

Электричество и магнетизм

Электростатика

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл - элементарный заряд; $e^- = -e$ - заряд электрона

$Q = Ne$ - заряд любого тела кратен элементарному (электрон не делит)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2} \text{ - закон Кулона, 1785 г.; } \epsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \text{ - электрическая постоянная}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot \vec{r}}{r^3} \text{ - закон Кулона в векторном виде (F, \vec{F})}$$

справедливо для точечных и центрально-симметричных зарядов

Закон сохранения заряда - заряд замкнутой системы остаётся неизменным.

$q = inv$ в СТО; ЗСЗ выполняется в СТО.

Напряжённость электрического поля в данной точке называется отношением силы, действующей на малый заряд (большой вылет из поля), помещённый в данную точку к величине этого заряда.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}} \right]$$

Принцип суперпозиции

Напряжённость электрического поля, создаваемого в данной точке системой зарядов, равна векторной сумме напряжённостей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности

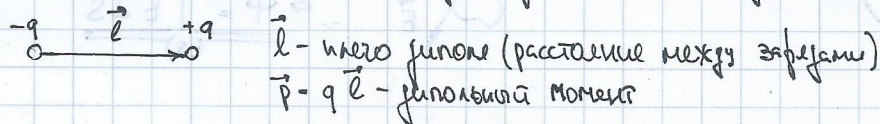
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Напряжённость поля точечного заряда

$$Q \circ \vec{r} \circ q_0 \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq_0\vec{r}}{r^3 \cdot q_0} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}; \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Электрическое поле диполя

Диполь - совокупность 2 зарядов, одинаковых по модулю и противоположных по знаку.



• Поле в экваториальной пл-ти диполя

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(r^2 + (l/2)^2)} \Rightarrow \text{из подобия} \quad \frac{E_+}{E_-} = \frac{r^2 + (l/2)^2}{l} \Rightarrow E = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + (l/2)^2)^{3/2}}$$

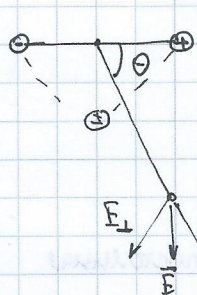
$$\vec{E} = - \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + (l/2)^2)^{3/2}}$$

Для точечного ($r \gg l$) диполя $E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \vec{E} = - \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

• Поле на оси диполя

Между зарядами: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{r^2} - \frac{q}{(r+l)^2} \right]$
 На продолжении оси: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{(r+l)^2} - \frac{q}{r^2} \right]$

Поле точечного диполя в общем случае

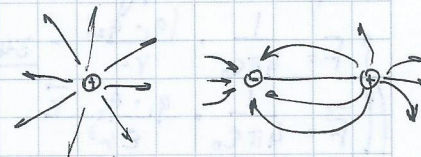


$$l_{\parallel} = l \sin \theta \quad r_{\parallel} = r \sin \theta$$

$$l_{\perp} = l \cos \theta \quad r_{\perp} = r \cos \theta$$

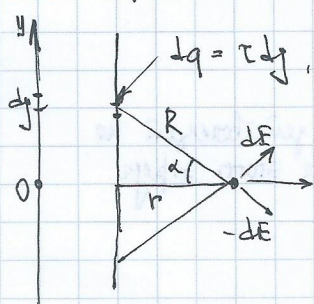
$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \Rightarrow E = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2}$$

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}$$



Электрическими силовыми линиями наз. линии, мысленно проведенные в пространстве так, что вектор напряженности в каждой точке направлен к ним по касательной.

Электрическое поле бесконечно протяженной равномерно заряженной нити



$$dq = \tau dy, \quad \tau = \frac{dq}{dy} = \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right] - \text{линейная плотность заряда}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{R^2}$$

$$y = r \tan \alpha; \quad dy = r \sec^2 \alpha d\alpha; \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dy}{R^2}$$

$$R = r / \cos \alpha$$

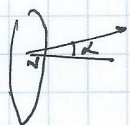
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau r d\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau d\alpha}{r}$$

Т.к. для каждого участка можно найти симм. отн. $\tau \cdot 0 \Rightarrow$ векторное суммирование dE заменится скалярным суммированием dE_x .

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha \Rightarrow E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \cos \alpha}{r} d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

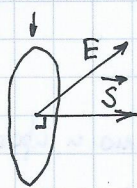
Теорема Гаусса

Поток вектора



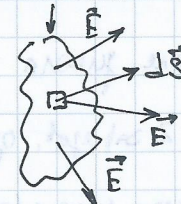
$$\Phi = ES \cos \alpha$$

плоская пов-ть



$$\Phi = \vec{E} \vec{S}$$

пов-ть в обз. случае



$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S}$$

Телесный угол



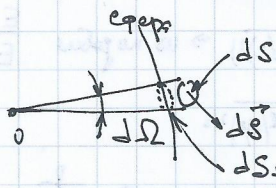
Часть пространства, заключенного внутри конуса

$$\Omega = [sr] - \text{стерадиан}; \quad \Omega = \frac{S}{r^2}$$

Рассмотрим малый телесный угол $d\Omega$:

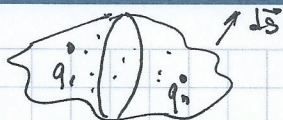
$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha \cdot r}{r^3}$$

$$\Rightarrow d\Omega = \frac{\vec{r} d\vec{S}}{r^3} \quad (*)$$



$$\alpha = \angle(d\vec{S}; d\vec{S}_{\perp}) = \angle(\vec{r}; d\vec{S})$$

Теорема Гаусса

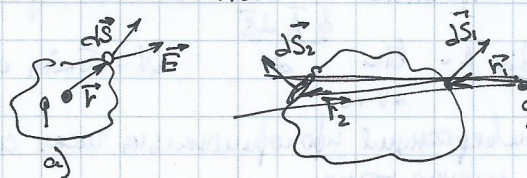


1) Гаусса - Остроградского?
2) Обобщение?
Алгебраическая сумма

Поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность,无限но прорезанную в пространстве, равен алгебраической сумме зарядов, находящихся в объёме, охваченном данной поверхностью, делённому на электрическую постоянную.

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

// Если пов-ть замкнута, то $d\vec{S}$ направлен наружу //



Пр-во: • 1 заряд внутри Гausсовой пов-ти (а)

$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}; \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r}; \quad \Rightarrow \Delta\Phi = \frac{q \vec{r} \cdot d\vec{S}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega \Rightarrow \Phi = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{(S)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega \Big|_0^{4\pi} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

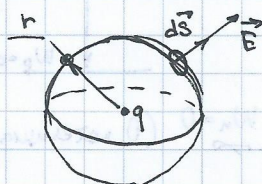
• Множество зарядов внутри Гausсовой пов-ти

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i; \quad \Phi = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{(S)} \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \oint_{(S)} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0} \quad \text{з.т.т.}$$

• Покажем, что заряды снаружи Гausсовой пов-ти не влияют на поток (б)

$$\Delta\Phi = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{q \vec{r}_1 \cdot d\vec{S}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{q \vec{r}_2 \cdot d\vec{S}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (-\Delta\Omega + \Delta\Omega) = 0 \quad \text{з.т.т.}$$

• Напряжённость поля точечного заряда



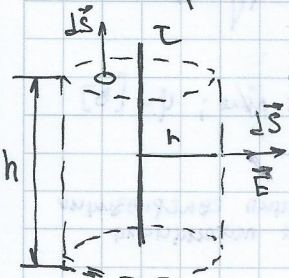
Гausсова пов-ть - сфера

Т.к. нет асимметрии, то напряжённость одинакова либо от центра, либо к центру.

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{(S)} E \cdot dS = E \oint_{(S)} dS = E \cdot 4\pi r^2; \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

• Электрическое поле равномерно заряженной нити

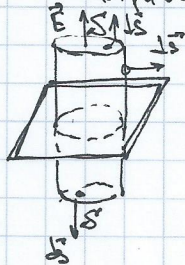
напряжённость во всех точках одинакова



$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{бок}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{бок}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{бок}} E \cdot dS = E \cdot \int_{S_{бок}} dS = E \cdot 2\pi r h$$

$$\Rightarrow E \cdot 2\pi r h = \frac{\tau h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

• Электрическое поле равномерно заряженной плоскости



$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \left[\frac{Кл}{м^2} \right] - \text{поверхностная плотность заряда}$$

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{бок}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES + ES + 0 = 2ES$$

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}; \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Дивергенция векторного поля

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{в декартовых координатах}$$

// дивергенция - расходимость //

Инвариантна по отношению к вращению системы координат.

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}, \quad \Delta V - \text{объем, ограниченный пов-тью площади } S$$

Дивергенция пропорциональна числу силовых линий, начинающихся в фиксированном объеме, окружающем данной точке.

Формула Остроградского

$$\oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{(V)} \text{div } \vec{A} \, dV$$

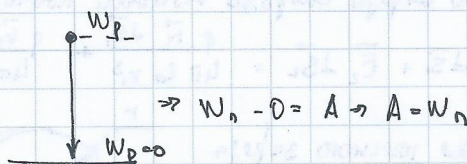
Получим теорему Гаусса для вектора в дифференциальной форме из т. Гаусса в интегральной форме.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \Rightarrow \int_{(V)} \text{div } \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = \int_{(V)} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV \Rightarrow \boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{т. Гаусса для вектора в диф. форме}$$

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \left[\frac{C}{m^3} \right] - \text{объемная плотность зарядов}$$

Потенциал электростатического поля

$$A \text{ или поле} = -\Delta W_p$$



$$Q \quad \vec{r} \quad q_0 \quad \vec{E} \quad \vec{F} \quad W_p=0 \quad (0 \text{ потенциальной энергии на } \infty)$$

$$W_p = A = \int_{\infty}^r q_0 E \, dr =$$

$$= q_0 \int_{\infty}^r E \, |dr| \cos \alpha = q_0 \int_{\infty}^r E \, dr = q_0 \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dr = \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r = \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0 r} = W_p$$

В какой-то точке пространства не меняется заряд W_p будет одинаков ($W_p \sim r$ - расст. между зарядами) $\Rightarrow$ электростатическое поле консервативно

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W_p}{q_0} \quad \text{отношение } W_p \text{ заряда } q_0 \text{ к его величине} \Rightarrow \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad Q - \text{создает поле}; \quad \varphi = [B]$$

$$\varphi = \frac{W_p}{q_0} = \frac{\int_{\infty}^r q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r}}{q_0} = \int_{\infty}^r \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_{\infty}^r \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_{\infty}^r \frac{q_i}{q_0} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad \text{принцип суперпозиции для потенциала}$$

Теорема о циркуляции напряженности электростатического поля

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} - \text{циркуляция вектора } \vec{E}$$

$$\oint q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta W_p = 0 \Rightarrow \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0} \quad \text{в интегральном виде}$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна 0.

Связь напряженности и потенциала

$$A = -\Delta W_p; \quad \Delta A = -\Delta W_p \Rightarrow q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = -q_0 \Delta \varphi \Rightarrow E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{если } dy \text{ и } dz = 0); \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{вектор можно выбрать такие перемещения})$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad } \varphi$$

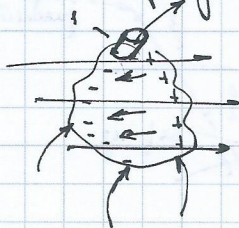
Эквипотенциальная поверхность

Эквипотенциальная пов-ть - пов-ть равного потенциала

Перпендикулярна силовым линиям.

$$\begin{aligned} q_0 \cdot d\varphi &= 0 \\ d\varphi &= -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \\ \Rightarrow \vec{E} &\perp d\vec{r} \end{aligned}$$

Проводники в электрическом поле.



