, -y_k, z_k)$

$N_k'(-x_k, y_k, z_k)$

$N_k(x_k, -y_k, z_k)$



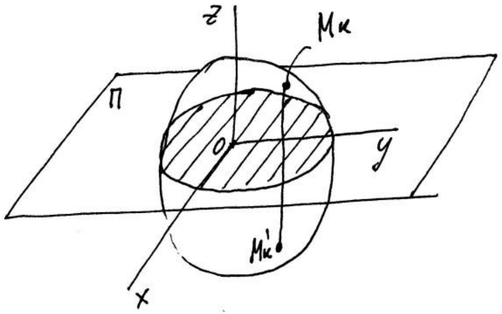
$$I_{xz} = \sum m_k x_k z_k = \sum_{I} m_k x_k z_k + \sum_{II} m_k(-x_k) z_k = \sum_{I} m_k x_k z_k - \sum_{II} m_k x_k z_k = 0$$

$$\boxed{I_{xz} = 0}$$

$$I_{yz} = \sum_{I} m_k y_k z_k + \sum_{II} m_k(-y_k) z_k = 0$$

$$\boxed{I_{yz} = 0}$$

Теорема 3: если твердое тело имеет плоскость материальной симметрии, проходящей через данную её точку O, то одна из главных осей инерции тела в точке O перпендикулярна плоскости материальной симметрии.



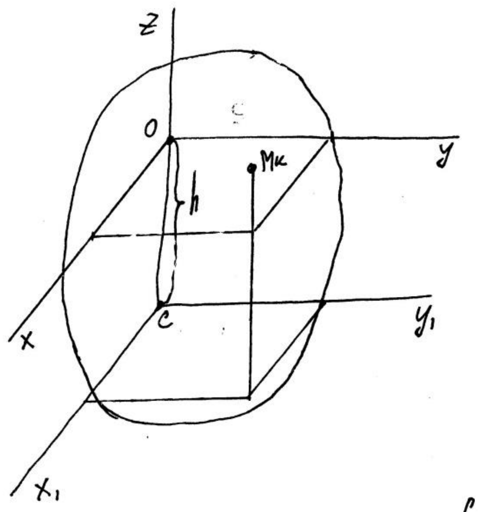
$M_k(x, y, z)$; $M_k'(x, y, -z)$

$$I_{xz} = \sum m_k x_k z_k = \sum_{I} m_k x_k z_k + \sum_{II} m_k x_k(-z_k) = 0$$

$$I_{yz} = \sum m_k y_k z_k = \sum_{I} m_k y_k z_k + \sum m_k y_k(-z_k) = 0$$

$\begin{cases} I_{xz} = 0 \\ I_{yz} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ ось Oz - главная ось инерции в т. O ($Oz \perp П$)

Теорема 4: главные оси инерции тела в какой-либо точке тела, взятой на одной из главных центральных осей инерции тела, параллельны этим осям.



Ox, Oy, Oz - главные оси инерции тела

Oxyz - с.к. в т. O

Ox, O

Cx₁, Cy₁, Cz₁ - главные центральные оси инерции

$M_k(x_1, y_1, z_1)$ в $Cx_1y_1z_1$

$M_k(x, y, z)$ в $Oxyz$

$OC = h$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 - h \end{cases}$$

$$I_{yz} = \sum m_k y_k z_k = \sum m_k y_k (z_{1k} - h) = \underbrace{\sum m_k y_{1k} z_{1k}}_{I_{y_1z_1}} - h\underbrace{\sum m_k y_{1k}}_{My_{1c}}$$

$$I_{zx} = \sum m_k z_k x_k = \sum m_k x_{1k} (z_{1k} - h) = \underbrace{\sum m_k z_{1k} x_{1k}}_{I_{x_1z_1}} - h\underbrace{\sum m_k x_{1k}}_{Mx_{1c}}$$

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k = \underbrace{\sum m_k x_{1k} y_{1k}}_{I_{x_1y_1}}$$

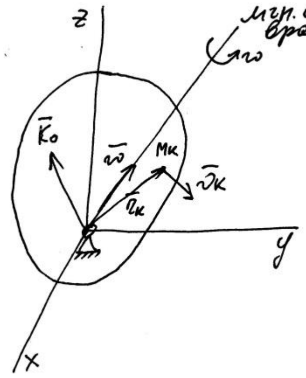
$$\begin{cases} I_{yz} = I_{y_1z_1} - hMy_{1c} \\ I_{zx} = I_{z_1x_1} - hMx_{1c} \\ I_{xy} = I_{x_1y_1} \end{cases}$$

$I_{y_1z_1} = 0$; $I_{z_1x_1} = 0$ $I_{x_1y_1} = 0$

т.к. $x_c = 0$; $y_c = 0 \Rightarrow \boxed{I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0}$

Следствие: главная центральная ось инерции тела является главной осью инерции тела во всех своих точках.

Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.



$$\bar K_0 = \sum \bar r_k \times m_k \bar v_k$$

$$\bar K_0 = K_x \bar i + K_y \bar j + K_z \bar k$$

$$\bar K_0 = \sum m_k (\bar r_k \times \bar v_k) = \sum m_k \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_k & y_k & z_k \\ v_{kx} & v_{ky} & v_{kz} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}) \bar i + \sum m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}) \bar j + \sum m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx}) \bar k$$

$$\bar v_k = \bar\omega \times \bar r_k = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \underbrace{(\omega_y z_k - \omega_z y_k)}_{v_{kx}} \bar i + \underbrace{(\omega_z x_k - \omega_x z_k)}_{v_{ky}} \bar j + \underbrace{(\omega_x y_k - \omega_y x_k)}_{v_{kz}} \bar k$$

Тогда $K_x = \sum m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}) = \sum m_k \big(y_k(\omega_x y_k - \omega_y x_k) - z_k(\omega_z x_k - \omega_x z_k)\big) =$

$$= \sum m_k (\omega_x y_k^2 + \omega_x z_k^2 - \omega_y x_k y_k - \omega_z x_k z_k) = \omega_x \underbrace{\sum m_k (y_k^2 + z_k^2)}_{I_x} - \omega_y \underbrace{\sum m_k x_k y_k}_{I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\sum m_k x_k z_k}_{I_{xz}}$$

K_y, K_z аналогично.

Тогда

$$\bar K_0 = K_x \bar i + K_y \bar j + K_z \bar k$$

$$\left.\begin{aligned} K_x &= I_x \omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ K_y &= -I_y \omega_y - I_{xy}\omega_x - I_{yz}\omega_z \\ K_z &= I_z \omega_z - I_{xz}\omega_x - I_{zy}\omega_y \end{aligned}\right\}$$ кинетические моменты твердого тела относительно координатных осей

Частные случаи

1) пусть ox, oy, oz – главные оси инерции

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$\begin{cases} K_x = I_x \omega_x \\ K_y = I_y \omega_y \\ K_z = I_z \omega_z \end{cases}$$

2) пусть тв. тело вращается вокруг неподв. оси

$$\bar\omega\ (\omega_x = 0;\ \omega_y = 0;\ \omega_z \neq 0)$$

$$\begin{cases} K_x = -I_{xz}\omega_z \\ K_y = -I_{yz}\omega_z \\ K_z = I_z \omega_z \end{cases}$$

3) если oz – главная ось инерции тела в т. O

$$\begin{cases} K_x = 0 \\ K_y = 0 \\ K_z = I_z \omega_z \end{cases}$$

Кинетическая энергия твердого тела при движении вокруг неподвижной точки.

$$T=\sum\frac{1}{2}m_k\bar{v}_k^2=\frac{1}{2}\sum m_k\bar{v}_k\bar{v}_k=\frac{1}{2}\sum m_k v_k(\bar{\omega}\times\bar{r}_k)=\frac{1}{2}\omega\underbrace{\sum(\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k)}_{\bar{K}_0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{T=\frac{1}{2}\bar{\omega}\bar{K}_0}$$

<u>Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки</u> равна половине скалярного произведения векторов угловой скорости вращения тела и кинетического момента относительно неподвижной точки.

$$T=\frac{1}{2}\bar{\omega}\bar{K}_0=\frac{1}{2}|\bar{\omega}||\bar{K}_0|\cos(\widehat{\bar{\omega},\bar{K}_0})>0\Rightarrow\cos(\widehat{\bar{\omega},\bar{K}_0})>0\Rightarrow\angle(\bar{\omega},\bar{K}_0)\text{ - острый}$$

$$T=\frac{1}{2}\bar{\omega}\bar{K}_0=\frac{1}{2}(\omega_x K_x+\omega_y K_y+\omega_z K_z)=\frac{1}{2}(\omega_x(I_x\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z)+$$

$$+\omega_y(I_y\omega_y-I_{xy}\omega_x-I_{yz}\omega_z)+\omega_z(I_z\omega_z-I_{xz}\omega_x-I_{zy}\omega_y))=$$

$$=\frac{1}{2}[I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2-2I_{xy}\omega_x\omega_y-2I_{xz}\omega_x\omega_z-2I_{yz}\omega_z\omega_y]$$

