Министерство образования Российской Федерации

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. Н.Э. БАУМАНА

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1:

Электростатика

Вариант №1

Москва,2022г

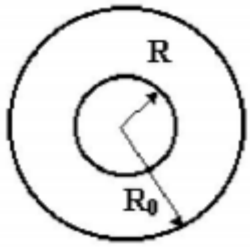
Условие:

Если у вас вопросы напиши мне на почту studizba.helpme@gmail.com я отвечу в течение 1-2 дня

Оставьте 5 звезд и активные комментарии и скиньте мне скриншоты через почту, вы получите подарок 20 руб.

Вариант 1

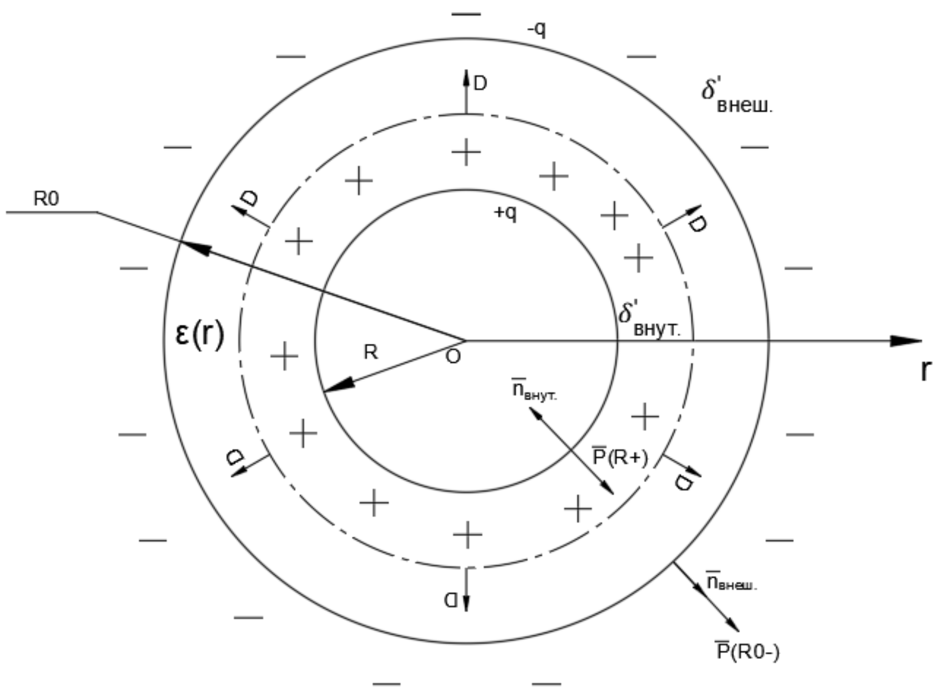
Сферический диэлектрический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Заряд конденсатора равен q. Диэлектрическая проницаемость меняется между обкладками по закону ε=f(r).



Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на внутренней σ_1' и внешней σ_2' поверхностях диэлектрика, распределение объёмной плотности связанных зарядов $\rho'(r)$, максимальную напряженность электрического поля E и ёмкость конденсатора.

ε=f(r) имеет вид $\varepsilon = \frac{R_0^n}{R_0^n + R^n - r^n}$

$R_0/R = 2/1$, $n = 2$



Решение:

1) Преобразуем зависимость для проницаемости:

$$\varepsilon = \frac{(2R)^2}{(2R)^2 + R^2 - r^2} = \frac{4R^2}{5R^2 - r^2}$$

2) Теорема Гаусса для вектора D:

$$\oint \mathrm{DdS} = \mathrm{q}$$

$$\mathrm{D(r)}(4\pi r^2) = \mathrm{q}$$

$$\mathrm{D(r)} = \frac{\mathrm{q}}{4\pi \mathrm{r}^2}$$

Dmax = D(R) = $\frac{\mathrm{q}}{4\pi R^2}$

D(R0) = D(2R) = $\frac{\mathrm{q}}{16\pi R^2}$

3) $\mathrm{D(r)} = \varepsilon(\mathrm{r})\mathrm{E(r)}\varepsilon_0$

Найдём зависимость напряженности E(r) э/с поля между обкладками конденсатора:

$$\mathrm{E}(r) = \frac{\mathrm{D(r)}}{\varepsilon(\mathrm{r})\varepsilon_0} = \frac{\mathrm{q}(5R^2 - r^2)}{4\pi \mathrm{r}^2 4R^2 \varepsilon_0} = \frac{\mathrm{q}(5R^2 - r^2)}{16\pi\varepsilon_0 \mathrm{r}^2 \mathrm{R}^2}$$

