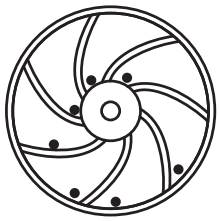
TERRA MECHANICA





Всеволод Иванович Феодосьев

В.И. ФЕОДОСЬЕВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебник для вузов

18-е издание

BAUMANPRESS
Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2021

УДК 539.6
ББК 30.121
Ф42

Издание доступно в электронном виде по адресу
https://bmstu.press/catalog/item/7206/

Феодосьев, В. И.
Ф42 Сопротивление материалов : учебник для вузов / В. И. Феодосьев. — 18-е изд. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. — 542, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5671-0

Книга соответствует традиционной программе технических вузов. Излагаются следующие разделы курса сопротивления материалов: растяжение, кручение, изгиб, статически неопределимые системы, теория напряженного состояния, теория прочности, толстостенные трубы и тонкостенные оболочки, прочность при переменных напряжениях, расчеты при пластических деформациях, устойчивость и методы испытаний. По сравнению с предыдущими изданиями она сокращена за счет разделов, которые на лекциях обычно не читаются, и дополнена некоторыми элементарными сведениями по композитным материалам.

Для студентов технических вузов. Может быть полезна аспирантам и преподавателям, а также специалистам, деятельность которых связана с вопросами прочности, жесткости, устойчивости и надежности элементов конструкций, машин и приборов.

УДК 539.6
ББК 30.121

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021
© Оформление. Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021

ISBN 978-5-7038-5671-0

ОТ ИЗДАТЕЛЯ

В 2016 году исполнилось 100 лет со дня рождения Всеволода Ивановича Феодосьева — известного ученого и замечательного педагога, много лет преподававшего в Московском высшем техническом училище имени Н.Э. Баумана. К этой памятной дате Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана подготовило к выпуску новую версию его широко известного учебника по одному из основных предметов инженерной подготовки «Сопротивление материалов», первое издание которого вышло в 1960 году. По этой книге из поколения в поколение учились и продолжают учиться будущие инженеры.

При жизни автора учебник переиздавался девять раз. Последнее прижизненное издание вышло в 1986 году. После этого учебник выдержал еще восемь переизданий, подготовленных коллегами и учениками Всеволода Ивановича. При этом некоторые главы учебника были методически переработаны, а в параграфы, посвященные стержневым элементам конструкций, добавлены уравнения, позволяющие получать численные решения более сложных задач.

Принимая решение о выпуске 16-го переиздания знаменитого учебника, Издатель в знак уважения к памяти замечательного ученого и педагога счел необходимым максимально сохранить авторский стиль книги: сохранены объем и структура последнего прижизненного издания — возвращены главы и параграфы, не вошедшие в 11–15-е издания книги. Исключены вставки, не соответствующие основному тексту ни по стилю изложения материала, ни по системе обозначений, появившиеся при подготовке переизданий без участия автора, скончавшегося в 1991 году. Именно поэтому учебник содержит научные результаты, достигнутые к моменту его написания. Не требует подтверждения, что с тех пор произошли значительные изменения во многих отраслях науки и техники, например в области композитных материалов, но, поскольку основ знаний о сопротивлении материалов эти изменения не затрагивают, ценность книги остается неизменной.

Издатель посчитал нужным внести в текст учебника изменения, связанные с обозначениями величин (см. «Список основных обозначений»), принятыми в настоящее время при чтении курса сопротивления материалов, и единицами их измерения. Эту трудоемкую и кропотливую редакционную работу взял на себя доктор технических

наук, профессор С.С. Гаврюшин, за что Издатель выражает ему огромную благодарность и признательность.

И последнее. В пятом издании книги В.И. Феодосьева «Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов» (М., Наука, 1996) был опубликован краткий очерк творческой и педагогической деятельности В.И. Феодосьева, написанный его другом профессором И.А. Биргером. Поскольку новая версия учебника выходит в год 100-летия со дня рождения автора, Издатель счел уместным частично воспроизвести очерк в данном издании.

ОБ АВТОРЕ

Научная, творческая и педагогическая деятельность В. И. Феодосьева была связана с МГТУ им. Н. Э. Баумана, где он учился и работал свыше 50 лет.

Его выдающиеся способности, необычайные память и трудолюбие проявились весьма рано. Дипломная работа В. И. Феодосьева была признана кандидатской диссертацией, а докторскую диссертацию «Гибкие оболочки в машиностроении» он защитил в возрасте 27 лет.

