

№1 Электрический заряд. Закон Кулона. Напряженность э. поля. Силовые линии.

Элементарный заряд — абсолютная величина элект. заряда электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.
Закон сохранения заряда: сумма зарядов в замкнутой системе остается постоянной.

Точечный заряд — размерами можно пренебречь.

Закон Кулона: Два точечных неподвижных заряда взаимодействуют друг с другом с силой, пропорциональной произведению величин зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$\vec{F} = k \frac{|q_1 q_2|}{R^2}$$

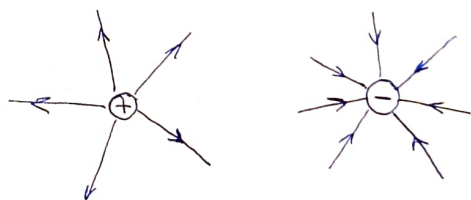
$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon}$ — для среды с эл. проницаемостью ϵ .

Исследуем поле, создаваемое зарядом q . Поместим пробный точечный заряд $q_{пр}$ в поле заряда q . Тогда сила, дейст. на пробный заряд: $\vec{F} = q_{пр} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор от q к $q_{пр}$. Видно, что сила зависит не только от величин, определяющих поле — $\vec{r}$ и q , но и от величины пробного заряда. Поэтому вводят величину $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ — напряженность э. поля. Сила, действующая на единичный точечный заряд, находящийся в данной точке поля.

Эл. поле характеризуется потенциалом и напряженностью.

Силовые линии называются линиями в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{E}$.

Уравнение силовой линии: $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$.



№2 Принцип суперпозиции и его применение к расчету поля. Расчет поля равномерно заряженной нити, кольца.

Напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей, которые создавал бы каждый заряд в отдельности. — принцип суперпозиции.

Поле кольца:

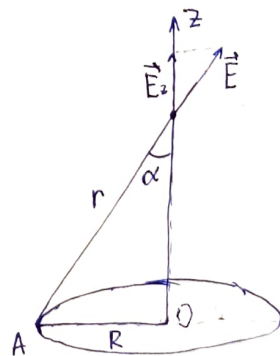
Кольцо заряжено положительно. Нетрудно заметить, что напряженность будет направлена по оси кольца. Выделим на кольце элемент dL . Тогда напряженность составяющей dE_z :

$$d\vec{E}_z = k \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha, \text{ где } \lambda = \frac{q}{2\pi R}, \cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\vec{E}_z = \frac{k\lambda}{r^2} \cos\alpha \int dL = \frac{kqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

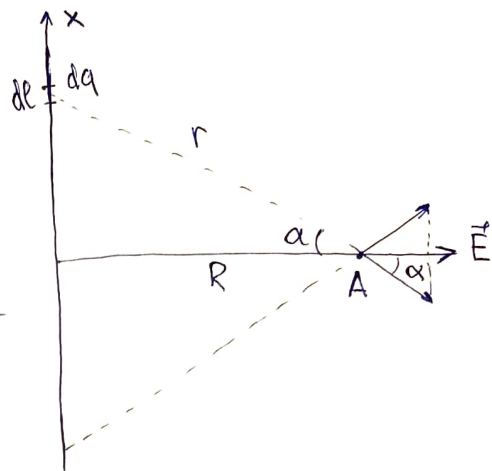
В центре кольца напряженность равна 0.

На больших расстояниях $z \gg R \rightarrow E \approx \frac{kq}{z^2}$, т.е. кольцо ведет себя как точечный заряд.



Поле заряженной нити:

Длина нити L
 Пусть нить заряжена $q > 0$. Взяв элемент dl , тогда его заряд $dq = \lambda dl$, где $\lambda = \frac{q}{L}$.
 Из соображений симметрии, искомого вектор $\vec{E}$ имеет направление как на рисунке. Поэтому мы учитываем только перпендикулярную составляющую векторов $\vec{E}$ от dl .



$$d\vec{E} = \frac{k\lambda dl}{r^2} \cos\alpha = \frac{k\lambda dl}{\sqrt{x^2+R^2}^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{k\lambda R dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\lambda R dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R^2 dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(R^2+x^2) dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} - \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{1/2}} -$$

$$- \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = I$$

$$\frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} dv = \frac{x dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}; v = \frac{-1}{(R^2+x^2)^{1/2}} \\ u = x \\ du = dx \end{array} \right| = -\frac{1}{R^2} \frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2+x^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{-2}{R^2} + \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2+x^2)^{1/2}}$$

$$I = \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{1/2}} + \frac{2}{R^2} - \frac{1}{R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{1/2}} = \frac{2}{R^2}$$

$$E = \frac{2k\lambda}{R}$$

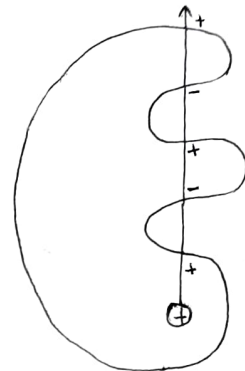
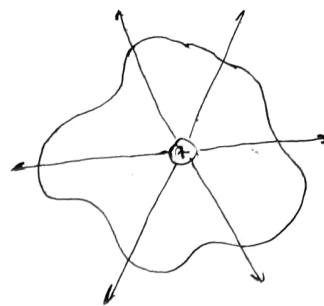
N^o 3 Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса в инт. и гир. формах. В вакууме и ее применение. Расчет поле плоскости, цилиндра, шара.

Плотность силовых линий выбирается так, чтобы кол-во линий, пронизывающих единицу поверхности было равно E . Рассмотрим поле точечного заряда. Тогда число линий N равно произведению плотности на площадь поверхности.

$$N = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{число линий на любой поверхности от заряда} \\ \text{будет одинаковым. Отсюда то, что линии начинаются только на зарядах и нигде не заканчиваются} \end{array} \right.$$

Пусть площадка dS расположена под углом (между нормалью и $\vec{E}$) α к $\vec{E}$. Тогда кол-во линий, пронизывающих ее равно $E dS \cos\alpha = E_n dS$. Отсюда, где кол-во линий E , произв. произв.: $N = \oint_S E_n dS$. Величина $q = \oint_S E_n dS$ называется потоком вектора напряженности.

Для точечного заряда, окруженного сферой было получено: $N = \frac{q}{\epsilon_0}$, это же справедливо для других поверхностей: в случае "простых" поверхностей каждая линия пересекает поверхность один раз, в случае "сложных" — входящую в объем линию берем со знаком "-", выходящую — со знаком "+".



Далее, пусть поле E_n создается несколькими зарядами. По принципу суперпозиции:

$$E_n = E_{n1} + E_{n2} + \dots + E_{ni} \quad \text{Тогда где потока:}$$

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \oint_S \sum_i E_{ni} dS = \sum_i \oint_S E_{ni} dS. \quad \text{Поле } E_{ni} \text{ создается зарядом } q_i: \oint_S dS = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

$$\text{Тогда: } \oint_S E_n dS = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} - \text{теорема Гаусса.}$$

Поток вектора напряженности эл. поля через замкнутую поверхность равен ал. сумме зарядов, входящих в поверхность, деленной на ϵ_0 .

Пусть заряд распределен по объему с объемной плотностью ρ : $\sum q = \rho \Delta V$

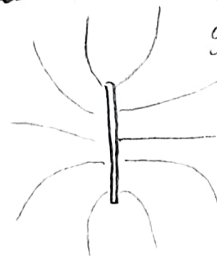
$$\oint_S E_n dS = \iiint_V \text{div } E dV = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0}. \quad \text{Для элементарной единицы объема:}$$

$$\text{div } \vec{E} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \text{диф. форма закона Гаусса.}$$

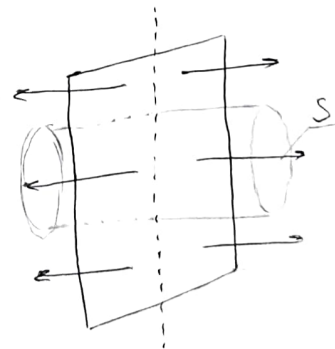
Поле заряженной плоскости (беск.)

$$\oint_S E dS = \int_{\text{бок}} E dS + \int_{\text{лев}} E dS + \int_{\text{прав}} E dS = 2ES = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sum q_i}{2S\epsilon_0} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{\sum q_i}{S} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad \text{где } \sigma = \frac{q}{S} - \text{поверхностная плотность заряда}$$



это коническое множество

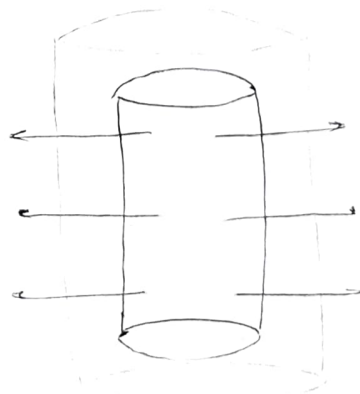
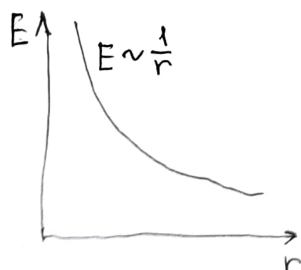


Поле заряженного цилиндра (бесконечного)

$$\oint_S E dS = \int_{\text{бок}} E dS + \int_{\text{верх}} E dS + \int_{\text{ниж}} E dS = ES_{\text{бок}} = 2\pi r h E = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

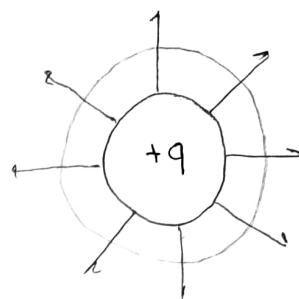
$$E = \frac{\sum q_i}{2\pi r h \epsilon_0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Если } r \ll h, \text{ то внутри} \\ \text{цилиндра попадает заряд} \\ \text{где } q = \lambda h \end{array} \right| = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

где λ — линейная плотность заряда.