E(R)= $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

E(2R)= $\frac{q}{64\pi\varepsilon_0 R^2}$

4) Найдём зависимость поляризованности P(r) э/с поля между обкладками конденсатора:

$$\overline{P} = k\varepsilon_0\overline{E}$$

Где $k = \varepsilon(r) - 1$ – диэлектрическая восприимгивость вещества

$$P(r) = (\varepsilon(r) - 1)\varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E(r)\varepsilon(r) - \varepsilon_0 E(r)$$

$$P(r) = D - \varepsilon_0 E(r) = \frac{q}{4\pi r^2} - \frac{q(5R^2 - r^2)}{16\pi r^2 R^2} = \frac{q(r^2 - R^2)}{16\pi r^2 R^2}$$

P(R) = 0

P(R0) = P(2R) = $\frac{3q}{64\pi\, R^2}$

5) Определим поверхностную плотность связанных зарядов:

σ' (r) = P(r) $*$ $\cos\varphi$ =$\frac{q(r^2-R^2)}{16\pi r^2 R^2}$ $*$ $\cos\varphi$, где ϕ – угол между норм. к расширенной пов-ти и поляризованностью.

Для внутренней пов-ти : cos ϕ = cosπ = -1 ; для внешней пов-ти cos ϕ= cos0 = 1

$\sigma'_1 = P(R) * \cos\varphi = \frac{q(R^2-R^2)}{16\pi R^2 R^2} * \cos\pi = 0$

$$\sigma'_2 = P(2R) = \frac{q(4R^2 - R^2)}{16\pi 4R^2 R^2} = \frac{3q}{64\pi\, R^2}$$

Объёмная плотность связанных зарядов:

$$\operatorname{div}\overline{P} = -\rho'$$

$\operatorname{div}\overline{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(P_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi}$

В силу симметрии $P_\theta = 0$ и $P_\varphi = 0$

=> $\operatorname{div}\overline{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{q(r^2-R^2)}{16\pi r^2 R^2}) = \frac{q}{8\pi r R^2} = -\rho'$

=> $\rho'(r) = \frac{-q}{8\pi r R^2}$

Проверка:

$$q= \int_R^{R_0}\rho'(r)4\pi r^2 dr + \int_S^0\sigma'_{в}dS = \int_R^{2R}\frac{-q}{8\pi r R^2}4\pi r^2 dr + \frac{3q}{64\pi\, R^2}4\pi(2R)^2 = -\frac{3q}{4} + \frac{3q}{4} = 0$$

=> *расчёты верны.*

6) Вычислим U:

$$U = \int_{R}^{R_0} E(r)\,dr = \int_{R}^{2R} \frac{q(5R^2 - r^2)}{16\pi\varepsilon_0 r^2 R^2}\,dr$$

$$U = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\int_{R}^{2R} \frac{5R^2}{r^2}\,dr - \int_{R}^{2R} dr\right) = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\left(5R^2\left(-\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right) - 2R + R\right)$$

$$U = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3q}{32\pi\varepsilon_0 R}$$

7) Вычисли ёмкость C:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q \cdot 32\pi\varepsilon_0 R}{3q} = \frac{32\pi\varepsilon_0 R}{3}$$

8) Построим графики и найдём минимальные и максимальные значения для величин P, D, E:

$D(R) = \frac{q}{4\pi R^2}$ – max

$D(2R) = \frac{q}{16\pi R^2}$ – min

$\frac{D(r)}{D(R)} = \frac{\frac{q}{4\pi r^2}}{\frac{q}{4\pi R^2}} = \frac{R^2}{r^2}$ (R < r < R0)

