1. Электрический заряд. Закон Кулона. Напряжённость электростатического поля. Силовые линии.

Электрический заряд q – это физическая величина, которая характеризует свойство тел или частиц вступать в электромагнитные взаимодействия и определяет значения сил и энергий при таких взаимодействиях.

Элементарный заряд $e = 1{,}6 * 10^{-19}\text{Кл}$

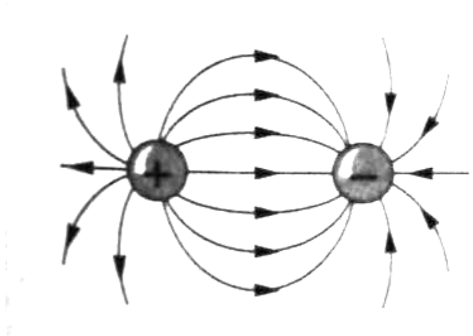
$q = Ne, \text{где } N - \text{некоторое целое число}$

Закон Кулона: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{|q_1q_2|}{r^2}, \text{где } \varepsilon_0 = 8{,}854 * 10^{-12}\frac{\text{Ф}}{\text{м}} - \text{эл. постоянная}$

Закон Кулона в векторном виде: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_1q_2\vec{r}}{r^3}$

Напряженность Э/с поля в данной точке – отношение силы, действующей на малый заряд к величине этого заряда: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, [\frac{\text{В}}{\text{м}}]$

Напряженность поля точечного заряда:



$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Qq_0\vec{r}}{q_0r^3} = \boldsymbol{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Q*\vec{r}}{r^3}}$

$\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{|Q|}{r^2}}$

Силовые линии – линии, мысленно проведенные в пространстве так, что в каждой точке напряженность направлена к ним по касательной

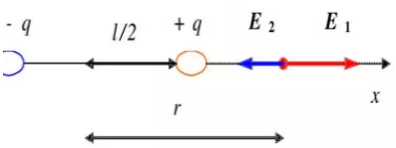
2. Принцип суперпозиции и его применение к расчёту поля системы неподвижных зарядов. Электрическое поле диполя, равномерно заряженной нити и равномерно заряженного кольца

Принцип суперпозиции: Напряженность поля, создаваемое в данной точке системой зарядов, равна геометрической сумме напряженности, создаваемой в данной точке каждым из зарядов по отдельности

$E = \sum_{i=1}^{n} E_i$

Диполь-система двух равных по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов

Электрическое поле на оси диполя: $E = E_2 + E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2} =$

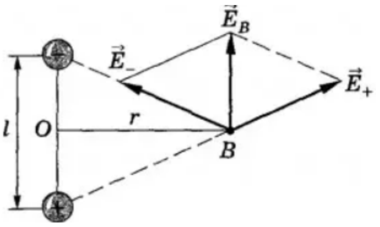


$$= \frac{q\left(r^2 + \frac{2rl}{2} - \frac{l^2}{4} - r^2 + \frac{2rl}{2} - \frac{l^2}{4}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{2qlr}{4\pi\varepsilon_0(r^4 - \frac{2r^2l^2}{4} + \frac{l^4}{16})}$$

Для r>>l (точечный диполь): $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{2p}{r^3}$, $\text{где } \vec{p} = q\vec{l} - \text{дипольный момент}$

Поле в экваториальной плоскости диполя: $\mathrm{E}_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q}{(r^2+\frac{l^2}{4})}$

$\vec{E} = \overrightarrow{E_-} + \overrightarrow{E_+}$



$\frac{E}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}}$

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{p}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$

Для r>>l: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{p}{r^3}$

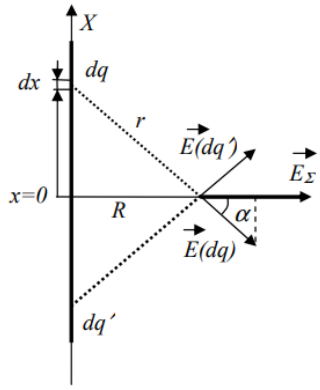
Точечный момент диполя в общем случае: $p_{\text{парал.}} = pcos\theta; p_{\text{перпенд}} = psin\theta$

$\vec{E} = \vec{E}_{\text{паралл}} + \vec{E}_{\text{перпенд}}$

$E = \sqrt{E^2_{\text{паралл}} + E^2_{\text{перпенд}}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

Эл.поле прямолин. бесконечно протяженная, равномерно заряженной нити:

$\tau = \frac{dq}{dl}; dq = \tau dx ; R = \frac{r}{cos\alpha}; x = rtg\alpha; dx = \frac{rd\alpha}{\cos^2\alpha}; \; dq = \frac{\tau rd\alpha}{\cos^2\alpha}$



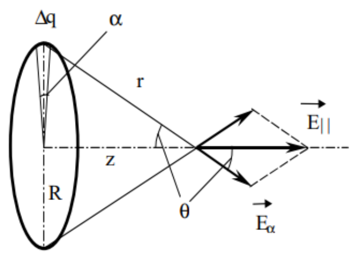
$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{dq}{R^2} = \frac{\tau d\alpha\cos^2\alpha}{4\pi\varepsilon_0\cos^2\alpha r^2}$

$dE_x = dEcos\alpha = \frac{\tau d\alpha\, cos\,\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau d\alpha\, cos\,\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r} * sin\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} = E - \text{эл.поле нити}$

Эл.поле равномерно заряженного кольца

$\alpha = \frac{2\pi}{N} - \text{угол, на к} - \text{й опирается малый участок кольца}$



Заряд одного участка $q = \frac{Q}{N}$. Примем этот участок за точечный заряд напряженность поля: $E_\alpha = \frac{kq}{r^2}$

$E = \sum E_\alpha cos\theta = \frac{Nkq}{r^2} * \frac{z}{r} = \frac{kQz}{r^3}$

3. Поток вектора напряжённости электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах в вакууме и её применение для расчёта электростатических полей. Поле равномерно заряженной плоскости, равномерно заряженного цилиндра, сферы, шара.

Поток вектора напряженности: $\Phi_E = \int_{(s)} EdS$

Поток пропорционален числу силовых линий, проходящих через поверхность.