Внутри проводника в электростатическом поле $\vec{E} = 0$

Пов-ть проводника эквипотенциальна $\Rightarrow$ силовые линии $\perp$ пов-ти

1- Гауссова пов-ть (цилиндр, $S \gg 0$, $h \ll rS$) лежащая по обе стороны пов-ти

По 1-й Гаусса $\oint \vec{E} dS = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E S = \frac{\epsilon S}{\epsilon_0} \Rightarrow \left| E = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right|$ - формула пов-ти проводника

Оператор Лапласа для потенциала

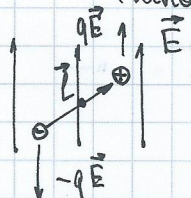
$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \text{лапласиан } \varphi; \quad \Delta \varphi = \text{div grad } \varphi$$

$$\Delta \varphi = \text{div} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \text{т.е.}$$

$$\Delta \varphi = \text{div} (\text{grad } \varphi) = -\text{div } \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	- уравнение Пуассона
$\Delta \varphi = 0$	- уравнение Лапласа

Диполь в электрическом поле



Отн. центру диполя: $\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = \left[\frac{\vec{l}}{2}, q\vec{E}\right] + \left[-\frac{\vec{l}}{2}, -q\vec{E}\right] = [\vec{l}, q\vec{E}] = [q\vec{l}, \vec{E}] \Rightarrow$

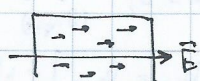
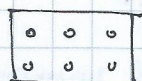
$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]}, \quad \vec{p} - \text{дипольный момент}$$

Электрическое поле в диэлектриках

- Диэлектрики:
- неполярные (в отсутствии внешнего эл. поля дипольный момент = 0)
 - полярные (в отсутствии внешнего эл. поля дипольный момент есть)

1) $\vec{E}_{\text{внеш}} = 0$

2) $\vec{E}_{\text{внеш}} \neq 0$



α - поляризуемость молекулы (для неполярных диэлектриков) $\rightarrow \vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$

$\vec{P}$ - поляризованность диэлектрика (вектор поляризации) - дипольный момент единицы объема

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\Delta V}; \quad \Delta V \rightarrow 0 - \text{физический бесконечно малый объем (большие расстояния между молекулами)}$$

Для неполярного диэлектрика $\vec{P} = \frac{N}{V} \vec{p} = \frac{N}{V} \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 (\frac{N}{V} \alpha) \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$
 χ - поляризуемость диэлектрика

Для полярных диэлектриков $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, $\chi \neq 0$

Заряды

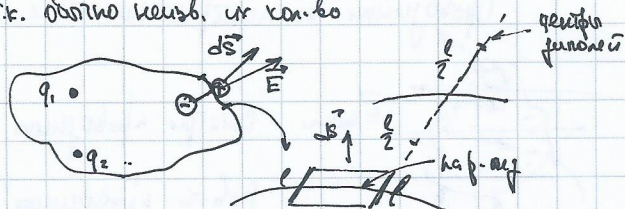
- свободные $\rightarrow$ $\rightarrow q, p, \sigma$ - сторонние заряды
- связанные - - в толще макроскопического диэлектрика (микроскопические скомпенсированы), но есть на пов-ти

Не может покинуть пределов своих молекул - q', p', σ'

Изменим т. Гаусса так, чтобы не содержала связанные заряды, т.е. только незав. от кон-во

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i + \sum_{i=1}^n q'_i}{\epsilon_0} \quad \text{т. Гаусса для диэлектриков}$$

Получим из т. Гаусса для вакуума т. Гаусса для диэлектриков (расм. считать для неполярных диэлектриков)



$$dW = dS \cdot l \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{E}, d\vec{S})$$

$$dq' = -q_0 \cdot n \quad dW = -q_0 n \cdot dS \cdot l \cos \alpha = -q_0 l \cdot dS \cos \alpha = -\vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \sum q'_i = - \oint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i - \oint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_{(S)} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{вектор электрического смещения} \Rightarrow \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i \quad \text{т. Гаусса для диэлектриков в интегральной форме}$$

Связь $\epsilon, \chi, \vec{D}, \vec{E}$ и $\vec{P}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{справедливо всегда}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad \text{для линейных изотропных диэлектриков (для ~ 95% диэлектриков)}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}, \quad \epsilon = 1 + \chi \quad \text{отн. электрическая проницаемость} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{---}$$

В вакууме $\chi = 0 \Rightarrow \epsilon = 1$; для воздуха $\epsilon = 1.00058$

$$\oint_{(S)} \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i \Rightarrow \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon \epsilon_0} \Rightarrow \text{в вакууме } \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0}$$

заставляет считать, что т. Гаусса для диэлектриков даёт возможность расм. т. Гаусса для вакуума, как свой

Поведение $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела диэлектриков

Нормальная составляющая

$$\oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i \quad \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_{2n} \cdot S \quad \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = -D_{1n} S$$

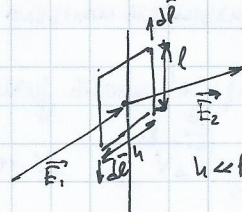
$$\Rightarrow -D_{1n} S + D_{2n} S = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \quad \text{т.е. нормальная составляющая вектора электрического смещения не меняется}$$

$$\Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \Rightarrow \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

• касательная составляющая

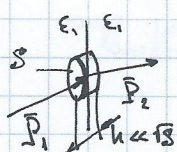
$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \int_{(S)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \int_{(S)} E_2 dl \cos \beta_2 \quad \beta_2 = (\vec{E}_2, d\vec{l})$$

$$= \int_{(S)} E_2 dl = E_2 l$$



$$\Rightarrow -E_{1x}l + E_{2x}l = 0 \Rightarrow \boxed{E_{1x} = E_{2x}} \quad \frac{D_{1x}}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{D_{2x}}{\epsilon_2 \epsilon_0} \Rightarrow \frac{D_{1x}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2x}}{\epsilon_2}$$

$$\rho' \text{ и } \sigma'$$



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \sum_{i=1}^n q_i'$$

$$-D_{1x}S + D_{2x}S = -\sigma' S \Rightarrow \sigma' = -(D_{2x} - D_{1x})$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \sum_{i=1}^n q_i'; \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} dV = \text{Ф-теорема Остроградского}$$

$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = - \int_V \rho' dV \Rightarrow \text{div} \vec{D} = -\rho' \Rightarrow \boxed{\rho' = - \text{div} \vec{D}}$$

Теорема Гаусса для диэлектриков в дифференциальной форме

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i; \quad \oint \text{div} \vec{D} dV = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \text{Ф-теорема Остроградского}$$

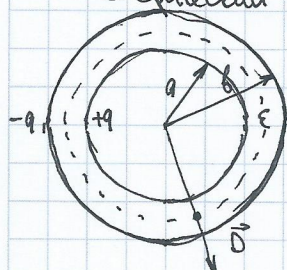
$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{D} = \rho} \text{ - т. Гаусса для диэлектриков в диф. форме}$$

Конденсаторы

Конденсаторами наз. устройства, сделанные из проводников, в которых при помещении на эти проводники электрич. зарядов, возникает электрическое поле, целиком сосредоточенное в пространстве между проводниками.

Ёмкость - отношение заряда конденсатора к разности потенциалов $\Leftrightarrow C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{\Delta\varphi} = [F]$

Сферический конденсатор



Для нахождения $\Delta\varphi$ найдем E по т. Гаусса для диэлектриков

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i; \quad D \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

В линейных изотропных диэлектриках $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \cdot \epsilon r^2}$

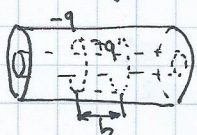
$$\Delta\varphi = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (\text{из } \Delta\varphi = \left| \frac{\Delta W}{q_0} \right| = \frac{A}{q_0} = \frac{\int q_0 E dr}{q_0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \int_a^b \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\Rightarrow C = 4\pi \epsilon_0 \frac{1}{1/a - 1/b} = \frac{4\pi \epsilon_0}{1/a - 1/b} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi \epsilon \epsilon_0}{1/a - 1/b}}$$

[Все формулы справедливы]
для $b \gg a$

Цилиндрический конденсатор



$$\Delta\varphi = \int_a^b E(r) dr$$

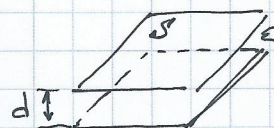
Гауссова пов-ть - цилиндр радиусом r и длиной h < l

$$\Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i; \quad D \cdot 2\pi r h = \frac{q \cdot h}{l} \Rightarrow \text{заряд внутри участка } h \Rightarrow D = \frac{q}{2\pi r l}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0 r l} \Rightarrow \Delta\varphi = \int_a^b E(r) dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0 r l} dr = \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a} = \frac{q \ln b/a}{2\pi \epsilon \epsilon_0 l}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_0 l}{\ln b/a}}$$

Плоский конденсатор

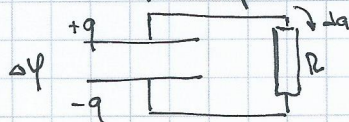


Т.к. поле однородное и расстояние фиксированное $\Rightarrow \Delta\varphi = Ed$

$G = \frac{q}{S}$; Т.к. $d \ll r \Rightarrow \text{поле} \equiv \text{поле плоскости} \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ - поле, созд. одной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{qd}{\epsilon_0 S} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{d}}$$

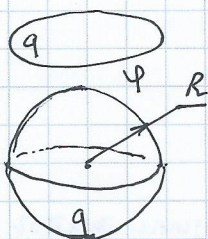
Энергия заряженного конденсатора



$$\Delta A = \Delta\varphi (-dq) = -\frac{q}{C} dq \Rightarrow W_c = \int_0^q \left(-\frac{q}{C} dq\right) = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q^2}{2C}$$

Т.к. $C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{U} \Rightarrow \boxed{W_c = \frac{CU^2}{2}}$

Ёмкость и энергия сферического проводника

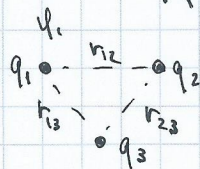


$$C = \frac{q}{U} \Rightarrow W = \frac{CU^2}{2} \text{ (выбор аналогичен)}$$

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Энергия взаимодействия системы зарядов

1) Две 2 заряда



$$W_{12} = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2)$$

2) Добавим q_3 : $W_{13} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$

$$3) \text{ Две } q_i: W_{13} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}, i \neq j \Rightarrow \boxed{W_{13} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i}$$

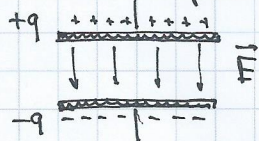
φ_i - потенциал, созд. всеми зарядами, кроме q_i , в т. заряд q_i

$$\text{Асим поле} = -W_{13}$$

Объёмная плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{dW}{dV} = \left[\frac{\Phi^2}{\text{м}^3} \right] - \dots$$

Рассч. на примере плоского конденсатора:



$$W_c = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S \cdot (Ed)^2}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}$$

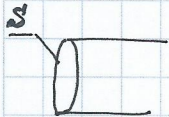
$$\boxed{W = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}}$$

Электрический ток

- " - образование возбуждение заряженных частиц - носителей.

I ↑↑ влияние положительных эффектов

$$I = \frac{dq}{dt} = \left[\frac{K_n}{c} \right]$$



$j = \frac{dI}{dt}$ - мощность тока; $j = \left[\frac{A}{m^2} \right]$ - векторная величина.

$$\Rightarrow I = \int_{(s)} i \cdot ds$$

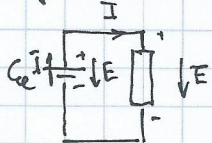
$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = - \frac{dQ}{dt} - \oint_V \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} - \text{б масс. силы}$$

Если по произвольному пути γ , то $\oint_{(\gamma)} \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \text{ где } \sigma = \frac{1}{\rho} - \text{удельная электропроводность} - \text{з.и. Ома}$$

$$I = \frac{U}{R} \rightarrow \text{все электрических размеров} \quad j = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \pi}{\partial x}$$

$$\vec{j} = c(\vec{E} + \vec{E}^*), \quad E^* - \text{напряжённость электрич. см}$$



Сю также сим- вое сие не электростатическая природа (химическая, магнитная и т.д.)

$$\epsilon_c = \frac{A_{cr}}{q_0} = \frac{A^*}{q_0}$$

Участок цепи со сторонними силами - неоднородный

$Q = I^2 R \Delta t$; — см. формула Ленса в интегральной форме

$$\frac{SQ}{W} = j^2 \rho L t$$

в дифференциальной форме

Магнетизм

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера:

$$\vec{F}_A = I \vec{dl} \times \vec{B}$$
 - закон Ампера (определение вектора магнитной индукции $\vec{B} = [T]$)

Но движущийся в магнитном поле заряд создает ток Лоренца:

$$F_A = q \vec{v} \times \vec{B} + q \vec{E}$$

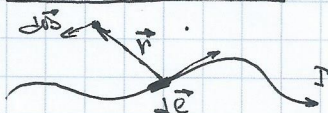
$$\{ j = q_0 n \bar{u}, \quad \bar{u} - \text{скорость дрейфа} \}$$


$$dF_A = \frac{1}{2} d\vec{r} \times \vec{B} - j \frac{1}{2} d\vec{r} \times \vec{B} - j \frac{1}{2} d\vec{r} \times \vec{B} - \frac{1}{2} \mu_0 \vec{r} \times \vec{B} - \frac{1}{2} \mu_0 \vec{r} \times \vec{B} - \frac{1}{2} \mu_0 \vec{r} \times \vec{B}$$

Закон Буа-Сабатъ-Лангсса

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

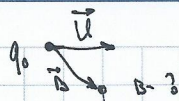
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} - \text{магнитная постоянная}$$



μ - магнитная проницаемость в-ва

Магнитное поле точечного заряда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{U} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$



Принцип суперпозиции

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$$

Магнитное поле прямолинейного проводника с током в вакууме

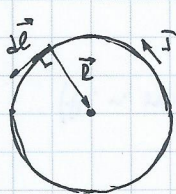
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi R^2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta, R = \frac{r}{\cos \beta}, dl = \frac{r}{\sin \beta} d\beta$$

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I r d\beta \cos \beta}{4\pi r^2 \cos^2 \beta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos \beta} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Поле в центре витка с током



$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int dl = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Линии магнитной индукции замкнуты, т.е. нет "магнитных" зарядов

Теорема Гаусса для магнитного поля

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

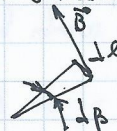
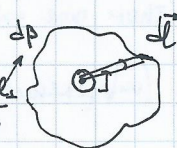
$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в интегральной форме для вакуума

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k$$

I_k - токи, пронизывающие контур.