Читатель смог уже оценить главные особенности научного почерка В. И. Феодосьева: глубокое проникновение в сущность проблемы, четкость и изящность изложения, оригинальность и рациональность решения, несомненный литературный талант.

Сотням тысяч инженеров известно имя В. И. Феодосьева как автора учебника «Сопротивление материалов», выдержавшего свыше десяти изданий у нас и за рубежом, удостоенного Государственной премии СССР. Это был новаторский курс, отвечавший потребностям современного машиностроения. За участие в создании капитального трехтомного труда «Расчеты на прочность в машиностроении» В. И. Феодосьеву была присуждена Ленинская премия. В этом труде, а также в книгах В. И. Феодосьева «Упругие элементы точного приборостроения», «Прочность теплонапряженных узлов жидкостно-реактивного двигателя», «Введение в ракетную технику» была заложена современная база обеспечения прочности и надежности в авиационном и космическом машиностроении и других областях техники. Большую известность среди молодых специалистов, студентов, инженеров получила книга «Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов», выдержавшая два издания.

В 1977 г. В. И. Феодосьев был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, в 1986 г. ему присваивается высокое звание Героя Социалистического Труда.

Многие годы В. И. Феодосьев возглавлял кафедру ракетной техники в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

В своей книге «Основы техники ракетного полета» он писал в посвящении: «...Они творили ракетную технику сороковых,

пятидесятых и шестидесятых годов, оставаясь добровольными пленниками своего долга, своих обязанностей, своей неизменной страсти...». И только несколько самых ярких имен теперь известны каждому. Но их было много... Им — ушедшим от нас, далеким и близким, друзьям и вовсе незнакомым — посвятил свою замечательную книгу В. И. Феодосьев.

Таким был и сам Всеволод Иванович Феодосьев — талантливым, простым и сложным, безмерно одаренным и часто несчастливым, прекрасным другом и товарищем.

И. А. Биргер

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Основное, что побудило автора заняться очередной переработкой учебника, это мысли о композитных материалах, об их роли и значении, о том новом, что они вносят в современную технику и в преподавание технических дисциплин, в частности сопротивления материалов.

Конечно, задачи и цели курса сопротивления материалов остаются прежними. Как в прошлом, так и ныне надо научить студента основам расчета на прочность и методам механики твердого деформируемого тела. Но сместились акценты. Появились новые идеи о вязкости материала, о развитии трещин, об их блокировании с помощью искусственно создаваемых структур. Те материалы, которые всегда и, казалось, навечно считались ни на что не пригодными, неожиданно стали рассматриваться как весьма перспективные. Наконец, изменилось и наше отношение к понятию сплошной непрерывной среды, в рамках которого рассматривается развитие деформаций и последующего разрушения.

На сплошную среду перестали смотреть как на нечто данное свыше. Она стала частью конструкции, создаваемой вместе с деталью. Оказалось возможным создавать структуру и свойства материала под заданное поле напряжений. Материал стал предметом творчества уже не только материаловедов и технологов, но и механиков. В связи с этим и хотелось изложить курс сопротивления материалов интонационно по-иному, ничуть, конечно, не ломая уже давно утвердившегося и бесспорного.

Учебник нельзя перегружать. Он не должен отпугивать учащегося своим объемом, и потому необходимо было пожертвовать чем-то из уже написанного. Автор произвел сокращение за счет тех разделов, которые в машиностроительных вузах на лекциях обычно не читаются: тонкостенные стержни, изгиб круглых пластин, эластика Эйлера. Исключены из учебника также и вопросы колебаний упругих систем, поскольку это относится к сфере задач теоретической механики и отдельно читаемого курса теории колебаний.

За современным состоянием наук уследить трудно. Понятно поэтому, что в своей работе автор не имел права быть одиноким и постоянно опирался на доброжелательную помощь друзей и коллег, хорошо знающих механику и ее роль в технике. Особую помощь оказали В. П. Когаев, С. Т. Милейко и Ю. М. Тарнопольский, за что автор и выражает им сердечную благодарность.