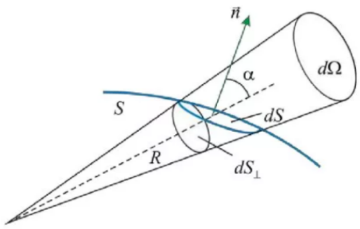
Теорема Гаусса для Э/с поля в вакууме: Поток вектора напряженности эл. поля через произвольно замкнутую поверхность, мысленно проведенную в пространстве, равен алгебраической сумме зарядов, находящихся в объеме, охваченном данной поверхностью, деленную на электрическую постоянную. $\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$

Док-во:

0) Рассмотрим малый телесный угол:

$dS_{\text{перпенд}} = dS * cos\alpha$

$d\Omega = \frac{dS_{\text{перпенд}}}{r^2} = \frac{rdScos\alpha}{r^3} = \frac{d\vec{S}*\vec{r}}{r^3}$ $(*)$



1) Одиночный заряд внутри Гауссовой поверхности:
   $d\Phi = EdS$
   $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q\vec{r}}{r^3}$
   $d\Phi = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} * dS = \{\text{Из ур} - \text{я } (*)\} = \frac{qd\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$
   $\Phi = \oint_{(S)} EdS = \int_0^{4\pi} \frac{qd\Omega}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ *-Что и требовалось доказать.*
2) Множество зарядов внутри Гауссовой поверхности:
   $\oint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \oint_{(S)} (\sum \vec{E}_i) d\vec{S} = \sum \oint_{(S)} E_i dS = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ – ЧТД.
3) Заряды, находящиеся вне ГП, не влияют на поток через нее:
   Внутри $d\Omega$: $d\Phi = E_1 dS_1 + E_2 dS_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(-d\Omega + d\Omega) = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ -ЧТД. Доказано.

Теорема Гаусса в диф.форме:

$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$ => по формуле Остроградского $\int_V \; div\vec{E}dV = \int \rho dV; \rho = \frac{dq}{dV}$

$divE = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ – теорема Гаусса в диф. Форме

Поле равномерно заряженной плоскости: $\oint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \oint_{(S_{\text{верх}})} \vec{E}d\vec{S} + \oint_{(S_{\text{низ}})} \vec{E}d\vec{S} + \oint_{(S_{\text{бок}})} \vec{E}d\vec{S} = E\int_{S_{\text{н}}} dS + E\int_{S_{\text{в}}} dS = 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}; E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Поле шара(точки): $\oint EdS = \frac{q}{\varepsilon_0};\; Ed\vec{S} = EdS; \oint EdS = E\oint dS = E * 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0};\; E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Поле цилиндра (нити): $\oint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \oint_{(S_{\text{верх}})} \vec{E}d\vec{S} + \oint_{(S_{\text{низ}})} \vec{E}d\vec{S} + \oint_{(S_{\text{бок}})} \vec{E}d\vec{S} = E\int_{S_{\text{бок}}} dS = 2E\pi rh = \frac{\tau h}{\varepsilon_0}$

$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}$

4. Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряжённости.

$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = q_0\vec{E}d\vec{r} = q_0 Edr = \frac{q_0 Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$A = W_p = \int_r^\infty \frac{q_0 Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0} * \left(0 + \frac{1}{r}\right) = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; *Wp -консервативное поле точечного заряда*

Теорема о циркуляции вектора напряженности:

$A_{\text{поля}} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p = \int_{(1)}^{(2)} q_0\vec{E}d\vec{l} = \{\text{если } (1) = (2)\} = 0 \Rightarrow \oint_{(l)} \boldsymbol{\vec{E}d\vec{l}} = \boldsymbol{0}$

5. Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Потенциал электростатического поля

$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = q_0\vec{E}d\vec{r} = q_0 Edr = \frac{q_0 Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$A = W_p = \int_r^\infty \frac{q_0 Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0} * \left(0 + \frac{1}{r}\right) = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; *Wp -консервативное поле точечного заряда*

$\phi = \frac{W_p}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$—потенциал поля точечного заряда

6. Связь напряжённости и потенциала. Уравнение Пуассона.

$A = -\Delta W_p; \ \ \delta A = -dW_p$

$q_0\vec{E}d\vec{l} = -q_0 d\phi => \ \vec{E}d\vec{l} = -d\phi$

$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz)$

$\vec{E} = Ex\vec{\iota} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{\iota} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right) = -grad\phi$

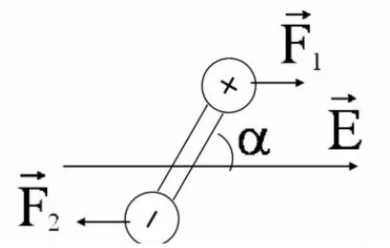
Уравнение Пуассона:

$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \ \ div(-grad\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} => \ -\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \ => \ \Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} -$ Уравнение Пуассона

7. Электрический диполь в электростатическом поле. Поляризация диэлектриков.

Момент сил, действующий на диполь:

$\vec{M} = \vec{l} \ x \ q\vec{E} = q\vec{l} \ x \ \vec{E} = \vec{p} \ x \ \vec{E}$



Явление разделения связанных зарядов и появления дополнительного поля называется ***поляризацией диэлектрика***

Для 1 молекулы $\vec{p} \sim \vec{E}$

$\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$, $\alpha -$ поляризуемость молекулы

Вектор поляризации:

$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p_i}}{\Delta V}$

Для неполярных диэлектриков:

$P = np = n\alpha\varepsilon_0 E = \varkappa\varepsilon_0 E$ - для любых диэлектриков определенная $\varkappa$ (каппа). Для полярных и неполярных, но только для линейной изотропии

8. Электростатическое поле в диэлектрике. Поляризованность.

Для 1 молекулы $\vec{p} \sim \vec{E}$

$\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$, $\alpha -$ поляризуемость молекулы

Вектор поляризации (Поляризованность):

$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p_i}}{\Delta V}$

Для неполярных диэлектриков:

$P = np = n\alpha\varepsilon_0 E = \varkappa\varepsilon_0 E$ - Для полярных и неполярных, но только для линейной изотропии

9. Свободные и связанные заряды. Связь вектора поляризованности с плотностью связанных зарядов. Теорема Гаусса для вектора поляризованности.

Заряды, не входящие в состав вещества, будем называть ***сторонними, (свободными)*** Эти заряды создают внешнее электрическое поле.

Связанные заряды – это заряды, находящиеся в пространстве взаимодействующих тел и испытывающие взаимную притяжение или отталкивание.