Формула: $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{r} = \mu_0 I$ - показано



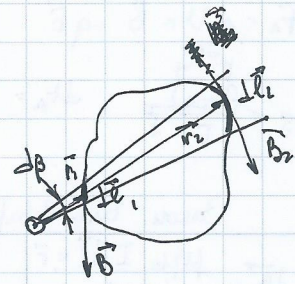
$$\alpha = (\vec{B}, \vec{n})$$

2) Множество токов внутри контура

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} \sum_{k=1}^n \vec{B}_k \cdot d\vec{l} = \sum_{k=1}^n \oint_{(C)} \vec{B}_k \cdot d\vec{l} = \sum_{k=1}^n \mu_0 I_k \text{ (по 1))} - \text{показано}$$

3) Токи нах. снаружи контура

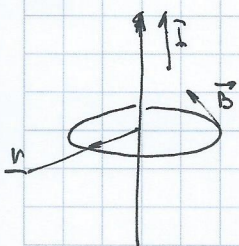
$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{P_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl + \oint_{P_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = 0$$



З.Т.З.

С "+" берется ток, направление которого по правилу буравчика согласовано с выбранным направлением обхода контура.

Вектор магнитной индукции проводника с током



$$\vec{B} d\vec{l} = B dl$$

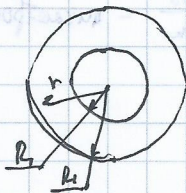
$$\oint_{(c)} \vec{B} d\vec{l} = \oint_{(c)} B dl = B \oint_{(c)} dl = B \cdot 2\pi r$$

$$\mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Магнитное поле тороида.
тороидальная катушка



N витков;



$$\oint_{(c)} B dl = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

Магнитное поле тонкого тороида

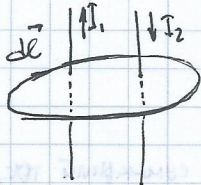
$$R_2 - R_1 \ll R_1; \quad R_1 \approx r \approx R_2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}; \quad n = \frac{N}{2\pi r} - \text{число витков на единицу длины}$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 n I$$

Магнитное поле длинного соленоида



$\ell \gg R \rightarrow$ поле не отличается от поля тонкого тороида $\Rightarrow B = \mu_0 n I$



$$\oint_{(c)} B dl = \mu_0 (I_2 - I_1) - \text{т. о. циркуляции}$$

Если ток согласован с правилом буравчика, то "+"

Ротор векторного поля

$$\text{в декартовых коор.} \therefore \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Ротор (вихрь) характеризует закрученность векторного поля в данной точке

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{(c)} \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S} \right) \cdot \vec{n} - \text{векторное дифференцирование}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}; \quad \text{Ротор } \exists \text{ только в 3-м измерении}$$

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме в дифференциальной форме

$$\oint_{(c)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k$$

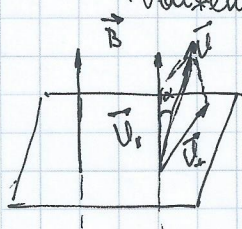
При переходе в диф. форму исп. форму Стокса: $\oint_{(c)} \vec{A} d\vec{l} = \int_{(S)} \text{rot } \vec{A} d\vec{S}$

$$\Rightarrow \int_{(S)} \text{rot } \vec{B} d\vec{S} = \int_{(S)} \mu_0 \vec{j} d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

Движение заряженных частиц в магнитном поле



Для $v_{\perp}$: $m\vec{a} = \vec{F}_L$
 $\vec{F}_L = |q\vec{v} \times \vec{B}| = qvB \sin \alpha = qv_{\perp}B$

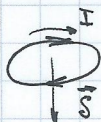
Период T в ω , движ. вверх: $m \frac{v_{\perp}^2}{R} = qv_{\perp}B$, $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ - радиус спирали, по которой движ. частица

$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m R}{qB R} = \frac{2\pi m}{qB}$; $\omega = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$ - циклотронная частота

$h = v_{\parallel} \cdot T = \frac{2\pi m}{qB} v \cos \alpha$ - шаг спирали

Магнитное поле в веществе.

Магнитный момент контура с током



$\vec{p}_m \stackrel{\text{def}}{=} I \vec{S}$ - магнитный момент

$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$ - момент сил дейст. на конт. в магнитном поле (выб. само.)

Магнетики - в-ва, обладающие магнитным св-вом

Намагниченность в-ва - магнитный момент единицы объёма $\Leftrightarrow \vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_{mi}}{\Delta V}$

Токи: макроскопические

молекулярные (токи намагниченности)

Если в-во намагничено равномерно, то в толще p_{mi} компенсирует p_{mj} , а на пов-ти возникает суммарный ток, создающий внешнее магнитное поле. Ток, соз. его - молекулярные.

Равномерно - $j'_{\text{пов.}}$ (поверхностная плотность). Неравномерно - $j'_{\text{объёмная}}$ плотность.

Все, что отн. к молекулярным объём. со штрихом.

напряжённости

Выведем т. о циркуляции вектора магнитной ~~напряжённости~~ в в-ве:

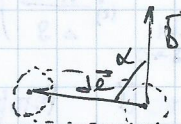
$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum_{k=1}^n I_k + \sum_{k=1}^n I_k' \right)$

Под выражением $\sum I_k'$, рассл. намагниченность в в-ве для участка контура $d\vec{l}$.



Токи вне и внутри контура не вносят вклада.

Центр витка с током не должен совпасть, тем самым, с центром контура $d\vec{l}$ все такие витки кажутся внутри.



$dV = \pi r^2 dl \cos \alpha$

момент витка

$dI' = i \cdot n \cdot dV = i n \pi r^2 dl \cos \alpha = \underbrace{\pi r^2}_{p_m} i n dl \cos \alpha = p_m n dl \cos \alpha = J dl \cos \alpha = (\vec{J}, d\vec{l})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n I_k' = \oint_{(L)} \vec{J} d\vec{l}$ - т. о циркуляции вектора намагниченности

$\Rightarrow \oint_{(L)} \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k + \oint_{(L)} \vec{J} d\vec{l} \Rightarrow \oint_{(L)} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k$

$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ - напряжённость магнитного поля

$$[\vec{H}] = \left[\frac{A}{M} \right] = [J]$$

$\Rightarrow \oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^k I_k$ и $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ - т.о циркуляции вектора магнитной напряжённости в в-ле в инт. и замкн. форме.

Обозв $\vec{B}, \vec{J}, \vec{H}, \mu$ и χ .

$\vec{J} = \chi \vec{H}$, χ - отн. магнитная восприимчивость

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \Rightarrow (1 + \chi) \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

μ - отн. магнитная проницаемость

Справедливо только для линейных изотропных магнетиков.

Плотность объёмных молекулярных токов

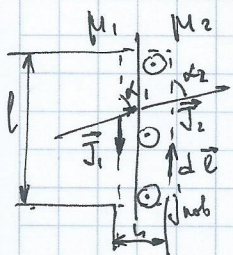
Молекулярные токи - токи, которые текут внутри объёма (магнитные моменты не полностью компенсируют друг друга)

$$\oint_{(L)} \vec{J} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k' - \text{т.о циркуляции вектора намагниченности. } I_k' - \text{молекулярный ток}$$

Из ф. Стокса $\int_{(S)} \text{rot } \vec{J} d\vec{S} = \int_{(S)} \vec{J}' d\vec{S}$, $\vec{J}'$ - плотность молекулярных токов

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}' = \text{rot } \vec{J}}$$
 - плотность объёмных молекулярных токов $J' = \left[\frac{A}{M^2} \right]$

Плотность поверхностных молекулярных токов



$$J'_{\text{нов}} = \left[\frac{A}{M} \right] - \text{плотность}$$

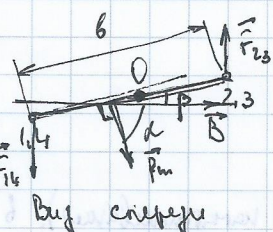
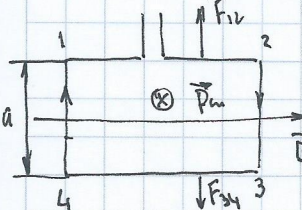
Пов-ть - прямоугольник $l \times h$, $h \ll l$, l - мало

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = J_2 l_2 \cos \alpha_2 - J_1 l_1 \cos \alpha_1 = J_{2\tau} l - J_{1\tau} l$$

$$\sum_{k=1}^n I_k' = J'_{\text{нов}} \cdot l$$

$$\Rightarrow J_{2\tau} l - J_{1\tau} l = J'_{\text{нов}} \cdot l \Rightarrow \boxed{J'_{\text{нов}} = J_{2\tau} - J_{1\tau}}$$

Момент сил, действующий на контур с током



$$F_{23} = F_{41} = I a B$$

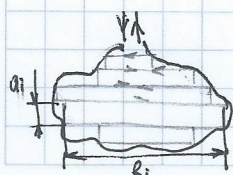
F_{12} и F_{34} полностью компенсируют друг друга

$$M = F_{23} \cdot \frac{b}{2} \cos \beta + F_{41} \cdot \frac{b}{2} \cos \beta = F_{23} b \cos \beta = I a b b \sin \alpha = I \cdot S \cdot B \sin \alpha = p_m B \cdot \sin \alpha$$

По правилу левой руки $[\vec{p}_m, \vec{B}]$ на нас

Сопоставим с направлением момента сил $\Rightarrow \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$

Обобщим это выражение для случая плоского контура произв. формы.



$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n B I b_i a_i \sin(\vec{S}_i, \vec{B}) = \sum_{i=1}^n B I S_i \sin(\vec{S}_i, \vec{B}) = I B \sin(\vec{S}, \vec{B}) \cdot \sum_{i=1}^n S_i = I B S \sin(\vec{S}, \vec{B}) \Rightarrow \vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

Магнетики

- все в-ва, имеющие магнитные св-ва

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_m}{\Delta V} - \text{намагниченность}$$

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad \chi = \mu - 1 - \text{отн. магнитная восприимчивость (в вакууме } \chi=0, \mu=1)$$

- Диамагнетики ($\mu \neq 1$, чуть меньше 1, $\chi \rightarrow -0$, $|\chi| \ll 1$), в-ва у которых $p_m \rightarrow 0$ - Ларморовы прецессия
- Парамагнетики
- Ферромагнетики

В-во	N ₂	Si	NaCl	H ₂ O (*)	Bi
χ	$-3 \cdot 10^{-6}$	$-3,1 \cdot 10^{-6}$	$-30,3 \cdot 10^{-6}$	$-13 \cdot 10^{-6}$	$-284 \cdot 10^{-6}$

- Парамагнетики ($\mu \neq 1$, $\mu > 1$; $|\chi| \ll 1$ $\chi \rightarrow +0$)

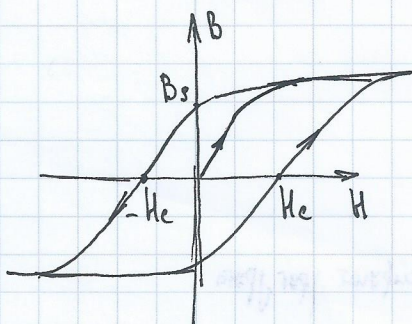
В-ва имеют собств. магнитный момент в отсутствие вн. поля

В-во	W	Al	Na
χ	$7,8 \cdot 10^{-5}$	$32 \cdot 10^{-5}$	$3,72 \cdot 10^{-5}$

- Ферромагнетики ($\mu \gg 1$, $\chi \gg 1$)

№	Материал	Железо	Супермаллой	Амико
Состав		99,9% Fe	79% Ni, 5% Mo, 16% Fe	Al, Ni, Co, Fe
μ_{max}		5000	800 000	-
B_s, T_n		-	-	0,9
He, AlH		0,3		52000

Петля Гистерезиса



H_c - коэрцитивный сила (напряженность магнитного поля, необход. для полного размагничивания тела)

$B_s - J_s$ - остаточная намагниченность

Ферромагнетики разделяют на домены (области спонтанного намагничивания), в которых все магнитные моменты сориентированы даже в отсутствие внешнего магнитного поля.

При внесении во внешнее магнитное поле доменов, рн которых сориентированы по полю, разрастается.

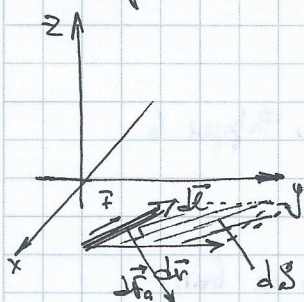
Точка Кюри

T_c - температура, выше которой в-во утрачивает ферромагнитные св-ва.

Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

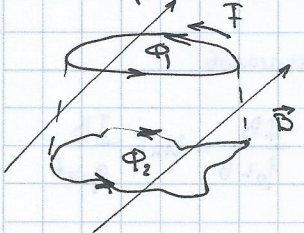
$\Phi_B = \int_{(S)} \vec{B} d\vec{S}$ - магнитный поток; $\Phi = [B\Delta S]$ - вектор

• Проводник



$$\begin{aligned} \Delta A &= \vec{F} d\vec{r} = I[\vec{l}, \vec{B}] d\vec{r} = I \langle d\vec{r}, [\vec{l}, \vec{B}] \rangle = I \langle d\vec{r}, d\vec{S} \rangle \\ &= I \vec{B} \cdot d\vec{S} = I \Delta \Phi \\ \Rightarrow \boxed{A = I \Delta \Phi} \end{aligned}$$

• Контур с током

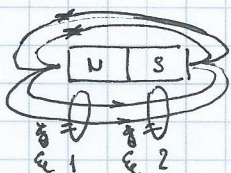


$$\begin{aligned} A &= I \Delta \Phi_{\text{ток}} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \text{ - т. Ессес для магнитного поля} \\ \Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 + \Delta \Phi_{\text{ток}} &= 0 \Rightarrow \Delta \Phi_{\text{ток}} = \Phi_2 - \Phi_1 \\ \Rightarrow A &= I(\Phi_2 - \Phi_1) = I \Delta \Phi \Rightarrow \boxed{A = I \Delta \Phi} \end{aligned}$$

Электромагнитная индукция

Закон электромагнитной индукции Фарадея

Выберем -ч- из ЗСЭ. Пусть есть неподвижный магнит, соуд. магнитное поле. Контур перемещают из положения 1 в положение 2.



При малом перемещении $\Delta A = I \Delta \Phi$
 Работа исл. ЭДС $= \mathcal{E} \int I dt$, $\mathcal{E} \int = \Delta A_{\text{исл}} / I_{\text{г}} = \Delta A / (I \Delta t)$
 По закону Ома: $\Delta Q = I^2 R \Delta t$, $R = R_{\text{л}} + r$

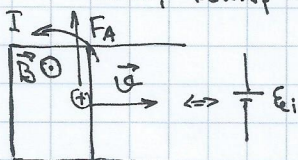
Т.к. магнит неподвижный, то все работы совершается исл. ЭДС

$$\begin{aligned} \text{ЗСЭ: } \Delta A_{\text{исл}} &= \Delta A + \Delta Q \Leftrightarrow \mathcal{E} \int I dt = I \Delta \Phi + I^2 R \Delta t \quad | : \Delta t \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} + IR; \quad \left(\mathcal{E} - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right) = IR \end{aligned}$$

Из зка Ома для полной цепи $\mathcal{E}_{\Sigma} = \mathcal{E} - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{\Sigma} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}}$ - ЭДС индукции (выбрана только для I случая)
 Справедливо всегда.

Причины возникновения ЭДС индукции

• $\vec{B} = \text{const.}$, контур изменяется



• $\vec{B} = \text{var.}$, контур не движется и не деформируется

В этом случае ЭДС индукции обусловлена силой вихревого электрического поля ($\nabla \times \vec{E} \neq 0$, линии замкнуты), создаваемое изменением со временем магнитного поля.

При изменении в контуре, ЭДС индукции обусловлена силой Лоренца

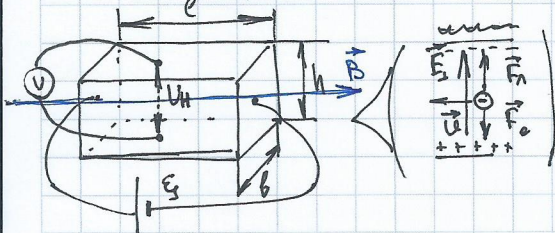
$$\epsilon_i = \frac{A^*}{q_0} = \frac{\oint_{(s)} q_0 \vec{E}^* d\vec{l}}{q_0} = \underbrace{\oint_{(s)} \vec{E}^* d\vec{l}}_{\text{вихровое}} + \underbrace{\oint_{(s)} \vec{E} d\vec{l}}_{\text{электростатическое}} \rightarrow 0 \quad \epsilon_i = \frac{\oint_{(s)} \vec{E}^* d\vec{l}}{q_0}$$

Получим закон Фарадея в дифференциальной форме. Пусть контур неподвижен и не деформируется:

$$\epsilon_i = - \frac{1}{dt} \Rightarrow \oint_{(s)} \vec{E} d\vec{l} = - \frac{1}{dt} \int_{(s)} \vec{B} d\vec{S} = \int_{(s)} \left(- \frac{1}{dt} \vec{B} \right) d\vec{S}$$

По Ф.е. Стокса: $\int_{(s)} \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = \int_{(s)} \left(- \frac{1}{dt} \vec{B} \right) d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = - \frac{1}{dt} \vec{B}}$ - эл. индукция Фарадея в диф. форме.

Эффект Холла



Смещение частиц происходит до тех пор, пока не возникнет:

$$F_H = F_e \Rightarrow q_0 U_H = q_0 E_H \Rightarrow E_H = U_H$$

$$U_H = E_H h = U_H h - \text{холловская разность потенциалов}$$

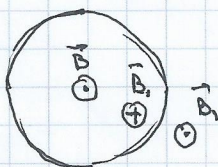
$$\left. \begin{aligned} \vec{I} = j \vec{S} = j b h \\ j = q_0 n \vec{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = q_0 n U_H b h \Rightarrow U_H = \frac{I}{q_0 n b h} - \text{скорость дрейфа} \Rightarrow U_H = \frac{I B h}{q_0 n b h} = \frac{I B}{q_0 n b} \Rightarrow U_H = \frac{I B}{q_0 n b}$$

$$U_H = R_H \cdot I B / b, \quad R_H = \frac{1}{q_0 n} - \text{константа Холла}$$

Правило Ленца

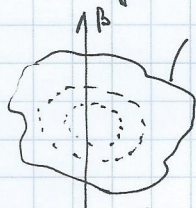
ЭДС индукции направлена так, чтобы вызываемый ею ток препятствовал изменению магнитного потока через контур.

Пример:



$\vec{B}$ - внеш.
 $\vec{B}_i$ - магнитное поле инд. тока

Индукционные токи (токи Фуко)



Массивный проводник - можно провести много контуров, в каждом из которых возникает индукционный ток (ток Фуко), которые при прохождении через тело выделяют энергию тепла

Проверение $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе раздела магнетиков

• Нормальные составляющие

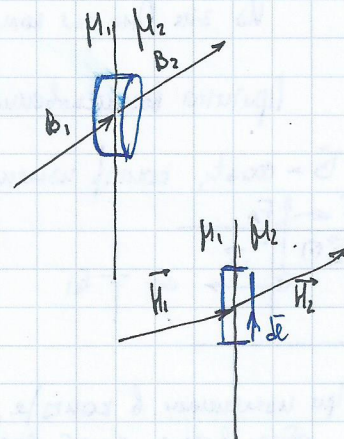
Применим т. Гаусса для цилиндра ($S_{\text{осн}} \rightarrow 0, h \ll \sqrt{S_{\text{осн}}}, \vec{S}_{\text{осн}} \perp \text{пов.ту}$)

$$\oint_{(s)} \vec{B} d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow -B_{1n} S + B_{2n} S = 0 \Rightarrow \boxed{B_{1n} = B_{2n}}$$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \Rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

• Касательные составляющие

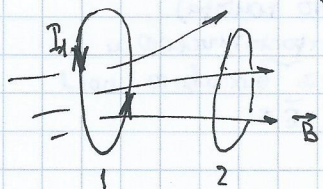
Контур в виде шпир. кр. ($l \rightarrow 0, h \ll l$). Применим т. о циркуляции:



$$\oint_{(c)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k \Rightarrow -H_{1z}l + H_{2z}l = 0 \Rightarrow \boxed{H_{1z} = H_{2z}}$$

$$\Rightarrow \frac{B_{1z}}{\mu_1} = \frac{B_{2z}}{\mu_2}$$

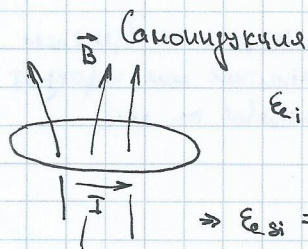
Взаимная индуктивность



$\Phi_2 \sim I_1$ (из закона Био-Савара-Лапласа)

$$\frac{\Phi_2}{I_1} = L_{21} - \text{взаимная индуктивность}$$

$$\Rightarrow \Phi_2 = L_{21} I_1; \quad \Phi_1 = L_{12} I_2, \quad L_{21} = L_{12}$$



$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}; \quad \Phi \sim I; \quad L = \frac{\Phi}{I} = [H] - \text{индуктивность}$$

$\Rightarrow \Phi = LI$ - поток поля, созд. током, текущим по контуру.

к, витков
Многосвязные контуры

ЭДС индукции в k-м витке*

$$\text{Изменяем поток через витки} \Rightarrow \mathcal{E}_i = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{ik} = \sum_{k=1}^n \left(- \frac{d\Phi_k}{dt} \right) = - \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \Phi_k \right) = - \frac{d\Psi}{dt}$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^n \Phi_k - \text{потокосцепление}$$

соленоид

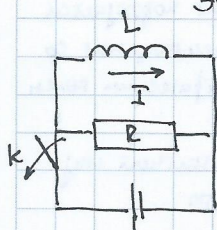


$$\Psi = LI \Rightarrow L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{NB\Delta S}{I} = \frac{N\mu_0 n I \Delta S}{I} = \mu_0 n^2 V$$

Индуктивность тороидального контура и соленоида

$$\Rightarrow \boxed{L = \mu_0 n^2 V}$$

Энергия катушки индуктивности



$$\mathcal{E} = \frac{\Delta A_{\text{ср}}}{S_{\text{ср}}} = \frac{\Delta A_{\text{ср}}}{I \Delta t}$$

$$\Delta A_{\text{ср}} \mathcal{E}_{\text{ср}} = \mathcal{E}_{\text{ср}} I \Delta t = - \frac{d\Psi}{dt} \cdot I \Delta t = - I \Delta \Psi$$

$$\Psi = LI \Rightarrow \Delta \Psi = L \Delta I \Rightarrow \Delta A_{\text{ср}} \mathcal{E}_{\text{ср}} = - LI \Delta I \Rightarrow A_{\text{ср}} \mathcal{E}_{\text{ср}} = \int_0^I -L dI = -L \frac{I^2}{2} = - \frac{LI^2}{2}$$

Объемная плотность энергии магнитного поля на примере соленоида

соленоид

$$W = \frac{W_L}{V} = \frac{LI^2}{2V} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} \Delta S = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow W = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{H})}{2}$$

$$\text{В соленоиде } B = \mu_0 n I \Rightarrow I = \frac{B}{\mu_0 n}; \quad B = \mu_0 n H \Rightarrow H = \frac{B}{\mu_0} \Rightarrow W = \frac{H \cdot B}{2}$$

Символический вектор "набла"

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \varphi = \text{grad } \varphi; \quad (\vec{\nabla}, \vec{D}) = \text{div } \vec{D}; \quad [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \text{rot } \vec{H}; \quad \Delta = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})$$

отвод

Элементы теории электромагнитного поля Максвелла

В 1860-х гг. Дж. К. Максвелл, обобщив и дополнив известные к тому времени законы электричества и магнетизма, создал единую теорию электромагнетизма.