В.И. Феодосьев

Основные обозначения

F, q, $\mathfrak{M}$	—	нагрузки
p	—	давление
N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z	—	внутренние силовые факторы
A	—	площадь сечения
s	—	координата по дуге
E, G, v, ρ	—	модуль упругости первого рода, модуль сдвига (модуль упругости второго рода), коэффициент Пуассона, плотность материала
h	—	толщина тонкостенного профиля
$\boldsymbol{p}_v = \{XYZ\}$	—	вектор полного напряжения в площадке
σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}	—	компоненты напряжений
u, v, w	—	компоненты полного перемещения
ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}	—	компоненты деформаций
U	—	потенциальная энергия
U_0	—	удельная потенциальная энергия
K	—	кинетическая энергия
W	—	работа внешних сил
T	—	температура
Δ_{ik}	—	обобщенное перемещение
$[\sigma]$, $[\tau]$	—	допускаемые напряжения
n	—	расчетный коэффициент запаса

Введение

В1. Задачи и методы сопротивления материалов

Все твердые тела в той или иной мере обладают свойствами прочности и жесткости, т. е. способны в определенных пределах воспринимать воздействие внешних сил без разрушения и без существенного изменения геометрических размеров.

Эти свойства привлекали внимание человека еще в те далекие времена, когда он пробовал изготовить первые примитивные орудия труда и предметы хозяйственного обихода. Эти свойства волнуют специалистов и сейчас при создании современных машин и гигантских инженерных сооружений.

Прочность и жесткость требуют пристального внимания, качественных оценок и определенной количественной меры. Их изучением занимается наука, называемая механикой твердого тела, а учебная дисциплина, вводящая учащегося в мир инженерных расчетов на прочность и жесткость, носит название *сопротивление материалов*. Сопротивление материалов является составной частью механики твердого тела, но не единственной. К механике твердого тела относятся и другие дисциплины, среди которых необходимо в первую очередь назвать математическую теорию упругости, где рассматриваются во многом те же вопросы, что и в сопротивлении материалов, но в ином аспекте.

Методы математической теории упругости ведут учащегося от общего к частному. Им свойственна математическая доказательность, точность и глубина анализа, но вместе с тем и сложность математического аппарата. Поэтому возможности практического применения методов теории упругости ограничены.

В сопротивлении материалов изложение построено по обратному принципу — от частного к общему. Основная цель — создать практически приемлемые, простые приемы расчета типовых, наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Необходимость довести решение каждой практической задачи до числового результата требует применения приближенных методов,

а стремление к простоте выводов заставляет в некоторых случаях прибегать к недоказанным, но достаточно правдоподобным предположениям — гипотезам. Их правомерность оправдывается непротиворечивостью полученных результатов, с одной стороны, и принимаемыми на веру выводами тонкого анализа теории упругости — с другой.

Сопротивление материалов и теория упругости взаимопроникающи. Многое из того, что создано теорией упругости, воспринимается курсом сопротивления материалов и органически вписывается в его содержание.

Вместе с тем сопротивление материалов вследствие своей прикладной направленности решает задачи более широкие, чем математическая теория упругости. Таких задач много. Но главное в том, что сопротивление материалов подводит учащегося к неизбежным и вечным вопросам, на которые порой труднее всего ответить: выдержит конструкция или не выдержит, прочна она или не прочна и какова степень ее надежности... В теории упругости такие вопросы совершенно не рассматриваются.

Среди наук, изучающих вопросы деформируемых тел, за последние десятилетия возникли и развились новые разделы механики, занимающие промежуточное положение между сопротивлением материалов и теорией упругости, такие, например, как прикладная теория упругости; возникли родственные им дисциплины, такие, как теория пластичности, теория ползучести и др. На основе общих положений сопротивления материалов созданы новые разделы науки о прочности, имеющие конкретную практическую направленность. Сюда относятся строительная механика сооружений, строительная механика самолета, теория прочности сварных конструкций и многие другие.

Методы сопротивления материалов не остаются постоянными. Они изменяются вместе с возникновением новых задач и новых требований практики. При ведении инженерных расчетов методы сопротивления материалов следует применять творчески и помнить, что успех практического расчета лежит не столько в применении сложного математического аппарата, сколько в умении вникать в существо исследуемого предмета, найти наиболее удачные упрощающие предположения и довести расчет до окончательного числового результата.

В2. Реальный объект и расчетная схема

В сопротивлении материалов, как и во всех естественных науках, исследование реального объекта следует начинать с выбора *расчетной схемы*.