Теорема гаусса для диэлектрика в вакууме: Теорему Гаусса для диэлектрика можно использовать и для вакуума, если учитывать все заряды (свободные и связанные)

$$\oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i + \sum q_1'}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{(S)} \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \sum q_i + \sum q_1'$$

$$dN = ndV = ndSlcos\alpha$$

$$dq' = -q_0 dN = -q_0 nldScos\alpha = -pndScos\alpha = -PdScos\alpha = -\vec{P} d\vec{S}$$

$\sum q_i' = \oint_{(S)} \vec{P} d\vec{S}$ – теорема Гаусса для поляризации P

Связь вектора поляризованности с плотностью связанных зарядов: $div\vec{P} = -\rho'$

10. Вектор электрического смещения. Теорема Гаусса для вектора электрического смещения

$$\oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i + \sum q_1'}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{(S)} \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \sum q_i + \sum q_1' = \sum q_i - \oint_{(S)} \vec{P} d\vec{S}$$

$$\oint_{(S)} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \sum q_i$$

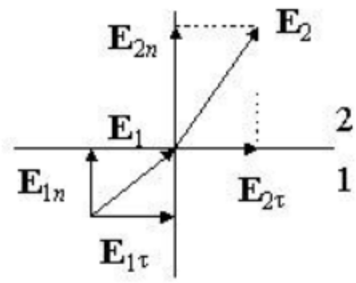
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ – вектор электрического смещения

$\oint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i$ – теорема Гаусса в инт. форме

$\int_{(V)} div\vec{D} dV = \int_{(V)} \rho dV \Rightarrow div\vec{D} = \rho$ – теорема Гаусса в диф форме

11. Поле на границе раздела диэлектриков.

1) Нормальные компоненты



$$\oint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = 0\ ;\ \ -D_{1n}S + D_{2n}S = 0;\ D_{1n} = D_{2n}$$

При переходе через границу нормальная составляющая не меняется

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E;\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

2)Касательные компоненты

$$\oint_{(l)} \vec{E} d\vec{l} = -E_{1\tau} l + E_{2\tau} l = 0$$

При переходе через границу раздела диэлектриков касательные составляющие напряженности эл. Поля не меняется

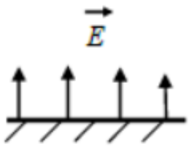
$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E\ ;\ \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}$$

12. Поле вблизи поверхности проводника.

$\oint \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i = 0$

$DS = \sigma S\ ;\ D = \sigma$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$



13. Электроёмкость проводников и конденсаторов. Ёмкость изолированного проводника, плоского, цилиндрического и сферического конденсатора.

Конденсатор- устройство, состоящее из проводников, в которых при помещении на них эл. зарядов возникает эл. поле, сосредоточенное в пространстве между проводниками

Ёмкость: $C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{q}{U}$

Емкость уединенного проводника: $C = \frac{q}{\phi}$

Емкость уединенной заряженной сферы: $C = \frac{q}{\phi} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$

Плоский конденсатор:

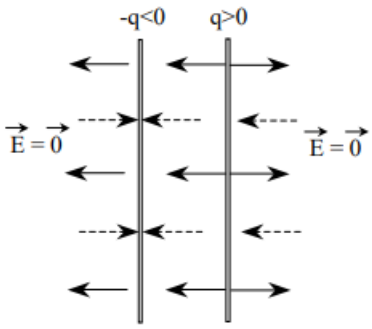
Поле 1-й обкладки: $\oint \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{i\text{своб}}$

$2DS_0 = \sigma S_0;\ D_1 = \frac{\sigma}{2}$

$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\ ;\ \vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}\ ;\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$

$|\Delta\phi| = \frac{|\Delta W_p|}{q_0} = \frac{A}{q_0} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} * d = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$

$C = \frac{q}{|\Delta\phi|} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$



Цилиндрический конденсатор:

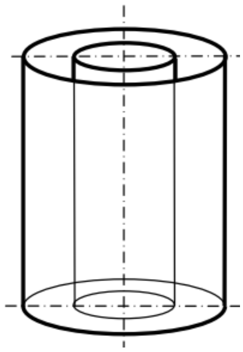
$\oint \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{i\text{своб}}$

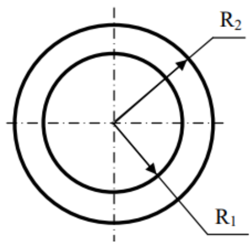
$D * 2\pi r l = q$

$D = \frac{q}{l 2\pi r};\ \ E = \frac{q}{2\pi l \varepsilon\varepsilon_0 r}$

$|\Delta\phi| = U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi l \varepsilon\varepsilon_0 r} dr = \frac{q}{2\pi l \varepsilon\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1}$

$C = \frac{q}{|\Delta\phi|} = \frac{2\pi l \varepsilon\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$





Сферический конденсатор:

$\oint \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{i\text{своб}}$

$D * 4\pi r^2 = q\ ;\ D = \frac{q}{4\pi r^2}\ ;\ D = \varepsilon\varepsilon_0 E$

$E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon\varepsilon_0}$

$U = |\Delta\phi| = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon\varepsilon_0} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)\ ;\ C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$

14. Энергия системы неподвижных зарядов.

$W_{вз} = \frac{1}{2}\sum q_i \phi_i$, где ϕ_i — потенциал всех кроме i — го в точке i — го

15. Энергия заряженного проводника, конденсатора.

Энергия уединенного заряженного проводника определяется как энергия системы зарядов $W_{вз} = \frac{1}{2}\sum q_i \phi_i$. На проводнике φ = const , поэтому энергия уединенного проводника $W_{вз} = \frac{1}{2}\sum q_i \phi_i = \frac{1}{2}\phi q$

Для системы заряженных проводников $W = \frac{1}{2}\sum q_k \phi_k$

Энергия заряженного конденсатора: $dA = -dq|\Delta\phi| = -\frac{qdq}{C};\ \ q = CU;\ \ U = \frac{q}{C}$

$A = \int_q^0 -\frac{qdq}{C} = \frac{1}{C}\int_0^q qdq = \frac{q^2}{2C};\ \ W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{C^2U^2}{2C} = \frac{C(\Delta\phi)^2}{2}$

16) Плотность энергии электростатического поля.

$$\mathcal{W} = \frac{dw}{dv} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}; \mathcal{W} = \frac{w}{v} = \frac{cU^2}{2sd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 sd^2E^2}{2dsd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}$$

17) Электрический ток. Носители тока в средах, сила и плотность тока.

Электрический ток – упорядоченное движение электрических зарядов.

Носителями тока могут быть электроны, а также положительные и отрицательные ионы, то есть атомы или молекулы, потерявшие и присоединившие к себе один или несколько электронов.

Плотность тока:

$I = \frac{dq}{dt}$, $\text{А} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}}; j(\text{плотность тока}) = \frac{dI}{ds_{\text{перпендикулярное}}}, \frac{\text{А}}{\text{м}^2};\ I = \int_{(s)} \bar{j} d\bar{s}$

18) Электрический ток. Уравнение непрерывности.

Электрический ток – упорядоченное движение электрических зарядов.

Уравнение непрерывности в интегральной форме: $\oint_{(s)} \bar{j} d\bar{s} = -\frac{dq}{dt}$

Уравнение непрерывности в дифференциальной форме: $div\bar{j} = -\frac{\partial\rho}{dt}$

19) Электрическое поле в проводнике с током, сторонние силы.

Сторонние силы – это силы, не Кулоновской (не электростатической) природы.

20) Закон Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах.