- Обобщение закона электромагнитной индукции Фарадея (для неподвижного контура)

$$\epsilon_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}; \quad \epsilon_e = \frac{A^*}{q_0} = \frac{\Phi q_0 \vec{E} \cdot \vec{d\vec{e}}}{q_0} = \oint_{(e)} \vec{E} \cdot d\vec{e}, \quad \vec{E} - \text{напряжённость вихревого поля}$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(s)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{(s)} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = (\text{перемещение не создаёт})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{ст}} + \vec{E}^*$$

$$\Rightarrow \oint_{(e)} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_{(s)} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (M.1') \quad \boxed{\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (M.1)$$

Меняющееся со временем магнитное поле порождает вихревое эл. поле

- Обобщение закона Кулона и следствий из него т. Гаусса

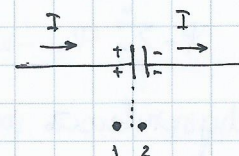
$$\oint_{(s)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i = \int_{(v)} \rho \, dV$$

$$\Rightarrow \oint_{(s)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{(v)} \rho \, dV \quad (M.2') \quad \boxed{\text{div } \vec{D} = \rho} \quad (M.2)$$

Устойчивости электрического поля экв. эл. зарядов

- Обобщение и дополнение т. о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля

$$\oint_{(e)} \vec{H} \cdot d\vec{e} = \sum_{k=1}^n I_k$$



Для т. 1 по т. о циркуляции ток есть, для т. 2 тока нет

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{S \cdot d\sigma}{dt}; \quad 1 \text{ обмотка создаёт } B = \frac{\sigma}{2}; \quad 2 \text{ обмотки} - B = \sigma$$

$$I = \frac{S \cdot dD}{dt} = S \frac{\partial D}{\partial t} = \int_{(s)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \oint_{(e)} \vec{H} \cdot d\vec{e} = \int_{(s)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_{(s)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{— закон полного тока}$$

$$\Rightarrow \oint_{(e)} \vec{H} \cdot d\vec{e} = \int_{(s)} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (M.3') \quad \boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (M.3)$$

Магнитное поле порождается эл. токами и меняется со временем электрическим полем

- Обобщение т. Гаусса для вектора магнитной индукции

$$\oint_{(s)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (M.4')$$

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0} \quad (M.4)$$

Линии магнитной инд. замкнуты

Ур-я Максвелла

$$\oint_{(e)} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_{(s)} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{следствие} \quad \text{применяя} \quad \boxed{\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (M.1)$$

$$\oint_{(s)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{(v)} \rho \, dV$$

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho} \quad (M.2)$$

$$\oint_{(e)} \vec{H} \cdot d\vec{e} = \int_{(s)} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (M.3)$$

$$\oint_{(s)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0} \quad (M.4)$$

Материальные уравнения Максвелла

Для линейной изотропной среды:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \quad \text{— и она в другой форме}\end{aligned}$$

Теория Максвелла — макроскопическая и нерелятивистская

Вывод волнового уравнения для случая однородной изотропной электрически нейтральной непроводящей среды.

$$(M.1) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } (\mu \mu_0 \vec{H})$$

$$(M.2) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{По усл. } \vec{j} = 0 \quad (M.3)$$

$$\Rightarrow \text{rot rot } \vec{E} = - \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \mu \mu_0 \Rightarrow \text{rot rot } \vec{E} = - \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} \Rightarrow \text{векторное уравнение } \Delta \vec{E} - \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{— волновое уравнение}$$

$\Rightarrow$ электрическое поле распространяется в виде волны с фазовой скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Для вакуума $c = v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$; В среде $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

$$\text{Аналогично выводится } \Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Шкала электромагнитных волн

$$\lambda = cT \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu}; \quad \omega = 2\pi \nu = \frac{c}{\lambda}$$

Название диапазона	λ в диапазоне	Описание
• Радиоволны	$> 0,1 \text{ мм}$	Используются антеннами радиостанций перемещением токами соотв. частот
Длинные волны	$1 - 10 \text{ км}$	
Средние волны	$100 - 1000 \text{ м}$	Применяются в радио- и телекоммуникациях, GSM — 900 МГц,
Короткие	$10 - 100 \text{ м}$	GSM — 1300 МГц, WiFi — 2,4 ГГц, 5 ГГц
СВЧ	$0,1 \text{ мм} - 10 \text{ см}$	Bluetooth — 2,4 ГГц
УКВ	$1 - 10 \text{ м}$	
• Оптическое излучение		Используется электронами в атомах при переходе из возбуждённого состояния
ИК-лучи	$0,76 \text{ мкм} - 1 \text{ мм}$	
Видимый свет	$380 - 760 \text{ нм}$	
УФ-лучи	$100 \text{ Å} - 380 \text{ нм}$	$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ м}$
• Рентгеновские лучи	$0,1 \text{ Å} - 100 \text{ Å}$	Используется в ходе торможения электронов, а также в ходе перехода из внутренних уровней больших атомов.
• γ-лучи	$< 1 \text{ Å}$	Используется ядрами атомов, а также при превращении элементарных частиц

Чем меньше λ , тем больше энергии, соотв. тем опаснее излучение

Плоская электромагнитная волна

Исследуем плоскую электромагнитную волну в однородной изотропной среде с $\rho=0$ и $j=0$.

$$(M.1) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \vec{i} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{j} - \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{k}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (1)$$

$$(M.2) \quad \text{div } \vec{D} = \rho = 0; \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$(M.3) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Аналогично (M.1)

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (3)$$

$$(M.4) \quad \text{div } \vec{B} = 0; \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Из полученных ур. (1) и (3) можно объединить в 2 независимые группы:

$$(5) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad E_y \rightarrow H_z \rightarrow E_y \rightarrow H_z \rightarrow \dots$$

$$(6) \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad E_z \rightarrow H_y \rightarrow E_z \rightarrow H_y \rightarrow \dots$$

ЭМ-волны поперечны, т.к. меняются только компоненты $\perp$ направлению волны

Используем (5)

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0} \quad \text{— волновое ур-е для плоской волны}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0} \quad (7)$$

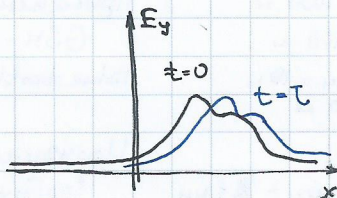
$$(8) \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = -\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0} \quad (8)$$

Общее решение (7) и (8) имеет вид:

$$E_y = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (9)$$

$$H_z = g_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (10)$$



Подставим, что (9) в волновое ур-е (7)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial (t - \frac{x}{v})} \cdot \frac{\partial (t - \frac{x}{v})}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial (t + \frac{x}{v})} \cdot \frac{\partial (t + \frac{x}{v})}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial (t - \frac{x}{v})} \left(-\frac{1}{v}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial (t + \frac{x}{v})} \cdot \frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial (t - \frac{x}{v})^2} \cdot \frac{1}{v^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial (t + \frac{x}{v})^2} \cdot \frac{1}{v^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial (t - \frac{x}{v})} \cdot \frac{\partial (t - \frac{x}{v})}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial (t + \frac{x}{v})} \cdot \frac{\partial (t + \frac{x}{v})}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial (t - \frac{x}{v})^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial (t + \frac{x}{v})^2} \quad (12)$$

Подстановка (11) и (12) в (7) дает тождество $\rightarrow$ верно

Самое простое решение

$$(13) E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1) \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} - \text{волновое число}$$

$$(14) H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2)$$

Подставим (13) и (14) в (5)

$$+k E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu_0 \omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) \quad (15)$$

$$k H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \epsilon_0 \omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) \quad (16)$$

Для выполнения (15) и (16) надо:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

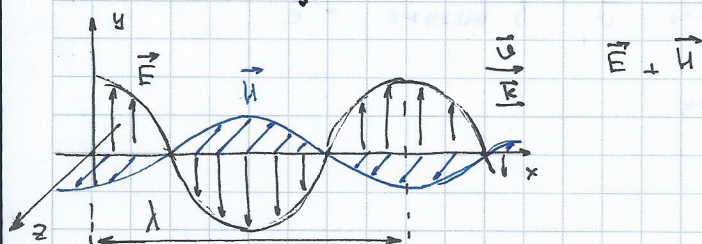
$$k E_m = \mu_0 \omega H_m \quad \text{перемножим} \Rightarrow \epsilon_0 \omega^2 E_m^2 = \mu_0 \omega^2 H_m^2 \Rightarrow \epsilon_0 E_m^2 = \mu_0 H_m^2$$

$$k H_m = \epsilon_0 \omega E_m$$

$$\Rightarrow \sqrt{\epsilon_0} E_m = \sqrt{\mu_0} H_m$$

В силу синфазности

$$\sqrt{\epsilon_0} E_y = \sqrt{\mu_0} H_z \Rightarrow \boxed{\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H} - \text{связь } E \text{ и } H \text{ в электромагнитной волне}$$



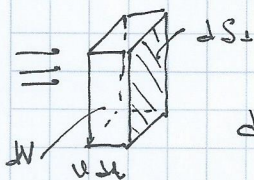
Вектор плотности потока энергии для электромагнитной волны (вектор Пойнтинга)

Поток энергии $\Phi_w = \frac{dW}{dt}$ - энергия, переносимая волной через пов-ть за единицу времени

Плотность потока энергии $\Pi = \frac{dW}{dS \cdot dt} = \left[\frac{Дж}{м^2 \cdot с} \right]$ - энергия, переносимая волной через единичную площадь за единицу времени

Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = \frac{dW}{dS \cdot dt} \cdot \vec{v}$, где обозначается $\vec{S}$

Связь $\vec{\Pi}$ и W



$$dV = dS \cdot v \cdot dt$$

$$dW = W dV \Rightarrow \Pi = \frac{W dV}{dS \cdot dt} = \frac{W \cdot dS \cdot v \cdot dt}{dS \cdot dt} = W v \Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = W \vec{v}}$$

Связь $\vec{\Pi}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$

$$W = W_E + W_H = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

$$\text{Используя ф-лу связи } \vec{E} \text{ и } \vec{H}: W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0}{2} \frac{\epsilon_0 E^2}{\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \epsilon_0 E^2$$

$$W = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E H = \frac{EH}{v}; \quad \Pi = W v = EH \Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}]}$$

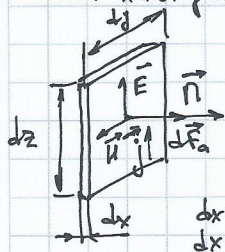
Интенсивность

Среднее по времени значение модуля вектора Пойнтинга: $I = \langle |\vec{\Pi}| \rangle$

$$I = \langle |\vec{n}| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt$$

Импульс электромагнитной волны

Для нахождения импульса, рассмотрим прохождение волны через слабопроводящую сферу



При прохождении через такую сферу, в ней возникает ток плотности $\vec{j} \rightarrow$ возникает $\vec{F}_A$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow dI = \sigma E dx dy$$

$$dF_A = dI dz B = \mu_0 \sigma E dx dy dz H = \mu_0 \sigma E H dV$$

K-импульс

$$dK = dF_A dt = \mu_0 \sigma E H dV dt \quad (1)$$

Через те же величины выразим изменение энергии волны.

$$dQ = j E dV dt = \sigma E^2 dV dt \quad (2) \quad \text{из } \sqrt{\epsilon_0} \vec{E} = \sqrt{\mu_0} \vec{H}$$

$$\frac{dK}{dQ} = \mu_0 \frac{\sigma E H dV dt}{\sigma E^2 dV dt} = \mu_0 \frac{H}{E} = \frac{\mu_0 H}{\sqrt{\mu_0} H} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_0} H} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{1}{c}, \quad \text{в вакууме } = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{W} = \frac{1}{c} \Rightarrow \boxed{K_{\text{eq. об.}} = \frac{W}{c}} \quad \text{— импульс единицы объема}$$

$$P = Wc \Rightarrow W = \frac{P}{c} \Rightarrow \vec{K}_{\text{eq. об.}} = \frac{\vec{P}}{c^2} = \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{c^2}$$

Давление света

- Абсолютно чёрная пов-ть (источник из волновой теории света)



$$dK = K_{\text{eq}} dV = K_{\text{eq}} c dt dS$$

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{dK}{dt dS} = K_{\text{eq}} \cdot c \quad \text{— давление света}$$

- Зеркальная пов-ть $\rightarrow p = 2 K_{\text{eq}} \cdot c$

Теорема Поинтинга

$$(M.1) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow [\nabla, \vec{E}] = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \vec{n}$$

$$(\vec{n}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]) = - \vec{n} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$(\vec{n}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]) = - \mu_0 \vec{n} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1)$$

$$(M.2) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{B} \cdot \vec{n}$$

$$(\vec{E}, [\vec{\nabla}, \vec{H}]) = \vec{j} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{div } [\vec{E}, \vec{H}] = (\vec{\nabla}, [\vec{E}, \vec{H}]) = ([\vec{\nabla}, \vec{E}], \vec{H}) - ([\vec{\nabla}, \vec{H}], \vec{E})$$

$$(1) - (2): (\vec{\nabla}, [\vec{E}, \vec{H}]) = - \mu_0 \vec{n} \frac{\partial H}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{P} = - \frac{\partial W_1}{\partial t} - \frac{\partial W_2}{\partial t} - \vec{j} \cdot \vec{E} \Rightarrow \boxed{\text{div } \vec{P} = - \frac{\partial W}{\partial t} - \vec{j} \cdot \vec{E}}$$

$$W_M = \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} = \frac{\mu_0 \vec{H}^2}{2}$$

$$\frac{\partial W_M}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2} \cdot 2 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{и } W_E = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\partial W}{\partial t} - \vec{j} \vec{E} \quad - \text{т. Поинтинга в дифференциальной форме}$$

$$\oint_{(s)} \vec{P} d\vec{S} = -\frac{dW}{dt} - \int_{(v)} \vec{j} \vec{E} dV \quad - \text{т. Поинтинга в интегральной форме}$$

$\oint_{(s)} \vec{P} d\vec{S}$ - энергия, переносимая за ед. времени через пов-ть (выходящая из данного объёма)

$\vec{j} \vec{E} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ - поток тепла, выделяющийся
 $\frac{dW}{dt}$ - изменение энергии, вызванное тепловыми токами в объёме dV за dt

$\frac{dW}{dt}$ - изменение энергии, обусловленное действием поля, за dt

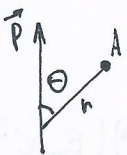
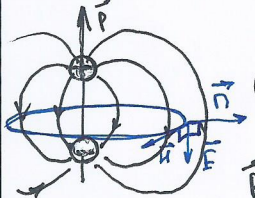
Излучение электромагнитных волн осциллирующим диполем

$\vec{P} = \vec{P}_m \cos \omega t$ - дипольный момент осциллирующего диполя

$$\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

$$(М.З) \oint_{(s)} \vec{H} d\vec{l} = \int_{(s)} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

При сближении контура вдоль оси кол-во витков линий уменьшается $\rightarrow$ ~~увеличивается~~ $\rightarrow \vec{P} \downarrow$



$r \gg \lambda$

$E(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin \theta}{c^2 r} \ddot{P}(t - r/c)$ - напряжённость в т. А. в момент времени t

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} H \\ P = EN \end{array} \right\} \quad P = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{c^4 r^2} \ddot{P}^2(t - r/c)$$

$$I = \langle P \rangle; \quad I \sim \frac{1}{r^2}; \quad I \sim \sin^2 \theta$$

Излучение ускоренно движущегося заряда

$$P = q \cdot \ddot{z}(t) \Rightarrow \vec{P} = q \ddot{\vec{z}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{q^2 \ddot{z}^2 (1 - v/c) \sin \theta}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \quad (\text{упрощено, используя } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}})$$

Электромагнитные волны излучает заряд движущийся с ускорением!!