Поле заряженного шара.

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = E S_{\text{ш}} = 4\pi r^2 E = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sum q_i}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$



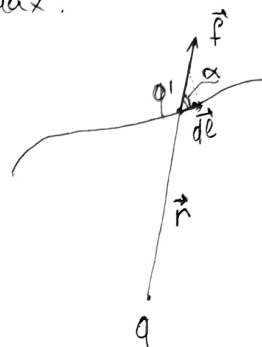
№4 Работа эл.ст. поля при перемещении зарядов. III-ья о циркуляции вект. ра напряженности эл.ст. поля в интегр. и дифр. формах.

Рассмотрим заряд q' в поле неподвижного заряда q .

Убедимся в потенциальности поля неподв. заряда.

$$dA = d\vec{l} \cdot \vec{F} \cos \alpha = F \cdot dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{r^2} dr \Rightarrow A_{12} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right)$$



Видно, что работа сил не зависит от пути, а только от начальной и конечной точки $\Rightarrow$ поле потенциально.

Работа потенциальных сил по замк. контуру $= 0 \Rightarrow A = \oint_C \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q' \frac{q}{r^2} dr =$

$$= \oint_C E q' dr = \oint_C E_e q' d\vec{l} = 0, \text{ где } E_e - \text{проекция } \vec{E} \text{ на направление } d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \oint_C E_e d\vec{l} = \oint_C (\vec{E}, d\vec{l}) = 0 - \text{теорема о циркуляции } \vec{E} \text{ э-ст. поля. Верно только для полей, создаваемых неподвижными зарядами.}$$

Применим теорему Стокса: $\oint_C (\vec{E}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot } \vec{E}, d\vec{S}) = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$ - дифр. форма т-мы о циркуляции.

№5 Работа эл.ст. поля при перемещении зарядов. Потенциал. Связь потенциала и напряженности. Уравнение Пуассона.

Рассмотрим пробный точечный заряд q' в поле заряда q . Поле в поле действия потенциальных сил обладает потенциальной энергией:

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right) = W_1 - W_2 \Rightarrow W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const}$$

Видно, что потенциальная энергия зависит не только от величины пробного заряда, но и от характеристик поля — q и r

Величина $\frac{W}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \varphi$ называется потенциалом и явл. характеристикой поля.

Потенциал равен энергии поля, которой обладает единичный заряд в данной точке.

Для потенциала верен принцип суперпозиции: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$

Когда для работы поле по перемещению заряда: $A = q'(\varphi_1 - \varphi_2)$. При удалении на бес- заряд на бесконечность: $A = q'\varphi$. Отсюда: потенциал численно равен работе, которую нужно затратить для удаления единичного заряда из данной точки на бесконечность.

Связь потенциала и напряженности.

Работа сил может быть представлена: $dA = q(\vec{E}, d\vec{\ell}) = qE_{\ell} d\ell$ $\Rightarrow$
 $dA = -d(q\varphi) = -q \frac{d\varphi}{d\ell} d\ell$

$$\Rightarrow qE_{\ell} d\ell = -q \frac{d\varphi}{d\ell} d\ell \Rightarrow E_{\ell} = -\frac{d\varphi}{d\ell}$$

Здесь ℓ - произвольно выбранное направление. В частности:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\frac{d\varphi}{dx} \vec{i} - \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} - \frac{d\varphi}{dz} \vec{k} = -\text{grad } \varphi$$

$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$ - связь между напр. и потенциалом.

с учетом $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$:

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ - уравнение Пуассона.}$$

В отсутствие зарядов $\Delta \varphi = 0$ - уравнение Лапласа.

№6 Электрический диполь в электростатическом поле. Силы, действующие на диполь.

Полярная молекула представляет из себя диполь. Можно приближенно считать, что крайние заряды двух соседних диполей в шудине диэлектрика компенсируют друг-друга. Тогда нескомпенсированными остаются заряды вблизи поверхности диэлектрика - они создают доп. поле внутри диэлектрика, которое изменяет внешнее поле. Это явление - поляризация диэлектрика.

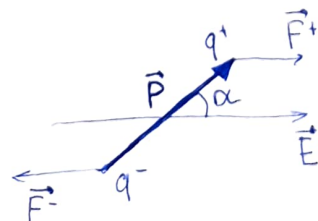
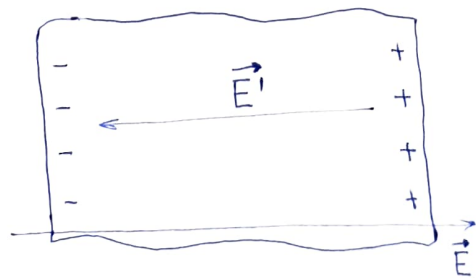
Поляризацию характеризует дипольный момент $\vec{p} = \vec{L}q$, направлен от отриц. заряда к полож.

В неоднородном поле на диполь действуют силы. Пусть E^+ - напряженность внеш. поле в точке полож. заряда, E^- - в точке отриц. заряда.

Сила, действующая на диполь: $\vec{F} = q(E^+ - E^-) = q \Delta E$,

где ΔE - приращение напряженности на длине ℓ вдоль вектора $\vec{E}$ в следствии малости этого отрезка: $\Delta E = \frac{\Delta E}{\ell} \ell = \frac{\partial E}{\partial \ell} \ell$

$$\vec{F} = q \frac{\partial E}{\partial \ell} \ell = \vec{p} \frac{\partial E}{\partial \ell}$$



N=7 Электростатическое поле в диэлектрике. Поляризация диэлектриков, поляризуемость.

Под действием внешнего эл. поля диэлектрик поляризуется, т.е. его результирующий электрический момент становится отличным от 0. Для описания степени поляризации данной точки нужно выделить бесконечно малый объем, заключающий эту точку и найти сумму моментов, лежащих в этом объеме.

Тогда:

$\vec{P} = \frac{\sum \vec{P}_i}{\Delta V}$ - вектор поляризации.

$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$, где χ - безразмерная величина, диэлектрическая восприимчивость вещества. или $\chi = \epsilon - 1$
 $\vec{E}$ - напряженность поля в данной точке.

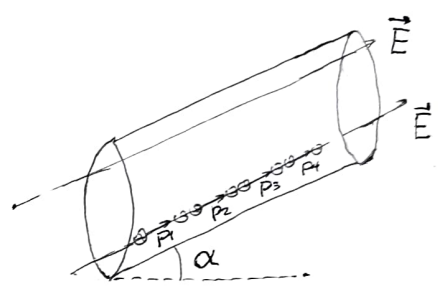
Видно, что $\vec{P} \parallel \vec{E}$.

Найдем нормальную составляющую $\vec{P}_n$. (к вопр. N=8)

$\vec{P} = \frac{\sum P_i}{\Delta V} = \frac{NLq'}{NLScos\alpha} = \frac{q'}{Scos\alpha} = \frac{\sigma'}{cos\alpha} \Rightarrow P_n = \sigma'$

где q - величина связанного заряда

Нормальная составляющая вектора поляризованности равна поверхностной плотности связанного заряда.



N=8 Свободные и связанные заряды. Теорема Гаусса для вектора поляризованности

В диэлектрике при нормальных условиях нет зарядов, способных свободно перемещаться, все заряды связаны друг с другом. Их называют связанными зарядами. Связанными зарядами называют нескомпенсированные заряды, появившиеся в рез. поляризации. Свобода их перемещение ограничена, они могут перемещаться лишь внутри эл. нейтральных молекул. Сторонние заряды - заряды, не входящие в состав диэлектрика. Могут находиться как внутри, так и вне диэлектрика.

Рассмотрим поток вектора поляризованности через замкнутую поверхность S внутри диэлектрика:

$q' = \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \oint_S P cos\alpha dS = \oint_S \sigma' dS = \sigma' S = q'$

при включении внешнего эл. поля положительные заряды сместятся относительно отрицательных или зарядов отриц.

q' - заряд, который вышел при поляризации из объема, охватываемого S .

В результате внутри останется избыточный связанный заряд $-q'$

Тогда: $\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -q'$ - Теорема Гаусса для $\vec{P}$

В диф. форме: $div \vec{P} = -\rho'$, где ρ' - объемная плотность избыточного связанного заряда.

Вектор электрического смещения. Обобщение теоремы Гаусса для поля в диэлектрике.

Поскольку источниками поля $\vec{E}$ являются все заряды, то теорему Гаусса можно записать как: $\oint_S \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = q' + q$, где $q' + q$ - связанные и свободные заряды внутри поверхности S .

Если выразить $q' = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}$, то $\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q$.

Величина $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ называется вектором электрического смещения, его поток равен сумме свободных зарядов, охватываемых контуром S .

$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$ - теорема Гаусса для $\vec{D}$

$\text{div } \vec{D} = \rho$ - диф. форма.

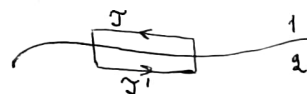
В случае изотропных диэлектриков: $\chi \epsilon_0 \vec{E} = \vec{P} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} (1 + \chi)$.