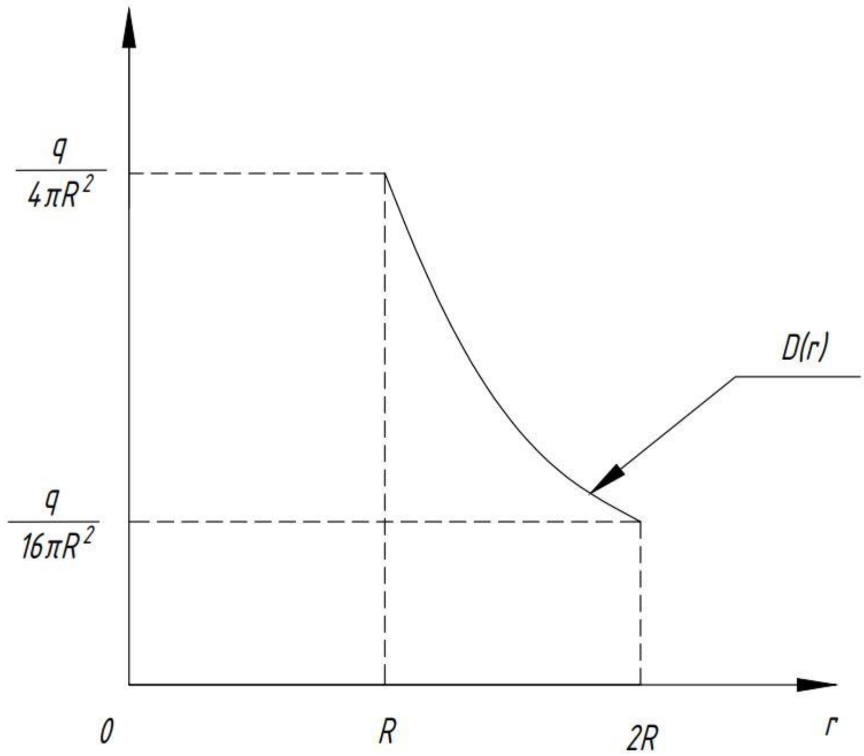
$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ – max

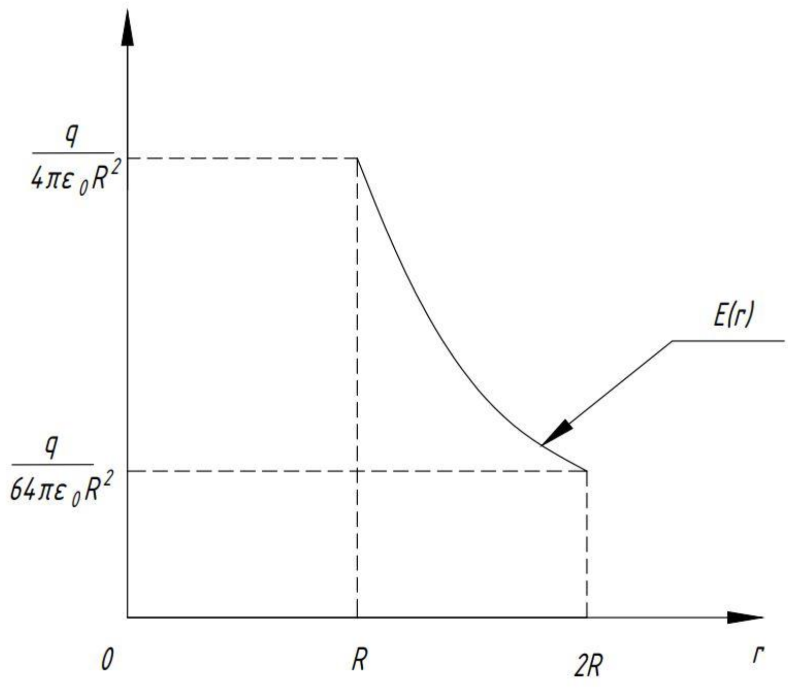
$E(2R) = \frac{q}{64\pi\varepsilon_0 R^2}$ – min

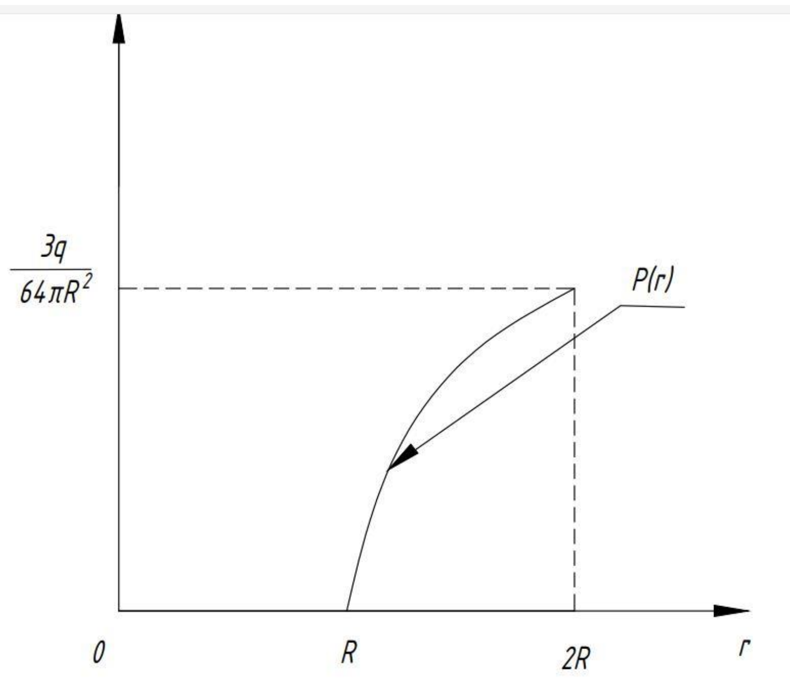
$\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{(5R^2 - r^2)}{4r^2}$ (R < r < R0)