О П Т И К А

Оптика - раздел физики, в котором изучаются св-ва оптического излучения, механизмы его возникновения и взаимодействия с веществом

Оптическое излучение - УК-волны, видимый свет, УФ-лучи, [рентгеновские лучи].

$n = \frac{c}{u}$, u - скорость света в веществе; - показатель преломления света

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}; \quad u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \Rightarrow n = \sqrt{\epsilon \mu}, \quad \mu \text{ и } \epsilon \text{ зависят от частоты}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} - \text{длина волны в среде } (\lambda_0 - \text{длина волны в вакууме)} \quad \text{из } \lambda = \frac{c}{\nu}$$

Волновая пов-ть - ГМТ, вдоль которой фазы волн одинаковы в данный момент времени.

Волновой фронт - самая первая волновая пов-ть

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} - \text{волновое число}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} - \text{циклическая частота}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_0/n}$$

Уравнение плоской волны

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_m [\cos(\omega t - kx + \alpha) + i \sin(\omega t - kx + \alpha)] = \vec{E}_m e^{i(\omega t - kx + \alpha)}$$

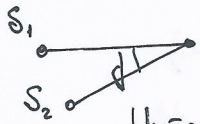
$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha)}$ - ур-е волны, распр. в произвольном направлении

Лучи - семейство нормалей к волновым пов-тям

Волновые свойства

Интерференция - явление усиления или ослабления световой волны в зависимости от соотношения между фазой накладываются в определенных точках или нескольких волн одинаковой частоты

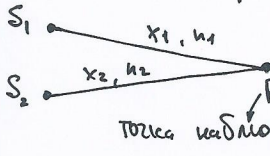
интенсивности



ϕ - угол наблюдения

Если $\phi \ll \lambda \Rightarrow E = E_1 + E_2$ (векторное суммирование $\rightarrow$ скалярное)

Интерференция от 2 когерентных источников



Когерентными наз. источниками, разность фаз которых постоянна.

Если пришла волна из S_1 то I_1 , из S_2 - I_2 .

$$I \sim E_m^2$$

$$E_z = E_{mz} e^{i\varphi_z}, \quad \varphi_z - \text{фаза суммарной волны}$$

$$|E_z|^2 = E_z E_z^*, \quad E_z^* - \text{комплексно-сопряженное } E_z$$

$$= E_{mz} e^{i\varphi_z} \cdot E_{mz} e^{-i\varphi_z} = E_{mz}^2$$

$$E_1 = E_{m1} e^{i(\omega t - k_1 x_1 + \alpha_1)} = E_{m1} e^{i\varphi_1}$$

$$E_2 = E_{m2} e^{i(\omega t - k_2 x_2 + \alpha_2)} = E_{m2} e^{i\varphi_2} \quad E_z = E_1 + E_2$$

$$I \sim E_{mz}^2 = |E_z|^2 = |E_1 + E_2|^2 = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* = (E_{m1} e^{i\varphi_1} + E_{m2} e^{i\varphi_2})(E_{m1} e^{-i\varphi_1} + E_{m2} e^{-i\varphi_2}) =$$

$$= E_{m1}^2 + E_{m2}^2 + \underbrace{E_{m1} E_{m2} e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}}_{(1)} + \underbrace{E_{m1} E_{m2} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}}_{(2)} \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$(1) = (e^{-i\Delta\varphi} + e^{i\Delta\varphi}) E_{m1} E_{m2} = E_{m1} E_{m2} (\cos \Delta\varphi - i \sin \Delta\varphi + \cos \Delta\varphi + i \sin \Delta\varphi) = 2 \cos \Delta\varphi$$

$$\Rightarrow E_{m1}^2 + E_{m2}^2 + 2 E_{m1} E_{m2} \cos \Delta\varphi$$

$I \sim E_{mz}^2$; $I_1 \sim E_{m1}^2$; $I_2 \sim E_{m2}^2$ - одинаковым коэф. пропорциональности

$$\Rightarrow \boxed{I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi} - \text{интерференционная формула}$$

интерференционный член

Геометрическая и оптическая разности хода

• Геометрический ход света - расстояние от источника до точки наблюдения

$$S = x_2 - x_1$$

• Оптический путь

$$S = \sum_{i=1}^N n_i x_i, \quad N - \text{кол-во участков с разным } n$$

Оптическая разность хода - $\boxed{\Delta = S_2 - S_1}$

Выразим $\Delta\varphi$ через Δ :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 x_2 + \alpha_2) - (\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 x_1 + \alpha_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta + \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

Если источники синхронны ($\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \Delta\alpha = 0$) $\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$

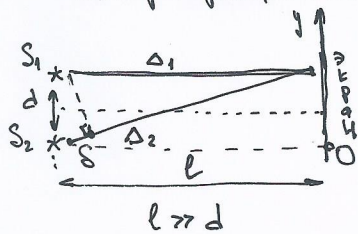
Пусть $I_1 = I_2 = I \Rightarrow I_{\max} = 4I$; $I_{\min} = 0$

Условия максимумов и минимумов интерференции

- Максимум, если $\cos \Delta\varphi = 1 \Leftrightarrow \Delta\varphi = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi, \dots \Rightarrow \Delta = \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\varphi = 0; \pm \lambda_0; \pm 2\lambda_0 \Rightarrow \boxed{\Delta = m \lambda}$ $m \in \mathbb{Z}$
- Минимум, если $\cos \Delta\varphi = -1 \Leftrightarrow \Delta\varphi = \pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi, \dots \Rightarrow \Delta = \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\varphi = \pm \frac{\lambda_0}{2}; \pm \frac{3\lambda_0}{2}; \dots$ m - порядок максимума

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \Delta = m \lambda + \frac{\lambda}{2}$$

Интерференционные картины от 2 когерентных источников



$$\Delta = \delta_n \Rightarrow \delta = \frac{\Delta}{n} \quad (\Delta \neq \text{const})$$

$$\frac{\delta}{d} = \frac{y}{l} \Rightarrow y = \frac{\delta l}{d} = \frac{\Delta l}{nd}$$

$$\text{max при } \Delta = m\lambda \Rightarrow y_{\text{max}} = \frac{m\lambda l}{nd}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{min при } \Delta = (m+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow y_{\text{min}} = \frac{(2m+1)\lambda l}{2nd}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Когерентные и некогерентные источники

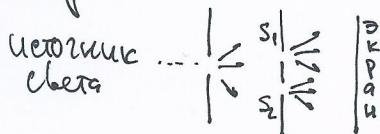
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta + \Delta\alpha$$

Если $\Delta\alpha \neq \text{const} \Rightarrow \langle \cos \Delta\varphi \rangle = 0$ - интерференции не возникает (некогерентные источники)

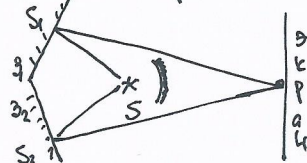
Если $\Delta\alpha = \text{const} \Rightarrow$ источники когерентны $\rightarrow$ интерференция может возникнуть

Метод получения когерентных волн

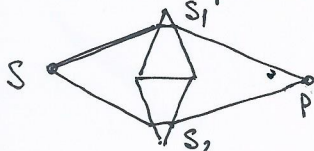
• Метод Юнга



• Бисеркало Френеля



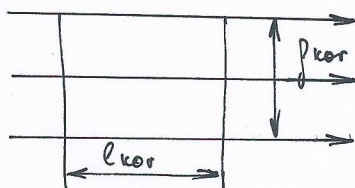
• Бифракция Френеля



• Блины Бийе

• Зеркало Ллойда

Пространственная и временная когерентность



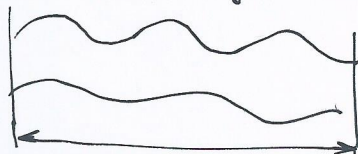
$l_{\text{кор}} = c \tau_{\text{кор}}$ - временная когерентность

длина, в течение которой лучи когерентны

$l_{\text{кор}}$ - пространственная когерентность

• Временная когерентность

Пусть излучают два луча света $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$



$\tau_{\text{кор}}$ - время когерентности

$$l_{\text{кор}} = (k+1)\lambda - k(\lambda + \Delta\lambda)$$

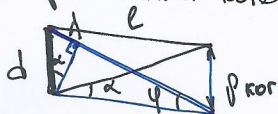
$$k\lambda + \lambda = k\lambda + k\Delta\lambda \Rightarrow k = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \Rightarrow l_{\text{кор}} = k\lambda - \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

$$l_{\text{кор}} - \text{длина когерентности} \quad \tau_{\text{кор}} = \frac{l_{\text{кор}}}{c} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$$

Выразим $\tau_{\text{кор}}$ через ν : $\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu}$

$$\Rightarrow \tau_{\text{кор}} = \frac{c^2 \nu^2}{\nu^2 c \Delta\nu} \Rightarrow \tau_{\text{кор}} = \frac{1}{\Delta\nu}$$

• Пространственная когерентность



$$\alpha = \frac{\lambda}{d}; \quad \alpha = \frac{l_{\text{кор}}}{l}$$

$$\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \alpha \rightarrow \alpha$$

$$l_{\text{кор}} = l\alpha = \frac{l\lambda}{d}$$

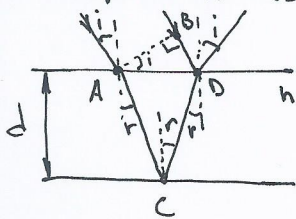
$$\alpha = \frac{d}{l} \Rightarrow \left\{ l_{\text{кор}} = \frac{\lambda}{\alpha} \right\} - \text{формула когерентности}$$

Интерферометр Майкельсона

Самостоятельно. :(

Интерференция в тонких плёнках

• В отражённых лучах



i - initial
r - refracted

$$\Delta = (AC + CD) \cdot n - (BD + \frac{\lambda}{2}) = 2AC \cdot n - BD - \frac{\lambda}{2}$$

При отражении от оптически более плотной среды теряется $\frac{\lambda}{2}$ или фаза меняется на π (оба св. равнозначны)

$$2AC \cdot n = 2n \cdot \frac{d}{\cos r} = 2n \frac{d}{\sqrt{1 - \sin^2 r}}$$

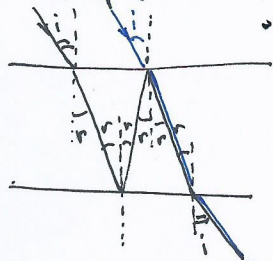
$$1. \sin i = n \sin r \text{ - закон Снеллиуса (преломления)} \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n}$$

$$\Rightarrow 2AC \cdot n = \frac{2nd}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}} = \frac{2n^2 d}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

$$BD = AD \sin i = 2d \tan r \sin i = \frac{2d \sin r \sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 r}} = \frac{2d \sin^2 i}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}}$$

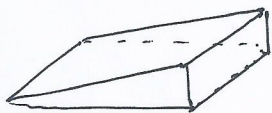
$$\Rightarrow \Delta = \frac{2n^2 d}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - \frac{2d \sin^2 i}{n \sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}$$

• В проходящих лучах (картинка выражена слабее)

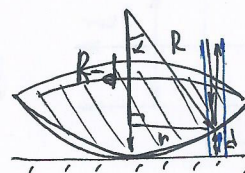


$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \text{аналог. отражённым лучам}$$

Полосы равной толщины



Пример: кольца Ньютона



лупа

стекло

$$d \ll \lambda \Rightarrow \Delta = 2d + \frac{\lambda}{2}$$

$$r^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd \Rightarrow r = \sqrt{2Rd}$$

$$\Delta = m \frac{\lambda}{2} \text{ (m чётное - макс, нечётное - мин)}$$

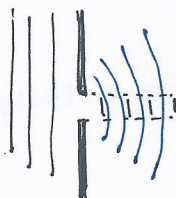
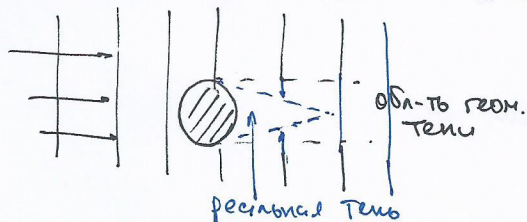
$$\Rightarrow r = \sqrt{R \lambda \frac{1}{2} (m - 1)}$$

Свет: • монохроматический (состоит из 1 длины волны)
• полихроматический (состоит из нек. длин волн)

Если $\Delta >$ временной когерентности, то лучи будут накладываться друг на друга, интерференция наблюдается

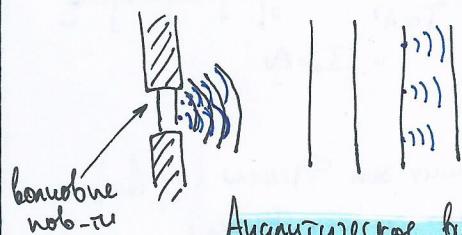
Дифракция света

Дифракцией называют совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями и связанным с отклонением от законов геометрической оптики (раздел оптики, в котором свет распространяется прямолинейно в виде лучей и выполняются законы отражения и преломления)

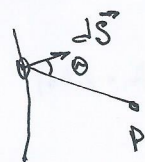


Принцип Гюйгенса - Френеля

Каждый элемент волновой поверхности является источником вторичной сферической волны. Дальнейшее распространение волн является результатом интерференции этих вторичных сферических волн.