Величина $1 + \chi = \epsilon$ - диэлектрическая проницаемость вещества.

Видно, что в изотропных диэлектриках $\vec{D} \parallel \vec{E}$

N=10 Зап. поле на границе раздела диэлектриков

Рассмотрим гр. раздела двух однородных изотропных диэлектриков. Введем прямоугольный контур такой, чтобы высота была пренебрежимо малой, а поле в пределах длин прямоугольника сохранило однородность. Ориентируем контур, как показано.



Пусть $\vec{E}_1$ - напряженность поля в первой среде, $\vec{E}_2$ - во второй.

По теореме о циркуляции: $\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0 \Rightarrow E_{1\tau} l + E_{2\tau'} l = 0$, где $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau'}$ - проекции векторов напряженности на соотв. направление.

Если спроецировать $\vec{E}_2$ на $\vec{E}_1$: $E_{2\tau'} = -E_{2\tau} \Rightarrow \underline{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$ - касательная составляющая вектора $\vec{E}$ остается постоянной.

Для $\vec{D}$

Введем цилиндр, пренебрежимо малой высоты, в пределах торцов которого $\vec{D}$ не меняется. По теореме Гаусса:

$\oint (\vec{D}, d\vec{S}) = q \Rightarrow D_{1n} \Delta S + D_{2n'} \Delta S = q = \sigma \Delta S$. Спроецируем $\vec{D}_2$ на $\vec{D}_1$: $D_{2n'} = -D_{2n} \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma$. В общем случае, $\vec{D}$ при переходе через границу претерпевает скачок, но в отсутствие свободных зарядов она не меняется.

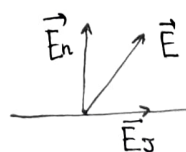
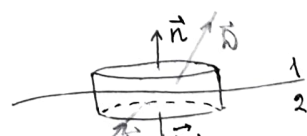
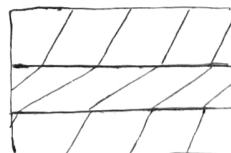
Аналогично для $\vec{P}$: $P_{1n} - P_{2n} = -\sigma'$.

Таким образом: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$; $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$

Если ввести угол отклонения $\vec{E}$ от нормали: $\text{tg } \alpha = \frac{E_\tau}{E_n}$

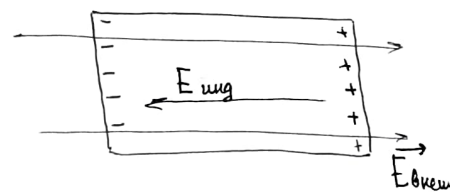
Для двух сред: $\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{E_{\tau 1} E_{n 1}}{E_{\tau 2} E_{n 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

Таким образом при $\epsilon_2 > \epsilon_1 \Rightarrow \alpha_2 < \alpha_1$. Силовые линии сгущаются в более проточной среде.



N²=11 Поле вблизи поверхности проводника. Электроёмкость проводников и конденсаторов. Ёмкости плоского, цилиндрич. и сфер. конденсаторов.

При внесении проводника в эл. поле в нем начинается перераспределение зарядов: свободные заряды внутри проводника начинают перемещаться под действием поля пока не наступит равновесие. Области проводника приобретают нескомпенсированный заряд, внутри проводника индуцируется поле $E_{\text{инд}}$.



Условие равновесия зарядов:

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{внутр}} = q(\vec{E}_{\text{внеш}} + \vec{E}_{\text{инд}}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_{\text{внутр}} = -\vec{E}_{\text{внеш}} + \vec{E}_{\text{инд}} = \vec{0}$$

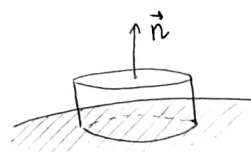
Из соотношения: $\vec{E}_{\text{внутр}} = \text{grad}(\varphi_{\text{внутр}}) = \vec{0} \Rightarrow \varphi_{\text{внутр}} = \text{const.}$

Внутри проводника потенциал не меняется, это же выполняется и для границы. Поверхность проводника эквипотенциальна. Силовые линии поле перпендикулярны поверхности проводника.

При сообщении проводнику эл. заряда, поле в проводнике также будет равно 0. Избыточный заряд накопится на поверхности проводника с некоторой плотностью σ .

Вблизи проводника напряженность поля связана с плотностью зарядов на поверхности. По теореме Гаусса:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_n \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Между зарядом и потенциалом единичного проводника существует связь:

$C = \frac{q}{\varphi}$ — электроёмкость проводника. Она равна заряду, сообщенного проводнику, повышает его потенциал на единицу. Зависит от размеров и формы проводника. Если проводник не единичен, то при приближении к нему других тел, его электроёмкость существенно увеличивается. Такая система называется конденсатором (Уродов стр. 53). $C = \frac{q}{U}$, где q — заряд положительно заряженной обкладки, U — разность потенциалов между обкладками.

Плоский конденсатор:

Напряженность поля двух параллельных пластин: $E = \frac{q}{\epsilon_0 S} \Rightarrow q = E \epsilon_0 S$

Пл. к. поле потенциально, то значение $\varphi_1 - \varphi_2 = \int (\vec{E}, d\vec{l})$ не зависит от траектории, поэтому можно посчитать разность потенциалов вдоль перпендикуляра между пластинками: $U = Ed$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{E \epsilon_0 S}{Ed} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Цилиндрич. конд.

$$E = \frac{q}{2\pi h \epsilon_0}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} (E, d\vec{l}) = \frac{q}{2\pi h \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{q}{2\pi h \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Сферический конденсатор:

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} (E, d\vec{l}) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi \epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

N=12 Энергия системы неподвижных зарядов. Энергия заряженного проводника, конденсатора.

И. Уровов стр. 96

Система зарядов

Рассмотрим систему из двух зарядов. Пусть заряд совершил перемещение $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$. Найдем работу поле:

$$\delta A_{1,2} = \vec{F}_1 d\vec{l}_1 + \vec{F}_2 d\vec{l}_2 = |\vec{F}_1 = -\vec{F}_2| = \vec{F}_1 (d\vec{l}_1 - d\vec{l}_2) = F_1 dl_1', \text{ где } dl_1' - \text{перемещение заряда 1 относительно заряда 2.}$$

Итого, сумма элементарных работ двух зарядов равна эл. работе одного заряда в системе отсчета где другой заряд покоится. Тогда эту работу можно представить как убыль потенциальной энергии: $\delta A_{1,2} = -dW_{12}$

Для системы из трех зарядов аналогично:

$$\delta A = -d(W_{12} + W_{23} + W_{31}) = -dW$$

Если представить, к примеру, W_{12} как $W_{12} = \frac{W_{12} + W_{21}}{2}$

$$dW = d(W_{12} + W_{21} + W_{23} + W_{32} + W_{31} + W_{13})/2 \Rightarrow d[(W_{12} + W_{13})/2 + (W_{21} + W_{23})/2 + (W_{31} + W_{32})/2]$$

Тогда в круглых скобках — энергии W_i взаимодействия i -го заряда с остальными.

$$W = \frac{1}{2} (W_1 + W_2 + W_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 W_i$$

Обобщим: $W = \frac{1}{2} \sum W_i = \frac{1}{2} \sum \varphi_i q_i$, где q_i — i -й заряд системы, φ_i — потенциал, создаваемый остальными зарядами в месте нахождения i -го.

Если заряды распределены непрерывно: $W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$, где φ — потенциал, создаваемый всеми зарядами системы в элементе dV .

Уединенный проводник

Поверхность проводника эквипотенциальна, а сумма зарядов — заряд проводника

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} = \frac{\varphi q}{2} \\ C &= \frac{q}{\varphi} \end{aligned} \right| \Rightarrow W = \frac{\varphi q}{2} = \frac{C \varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Конденсатор

Для двух обкладок:

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_+ q_+ + \varphi_- q_-) = \left| \text{т.к. } q_+ = -q_- \right| = \frac{1}{2} q_+ (\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

N=13 Обобщенная плотность энергии электростатического поля.

Рассмотрим энергию поле внутри плоского конденсатора:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{CU^2}{2} \\ C &= \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \end{aligned} \right| \Rightarrow W = \frac{\epsilon \epsilon_0 S U^2}{2d} = \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 S d = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2 S d}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2 V}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} V$$

— справедлива для однородного поля.

В случае неоднородного поля для изотропного диэлектрика:

$$W = \int_V \frac{\vec{D} \vec{E}}{2} dV \Rightarrow w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} = \underbrace{\frac{\vec{E} \vec{E} \epsilon_0}{2}}_{\text{энергия эл. поля в вакууме}} + \underbrace{\frac{\vec{E} \vec{P}}{2}}_{\text{энергия поляризации диэлектрика}}$$

Подытоживая, можно сказать, что плотность энергии складывается из энергии вакуума и энергии поляризации диэлектрика.

N=14 Электрический ток, носители тока в средах, сила и плотность тока, Уравнение непрерывности.

При включении электрического поля, в проводнике начинается упорядоченное движение зарядов. Количественная мера тока — сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad - \text{заряд, перенесенный через сечение } S \text{ проводника в единицу времени.}$$

Если эл. ток распределен по поверхности S неравномерно, вводит более детальную характеристику — плотность тока

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad - \text{модуль плотности тока равен отношению силы тока } I \text{ через элемент площади, расположенный перпендикулярно направлению движения зарядов, к ее площади.}$$

За направление выбирают направление скорости движения $\oplus$ -заряженных частиц

Если носители и $\oplus$ и $\ominus$ заряды: $\vec{j} = \vec{u}_- \rho_- + \vec{u}_+ \rho_+$

Если носители только $\ominus$: $\vec{j} = \vec{u}_- \rho_-$

Сила тока является потоком вектора $\vec{j}$: $I = \int \vec{j} d\vec{S}$

Носителями тока в металлах являются электроны, в электролитах — ионы.