Пусть ox, oy, oz – главные оси инерции тела в. O

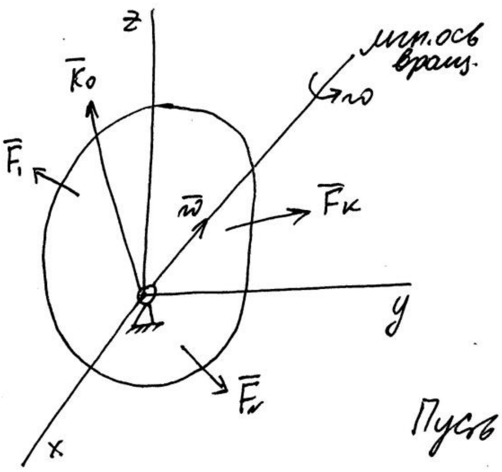
тогда $\boxed{T=\frac{1}{2}(I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2)}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial\omega_x}&=I_x\omega_x=K_x\\ \frac{\partial T}{\partial\omega_y}&=I_y\omega_y=K_y\\ \frac{\partial T}{\partial\omega_z}&=I_z\omega_z=K_z\end{aligned}\right|\Rightarrow\left\{\begin{aligned}K_x&=\frac{\partial T}{\partial\omega_x}\\ K_y&=\frac{\partial T}{\partial\omega_y}\\ K_z&=\frac{\partial T}{\partial\omega_z}\end{aligned}\right.$$

если ось oz неподвижна, то

$$\frac{\partial T}{\partial\omega_z}=I_z\omega_z;\quad\boxed{T=\frac{1}{2}I_z\omega_z^2}$$

Вывод кинематических и динамических уравнений Эйлера.



$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{L}_0^{(e)}$$

По ф-ле Буре: $\dfrac{d\bar{K}_0}{dt} = \dfrac{\tilde{d}\bar{K}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0$

Тогда $\bar{L}_0^{(e)} = \dfrac{\tilde{d}\bar{K}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0$

Пусть oxyz - подвижные оси (вращ. вместе с телом)

$$\bar{L}_0^{(e)} = L_x \bar{i} + L_y \bar{j} + L_z \bar{k}$$

$$\frac{\tilde{d}\bar{K}_0}{dt} = \frac{dK_x}{dt}\bar{i} + \frac{dK_y}{dt}\bar{j} + \frac{dK_z}{dt}\bar{k}$$

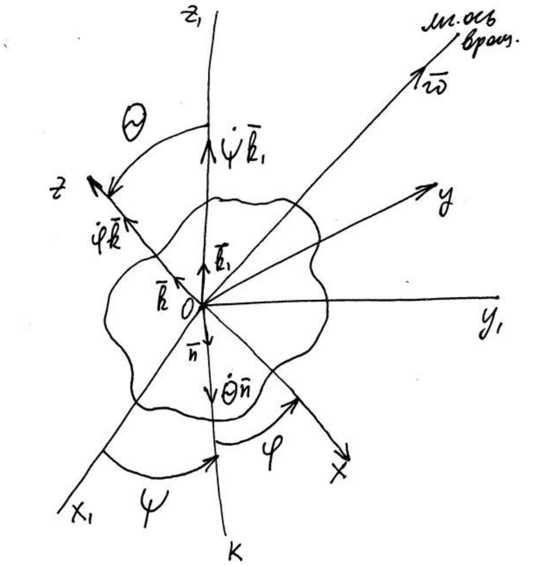
$$\bar{\omega} \times \bar{K}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} = (\omega_y K_z - \omega_z K_y)\bar{i} + (\omega_z K_x - \omega_x K_z)\bar{j} + (\omega_x K_y - \omega_y K_x)\bar{k}$$

Тогда
$$\left.\begin{aligned} &\frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y = L_x^{(e)} \\ &\frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z = L_y^{(e)} \\ &\frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x = L_z^{(e)} \end{aligned}\right\}$$