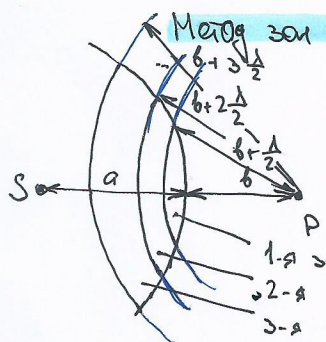
Аналитическое выражение принципа Гюйгенса - Френеля



$$E = \int_{(S)} K(\theta) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

В т. Р наблюдаем экстр. дифракции.

Сферические волны распространяются в окр. "вперед": $K(\theta) \rightarrow 0$ $\theta \rightarrow \pi$; $K(\theta) \neq 0$



Метод зон Френеля - размеры интегрируем сопоставимы с размером зоны Френеля

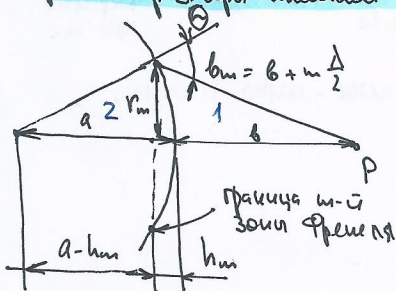
Разобьём волновую пов-ть на кольцевые зоны так, чтобы расстояние от краёв каждой зоны до т. наблюдения Р отличалось на $\frac{\lambda}{2}$.

В каждой зоне оптический разность хода между точками $< \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$ они друг друга усиливают.

Вторичные сф. волны, испускаемые соседними зонами, имеют $\Delta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$ они друг друга ослабляют $\Rightarrow$ минимум интерференции.

Вторичные сф. волны, испускаемые т. из n и $n+2$ зон, имеют оптическую разность хода $\Delta = \lambda \Rightarrow$ взаимное усиление

Выразим размеры внешней границы m -й зоны Френеля.



Применим т. Пифагора для треугольников 1 и 2:

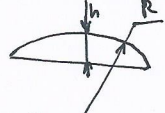
$$(1) \quad r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + h_m)^2 - (b + h_m)^2$$

$$r_m^2 = a^2 - a^2 + 2ah_m - h_m^2 = b^2 + b_m^2 + \frac{m^2 \lambda^2}{4} - b^2 - 2bh_m - h_m^2$$

Для небольших m $\frac{m^2 \lambda^2}{4} \ll$ остальных слагаемых

$$\Rightarrow (a+b)h_m = b_m^2 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow h_m = \frac{b_m^2 \lambda}{2(a+b)} \quad (2)$$

Из геометрии найдем площадь сф. сегмента:



$$S_{сегм} = 2\pi R h$$

$$\Rightarrow S_m = 2\pi a h_m = 2\pi \frac{ab}{a+b} m \frac{\lambda}{2}$$

$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab}{a+b} (m - (m-1)) = \frac{\pi ab}{a+b}$ - площадь сегмента сферы m -й зоны Френеля

Согл. (1) $r_m^2 = a^2 - a^2 + 2ah_m - h_m^2 \Rightarrow r_m = \sqrt{2ah_m}$. Из (2) $h_m = \frac{b_m^2 \lambda}{2(a+b)} \Rightarrow r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}$

Пример,



Найдем кол-во открытых зон Френеля

разные внешней границы m -й зоны Френеля

Если m чётно, то центр отверстия тёмное пятно

m нечётно, то центр отверстия светлое пятно

Для нахождения числа открытых зон приоджасет r_m .

A_m - амплитуда колебаний, возбуждаемого в т. наблюдения m -й зоной Френеля.

A_m медленно убывает с ростом m ($m \uparrow \Rightarrow b_m \uparrow, \theta \uparrow$)

$$\Rightarrow A_1 > A_2 > A_3 > \dots$$

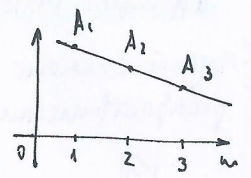
A - суммарная амплитуда, создаваемая волнами от всех зон Френеля в т. наблюдения.

Т.к. фазы волн, амплитуды которых A_n и A_{n+1} , различаются на π (т.к. $\Delta = \frac{\lambda}{2}$) $\Rightarrow$

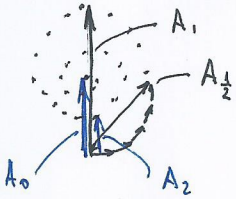
$$\Rightarrow A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots \approx \frac{A_1}{2}$$

Поверхности, пропускающего свет от одной зоны Френеля: $I_1 = 4 I_0$, т.к. $I \sim A^2$

$$I_0 = \frac{A_1^2}{2}$$



Спираль Френеля



Возьмём волновую пов-ть из мн-ва зон, много меньше зон Френеля ($\Delta = \frac{\lambda}{1000}$)

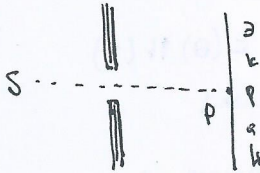
Синусоидальные колебания, на векторной диаграмме получим спираль Френеля

A_0 - амплитуда, когда все зоны открыты

A_1 - амплитуда, повернутая на угол π к началу (по рисунку видно $A_1 = 2A_0$)

Из рисунка $A_{1/2} = A_0 = \sqrt{2} \Rightarrow I_{1/2} = 2I_0$

Дифракция Френеля от круглого отверстия



В т. Р - светлое пятно, если открыто нечётное число зон Френеля
тёмное пятно, если чётное

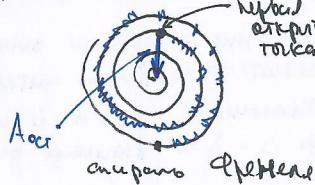
и видно



и видно



Дифракция Френеля от круглого диска



Пусть диск закрывает 3 зоны Френеля

$A_{ост}$ - амплитуда оставшихся зон

$A_{ост} \approx A_0$ при небольшом числе закрытых зон

В центре тёмного диска - светлое пятно - пятно Пуассона



- дифракционная картина при $m < \infty$

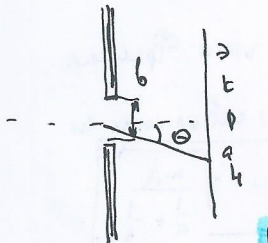
Дифракция Фраунгофера

Возникает, когда размер отверстия $\ll$ первой зоны Френеля.

От круглого отверстия



Дифракция Фраунгофера от щели



$$A(\theta) = A_0 \left| \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} \right| = A_0 \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right) \right|$$

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0.045 : 0.016 : 0.008$$

Если $b < \lambda$, то в дифракционной картине нет минимумов.

Области применимости дифракции Фраунгофера, Френеля и геометрической оптики

D - характерный размер отверстия / препятствия; b - расстояние от препятствия до экрана; $a \gg b$ - расёт. от источника до источника света

$$r_m = \sqrt{\frac{\lambda a}{2 + \frac{1}{m}}} \approx \sqrt{\lambda m b} \text{ при } m \gg 1 \Rightarrow r_1 = \sqrt{b \lambda}$$

дифракция Фраунгофера

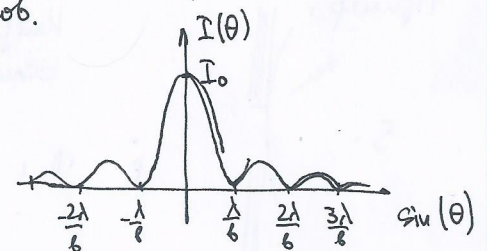
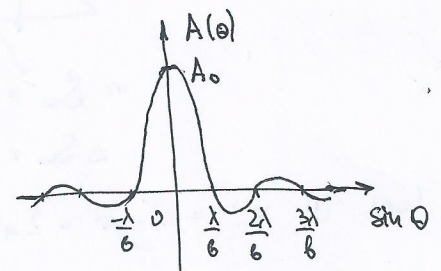
$$D \ll r_1 \Rightarrow \frac{D^2}{b \lambda} \ll 1$$

дифракция Френеля

$$D \sim r_1 \Rightarrow \frac{D^2}{b \lambda} \sim 1$$

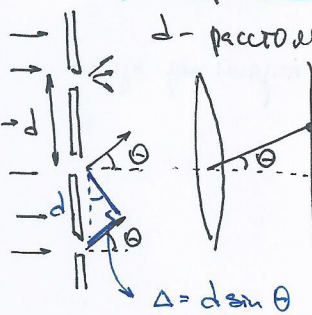
Геометрическая оптика

$$D \gg r_1 \Rightarrow \frac{D^2}{b \lambda} \gg 1$$



Дифракционная решётка

d - расстояние между щелями (период/постоянная решётки)
 F - фокусное расстояние линзы



$$d \cdot \sin \theta_m = m \lambda \quad - \text{условие главных максимумов дифр. решётки}$$

m - номер максимума

Если на решётку падает белый свет:

Спектр 1-го порядка: $m=0$ (белая полоса), $m=1$ (1-й порядок), $m=2$ (2-й порядок).
 Спектр 2-го порядка: $m=2$ (2-й порядок).

Интенсивность главных максимумов пропорциональна квадрату числа щелей

Если в спектре нет инф. длин волн $\Rightarrow$ картина выглядит: λ_1, λ_2

Угловая дисперсия дифракционной решётки

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

$$d \sin \theta = m \lambda \rightarrow (d \cos \theta) d\theta = m d\lambda \rightarrow d \cos \theta d\theta = m d\lambda \Rightarrow D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} \approx \frac{m}{d}$$

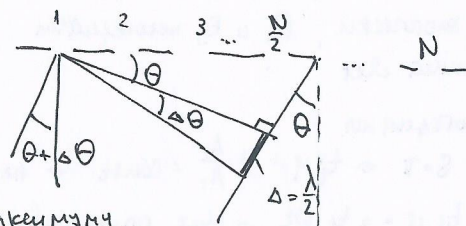
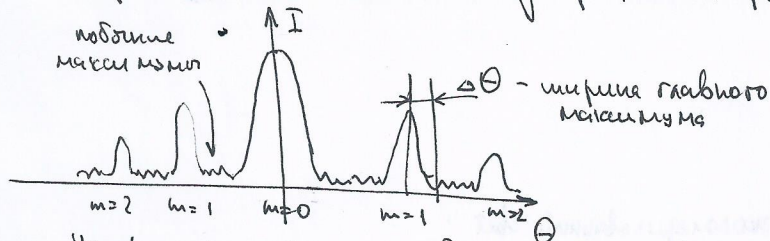
Линейная дисперсия

$$D_{\text{лин}} = \frac{S\theta}{d\lambda}, \quad S\theta - \text{расстояние между линиями в спектре}$$

$d\lambda$ - разность их длин волн

$$\text{для } \theta \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow S\theta = F d\theta \Rightarrow D_{\text{лин}} = F D$$

Ширина главных максимумов дифракционной решётки



Условие темной линии, ближайшей к главному максимуму.

$$\Delta = \frac{\lambda}{2}; \quad \frac{N}{2} d (\sin(\theta_m + \Delta\theta) - \sin \theta_m) = \frac{\lambda}{2}; \quad \frac{N}{2} d \cos \theta_m \cdot \Delta\theta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\lambda}{N d \cos \theta_m} \quad (2)$$

Разрешающая сила дифракционной решётки

$R = \frac{1}{d\lambda}$, где $d\lambda$ - наименьшая разность длин волн, которые в спектре представляются разными максимумами.