Уравнение непрерывности:

Пусть в проводящей среде расположена замкнутая поверхность S :

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = - \frac{dq}{dt} \quad - \text{интеграл показывает количество заряда, выходящего наружу из объема, охватываемого поверхностью } S \text{ в единицу времени.}$$

или
убыль заряда внутри объема за единицу времени.

Для постоянного тока: $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 \Rightarrow$ линии вектора $\vec{j}$ нигде не начинаются и не заканчиваются; в случае постоянного тока поле $\vec{j}$ не имеет источников.

N=15 Электрическое поле в проводнике с током, сторонние силы. Циркуляция вектора напряженности эл. поля в замк. контуре с током. ЭДС.

При протекании тока на поверхности проводника выступает избыточный заряд, значит, снаружи проводника имеется нормальная составляющая вектора $\vec{E}$. Из непрерывности тангенц. составляющей $\vec{E}$ следует, что вблизи проводника она также существует. Значит поле вблизи поверхности направлено под некоторым углом с нормалью к поверхности проводника.

Для стационарных полей распределение зарядов не меняется во времени, след. они создают такое же кулоновское поле, как и система неподвижных зарядов, — потенциальное. Однако, поле неподвижных зарядов при равновесии внутри проводника равно нулю, когда в поле стационарных токов заряды движутся, то есть поле не равно нулю.

Под действием только сил электростатического поля положительные носители перемещались бы к местам с меньшим потенциалом, а отрицательные носители — к местам с большим потенциалом. Таким образом, потенциал бы выравнивался и ток прекратился.

Чтобы этого не произошло, в цепи должны быть участки, где $\oplus$ -заряды движутся от меньшего φ к большему, то есть против сил поля. Это движение обеспечивают сторонние силы.

Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают по перемещению зарядов. Величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного полож. заряда называется ЭДС:

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q}$$

Сила действующая на заряд со стороны сторонних сил:

$$\vec{f}_{\text{ст}} = \vec{E}^* q, \text{ где } \vec{E}^* - \text{напряженность поля сторонних сил.}$$

Тогда работу сторонних сил на всей контуре замкнутой цепи можно представить:

$$A = \oint \vec{f}_{\text{ст}} d\vec{l} = q \oint \vec{E}^* d\vec{l} \quad | : q$$

$\mathcal{E} = \oint (\vec{E}^*, d\vec{l})$ — ЭДС равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил по замкнутой цепи.

Результирующая сила, действующая на заряд:

$$\vec{f} = \vec{f}_E + \vec{f}_{\text{ст}}, \text{ где } \vec{f}_E - \text{сила со стороны эл-ст. поля}$$

Работа этой силы на участке 1-2:

$$A_{12} = \int_1^2 q(\vec{E}, d\vec{l}) + \int_1^2 q(\vec{E}^*, d\vec{l}) = qE_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad | : q$$

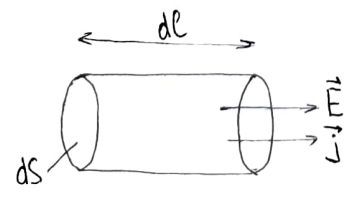
$U_{12} = E_{12} + \varphi_1 - \varphi_2$ — падение напряжения на участке 1-2. Работа сил по перемещению заряда от точки 1 в точку 2.

№16 Закон Ома и Джоуль-Ленца в инт. и дифр. формах.

Закон Ома для однородного участка:
(не действуют сторонние силы)

$$I = \frac{U}{R}, R = \rho \frac{l}{S} \quad - \text{экспериментально установлено.}$$

Видимы внутри проводника некоторый цилиндр, с образующими $\parallel \vec{j}$:



тогда $U = E dl$, $R = \rho \frac{dl}{dS}$, $I = j dS \Rightarrow j dS = \frac{E dl dS}{\rho dl} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}$,
где σ — проводимость материала.

Для неоднородной цепи:

$$I = \frac{E + \varphi_1 - \varphi_2}{R} \quad (\text{см. выше});$$

$$\text{в дифр. форме: } \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^*)$$

$\Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}$,
↑
закон Ома в дифр. форме

Закон Джоуля-Ленца.

Рассмотрим однородный проводник, к которому приложено напряжение U .

$dq = i dt$ — заряд dq переносится за время dt из одного конца проводника в другой.
При этом силы поле совершают работу:

$$dA = U dq$$

$$U = iR$$

Отсюда: $dA = i^2 R dt$. Проинтегрировав, получим:

$$Q = \int_0^t i^2 R dt \quad \text{или} \quad Q = I^2 R t \quad \text{— закон Джоуля-Ленца.}$$

Аналогично, как и в законе Ома, выделим цилиндрический участок внутри проводника:

$$\left. \begin{aligned} I &= j dS \\ R &= \rho \frac{dl}{dS} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dQ = \rho \frac{dl}{dS} (j dS)^2 t = j^2 \rho dl dS t = j^2 \rho t dV.$$

Жел-во тепла, отнесенное к единице времени и единице объема, называется удельной мощностью тока:

$$w = j^2 \rho = j E = \sigma E^2$$

N=17 Вектор индукции магнитного поля. Закон Био-Савара-Лапласа.

Движущиеся заряды создают в окружающем пространстве магнитное поле, проявляемое в том, что на движущиеся заряды (токи) действуют токи.

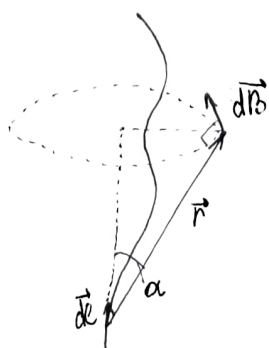
Внесем в м.п. замкнутый контур с током. Определим направление нормали по правилу буравчика. Величину $p_m = IS$ называют магнитным моментом контура.

Силы поле будут стремиться развернуть контур так, чтобы нормаль была повернута в стр. направлении. Примем это направление за направление поле в данной точке. Взаимодействующий момент, действующий со стороны поле на контур, достигает максимального значения при угле между нормалью и направлением поле $\pi/2$.

На контуры с разными p_m в данной точке поле действуют разные макс. вр. моменты M_{max} , но отношение $\frac{M_{max}}{p_m}$ будет одинаковым для всех контуров. Это значение принято за характеристику поле. Физическую величину, пропорц. данной отношению называют индукцией м.п.: $B = \frac{M_{max}}{p_m}$. Магнитное поле не имеет источников, оно создается движущимися зарядами $\Rightarrow$ его линии замкнуты.

Закон Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$



Био и Савар получили экспериментальные данные, а Лаплас составил формулу.

N=19 Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля.

Теорема Гаусса для $\vec{B}$:

Поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:
 $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$

Этот закон выражает тот факт, что линии магнитной индукции замкнуты: число линий входящих в объем, огр. поверхностью, равно числу выходящих.

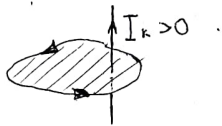
Следствие: поток вектора $\vec{B}$ через поверхность S не зависит от формы поверхности.

Также закон выражает тот факт, что не существует магнитных зарядов, т.е. магнитное поле не имеет источников.

N=20 Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в инт. и дифр. форме. Расчет магнитного поля тороида и соленоида.

Теорема о циркуляции: $\oint (\vec{B}, d\vec{L}) = \mu_0 I$ — циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром.

$I = \sum I_k$. I_k считается положительным, если его направление связано с направлением обхода правилом правого винта:



Если токи равномерно распределены по объему, где расположен контур $I = \iint_S (\vec{j}, d\vec{S})$. Вектор $d\vec{S}$ связан с направлением обхода правилом правого винта.

$$\text{Итого, в общем виде: } \oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{L}) = \iint_S (\vec{j}, d\vec{S}) \cdot \mu_0 \quad \left| \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \right.$$

$$\text{По теореме Стокса: } \oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{L}) = \iint_S (\text{rot } \vec{B}, d\vec{S})$$

Циркуляция $\vec{B}$ в общем случае не равна нулю $\Rightarrow$ поле не потенциально. Такие поля называют вихревыми или соленоидальными.

Магнитное поле соленоида

Из соображений симметрии, поле внутри соленоида направлено параллельно оси. Выберем за контур обхода прямоугольник, две стороны которого $\parallel$ оси, длина стороны l .

П.к. соленоид бесконечно длинный, поле снаружи него отсутствует.

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{L}) = Bl = \mu_0 I. \text{ Сила тока в одном витке } I_k, \text{ плотность намотки } n = \frac{N}{l} \Rightarrow N = nl$$

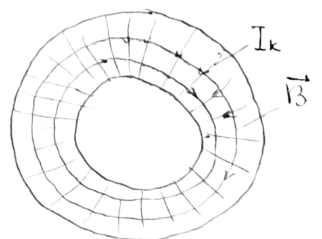
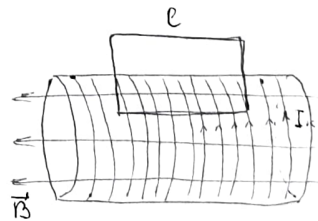
$$\text{Сила тока в контуре } \Gamma: I = I_k N = I_k n l \Rightarrow Bl = \mu_0 I_k n l \Rightarrow B = \mu_0 I_k n$$

Магнитное поле тороида.