Пусть оси ox, oy, oz - главные оси инерции тела в т. O
$(K_x = I_x \omega_x;\ K_y = I_y \omega_y;\ K_z = I_z \omega_z)$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dK_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_z \omega_y = L_x^{(e)} \\ &\frac{dK_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x \omega_z = L_y^{(e)} \\ &\frac{dK_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x \omega_y = L_z^{(e)} \end{aligned}\right\}$$ Динамические уравнения Эйлера

<u>Углы Эйлера</u>



$Ox_1y_1z_1$ – неподвижная СК

$Oxyz$ – подвижная СК

OK – линия узлов ($Oxy \cap Ox_1y_1$)

$\bar\omega = \dot\psi \bar k_1 + \dot\theta \bar n + \dot\varphi \bar k$

ψ – угол прецессии

θ – угол нутации

φ – угол собств. вращения

Угол между неподвижной осью Ox1 и линией узлов OK называется углом прецессии.

Осью прецессии является неподвижная ось Z1.

Угол между осями Oz и Oz1 называется углом нутации.

Осью нутации является линия узлов.

Угол между линией узлов и подвижной осью OX называется углом собственного вращения.

проекция на $Oxyz$:

	ω_x	ω_y	ω_z
$\dot\psi \bar k_1$	$\dot\psi \sin\theta \cdot \sin\varphi$	$\dot\psi \sin\theta \cos\varphi$	$\dot\psi \cos\theta$
$\dot\theta \bar n$	$\dot\theta \cos\varphi$	$-\dot\theta \sin\varphi$	0
$\dot\varphi \bar k$	0	0	$\dot\varphi$

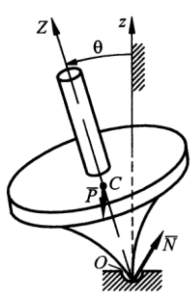
$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi \\ \omega_y &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi \\ \omega_z &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{aligned}\right\} \text{кинематические уравнение Эйлера}$$

Система из 6 уравнений(динамических и кинематических) – система дифференциальных уравнений вращения твердого тела вокруг неподвижной точки имеет решения в 3-х случаях:

1) <u>Случай Эйлера</u>

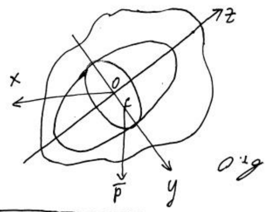
Неподвижной точкой теля является его центр масс и главный момент внешних сил равен 0.

2) <u>Случай тяжелого волчка (случай Лагранжа)</u>



К этому случаю относят движение твердого тела с одной неподвижной точкой O в однородном поле силы тяжести при условии, что центр тяжести (точка C) лежит на оси его динамической симметрии OZ.

3) <u>Случай Софьи Ковалевской</u>



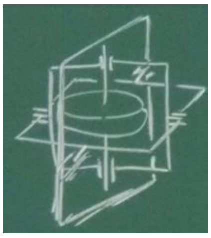
$\boxed{I_x = I_y = 2I_z}$

Приближенная теория гироскопа. Основные понятия и допущения.

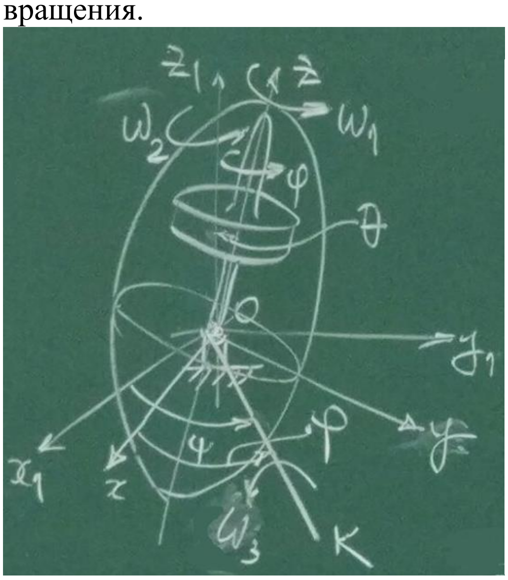
Определения

Гироскопом называется всякое симметричное тело, вращающееся вокруг оси своей симметрии, имеющее на этой оси неподвижную точку.

Гироскоп называют астатическим (уравновешенным), если неподвижная точка совпадает с центром масс гироскопа и к нему не приложены никакие силы, кроме силы тяжести и реакций связи, наложенные на неподвижную точку.



В силу симметрии гироскопа, эллипсоид инерции его в неподвижной точке является эллипсоидом вращения.