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме: $Q = I^2R\Delta t$

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме: $dq_{\text{уд.}} = j^2\rho dt$, где $q_{\text{уд.}} = \frac{\delta Q}{dv}$

Закон Ома в интегральной форме: $I = \frac{U}{R}$

Электрическое сопротивление: $R = \rho\frac{l}{s}$

$\bar{j} = \frac{\bar{E}}{\rho}$, где ρ — удельное сопротивление; $\sigma = \frac{1}{\rho}$ — удельная электричсекая проводимость $\rightarrow$
$\bar{j} = \sigma\bar{E}$ *(Закон Ома в дифференциальной форме)*

$$\bar{E}^* = \frac{\bar{F}_{\text{стор.}}}{q_0} \to \bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}^*)$$

$$\varepsilon \triangleq \frac{A_{\text{стор.}}}{q_0}$$

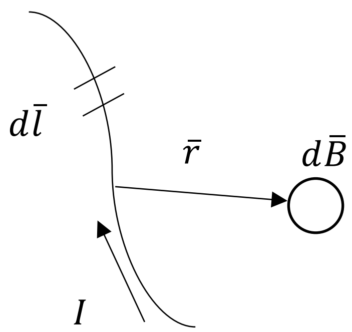
Закон Ома для полной цепи: $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$

21) Магнитное поле в вакууме. Вектор индукции магнитного поля.

Магнитное поле – поле, действующее на движущиеся электрические заряды и на тела, обладающие магнитным моментом, независимо от состояния их движения.

Вектор индукции магнитного поля – физическая величина, численно равная силе, с которой действует магнитное поле на единичный проводник с единичным током, помещённый в это поле перпендикулярно магнитным силовым линиям.

22) Закон Био-Савара-Лапласа.



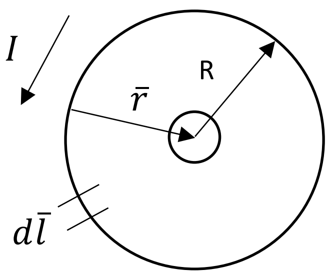
$$d\bar{B} = \frac{(\mu)\mu_0 I d\bar{l} \times \bar{r}}{4\pi r^3} \text{ или } dB = \frac{(\mu)\mu_0 I dl sin\alpha}{4\pi r^2},$$

$$\text{где } \mu - \text{магнитная прониуаемость вещества, а } \mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{М}} (\text{магнитная постоянная})$$

23) Принцип суперпозиции магнитных полей. Поле прямого и кругового токов.

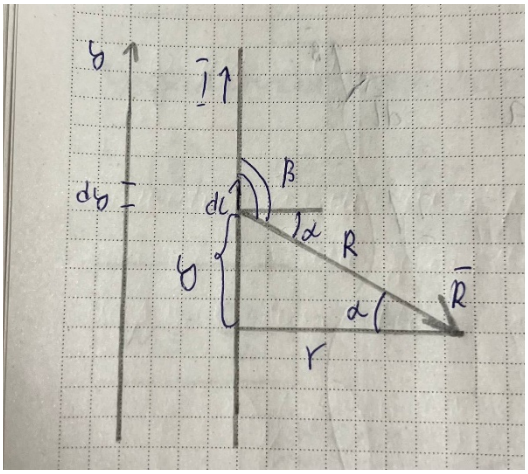
$\bar{B} = \sum_i \bar{B}_i$ - принцип суперпозиции

- Поле в центре круглого витка с током:



$$B = \frac{\mu_0 I 2\pi R^2}{4\pi R^3} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

- Поле прямолинейного проводника с током



$R = \frac{r}{cos\alpha}$; $\left|d\bar{l} \times \bar{R}\right| = dlRsin\beta$; $\beta = 90° + \alpha$;

$sin\beta = sin\alpha$; $dl = dy = \frac{rd\alpha}{cos^2\alpha}$; $y = rtg\alpha$

$$dB = \frac{\mu_0 I * r * d\alpha * cos\alpha * cos^2\alpha}{cos^2\alpha * 4\pi r^2}$$

$$B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I cos\alpha d\alpha}{4\pi r} = \frac{2\mu_0 I}{4\pi r} = \frac{(\mu)\mu_0 I}{2\pi r}$$

24) Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля.

Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной форме:

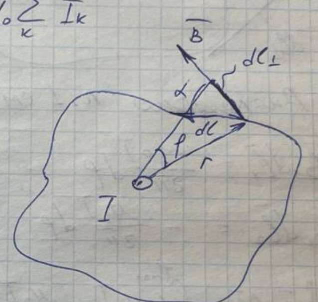
$\oint_{(S)} \bar{B} d\bar{S} = 0$. Этот закон выражает тот факт, что линии магнитной индукции замкнуты: число линий входящих в объём, ограниченный поверхностью, равен числу выходящих.

Потоком вектора магнитной индукции через ориентированную поверхность S называется величина $\Phi_{\bar{\mathrm{B}}} = \int_{(S)} (\bar{B}, d\bar{S})$. Измеряется в Вб(веберы)

25) Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.

1) 1 прямая пров. с током (внутри контура)

$$\oint_{(l)} \bar B d\bar l = \mu_0 \sum_k I_k$$



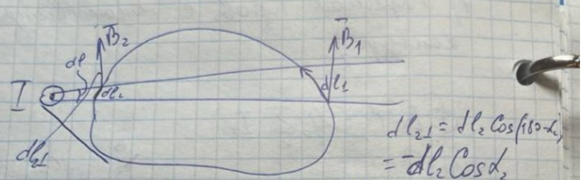
$$dl_\perp = r\,d\varphi$$

$$\bar B d\bar l = Br\,d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\,d\varphi \quad (*)$$

$$\oint_{(l)} \bar B d\bar l = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot 2\pi$$

$$\oint_{(l)} \bar B d\bar l = \mu_0 I$$

2) Прямолин. пров. с током снаружи.



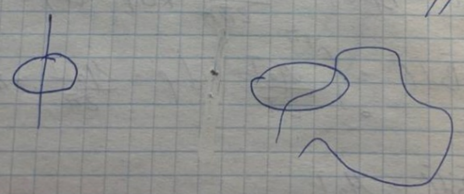
$$dl_{2\perp} = dl_2 \cos(180-\alpha_2) = -dl_2 \cos\alpha_2$$

Аналогично п. 1 см (*)

$$\bar B_1 d\bar l_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$\bar B_2 d\bar l_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$\oint \bar B d\bar l = \int_0^{\varphi_{max}} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\right) d\varphi = 0$$



3) Криволин. пров. с током

берем бескон. мал. контур.