В качестве контура Γ выберем окружность на оси тороида. Пусть ее радиус r . Тогда сумма токов, охватываемая контуром: $I = NI_k$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{L}) = 2\pi r B = \mu_0 NI_k$$

$$B = \frac{\mu_0 NI_k}{2\pi r}. \text{ Снаружи тороида поле отсутствует.}$$



N 2.1 Сила Лоренца. Движение заряж. частиц в эл. и м. полях. Ускорение заряженных частиц. Сила, действующая на точечный заряд имеет две составляющие: магнитную и электрическую. Электрическая составляющая не зависит от движения заряда, а направление и модуль магнитной сост. зависит от скорости частицы, причем она всегда перпендикулярна скорости частицы.

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_m = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}] \quad - \text{сила Лоренца.}$$

Заметим, что:

- на покоящийся заряд м. сост. силы Лоренца не действует
- м. сост. сил Лоренца не совершает работы, т.к. она перпендикулярна скорости.

Ускорение заряженных частиц.

Ускорители - установки, предназначенные для ускорения частиц до высоких энергий. Частица движется в эл. и м. полях, при этом электрическое поле совершает работу над частицей, увеличивая ее энергию, а магнитное поле задает траекторию.

Ускорители: линейные (частица движется по прямой траектории), циклотроны (частица движется по круговой траектории)

Циклотрон:

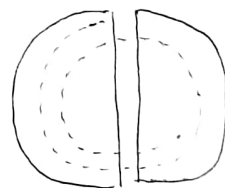
Принцип действия основан на независимости периода оборота частицы от скорости.

$$T = 2\pi \frac{m}{Bq}$$

Два полых электрода, в которых движется частица, выполнены в форме половинки цилиндра помещены в вакуум, в вертикальное магнитное поле.

При прохождении частиц через зазор между электродами включается эл. поле, разгоняющее частицу. Частота колебаний напряжения ~~зависит~~ равна частоте вращения частицы.

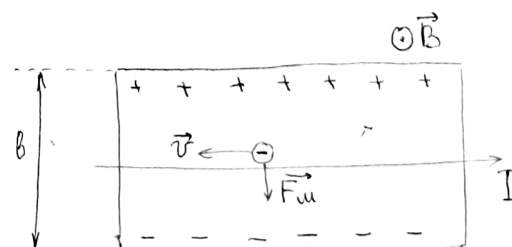
Пример ускорителя: Большой адронный коллайдер.



N 2.2 Эффект Холла.

Параллельно помещают в магнитное поле, так, чтобы $\vec{B}$ было перпендикулярно одной паре граней. Через вторую пару пропускают ток. Тогда между третьей парой граней возникает напряжение.

~~Вывод~~ электроны движутся против положительного направления тока. На движущиеся частицы действует м. сост. сил Лоренца, под ее действием электроны скапливаются у грани параллелепипеда, а у противоположной грани образуется нескомпенсированный положительный заряд $\Rightarrow$ между гранями образуется индуцированное эл. поле напряженностью E_H . С его стороны на частицу действует эл. сост. $\vec{F}_E$ (сила Кулона)



Условие равновесия: $\vec{F}_E + \vec{F}_m = 0 \Rightarrow qE_H = qvB \Rightarrow E_H = vB$. Напряжение между гранями: $U_H = E_H b$.

Среднее скорость движение электронов: $j = nqv \Rightarrow v = \frac{j}{nq}$

Тогда $E_H = \frac{jB}{nq}$; $U_H = \frac{jB}{nq} b = R_H B b$, где R_H - постоянная Холла, $R_H = \frac{1}{nq}$

Эффект наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках. Используется в устройствах, регистрирующих магнитные поля

N=23 Проводники с током в магнитном поле. Закон Ампера. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

На каждый движущийся заряд в м.п. действуют силы со стороны м.п. Эти силы передаются проводнику, по которому движутся заряды. В результате м.п. действует на сам проводник с силой, называемой силой Ампера.

Сила в элементе проводника dV :

$$d\vec{F} = j[\vec{v} \times \vec{B}] dV \quad \Rightarrow \quad d\vec{F} = [\vec{j} \times \vec{B}] dV$$

с учетом $\vec{j} = \rho\vec{v}$

при перемещении проводника с током в м.п. к скорости упоряд. движения зарядов прибавляется скорость перемещения проводника. Составляющая Лоренца от этой скорости будет действовать и на положительные заряды, частицы и на отриц. и поэтому будет сокращаться.

см. лекции 7-8

если ток течет по тонкому проводнику, то $\vec{j}dV = I d\vec{e} \Rightarrow d\vec{F} = I[d\vec{e} \times \vec{B}]$.

Одинаково направленные токи притягиваются, противоположно направленные отталкиваются.

Работа амперовых сил по перемещению контура с током определяется:

$\delta A = Id\Phi$, где $d\Phi$ — приращение магнитного потока через контур.

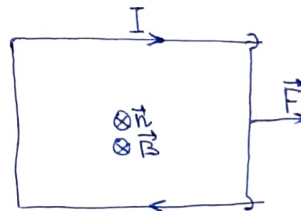
1. Рассмотрим частный случай, когда подвижная перемычка перемещается под действием сил Ампера.

Сила, действующая на перемычку: $dF = BIl$

Работа: $\delta A = (\vec{F}, d\vec{x}) = BIl dx = BIdS = Id\Phi$

где dx — перемещение перемычки.

Направление нормали выбираем по правилу правого винта (если $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{n}$, то $d\Phi > 0$)



2. При произвольном направлении $\vec{B}$ разделим $\vec{B}$ на три составляющие: $\vec{B}_n, \vec{B}_\tau, \vec{B}_\perp$. Составляющая $\vec{B}_\tau$ параллельна перемычке, с ее стороны не действует сила Ампера; составляющая $\vec{B}_\perp$ дает силу, перпендикулярную перемещению, она не совершает работу. Вклад в работу дает только $\vec{B}_n$, мы возвращаемся к п. 1.

3. Пусть контур произвольной формы перемещается в м.п. Разобьем контур на элементарные участки, тогда каждый из них совершает работу $\delta A = Id'\Phi$, где $d'\Phi$ — вклад в приращение потока сквозь контур от данного элемента. Сложив ~~эти~~ элементы $d'\Phi$ получим $d\Phi$.

Таким образом, работа амперовых сил при перемещении контура из положения 1 в положение 2:

$$A = \int_1^2 Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$

N=24 Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током. Силы, действующие на контур с током в магнитном поле.

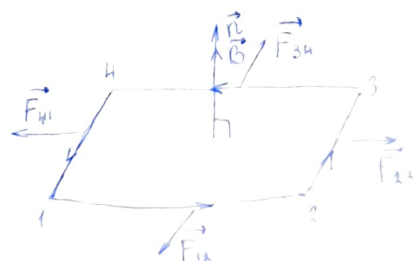
Рассмотрим прямоугольный контур. Нормаль по правилу правого винта.

1. Угол между нормалью и индукцией $\alpha = 0^\circ$

Силы Ампера, действующие на каждую сторону, будут стремиться растянуть рамку.

Сумма сил равна 0, момент также равен 0.

При $\alpha = 180^\circ$ то же самое, но силы стремятся сжать рамку.



2. $\alpha = 90^\circ$

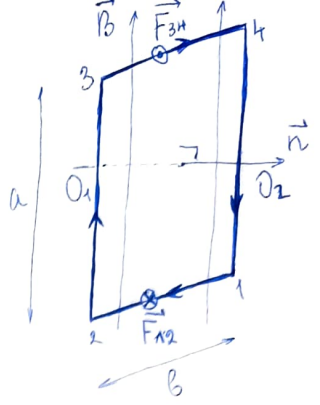
Погда $\vec{B}$ || сторонам 23 и 41 $\Rightarrow \vec{F}_{23} = \vec{F}_{41} = \vec{0}$

На рамку действуют $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{34}| = I B b$

Сумма сил ~~равна~~ равна $\vec{0}$, но момент сил равен сумме моментов относительно O_1, O_2

$M = M_{12} + M_{34} = \frac{a}{2} I B b + \frac{a}{2} I B b = a I B b$

Вектор момента лежит на оси $O_1 O_2$



3. $\vec{B}$ направлен произвольным образом.

Введем декартову систему координат.

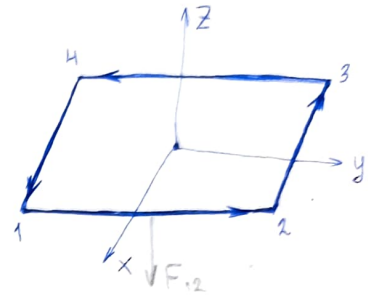
Погда $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$

$M_x = I B_y a b, M_y = -I B_x a b, M_z = 0$

Вектор магнитного момента: $\vec{p}_m = \vec{n} I S = \vec{n} I a b = (0, 0, I a b)$

Момент сил, действующих на контур с током равен $\vec{M} = (\vec{p}_m \times \vec{B})$

$\vec{M} = (\vec{p}_m \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & I a b \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = I a b \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = I a b (\vec{e}_x B_y - \vec{e}_y B_x)$



$= \vec{M}_x + \vec{M}_y$

Величина момента: $M = p_m B \sin(\widehat{p_m, B})$

$\vec{p}_m = \vec{n} S I$ - магнитный момент контура.