P(R) = 0 – min

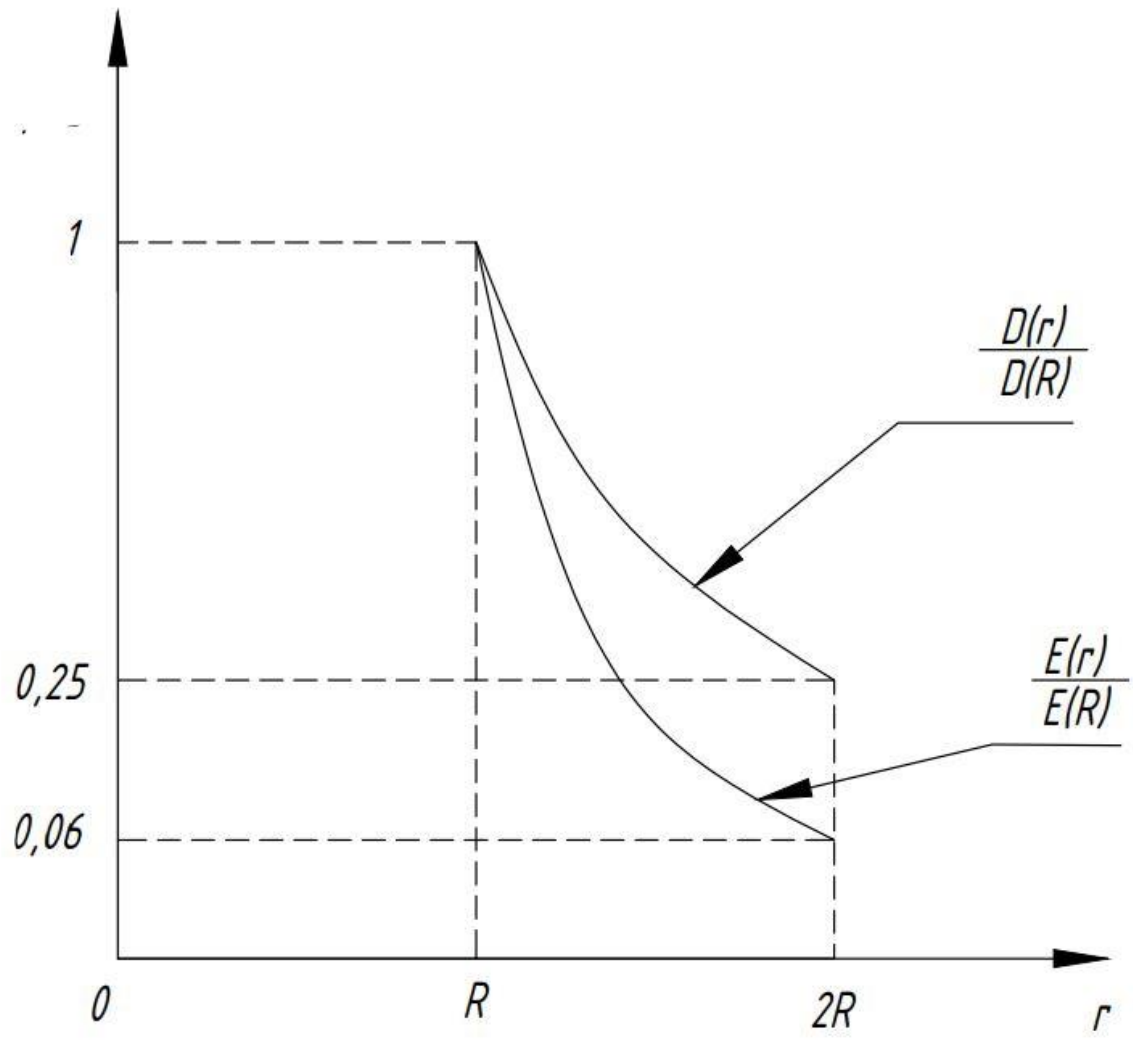
P(R0) = P(2R) = $\frac{3q}{64\pi R^2}$ – max


q/4πR²
q/16πR²
D(r)
0
R
2R
r


q/4πε₀R²
q/64πε₀R²
E(r)
0
R
2R
r



3q
64πR²
P(r)
0
R
2R
r



1
D(r)
D(R)
0,25
E(r)
E(R)
0,06
0
R
2R
r