$I_x = I_y$

$\bar{\omega}_1 = \dot{\varphi}\bar{k}$ – угловая скорость собств. вращ.

φ – угол собств. вращения; $\bar{k}$ – орт Oz

$\bar{\omega}_2 = \dot{\psi}\bar{k}_1$ – угловая скорость прецессии

ψ – угол прецессии; $\bar{k}_1$ – орт Oz_1

$\bar{\omega}_3 = \dot{\theta}\bar{n}$ – угловая скорость нутации

θ – угол нутации; $\bar{n}$ – линия узлов (орт)

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$$

Допущения в приближенной теории гироскопа

1. $\omega_1 >> \omega_2$; $\omega_1 >> \omega_3$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\bar\omega \cong \bar\omega_1}$$

2. $|\bar\omega_1| = const$

3. $K_0 = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}$

$K_x = I_x \omega_x$; $K_y = I_y \omega_y$; $K_z = I_z \omega_z$

Т.к. $\bar\omega = \bar\omega_1$, то $\bar\omega(\omega_x = 0; \omega_y = 0; \omega_z = \omega_1 \neq 0)$

Тогда $\boxed{K = K_z = I_z \omega_1}$

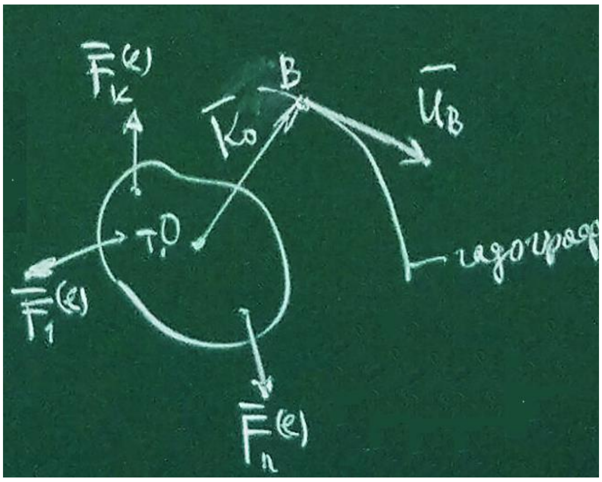
4. Т.к. $|\bar\omega_1| = const$

$$\Downarrow$$

$$|\bar K_0| = I_z \omega_1 = const$$

5. $\bar K_0 = I_z \bar\omega_1 = \overline{const}$

Особенности движения оси гироскопа. Теорема Резаля. Правило прецессии.