Сила, действующая на элементарный контур в неоднородном поле:

$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}$

N:25 Магнитное поле в магнетиках. Намагниченность вещества. Вектор намагниченности.

Вещество является магнетиком, т.е. под действием ~~и~~ м.п. способно намагничиваться. При этом вещество создает свое собственное магнитное поле. По принципу суперпозиции внутри вещества:

$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$, где $\vec{B}'$ - собственное магнитное поле вещества.

По предположению Ампера, в веществе циркулируют молекулярные токи ^{магнитные моменты} ~~у которых~~ без действия м.п. ориентированы хаотично и компенсируют друг друга. При внесении вещества в магнитное поле магнитные моменты микр. токов ориентируются в опр. направлении, поэтому суммарный магнитный момент не равен нулю.

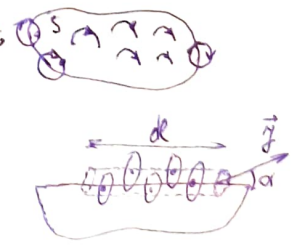
Усредненный суммарный магнитный момент единицы объема - вектор намагниченности.

$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V} \left[\frac{A}{m} \right]$ Теорема о циркуляции $\vec{J}$: $\oint_{\Gamma} (\vec{J}, d\vec{l}) = I'$; I' - сумм. ток намагничивания $I' = \int (\vec{J}, d\vec{S})$

Введем контур Γ , натянем на него поверхность S . Вдл Γ суммарный молек. ток выдают только токи у границ. Введем на границе Γ элемент dl . Тогда элемент dl обдувают только те токи, центры которых попадают внутри косого цилиндра объемом $dV = dl \cos \alpha S_m$, где S_m - площадь, охватываемая контуром молекулярного тока, α - угол между dl и $\vec{J}$. Все эти токи пересекают S один раз, их вклад в общий ток намагн.: $dI' = n I_m dV$, где I_m - сумм. молек. ток.

$dI' = n I_m dV = n I_m S_m \cos \alpha dl = n p_m \cos \alpha dl = J \cos \alpha dl = (\vec{J}, d\vec{l}) \Rightarrow \oint_{\Gamma} (\vec{J}, d\vec{l}) = I'$

$\text{rot } \vec{J} = \vec{j}$



§2.6 Вектор напряженности магнитного поля и его связь с векторами индукции и намагниченности. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества.

Теорему о циркуляции $\vec{B}$ можно представить в виде: $\text{rot}(\vec{B}_0 + \vec{B}') = \mu_0(\vec{j}_0 + \vec{j}') \Rightarrow \text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{j}_0 + \vec{j}' = \vec{j}_0 + \text{rot} \vec{J} \Rightarrow \text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right) = \vec{j}_0$, где $\vec{j}_0$ - плотность токов проводимости или сторонних токов.

Выражение $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H}$ называется вектором напряженности магнитного поля.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$: $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_0$ (в диф. форме).

В инт. форме: $\oint (\vec{H}, d\vec{l}) = I_0$, I_0 - суммарный ток проводимости.

Для однородного изотропного магнетика: $\vec{J} = \chi \vec{H}$, т.е. $\vec{J} \parallel \vec{H}$, где χ - магнитная восприимчивость вещества.

Тогда: $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \vec{H}(1 + \chi)$.

Величину $1 + \chi = \mu$ называют магнитной проницаемостью вещества.

Итого $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$.

Вектор $\vec{H}$ носит вспомогательный характер и не имеет строгого физического характера. χ может быть как и положительной (парамагнетики), так и отрицательной (диамагнетики). У ферромагнетиков χ имеет нелинейный характер + гистерезис.

§2.7 Теоремы о циркуляции $\vec{H}$ и $\vec{J}$ в инт. и диф. формах.

см. вопросы N-26 и 25.

N-23 Магнитное поле на границе раздела магнетиков.

Рассмотрим вектор $\vec{B}$

Выделим цилиндр пренебрежимо малой высоты на границе раздела магнетиков.

По теореме Гаусса: $\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$

$$\iint_S (\vec{B}_1, d\vec{S}) + \iint_S (\vec{B}_2, d\vec{S}) = -B_{1n} S_{\text{окл}} + B_{2n} S_{\text{окл}} = (B_{2n} - B_{1n}) S_{\text{окл}} = 0 \Rightarrow B_{2n} = B_{1n}$$

Нормальная составляющая вектора м. индукции на границе раздела магнетиков не меняется.

Рассмотрим вектор $\vec{H}$

Выделим на границе раздела прямоугольник с пренебрежимо малой высотой.

По теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$: $\oint (\vec{H}, d\vec{l}) = I_{\text{ст}}$, $I_{\text{ст}}$ - сумма сторонних токов (проводимости).

$$\int_C (\vec{H}_1, d\vec{l}) + \int_C (\vec{H}_2, d\vec{l}) = H_{1\tau} l - H_{2\tau} l = (H_{1\tau} - H_{2\tau}) l = I_{\text{ст}} \Rightarrow H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{I_{\text{ст}}}{l} = i_{\text{ст}}$$

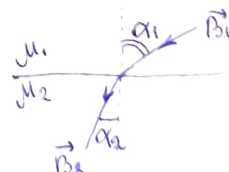
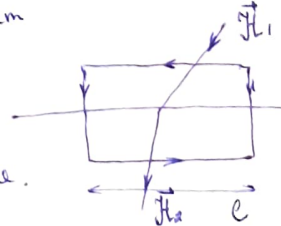
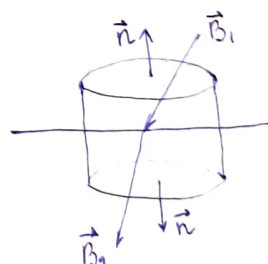
Изменение величины касательной составляющей вектора напряженности м.п. равно линейной плотности токов проводимости на границе. В отсутствие сторонних токов касательная составляющая не меняется.

Для $\vec{J}$ по аналогии:

$H_{1\tau} - H_{2\tau} = i_{\text{ст}}$, где $i_{\text{ст}}$ - плотность молекулярных токов.

Рассмотрим преломление силовых линий:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{1\tau} \cdot B_{2n}}{B_{1n} \cdot B_{2\tau}} = \frac{H_{1\tau} \mu_1 H_{1n}}{H_{2\tau} \mu_2 H_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \Rightarrow \text{линии больше в среде с большей магн. проницаемостью.}$$



N=29 Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.

У диамагнетиков χ принимает отрицательные значения, но $\mu > 0$.
 $\vec{J} = \chi \vec{H} = \chi \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} + \vec{J} \right) \Rightarrow \frac{\chi}{\chi+1} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, то есть у диамагнетиков вектор намагниченности направлен против вектора индукции магнитного поля. Диамагнетики выталкиваются из области сильного магнитного поля.

У парамагнетиков χ положительна, но не принимает больших значений. $\vec{J} \parallel \vec{B}$

У ферромагнетиков χ принимает большие значения (тысяча и более), их намагниченность зависит от предыдущего состояния.

Физ. природа.

Молекулярные токи в веществе обусловлены движением электронов вокруг ядра. Это движение приводит к появлению кругового тока, положительное направление которого против движения электрона. На магнитный момент атом. тока $\vec{p}_{\text{маг. ток}}$ действует момент сил, поэтому орбита электрона начнет отклоняться от оси и появится дополнительный магн. момент $\vec{p}_{\text{орб.}}$, направленный против $\vec{B}$.

N=30 Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Правило Ленца. Самоиндукция. Взаимная индукция. Индуктивность. Индуктивность соленоида.

При изменении магнитного потока через замкнутый проводник, в нем возникает индукционный ток. Он появляется за счет действия сторонних сил со стороны вихревых электрических полей, появляющихся из-за изменения потока. Величина ЭДС индукции:

$\mathcal{E}_i = - \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$, т.е. величина ЭДС индукции определяется скоростью изменения потока — закон Фарадея

Правило Ленца: индукционный ток направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение потока.

Диф. форма закона Фарадея: $\mathcal{E}_i = \oint_L (\vec{E}_{\text{см}}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot } \vec{E}_{\text{см}}, d\vec{S}) = - \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S}) \Rightarrow \text{rot } \vec{E}_{\text{см}} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

появляющееся поле является вихревым, т.е. его силовые линии замкнуты.

Самоиндукция. Если по замкнутому проводнику протекает ток, то он создает магнитное поле и магнитный поток. Между током и потоком существует связь: $\Phi_B = I L$, L — коэф. самоиндукции контура или индуктивность. В отсутствие ферромагнетиков $L = \text{const}$. При изменении силы тока в контуре будет возникать ЭДС самоиндукции: $\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - L \frac{dI}{dt}$

Индуктивность соленоида. Величина индукции внутри соленоида (см. N=20) $\vec{B} = \mu_0 \mu I n = \mu_0 \mu I \frac{N}{l}$, поток через поверхность, охватывающую витки: $\Phi = S B = \pi R^2 \mu_0 \mu I \frac{N}{l}$; поток через все витки в соленоиде: $\Phi_{\Sigma} = \pi R^2 \mu_0 \mu I \frac{N^2}{l}$
Индуктивность: $L = \frac{\Phi_{\Sigma}}{I} = \pi R^2 \mu_0 \mu \frac{N^2}{l}$

Взаимная индукция Пусть на небольшом расстоянии друг от друга расположены два замкнутых проводящих контура. По ним текут токи I_1 и I_2 . Каждый из контуров создает в окружающем пространстве м.п. и магнитный поток через другой контур.
 Поток в 2 контуре, создаваемый током I_1 : $\Phi_{21} = L_{21} I_1$
 Поток в 1 контуре, создаваемый током I_2 : $\Phi_{12} = L_{12} I_2$
 В отсутствие ферромагнетиков $L_{12} = L_{21}$ и называют коэф. взаимной индукции. Контур называют магнитовозбудителем.