Из инт. ф-лы → диф. ф.

$$\mathrm{rot}\,\bar B = \mu_0 \bar j$$

Контур любой.

$$\int \bar j\, d\bar S = \sum_k I_k$$

$$\oint_{(l)} \bar B d\bar l = \mu_0 \sum_k I_k$$

26) Расчёт магнитного поля тороида и соленоида.

- Тороида

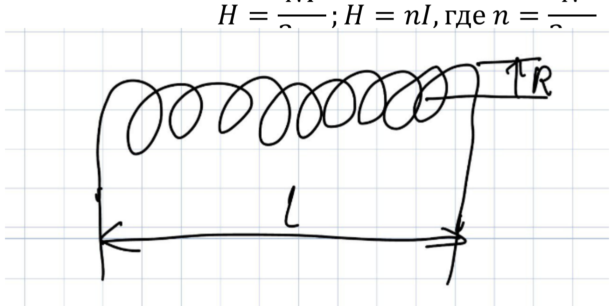
$$\oint_{(l)} \bar{H} d\bar{l} = \sum I_k$$

$$H * 2\pi r = NI; H = \frac{NI}{2\pi r}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi r}$$

- Для тонкого торида

$H = \frac{NI}{2\ldots}; H = nI$, где $n = \frac{N}{2\ldots}$



- Соленоид

$H = nI$, где $n = \frac{N - \text{число витков}}{l - \text{длина соленоида}} \to B = \mu\mu_0 nI$

27) Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях.

Сила Лоренца – это сила, действующая на заряженную частицу, которая движется в магнитном поле.

$$\bar{F}_{\text{м\_л}} = q(\bar{v} \times \bar{B})$$

Сила, действующая на точечный заряд, имеет две составляющие: магнитную и электрическую. Электрическая составляющая не зависит от движения заряда, а направление и модуль магнитной составляющая зависит от скорости частицы, причём она всегда перпендикулярна скорости частиц.

28) Ускорение заряженных частиц.

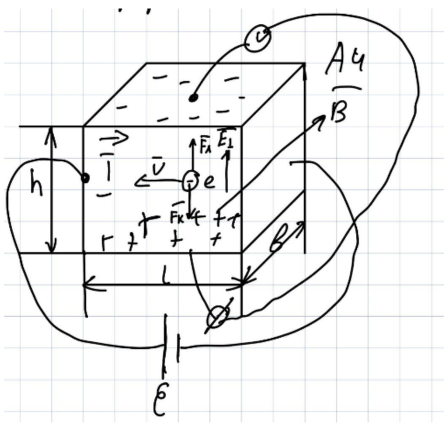
Ускорители – установки, предназначенные для ускорения заряженных частиц до высоких энергий. В основе работы ускорителя заложено взаимодействие заряженных частиц с электрическим и магнитным полями. Электрическое поле способно напрямую совершать работу над частицей, то есть увеличивать её энергию. Магнитное же поле, создавая силу Лоренца, лишь отклоняет частицу, не изменяя её энергии, и задаёт орбиту, по которой движутся частицы. Ускорители можно разделит на линейные и циклические.

В линейных ускорителях частицы движутся практически по прямой траектории, разгоня- ясь при движении специальными электромагнитными устройствами.

В циклических ускорителях частицы движутся по-практически замкнутой траектории под действием магнитной силы Лоренца и разгоняются электрическим полем на определённых участках.

Виды: циклотрон, фазотрон, синхотрон, коллайдер.

29) Эффект Холла.



$$F_{лм} = F_{к(пер.)}; evB = eE_{пер.}(1), \text{где } E_{пер.} = \frac{U_H}{h}$$

$$\bar{j} = q_0 n\bar{V}; I = jS = envbh \rightarrow v = \frac{I}{enbh}(2)$$

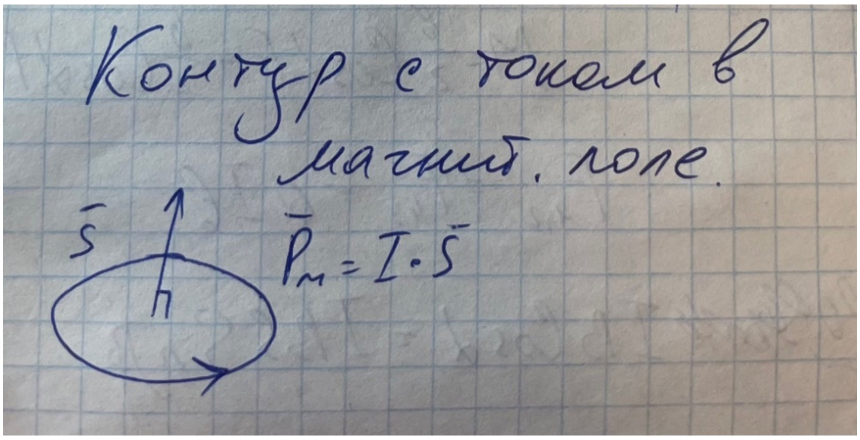
$$\text{Подставим (2) в (1)}: \frac{eIB}{enbh} = \frac{eU_H}{h} \rightarrow U_H = \frac{1}{en}\frac{IB}{b}; U_H = R_H\frac{IB}{b}, \text{где } R_H = \frac{1}{q_0 n}$$

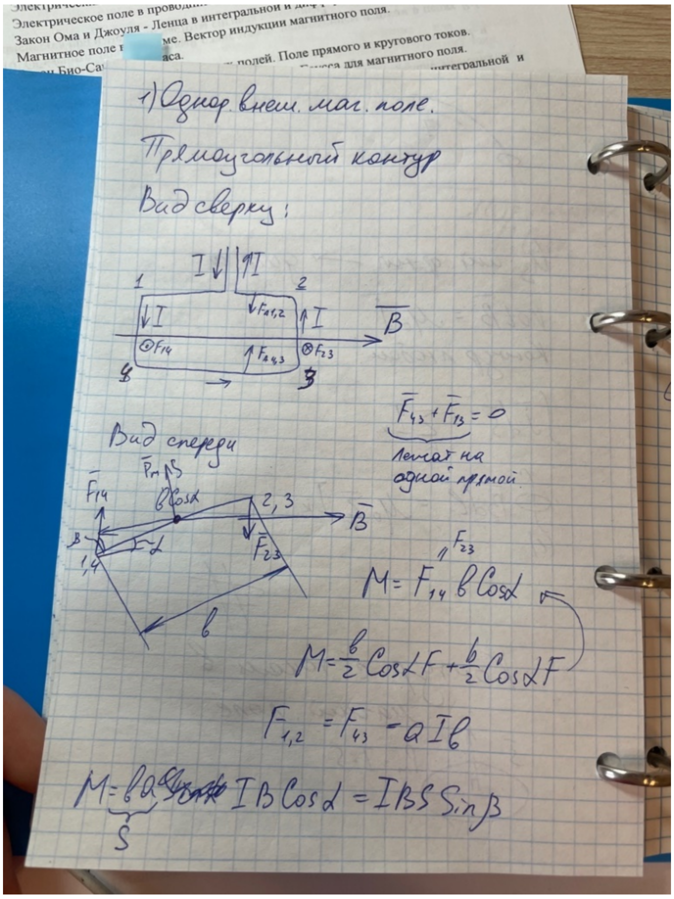
30) Проводники с током в магнитном поле. Закон Ампера.