Критерий разрешения Рэлея

Если $\frac{\delta\lambda}{\lambda} > \Delta\theta$, то линии будут, как раздельные

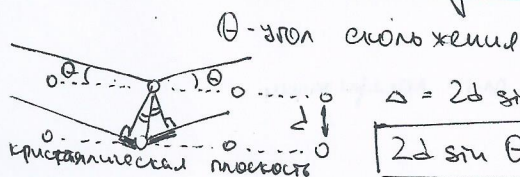
$$(\frac{\delta\lambda}{\lambda})_{\text{мин}} = \Delta\theta$$

$$d \sin \theta = m \lambda \Rightarrow \sin \theta = \frac{m \lambda}{d} \Rightarrow d (\sin \theta) = \frac{m \lambda}{d}$$

$$\Rightarrow \cos \theta \Delta\theta = \frac{m \delta\lambda}{d}$$

$$\text{из (2)} \quad \Delta\theta = \frac{\lambda}{N d \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta \cdot \frac{\lambda}{N d \cos \theta} = \frac{m \delta\lambda}{d} \Rightarrow \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N \cdot m} \Rightarrow R = N \cdot m$$

Формула Вульфа-Брэггов для дифракции рентгеновских лучей



$$\Delta = 2d \sin \theta$$

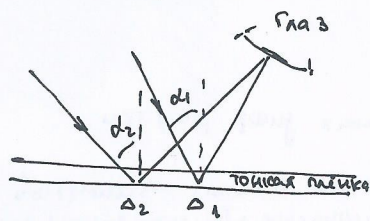
$$2d \sin \theta = m \lambda \quad - \text{для Вульфа-Брэггов}$$

θ - угол скольжения

λ от 0,1 Å до 100 Å (10^{-11} - 10^{-8} м)

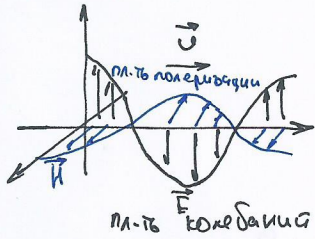
$\Rightarrow$ рентгеноструктурный анализ (позволяет conocer структуру решётки, анализируя её с помощью рентгеновских лучей)

Положения равного наклона



Положения проходят через те точки спектра, на которые лучи света падают под одним и тем же углом

Поларизация света



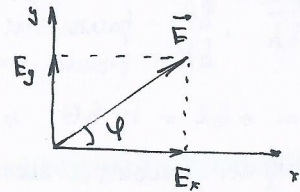
У света естественных источников ~~свет~~ вектор $\vec{E}$ колеблется по всем направлениям $\perp$ направлению волны.
 Это происходит из-за того, что световая волна складывается из волн с колебаниями разн. направлений и фаз - колебания разн. напр. дисперсно и беспорядочно смешаны друг с другом.
 Поларизованным называется свет, в котором направление колебаний светового вектора упорядочено каким-либо образом.

Плоскость, в которой колеблется $\vec{E}$ - плоскость колебаний, плоскость, в которой колеблется $\vec{H}$ - пл.т. поларизации.

Пусть в некоторой т. пр-ва, через которую проходят световые волны

$$E_x = A_1 \cos \omega t; \quad E_y = A_2 \cos(\omega t + \delta)$$

$$\tan \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_2 \cos(\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t}$$



1) Естеств. свет (неполаризованный)

δ меняются хаотически, E_x и E_y некогерентны

2) Поларизованный свет

E_x и E_y когерентны

• $\delta = 0$ или $\delta = \pi \Rightarrow \tan \varphi = \pm \frac{A_2}{A_1} = \text{const} \Rightarrow$ плоскополаризованный свет

• $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \varphi = \pm \tan \omega t \Rightarrow$ свет, поларизованный по кругу

• $\delta \neq 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi \Rightarrow$ свет эллиптической поларизации

$\vec{E} \rightarrow$ - правая поларизация
 $\vec{E} \leftarrow$ - левая поларизация } волна "от нас"

Плоскополаризованный свет

Получается из естественного с помощью поларизаторов, которые пропускают колебания в некоторой пл.т. и полностью или частично не пропускают перпендикулярные им колебания.

Свет частично-поларизованный

Степень поларизации P - характеризует, насколько поларизован свет

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \begin{array}{l} I_{\max} - \text{максимальная интенсивность (в пл.т. поларизации)} \\ I_{\min} - \text{минимальная интенсивность (пл.т. поларизации} + 90^\circ) \end{array}$$

$P = 1$ - плоскополаризованный свет

поларизованный свет $\xrightarrow{I_0}$ поларизатор $\rightarrow I$

$$I = I_0 \cos^2 \varphi \quad \text{— закон Малюса}$$

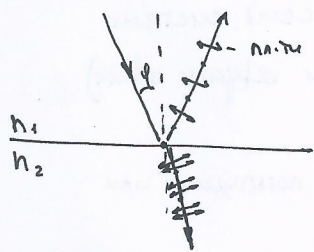
φ - угол между плоскостью колебаний и пл.т. поларизации

ест. свет $\xrightarrow{I_0}$ $\begin{array}{c} \text{П1} \\ | \\ \text{П2} \end{array}$ $\xrightarrow{I_2}$

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi$$

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \quad (\text{т.к. } \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2})$$

Поларизация при отражении и преломлении.



Отражённый свет тем больше поляризован, чем больше φ
Угол Брюстера - угол падения, при котором отражённый луч полностью поляризован

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

Буде условия - отражённый и преломленный свет $\perp$.

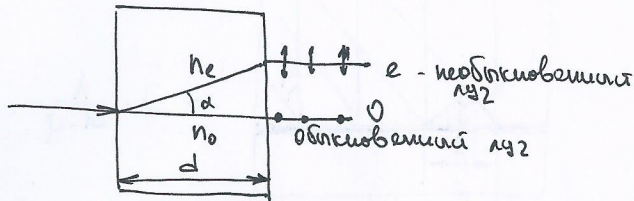
Двойное лучепреломление

Наблюдается во всех кристаллах не с кубической решеткой.

Кристаллы с двойным лучепреломлением:

- Одноосные (ишадский шпат, кварц, турмалин)
- Двухосные (спод, гипс)

Одноосные кристаллы:



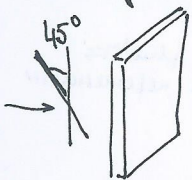
Оптическая ось кристалла - направление, при котором луч не разделяется на 2.

Если свет $\perp$ оптической оси, то разность ходов Δ между обыкновенным и необыкновенным лучами:

$$\Delta = (n_o - n_e) d$$

$d \rightarrow 0$, поэтому его не учитываем.

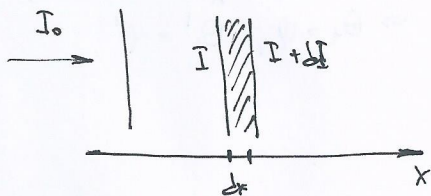
Прохождение плоскополяризованного света через двойнолучепреломляющую пластинку.



$$\Delta = (n_o - n_e) d$$

$$\text{Законный случай: } \Delta = m \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{4} \quad (\delta = \frac{\pi}{2})$$

Поглощение света



$$dI = -\kappa dx \cdot I, \quad \kappa - \text{показатель поглощения}$$

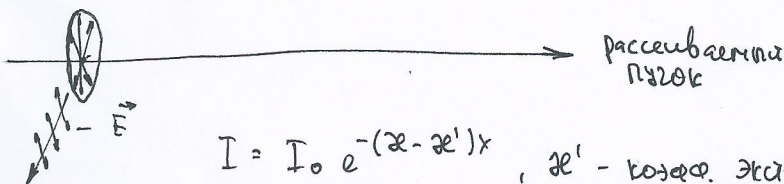
$$\frac{dI}{I} = -\kappa dx$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^x \kappa dx \Rightarrow \ln \frac{I}{I_0} = -\kappa x \Rightarrow \boxed{I = I_0 e^{-\kappa x}} \quad \text{— закон Бугера}$$

Рассеяние света

Рассеяние - дифракция на мелких неоднородностях среды.

$$\boxed{I_{\text{расс}} \sim \lambda^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}} \quad \text{— закон 4-й степени Рэлея}$$



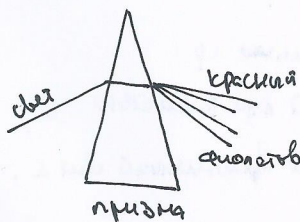
$$I = I_0 e^{-(\kappa - \kappa')x}, \quad \kappa' - \text{коэфф. экстинкции}$$

Вывод аналогичен выводу закона Бугера

Дисперсия света

Дисперсией света наз. явление, обусловленное зависимостью показателя преломления n от длины световой волны.

Закон преломления (закон Снеллиуса): $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$



Аберрации - отклонение / ошибка изображения в оптической системе

Дисперсия вызывает хроматические аберрации (погрешности передачи цвета)

Дисперсия : • нормальная ($\frac{dn}{d\lambda} < 0$)

• аномальная ($\frac{dn}{d\lambda} > 0$) - в обл. сильного поглощения или вблизи нее

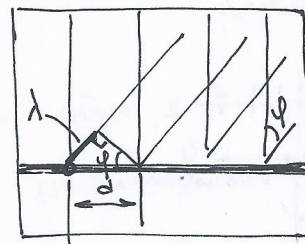
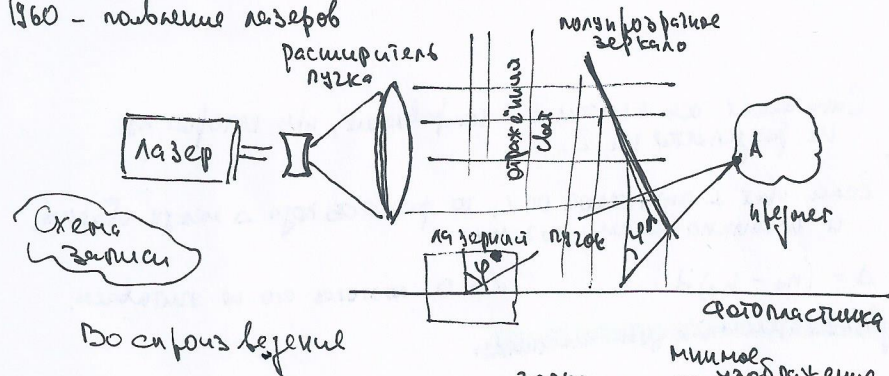
Физические основы голографии.

Голография - процесс записи и последующего воспроизведения полной информации о пространственном распределении фаз и амплитуд излучения, отраженного объектом

Голография с опорным пучком света.

1947 - Габор разработал теорию голографии

1960 - появление лазеров



$$\Rightarrow d = \frac{\lambda}{\sin \varphi}$$

максимум интерференции

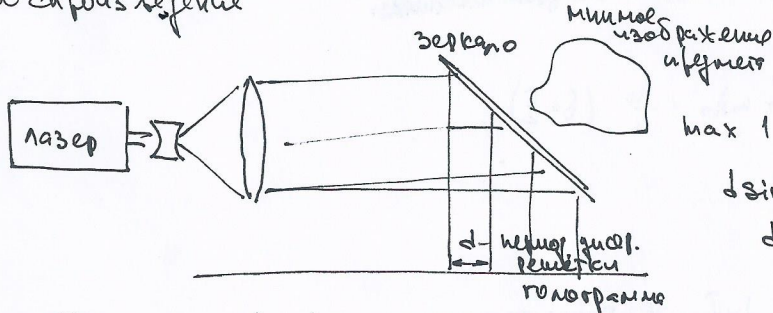
Голограмма - дифракционная решётка с переменным периодом и переменным направлением штрихов.

max 1 порядок при:

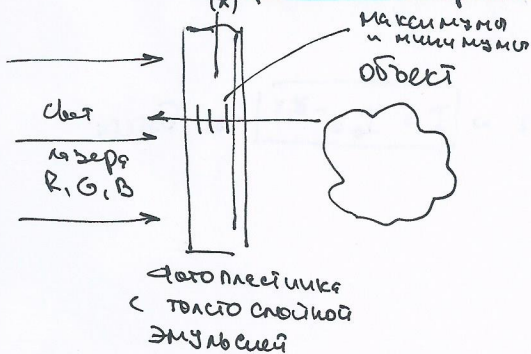
$$d \sin \theta = m \lambda; \quad m=1$$

$$d \sin \theta_1 = \lambda \Rightarrow \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\lambda} \sin \varphi = \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \varphi, \quad \theta_1' = \varphi'$$



Голография во встречных пучках



* - объёмная дифракционная решётка