Приступая к расчету проектируемой конструкции, обоснованию ее расчетной схемы и соответствующей ей математической модели, следует прежде всего установить, что в данном случае существенно и что несущественно; провести схематизацию объекта и отбросить все факторы, которые не могут сколько-нибудь заметным образом повлиять на суть задачи. Такого рода упрощение задачи или выбор ее схемы во всех случаях совершенно необходимо, так как решение с полным учетом всех свойств реального объекта является принципиально невозможным вследствие их очевидной неисчерпаемости.

Если, например, требуется провести расчет на прочность троса подъемника (рис. В1), то в первую очередь надо учесть вес поднимаемого груза, ускорение, с которым он движется, а при большой высоте подъема, возможно, также и вес самого троса. В то же время заведомо надо отбросить влияние таких несущественных факторов, как аэродинамическое сопротивление, возникающее при подъеме клети, изменение температуры и барометрического давления с высотой и множество других.

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, носит название расчетной схемы. Для одного и того же объекта может быть предложено несколько расчетных схем в зависимости от требуемой точности и того, что интересует исследователя в данном конкретном случае. Так, если в упомянутом выше примере расчета нужно оценить только прочность троса подъемника, то клеть и груз допустимо рассматривать как жесткое целое и свести их действие на трос к силе, приложенной к концу троса (см. рис. В1). Если же необходимо решить вопрос о прочности самой клети, то последнюю уже нельзя считать абсолютно твердым телом. Ее конструктивные особенности надо рассматривать отдельно и в соответствии с ними выбирать для нее расчетную схему.

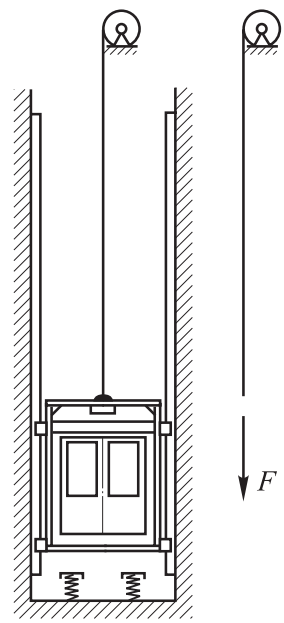


Рис. В1

Если для одного объекта может быть предложено несколько расчетных схем, то

одной расчетной схеме может быть поставлено в соответствие много различных реальных объектов. Последнее обстоятельство является весьма важным, так как, исследуя некоторую схему, можно получить решение целого класса реальных задач, сводящихся к данной схеме. В частности, показанная на рис. В1 схема каната, нагруженного на конце силой, является весьма распространенной и встречается в большом числе практических случаев расчета на прочность.

Построение расчетной схемы следует начинать со схематизации структуры и свойств материала. Общепринято рассматривать все материалы как *сплошную среду* независимо от особенностей молекулярного строения вещества. Такое упрощение совершенно естественно, поскольку размеры рассматриваемых в сопротивлении материалов объектов несопоставимо больше характерных размеров межатомных расстояний. Схема сплошной среды позволяет использовать анализ бесконечно малых величин. Она весьма универсальна, поэтому ее принимают в качестве основополагающей не только в сопротивлении материалов, но и в теории упругости, пластичности, в гидро- и газодинамике. Этот цикл дисциплин поэтому и носит обобщенное название *механики сплошной среды*.

Схематизацию свойств материала проводят и дальше. Среду предполагают не только сплошной, но и *однородной*. Металлы имеют поликристаллическую структуру, т. е. состоят из множества хаотически расположенных кристаллов. И тем не менее мы рассматриваем их как однородные.

При выборе расчетной схемы сплошную среду наделяют свойствами, отвечающими основным свойствам реального материала. Например, под действием внешних сил реальное тело меняет свои геометрические размеры. После снятия внешних сил геометрические размеры тела полностью или частично восстанавливаются. Свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры называется *упругостью*. При решении большей части задач в сопротивлении материалов среду считают совершенно *упругой*. В действительности реальное тело в какой-то степени обнаруживает отступление от свойств совершенной упругости. При больших нагрузках это отступление становится настолько существенным, что в расчетной схеме сплошную среду наделяют уже другими свойствами, соответствующими новому характеру деформирования реального тела.

Обычно сплошную среду принимают *изотропной*, т. е. предполагают, что свойства образца, выделенного из сплошной среды, не зависят от его исходной угловой ориентации.