N=31 Вихревые токи.

Индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных проводниках. Другая форма закона Ома: $\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \text{rot } \vec{j} = \text{rot}(\sigma \vec{E}) = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$ поле плотности индукционных токов тоже вихревое, эти токи называют вихревыми или токами Фуко.
 Возникают при движении проводника в магнитном поле, при этом проводник начинает разогреваться (используют в индукц. печах) и его движение затормаживается по закону Ампера (используют в демпферных устройствах для успокоения колебаний).
 Как предотвращение появления токов Фуко в проводнике делают разрезы $\perp$ направлению тока или изолируют проводник из пластин.
 Если по проводнику течет переменный ток, то он создает переменное магнитное поле, которое приводит к появлению вихревых токов внутри проводника, которые направлены так, что ослабляют основную ток. Это явление называется скин-эффектом, из-за него провода с высокочастотными токами изготавливают в виде трубок, внешнюю поверхность которых покрывают материалом с большой проводимостью (серебро).

$$A = \int \rho(\vec{E}, d\vec{r})$$

N=32 Плотность энергии магнитного поля.

Энергия м.п. внутри катушки индуктивности:
~~Эта энергия из катушки индуктивности и источника. В цепи работает источник ЭДС $\mathcal{E}$, сила тока I в цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, $\mathcal{E}_i = 0$. После размыкания цепи начинает уменьшаться сила тока, в катушке появляется ЭДС самоиндукции и ток индукции: $I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -L \frac{dI}{dt}$~~

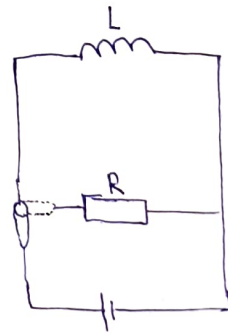
Энергия магнитного поля внутри соленоида.

Пусть сначала соленоид замкнут на источник ЭДС. В соленоиде установлен ток I , который обеспечит магнитное поле. Затем замкнем соленоид через резистор, тогда в этой цепи будет некоторое время циркулировать постепенно убывающий ток.

Возникнет ЭДС самоиндукции: $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

Работа, совершаемая этим током: $dA = \mathcal{E}_i I dt = -L \frac{dI}{dt} I dt = -L I dI$

Интегрируем: $A = -\int_I^0 L I dI = \frac{LI^2}{2}$ — энергия магнитного поля



Объемная плотность энергии

Энергия магнитного поля: $W = \frac{LI^2}{2}$

Индукция м.п. внутри соленоида: $B = \mu \mu_0 \frac{N}{l} I$

Индуктивность соленоида: $L = \mu \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2$

Напряженность м.п.: $H = \frac{B}{\mu \mu_0} = \frac{N}{l} I$

Объем внутри катушки: $V = \pi R^2 l$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \mu \mu_0 \frac{N^2}{l} I^2 \pi R^2 = \frac{1}{2} \mu \mu_0 \frac{N}{l} I \cdot \frac{N}{l} I \cdot l \pi R^2 = \frac{B H V}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{W}{V} = w = \frac{B H}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2 \mu \mu_0} = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2}$$

33] Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление

Пусть система (Уродов стр 243) состоит из двух проводящих контуров с токами I_1 и I_2 . Рассмотрим магнитную энергию системы:

Магнит. э.: $W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2$ (см. Уродов стр 246)

Полный магнитный поток, пронизывающий 1 контур: $\Phi_{01} = L_{12} I_2 + L_1 I_1$
2 контур: $\Phi_{02} = L_{12} I_1 + L_2 I_2$

Представим $L_{12} I_1 I_2$ в виде: $L_{12} I_1 I_2 = \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} + \frac{L_{21} I_1 I_2}{2}$

Тогда $W = I_1 \left(\frac{L_1 I_1}{2} + \frac{L_{12} I_2}{2} \right) + I_2 \left(\frac{L_2 I_2}{2} + \frac{L_{21} I_1}{2} \right) = I_1 \cdot \frac{\Phi_{01}}{2} + I_2 \cdot \frac{\Phi_{02}}{2} = \frac{I_1 \Phi_{01} + I_2 \Phi_{02}}{2}$ (1)

Рассмотрим часть работы источников в контурах, совершаемую против ЭДС индукции и самоиндукции:

$$\delta A_{\text{gen}} = -I_1 (\mathcal{E}_{i1} + \mathcal{E}_{s1}) dt - I_2 (\mathcal{E}_{i2} + \mathcal{E}_{s2}) dt$$

$$\mathcal{E}_{i1} + \mathcal{E}_{s1} = -\frac{d\Phi_{01}}{dt}; \quad \mathcal{E}_{i2} + \mathcal{E}_{s2} = -\frac{d\Phi_{02}}{dt}$$

$$\delta A_{\text{gen}} = I_1 d\Phi_{01} + I_2 d\Phi_{02}$$

Эта работа идет на приращение магнитной энергии системы и совершение мех. работы.

$$\delta A_{\text{gen}} = dW + dA_{\text{мех}}$$

Рассмотрим два случая: 1) пусть потоки через контуры не меняются, $\Phi = \text{const.}$

$$dA_{\text{мех}} = -dW|_{\Phi}$$

2) пусть токи через контуры постоянны, $I = \text{const.}$

$$dA_{\text{мех}} = dW|_{I} \text{ (из (1)) } dW = \frac{I_1 d\Phi_{01}}{2} + \frac{I_2 d\Phi_{02}}{2}; \quad A_{\text{gen}} = I_1 d\Phi_{01} + I_2 d\Phi_{02}$$

Полученные механические работы совершаются одной и той же силой:

$$(\vec{F}, d\vec{l}) = dW|_I - dW|_{\Phi}$$

Т.е. для определения сил нужно найти приращение магнитной энергии системы при постоянстве или потока или тока.

Найдем силу взаимодействия между витками соленоида

Пусть при $I = \text{const}$ внешние силы растягивают соленоид на величину dl . Работа внешних сил:

$$\delta A_{\text{вн}} = \sum_{i=1}^N F_{\text{вн}} dx_i; \text{ где } dx_i - \text{перемещение одного витка, } \sum_{i=1}^N dx_i = dl$$

Энергия системы изменится при этом на величину $dW = \delta A_{\text{вн}}$; сила, дейст. со стороны внешних сил равна силе взаимодействия между витками: $F_{\text{внн}} = F$

$$dW = \omega dV; \quad \delta A_{\text{вн}} = F dl \Rightarrow \omega dV = \omega S dl = F dl \Rightarrow F = \omega S - \text{внешнее натяжение}$$

Натяжение в магнитном поле - сила взаимодействия между витками, их векторы $\parallel$ линии индукции

$$\text{Величина натяжения } p_{\parallel} = \frac{F}{S} = \omega$$

Найдем величину давления

Пусть сила $F_{\perp}$ растягивает витки в радиальном направлении - действует $\perp$ линиям индукции.

$$\text{Вспользуемся приведенным выше: } \delta A_{\text{мех}} = dW|_{I=\text{const}}$$

$$\delta A_{\text{мех}} = F dr = p_{\perp} S_{\text{ок}} dr, \text{ где } dr - \text{изменение радиуса витка; } S_{\text{ок}} - \text{бок. поверхность соленоида; } p_{\perp} - \text{давление}$$

$$dW = d(\omega V) = d\left(\frac{B^2}{2\mu_0} V\right) = \frac{B^2}{2\mu_0} S_{\text{ок}} dr$$

$$p_{\perp} S_{\text{ок}} dr = \frac{B^2}{2\mu_0} S_{\text{ок}} dr \Rightarrow p_{\perp} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \omega$$

Силы, действующие на тела со стороны м.п. или э.п. называют радиотормонами.

N=34 Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое эл. поле. Ток смещения, закон полного тока.

Из закона Фарадея ($\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$; $\text{rot } \vec{E}_{\text{ст}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) следует, что изменение магнитного поля приводит к появлению вихревого поля сторонних сил (или вихр. эл. поля)

Гипотеза Максвелла (первая): Наличие проводника или носителей тока в области изменения м.п. не ~~зависит~~ влияет на появление в ней вихревого электрического поля. Электрическое поле в этой области является суперпозицией поля кулоновских сил ($\vec{E}_q$), создаваемого неподвижными точечными зарядами, и вихревого поля ($\vec{E}_v$), создаваемого изменяющимся магнитным полем.

Суммарное поле: $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_v$. Найдем его дивергенцию.

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \vec{E}_q &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{м-ли Гаусса}) \\ \text{div } \vec{E}_v &= 0 \quad (\text{м.к. поле вихревое}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ротор суммарного поля:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{E}_q &= \text{rot}(-\text{grad } \varphi) = 0 \\ \text{rot } \vec{E}_v &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Пятая Максвелл выдвинула теорию о том, что изменяющееся во времени эл. поле приводит к появлению магнитного поля, т.е. наблюдается симметрия в взаимозависимости эл. и м. полей. Следствием стала ~~вторая~~ гипотеза о существовании тока смещения, оказывающего влияние на магнитное поле.

Рассмотрим теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$: (Урзов стр. 261)

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{r}) = \iint_S (\vec{j}, d\vec{S})$$

Применим эту теорему к случаю разрядки плоского конденсатора через некоторое сопротивление.