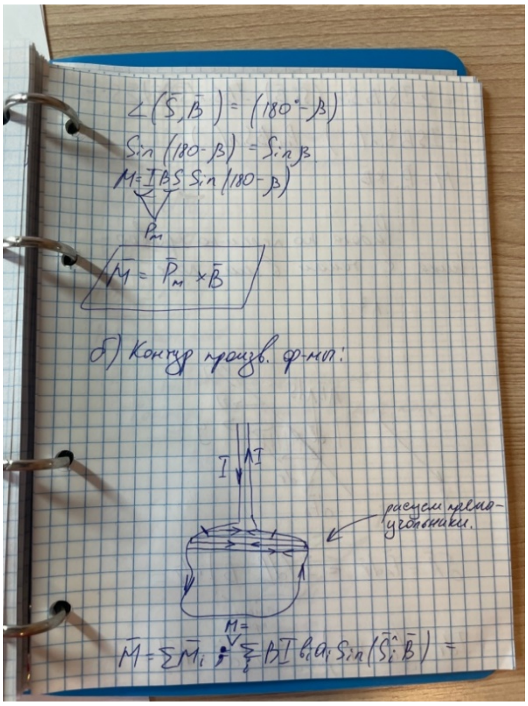
На прямолинейный проводник с током в однородном магнитном поле действует сила, зависящая от силы тока, индукции магнитного поля, длины проводника и положения проводника относительно силовых линий магнитного поля. Вектор этой силы направлен перпендикулярно проводнику. Эта сила называется силой Ампера.

Закон Ампера: $dF = Id\bar{l} \times \bar{B}$

31) Контур с током в магнитном поле. Сила, действующая на контур с током в магнитном поле.







32) Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$\delta A = \overline{F_A} d\bar r = I(d\bar l \times \bar B) * d\bar r = I d\bar r * (d\bar l \times \bar B) = I\bar B(d\bar r \times d\bar l) = I\bar B d\bar S$

ds- участок площади, заметаемый при перемещении проводника.

$\bar B d\bar S = d\Phi_B$; $\delta A = I d\Phi$; $A = I\Delta\Phi$ *– работа маг. Поля*

33) **Магнитное поле в веществе. Молекулярные точки. Намагниченность вещества. Вектор намагниченности.**

Магнитный момент контура с током:

$\overline{P_m} = I\bar{S}$

Магнетики – вещества с магнитными свойствами.

Намагниченность:

$\bar{\mathcal{J}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \overline{P_{mi}}}{\Delta V}$ – вектор намагниченности.

Токи делятся на:

- Макроскопические(проводимости)(I,j,i)
- Молекулярные(Намагниченности)($I'j'i'$)

34) Теорема о циркуляции вектора намагниченности.

Пусть $dI' = indV = ni\pi r^2 dlCosa = nP_m dlCosa = \mathcal{J}dlCosa = \bar{\mathcal{J}}d\bar{l}$

$\sum_k I'_k = \oint_{(l)} \bar{\mathcal{J}}d\bar{l}$ – Теорема о циркуляции $\bar{\mathcal{J}}$ в интегральной форме

$j' = rot\ \mathcal{J}\ '$ - Теорема о циркуляции $\bar{\mathcal{J}}$ в диф. Форме

35) Вектор напряженности магнитного поля и его связь с векторами индукции и намагниченности.

Пусть $dI' = indV = ni\pi r^2 dlCosa = nP_m dlCosa = \mathcal{J}dlCosa = \bar{\mathcal{J}}d\bar{l}$

$\sum_k I'_k = \oint_{(l)} \bar{\mathcal{J}}d\bar{l}$ – Теорема о циркуляции $\bar{\mathcal{J}}$ в интегральной форме

$j' = rot\ \mathcal{J}\ '$ - Теорема о циркуляции $\bar{\mathcal{J}}$ в диф. Форме

$$\oint_{(l)} \frac{\bar{B}}{\mu_0} d\bar{l} = \sum_k I_k + \oint_{(l)} \bar{\mathcal{J}}d\bar{l}$$

$$\oint_{(l)} (\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{\mathcal{J}})d\bar{l} = \sum_k I_k$$

$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{\mathcal{J}}$ – в любом магнетике

$\oint_{(l)} \bar{H}\ d\bar{l} = \sum_k I_k$ – теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в веществе(в инт. Форме)

Из этого следует Формула Стокса:

$$\int_{(s)} rot\ \bar{H}\, d\bar{S} = \int_{(s)} \bar{j}\, d\bar{S}$$

$rot\ \bar{H} = \bar{j}$ - Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля в диф.форме.

Связь между $\bar{\mathcal{J}}, \bar{B}, \bar{H}, \chi, \mu$:

В линейных изотропных магнетиках:

χ – относительная магнитная восприимчивость.

$\bar{\mathcal{J}} = \chi\bar{H}$

$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{\mathcal{J}}$

$\frac{\bar{B}}{\mu_0} = \bar{H} + \chi\bar{H}$

$\bar{B} = \mu_0(1+\chi)\bar{H}$

$\mu = 1 + \chi$

$\bar{B} = \mu\mu_0\bar{H}$

36) Магнитная проницаемость вещества и магнитная восприимчивость.

χ – относительная магнитная восприимчивость.

Полная магнитная индукция в магнетике равна:

$\boldsymbol{\bar{B}} = \mu_0(1+\chi)\bar{H} = \boldsymbol{\mu_0\bar{H}} + \boldsymbol{\mu_0\bar{\mathcal{J}}}$

Для изотропных магнетиков:

$\bar{\mathcal{J}} = \chi\bar{H}$

Магнитная проницаемость:

Магнитная проницаемость - это физическая величина, зависящая от рода вещества и его состояния, характеризующая магнитные свойства вещества (μ)

$\bar{B} = \mu\mu_0\bar{H}$

37) **Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в интегральной и диф.формах.**

Пусть $dI' = indV = ni\pi r^2 dlCosa = nP_m dlCosa = \mathcal{J}dlCosa = \bar{\mathcal{J}}d\bar{l}$

$\sum_k I'_k = \oint_{(l)} \bar{\mathcal{J}}d\bar{l}$ – Теорема о циркуляции $\bar{\mathcal{J}}$ в интегральной форме

$j' = rot\,\mathcal{J}\,'$ - Теорема о циркуляции $\bar{\mathcal{J}}$ в диф. Форме

$$\oint_{(l)} \frac{\bar{B}}{\mu_0} d\bar{l} = \sum_k I_k + \oint_{(l)} \bar{\mathcal{J}}d\bar{l}$$

$$\oint_{(l)} \left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{\mathcal{J}}\right)d\bar{l} = \sum_k I_k$$

$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{\mathcal{J}}$ – в любом магнетике

$\oint_{(l)} \bar{H}\ d\bar{l} = \sum_k I_k$ – теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в веществе(в инт. Форме)

Из этого следует Формула Стокса:

$$\int_{(s)} rot\,\bar{H}\,d\bar{S} = \int_{(s)} \bar{J}\,d\bar{S}$$

$rot\,\bar{H} = \bar{J}$ - Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля в диф.форме.

38) Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики

Диамагнетики – это магнетики, у которых магнитная восприимчивость принимает отрицательные значения:
$\chi < 0$; и выполняется: $0 < \mu = 1 + \chi < 1$. У диамагнетиков вектор намагниченности направлен против вектора индукции магнитного поля.

Парамагнетики - это магнетики, у которых магнитная восприимчивость принимает положительные значения. Вектор намагниченности сонаправлен с вектором индукции магнитного поля.

$\chi > 0; \mu = 1$

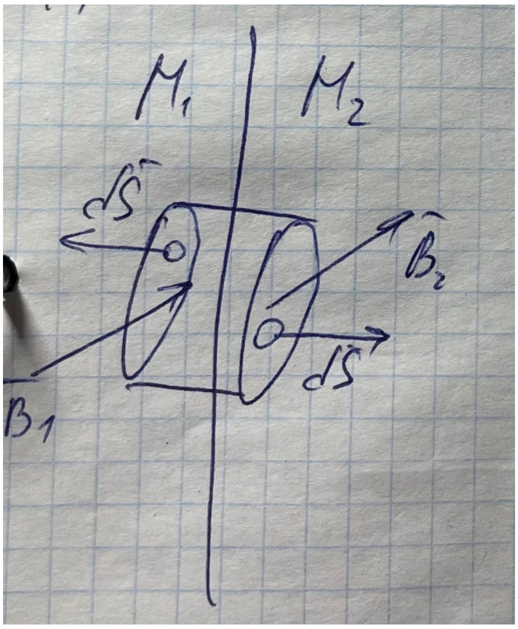
Ферромагнетики – вещества, магнитная проницаемость которых достигает больших значений. (Fe,Ni,Co)
$\chi \gg; \mu \gg$

39) Магнитное поле на границе раздела магнетиков.

$$\oint \bar{B}\,d\bar{l} = \mu_0 \sum_k I_k$$

$$\oint \bar{B}\,d\bar{S} = 0$$

$$\oint_{(l)} \bar{H}\ d\bar{l} = \sum_k I_k$$



1)Нормально(n):

$$\oint \bar{B}\,d\bar{S} = -B_{1n}S + B_{2n}S$$

$\bar{B}_2 d\bar{S} = B_2 dSCosa = B_{2n} dS$

$B_{1n} = B_{2n}$

$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$

2) Касательно (тау):

$\mu_0\mu_1 H_{1n} = \mu_0\mu_2 H_{2n}$

$$\oint_{(l)} \bar{H}\ d\bar{l} = 0$$

$H_{1\tau} l = H_{2\tau} l\ ;\quad H_{1\tau} = H_{2\tau}\ ;\ \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}$

40) Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Правило Ленца.

Выведем закон электромагнитной индукции Фарадея из закона сохранения энергии для случая стационарного магнитного поля.

$\delta A = Id\Phi$

$\varepsilon = \frac{\delta A_{\text{стор.}}}{dq} = \frac{\delta A_{\text{стор.}}}{Idt}$

$\varepsilon Idt = Id\Phi + I^2Rdt$

$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} + IR$

$\varepsilon_{\Sigma} \quad = IR$

$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ *– Закон э/м индукции Фарадея(для постоянного поля)*

Получим закон Фарадея в диф.форме:

$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

$\oint\limits_{(l)} \bar{E}\, d\bar{l} = -\frac{d}{dt}\int \bar{B} d\bar{S}$

Ф – преобразуем по формуле Стокса:

$\int rot\ \bar{E} d\bar{S}$ = -$\int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S}$

$\int rot\ \bar{E}$=$-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ – Закон Фарадея в Д.Ф.

1) Если $\bar{B} = cost$, то контур = var(Сила лоренца – причина возникновения ЭДС индукции)
2) Если $\bar{B} = var$(переменный), то контур постоянен. ЭДС индукции возникает из-за вихревого эл.поля, которое порождается, меняющимся со временем магнитным полем.

Правило Ленца: *ЭДС индукции направлено так, чтобы вызываемый ею ток, создавал магнитное поле, препятствующее изменению магнитного потока через контур.*

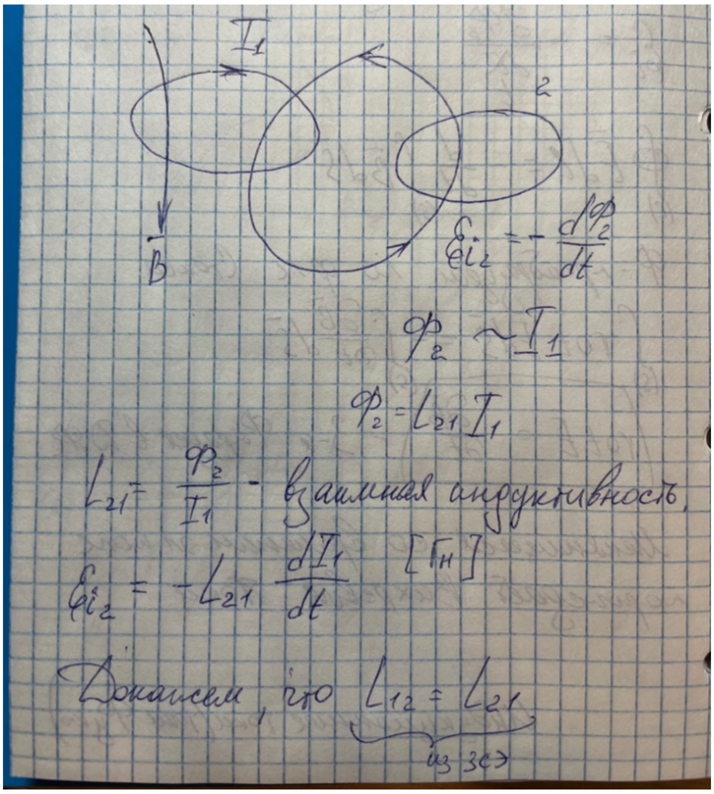
41) Самоиндукция. Взаимная индукция.