Отдельно взятый кристалл металла *анизотропен*. Но если в объеме содержится весьма большое количество хаотически расположенных кристалликов, то материал в целом можно рассматривать как изотропный. Поэтому обычно предполагают, что металлы в той мере, в какой с ними приходится иметь дело в инженерной практике, изотропны. Встречаются и анизотропные материалы. Анизотропно дерево: оно обладает различными свойствами в зависимости от ориентации волокон. Анизотропна, например, бумага: полоски, вырезанные из листа бумаги в двух взаимно перпендикулярных направлениях, обладают различной прочностью. Существует анизотропия тел, связанная с их конструктивными особенностями. Так, анизотропна фанера, анизотропны ткани. В настоящее время широкое распространение получило создание искусственных структур — композитных материалов, которые сами являются предметом конструирования, как и та деталь, которая из них создается. Композитный материал формируется по особой технологии, например укладкой высокопрочных нитей в связующее таким образом, чтобы деталь обладала наиболее высокими показателями прочности при малом весе. Создается материал не вообще, а под заданную деталь и под заданный вид служебных нагрузок.

Композитные материалы в сопротивлении материалов также обычно рассматриваются как сплошные и однородные, но вместе с тем анизотропные.

При выборе расчетной схемы вводятся упрощения и в геометрию реального объекта. Основным упрощающим приемом в сопротивлении материалов является приведение геометрической формы тела к схеме стержня.

Под *стержнем* понимается тело, одно из измерений которого (длина) много больше двух других. Геометрически стержень может быть образован путем перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой, как это показано на рис. В2. Эта кривая называется *осью стержня*, а плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется его *поперечным сечением*. Стержень может иметь сечение и постоянное, и переменное вдоль оси. Сечение может также поворачиваться относительно оси. Стержень

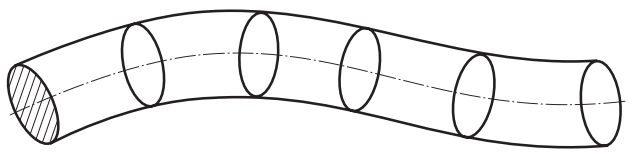


Рис. В2

в этом случае носит название *естественно закрученного*. Примером естественно закрученного стержня является обычное сверло. В зависимости от формы оси стержень может быть прямым, кривым или пространственно изогнутым. К схеме пространственно изогнутого стержня сводится, например, расчет винтовых пружин.

Многие сложные конструкции могут рассматриваться состоящими из элементов, имеющих форму стержня. Их называют *стержневыми системами*.

В некоторых случаях (в основном, когда речь идет об элементах конструкции) стержень часто называют *брусом* или *балкой*.

Второй типовой геометрической схемой, применяемой в сопротивлении материалов, является схема оболочки. Под *оболочкой* понимается тело, одно из измерений которого (толщина) много меньше двух других. К схеме оболочки сводятся такие конструктивные элементы, как стенки баков, купола зданий и др. Более подробно схема оболочки будет рассмотрена в гл. 9.

При схематизации реальных объектов в сопротивлении материалов делаются также упрощения и в системе сил, приложенных к элементу конструкции, в частности, вводится понятие *сосредоточенной* силы. Например, при расчете бруса, показанного на рис. В3, *а*,