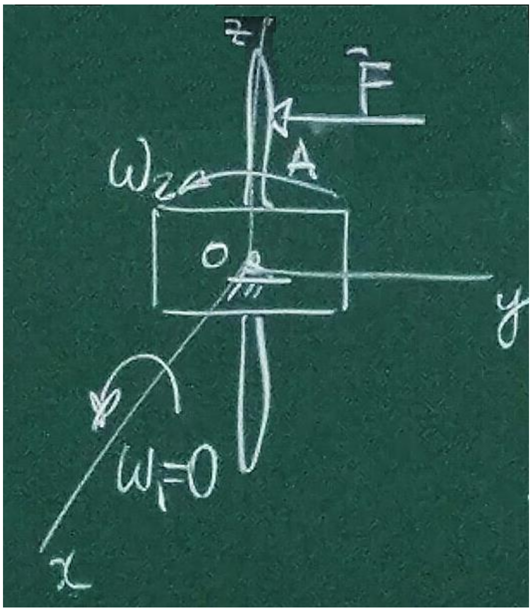


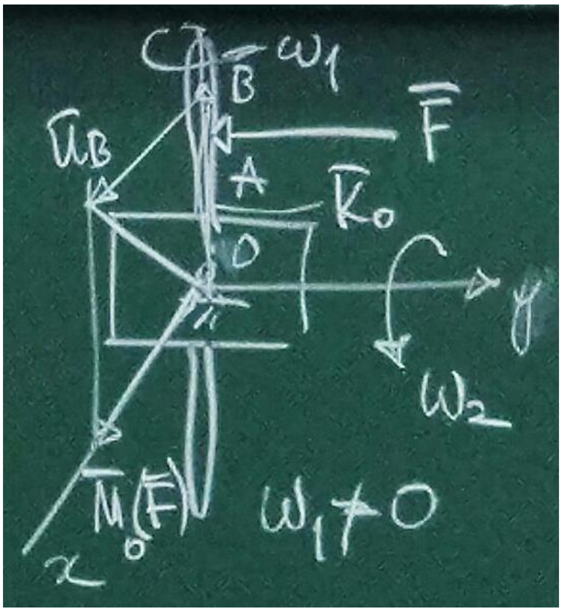
$$\frac{d\bar K_0}{dt} = \bar U_B$$

$$\frac{dK_0}{dt} = \sum \bar M_0(\bar F_k^{(e)}) = \bar L_0^{(e)}$$

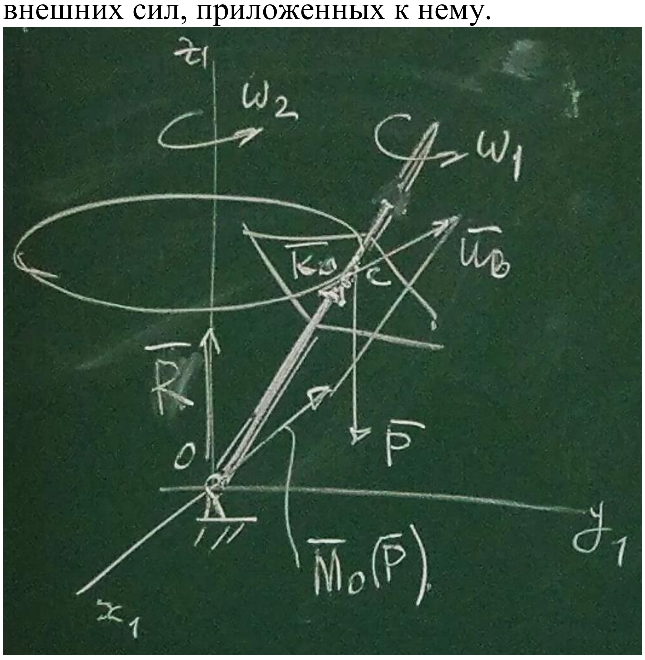
Тогда $\boxed{\bar U_B = \bar L_0^{(e)}}$

При движении материального объекта, скорость точки В конца вектора кинетического момента системы относительно неподвижного центра О, равна по величине и сонаправлена вектору главного момента внешних сил, приложенных к системе, относительно той же точки.





Правило прецессии: если к гироскопу приложена система внешних сил, главный момент которых относительно неподвижной точки гироскопа, отличен от нуля, то та часть оси гироскопа, по которой направлен его кинетический момент, будет прецессировать в направлении вектора главного момента внешних сил, приложенных к нему.



$\psi = \frac{S_B}{OB}$

$u_B = M_O(\bar{F}) = F \cdot OA = F \cdot c$

$OB = |\bar{K}_0| = I_z \omega_1$

S_B - перемещение точки

$S_B = u_B \cdot \tau$

Тогда $\boxed{\psi = \frac{S_B}{OB} = \frac{u_B \tau}{OB} = \frac{F \tau c}{I_z \omega_1}}$ $\quad I_z \omega_1 \uparrow\downarrow \psi$

ψ пропорциональна элементарному импульсу силы и обратно пропорциональна кинетическому моменту

$$\psi \sim \frac{F\tau}{I_z \omega_1}$$

Ось гироскопа слабо реагирует на ударные нагрузки.

Гироскопический момент. Правило Жуковского.

$$\bar{U}_B = \bar{L}_0^{(e)}$$

$$\bar{U}_B = \bar{\omega}_2 \times \overline{OB} = \bar{\omega}_2 \times I_z \bar{\omega}_1 = I_z(\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1) = \bar{L}_0^{(e)}$$

$\bar{L} + \bar{L}_0^{(e)} = 0$ (в соотв. со следствием из принц. Дал.)

$\bar{L} = \Sigma \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k)$ – гироскопический момент

$$\bar{L} = -\bar{L}_0^{(e)} = -I_z(\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1) \Rightarrow \boxed{\bar{L} = I_z(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}$$

$$|\bar{L}| = I_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta$$

Гироскопический момент – реакция оси гироскопа на окружающие её объекты, вынуждающие гироскоп участвовать в прецессионном движении.

$N = \frac{L}{l}$ – гироскопическая реакция; l – расстояние между опорами оси гироскопа

Правило Жуковского: если ось гироскопа участвует в вынуждающей прецесии, то возникает гироскопический момент, который стремится совместить ось собственного вращения гироскопа с осью его прецессии так, чтобы при совпадении осей, совпали и направления вращения вокруг этих осей.