$\Phi = LI$

$L = \frac{\Phi}{I}$ – индуктивность

$\varepsilon_{si} = -L\frac{dI}{dt}$ – Закон Фарадея для самоиндукции

Взаимная индукция:



42) Вихревые токи.

следует, что силовые линии поля сторонних сил и линии тока совпадают. Но т.к. поле вихревое

$$rot\left(\vec{E}_{CT}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

то его силовые линии – замкнутые, поэтому и линии тока

$$rot\left(\vec{j}\right) = rot\left(\gamma \vec{E}_{CT}\right) = -\gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

будут замкнутыми. Т.е. векторное поле плотности тока, возникающее в проводнике при изменении внешнего магнитного поля, тоже вихревое. Такие токи получили название *вихревые токи* или *токи Фуко*. Знак минус в этом выражении указывает на правило Ленца – вектор плотности вихревого тока в окрестности данной точки направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение индукции внешнего магнитного поля.

Токи Фуко возникают, например, при движении проводников в неоднородном магнитном поле. При этом проводник начинает разогреваться (закон Джоуля-Ленца), на участки проводника с вихревыми токами действуют силы Ампера, тормозящие проводник. (Явление разогрева используют в индукционных печах, явление торможения – в демпферных устройствах, служащих для успокоения колебаний).

43) Плотность энергии магнитного поля.

$$W_{м} = \frac{W_L}{V} = \frac{LI^2}{2V} = \frac{\mu_0 \mu n^2 V I^2}{2V}$$

$$B = \mu_0 \mu n I \Rightarrow I = \frac{B}{\mu_0 \mu n}$$

$$W_м = \frac{\mu_0 \mu n^2 B^2}{(\mu_0 \mu)^2 n^2 2} = \frac{B}{2\mu_0 \mu} = \frac{B}{\mu_0 \mu} * B * \frac{1}{2} = \frac{HB}{2}$$

44) Энергия и силы в магнитном поле.

Энергия магнитного поля, создаваемого парой таких контуров с токами, определяется формулой $W = \iiint\limits_V w dV = \iiint\limits_V \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2} dV$. Т.к. по принципу суперпозиции $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ и $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, то

$$W = \iiint\limits_V \frac{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2, \vec{H}_1 + \vec{H}_2)}{2} dV = \iiint\limits_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_1)}{2} dV + \iiint\limits_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_2)}{2} dV + \iiint\limits_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} dV + \iiint\limits_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_1)}{2} dV$$

Энергия магнитного поля, создаваемая каждым контуром в отдельности

$$W_1 = \iiint\limits_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_1)}{2} dV = \frac{L_1 I_1^2}{2}, \; W_2 = \iiint\limits_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_2)}{2} dV = \frac{L_2 I_2^2}{2}.$$

Если в среде нет ферромагнетиков, то $\frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} = \frac{\mu_0 \mu (\vec{H}_1, \vec{H}_2)}{2} = \frac{(\vec{H}_1, \vec{B}_2)}{2}$, поэтому

$$\iiint\limits_V \frac{(\vec{B}_1, \vec{H}_2)}{2} dV = \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} = \frac{L_{21} I_1 I_2}{2} = \iiint\limits_V \frac{(\vec{B}_2, \vec{H}_1)}{2} dV.$$

Тогда энергия взаимодействия двух контуров может быть записана в виде $W_{12} = L_{12} I_1 I_2$.

Силы в магнитном поле.

Найдём силу взаимодействия F между витками (почти идеального) соленоида. Т.к. в каждом из витков токи текут в одинаковых направлениях, то витки взаимно притягиваются, поэтому силы взаимодействия стремятся сжать соленоид. Векторы этих сил направлены параллельно силовым линиям магнитного поля в соленоиде, поэтому их принято называть *натяже-*

ниями в магнитном поле. Предположим, что при постоянной силе тока длина соленоида очень медленно *увеличится* на малую величину dl. Тогда работа внешних сил равна изменению энергии соленоида $\delta A_{ВНЕШ} = dW_M$. Но

$$\delta A_{ВНЕШ} = \sum_{i=1}^{N} F_{ВНЕШ} \delta x_i ,$$

где δx_i - перемещение каждого из витков. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N} \delta x_i = dl$. Очевидно, что внешняя сила, растягивающая соленоид, равна по величине силе взаимодействия между витками $F_{ВНЕШ} = F$, поэтому

$$\delta A_{ВНЕШ} = \sum_{i=1}^{N} F_{ВНЕШ} \delta x_i = F \sum_{i=1}^{N} \delta x_i$$

Изменение длины соленоида приведёт к изменению объёма магнитного поля внутри, следовательно, к изменению энергии $dW = W_K - W_H = w \cdot dV = w \cdot S \cdot dl$. Здесь w – объёмная плотность энергии магнитного поля, S – площадь поперечного сечения соленоида. Отсюда следует, что сила взаимодействия между витками (натяжения в магнитном поле) $F = wS$, а величина напряжения натяжения (вдоль силовых линий) равна $p_{\parallel} = \frac{F}{S} = w$ - объёмной плотности энергии магнитного поля.

Теперь найдём силу $F_{\perp}$ в направлении перпендикулярном силовым линиям магнитного поля внутри соленоида – эти силы «распирают» витки в радиальном направлении. Такие силы принято называть *давлениями* в магнитном поле. Предположим, что при постоянной силе тока радиус соленоида увеличился на малую величину dR. Объём соленоида увеличится – поэтому увеличится и энергия магнитного поля $dW = W_K - W_H = w \cdot dV = w \cdot S_{ВНУТР} \cdot dR$. Здесь w – объёмная плотность энергии магнитного поля, $S_{ВНУТР}$ – площадь внутренней поверхности соленоида. Так как работа силы $F_{\perp}$ равна $\delta A = F_{\perp} dR$, то $F_{\perp} = w \cdot S_{ВНУТР}$, соответственно, напряжение давления равно $p_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{S_{ВНУТР}} = w$ - объёмной плотности энергии магнитного поля.

Определение. Силы, действующие на тела со стороны магнитного (или электрического) поля, называют *пондемоторными*.

45) Магнитное давление.

$$N = n\Delta l$$

$$F_A = Ih\frac{B}{2}N = Ih\frac{B}{2}n\Delta l = I\frac{B}{2}nS$$

$$B = \mu_0\mu nI => I = \frac{B}{\mu_0\mu n}$$

$$F_A = \frac{B^2}{\mu_0\mu n2} => p = \frac{F_A}{s} = \frac{B^2}{\mu_0\mu 2} = \frac{HB}{2}$$

$$p = W_м$$

$$\Delta p = W_{м2} - W_{м1}$$