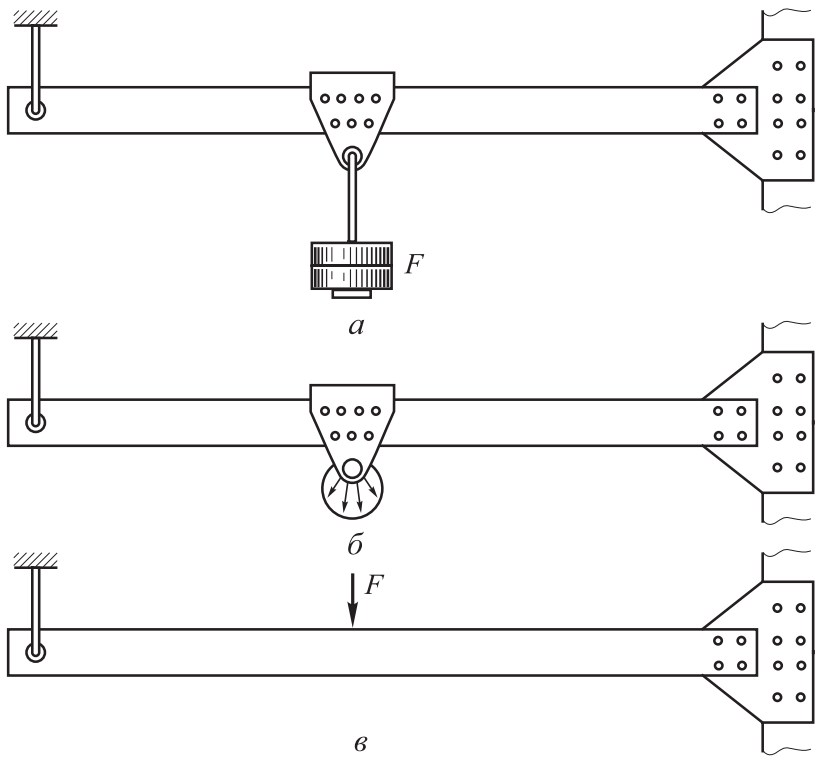


Рис. В3

можно рассматривать груз F как силу, приложенную в точке (рис. В3, *в*). Такое упрощение является естественным, поскольку размеры площадки, по которой происходит передача силы на брус (рис. В3, *б*), малы по сравнению с общими размерами бруса. Ясно, что в реальных конструкциях передача усилий в точке неосуществима, и сосредоточенная сила представляет собой понятие, свойственное только расчетной схеме.

Замена распределенных сил сосредоточенной равнодействующей возможна только в том случае, когда производится анализ работы бруса в целом, т. е. в объемах, существенно превышающих объем контактной зоны. Если в рассмотренном примере необходимо произвести расчет самой проушины, в которой подвешен груз, введение сосредоточенной силы становится недопустимым.

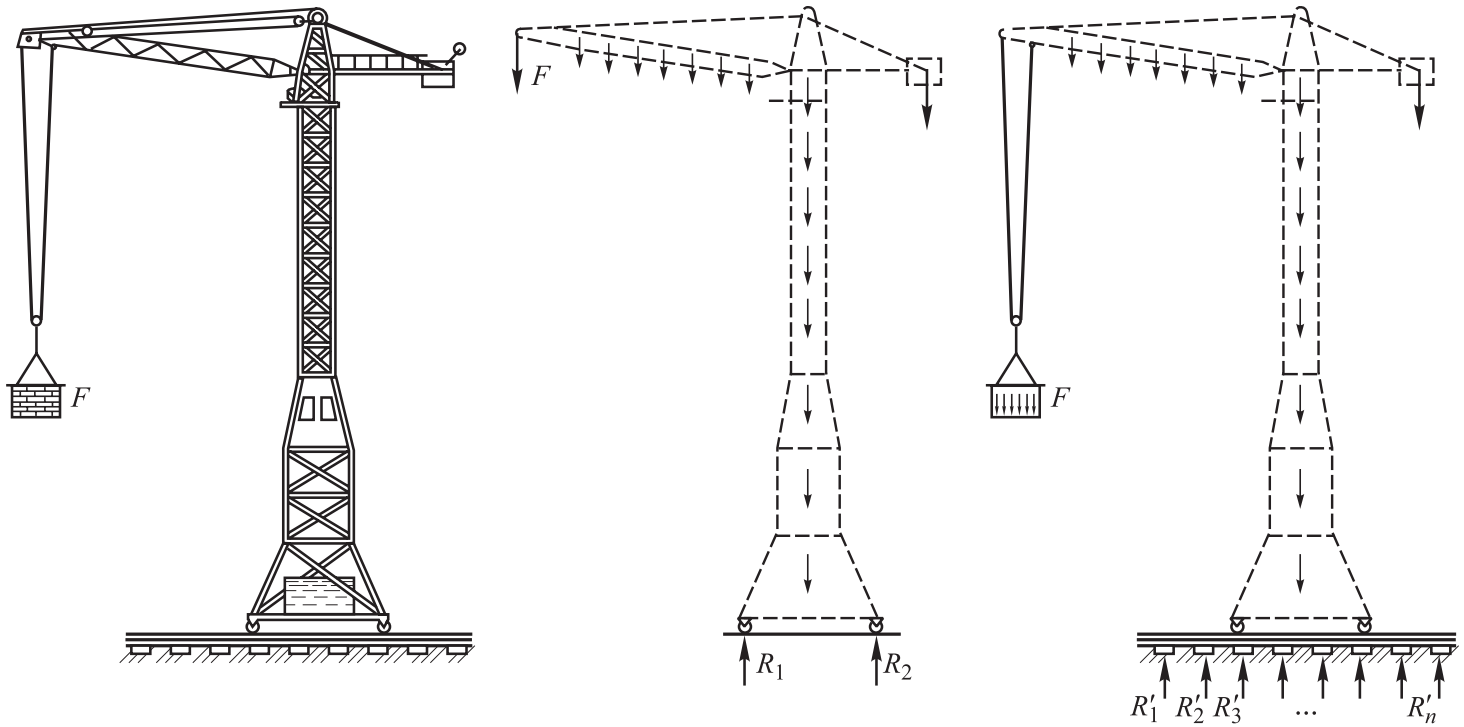
Перечисленными примерами не исчерпываются возможные приемы выбора расчетной схемы, и в дальнейшем по ходу изложения будут введены и другие понятия, связанные со схематизацией реального объекта. Важно только, чтобы читатель в процессе изучения курса сопротивления материалов не забывал о выборе расчетной схемы как о первом шаге в проведении расчета. Нужно твердо усвоить, что расчет состоит не только в приложении расчетных формул. Прежде чем поставить реальную задачу на путь математических выкладок, приходится зачастую много и серьезно думать над тем, как правильно в рассматриваемом объекте отделить существенное от несущественного.