Через поверхность S протекает некоторый ток, а через S' — нет $\Rightarrow$ противоречие в теореме о циркуляции.

Для избежания этого, правую часть дополняют следующим образом:

По теореме Гаусса о векторе эл. индукции: $\iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \frac{\partial q}{\partial t}$

По уравнению непрерывности: $\iint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{\partial q}{\partial t}$

Складывая, получаем: $\iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right), d\vec{S} = 0$

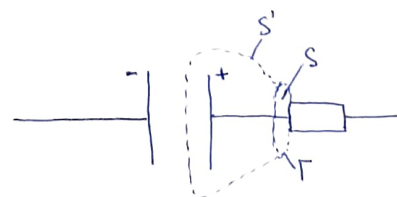
Это уравнение аналогично уравнению непрерывности для постоянного тока, но плотность тока проводимости добавляется величина плотности тока смещения:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{см}}$$

Сумму тока проводимости и тока смещения называют полным током: $\vec{j}_{\text{пол}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Линии полного тока являются непрерывными; токи проводимости, если они не замкнуты, замыкаются токами смещения.

Обобщим теорему о циркуляции $\vec{H}$ для произвольного случая: $\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{r}) = \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right), d\vec{S}$;
 $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$

Закон полного тока: $I_{\text{пол}} = I_{\text{см}} + I = \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right), d\vec{S}$ — сила полного тока равна сумме сил токов проводимости и смещения
* ток смещения существует только там, где со временем ~~меняется~~ электрическое поле
(стр. 266 Урзов почитайте)



N=35 Уравнения Максвелла в инт. и диф. формах. Их физический смысл.

$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = - \int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right)$; $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле. Под $\vec{E}$ понимается полное поле, вихревое и электростатическое, но циркуляция последнего равна 0.

$\oint (\vec{H}, d\vec{l}) = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \right)$; $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - Циркуляция вектора напряженности м.п. равна полному току через некоторую поверхность. Движущиеся эл. заряды и переменное эл. поле создают вихревое магнитное поле.

Эти два уравнения говорят о том, что электрическое и магнитное поле нельзя рассматривать как независимые: изменение одного поля влечет изменение другого.

$\oint (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$; $\text{div } \vec{B} = 0$. Линии $\vec{B}$ замкнуты (или уходит в бесконечность). В природе не существует магнитных зарядов.

$\oint (\vec{D}, d\vec{S}) = \int \rho dV$; $\text{div } \vec{D} = \rho$ - Поток вектора $\vec{D}$ ^{через замк. пов.} равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью. Источником эл. поля являются заряды.

Первое и четвертое уравнения говорят об источниках эл. поля: эл. заряды и переменное магнитное поле.

Вместе с уравнением для силы Лоренца $\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$ уравнения Максвелла составляют систему уравнений, достаточную для описания всех электромагнитных явлений.

Материальные уравнения. Характеризуют индивидуальные свойства среды.

Для изотропных сред, не содержащих ферромагнетиков и сегнетоэлектриков:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H} \\ \vec{j} &= \sigma (\vec{E} + \vec{E}^*) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{где } \epsilon, \mu, \sigma - \text{характеризуют свойства среды } (\sigma - \text{электропроводность}) \\ &\vec{E}^* - \text{напряженность поля сторонних см.} \end{aligned}$$

N=36 Волновые уравнения для электромагнитного поля. Скорость распространения электромагнитных волн

Рассмотрим уравнения Максвелла в вакууме, в отсутствие токов и зарядов, при $\mu = 1$ и $\epsilon = 1$:

Учтем $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Получим:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1) \quad \text{rot } \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2) \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad (3) \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad (4)$$

$$\text{Преобразуем (2): } \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{rot } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \left[\frac{-1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \frac{-1}{\mu_0} [\text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}] \right] \Rightarrow$$

$$\text{из (1): } -\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Преобразуем (1): } \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{rot } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \left[\frac{1}{\epsilon_0} \text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = \frac{1}{\epsilon_0} [\text{grad}(\text{div } \vec{H}) - \Delta \vec{H}] \right] \Rightarrow$$

$$\text{из (2): } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{rot } \vec{H}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\epsilon_0} \Delta \vec{H} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Полученные уравнения имеют вид волнового уравнения:
$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{cases}$$

Величина $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с равна фазовой скоростью распространения электромагнитной волны в вакууме и совпадает со значением скорости света в вакууме. Также $\frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{n}$, где $n = \sqrt{\mu \epsilon}$ — показатель преломления среды.

№ 371 Плоская электро-магнитная волна. Уравнения Максвелла для плоской волны. Поперечность электромагнитных волн. Связь векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоской волне.

Проекции $\text{rot} \vec{H}$ и $\text{rot} \vec{E}$ на оси:

$$(\text{rot} \vec{H})_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$(\text{rot} \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$(\text{rot} \vec{H})_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$(\text{rot} \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$(\text{rot} \vec{H})_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$(\text{rot} \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

См. также стр. 333

Спроецируем уравнение ~~$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$~~ и ~~$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$~~ Максвелла на оси:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

Пусть электромагнитная волна распространяется в однородной непроводящей среде: $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$; $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Направим ~~вдоль~~ ось x перпендикулярно волновой поверхности. Тогда $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не будут зависеть от x — т.е. z и y . Уравнения Максвелла примут след. вид:

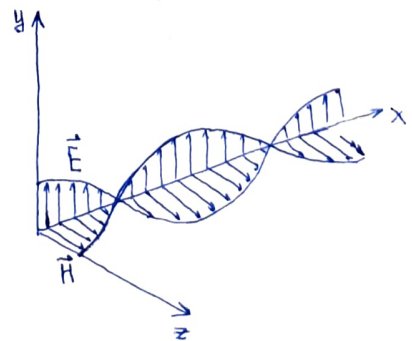
$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

уравнения Максвелла для плоской волны. плоская волна — поверхность постоянной фазы представляет собой плоскость.

Решение волнового уравнения:
$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx + \phi_0) \\ \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx + \phi_0) \end{cases}$$

Из уравнений видно, что E_x и H_x не зависят от x и t , то есть отличны от 0 E_x и H_x могут быть обеспечены только постоянными однородными полями. В дальнейшем будем считать такие поля отсутствующими, и полагать $E_x = H_x = 0$.

Поле волны не имеет составляющих по x , т.е. вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны к направлению распространения волны — э-м волны поперечные.



~~Вектор электромагнитной волны. Уравнение Максвелла для плоской волны. Пере-
ход от э-м волн к свету. $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоской волне.~~

Рассмотрим ~~уравнение~~ решение волнового уравнения в проекциях на ось: $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Подставим в $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -E_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\rightarrow k \cdot E_m \sin(\omega t - kx + \varphi) = \omega \mu_0 H_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

$$k H_m \sin(\omega t - kx + \varphi) = \epsilon_0 \omega E_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Отсюда следует, что:

$$k E_m = \omega \mu_0 H_m$$

$$k H_m = \epsilon_0 \omega E_m$$

перемножим:

$$\epsilon_0 E_m^2 = \mu_0 H_m^2$$

для среды: $E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0}$

№33 Общее решение волнового уравнение плоской электромагнитной волны
и.м. выше.

№39 Энергия и импульс э-м поле. Вектор Пойнтинга. Теорема Пойнтинга.

Объемная плотность энергии в э-м волне равна сумме объемных плотностей энергий
э. и м. полей: $w = w_{\text{э}} + w_{\text{м}}$

$$w_{\text{э}} = w_{\text{м}} \Rightarrow \frac{\mu_0 \mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu_0}{2} \left(E \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} \right)^2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \Rightarrow w = \epsilon \epsilon_0 E^2 = \mu \mu_0 H^2 = \epsilon \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t + kz + \alpha) = \frac{\epsilon \epsilon_0 E_0^2}{2} (1 - \cos(2(\omega t + kz + \alpha)))$$

Таким образом объемная плотность э-м волны тоже является волной, но с удвоенной час-
тотой.

Фазовая скорость волны энергии равна фазовой скорости ЭМВ: $v_{\text{э}} = \frac{\omega_{\text{э}}}{k_{\text{э}}} = \frac{2\omega}{2k} = v$

Средняя плотность энергии: $\langle w \rangle = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2$

Вектор Пойнтинга характеризует плотность потока энергии.

Теорема Пойнтинга: убыль энергии за единицу времени в данной объеме равна потоку
энергии сквозь поверхность, ограничивающую этот объем, плюс мощность P , которую сим-
поль производит над зарядами вещества внутри ~~этого~~ данного объема.

$$-\frac{dW}{dt} = \oint \vec{\Pi} d\vec{S} + P$$

где: $W = \iiint w dV$

$$P = \iiint (\vec{j}, \vec{E}) dV$$

Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ Умножив плотность энергии на скорость $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}$ получим плот-
ность потока энергии: $\Pi = wv$. Направление вект. произведения $[\vec{E} \times \vec{H}]$ совпадает с направле-
нием распр. волны, а его модуль равен $EH \Rightarrow \vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]$

Плотность импульса волны (импульс поля в ед. объема): $\vec{G} = \vec{\Pi}/c^2$

$$\epsilon_0 E = \mu_0 H \Rightarrow \Pi = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \Rightarrow \Pi = \frac{w}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow \vec{G} = \frac{w}{c}$$

$$w = \epsilon \epsilon_0 E^2 \Rightarrow \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c} \Rightarrow \vec{G} = \frac{w}{c}$$