В3. Силы внешние и внутренние

Силы являются мерилом механического взаимодействия тел. Если конструкция рассматривается изолированно от окружающих тел, то действие последних на конструкцию заменяется силами, которые называются *внешними*.

Внешние силы разделяются на объемные и поверхностные. Объемные силы распределены по объему тела и приложены к каждой его частице. К объемным силам относится вес или, например, силы магнитного притяжения. Поверхностные силы приложены к участкам поверхности и характеризуют непосредственное контактное взаимодействие рассматриваемого объекта с окружающими телами.

В число внешних сил включаются не только заданные силы, которые часто трактуются как первопричина возможного разрушения, но и реакции связей, дополняющие систему сил до равновесной. Так, например, для подъемного крана, показанного на рис. В4, *а*, заданными внешними силами можно считать силу



а *б* *в*

Рис. В4

веса поднимаемого груза F, а также собственный вес конструкции. Определяя реакции опор R_1 и R_2, получаем равновесную систему сил, показанную на рис. В4, *б* и называемую обычно *нагрузкой*.

Внешние силы, их величина и характер распределения зависят в первую очередь от того, где проходит граница между рассматриваемым объектом и окружающими его телами. Так, если в рассматриваемом примере подъемного крана в расчетную схему включить канат с клетью для груза и рельсы со шпалами, то система внешних сил будет уже другой (рис. В4, *в*). Причем, если в первом случае реакции опор определялись при помощи соотношений статики, то во втором случае их определение требует иного подхода, поскольку число неизвестных сил R'_1, R'_2, ..., R'_n превышает число уравнений равновесия. Системы такого рода называются *статически неопределимыми*. Этот вопрос подробно будет рассмотрен в дальнейшем.

Как видим, взаимодействие рассматриваемого объекта с телами, расположенными *за пределами* условно очерченной границы объекта, характеризуется силами, которые относятся к категории внешних сил.

Взаимодействие между частями рассматриваемого объекта *внутри* очерченной области объекта характеризуется *внутренними* силами. Так, в примере с подъемным краном силы взаимодействия R_1 и R_2 между ходовыми колесами и рельсами (рис. В4, *б*) являются внешними. После того как границы объекта были расширены (рис. В4, *в*), эти силы стали внутренними.

Внутренние силы возникают не только между отдельными взаимодействующими узлами конструкции, но и между всеми смежными частицами объекта при нагружении.

Пусть к стержню (рис. В5, *а*) приложена некоторая нагрузка, т. е. система внешних сил F_1, F_2, ..., F_n, удовлетворяющая условиям равновесия. Внутренние силы, возникающие в стержне, выявляются только в том случае, если рассечь его мысленно на две части, например сечением $\mathcal{A}$. Такой прием выявления внутренних сил в сопротивлении материалов носит название *метода сечений*.

Так как связи между выделенными частями стержня устранены, необходимо действие правой части на левую и левой на правую заменить системой сил в сечении, т. е. ввести систему внутренних сил, которую мы обозначим $F_{\mathcal{A}}$ (рис. В5, *б*).

Таким образом, внутренние силы определяют взаимодействие между частицами тела, расположенными по разные стороны от мысленно проведенного сечения. В различных сечениях возникают, естественно, различные внутренние силы.

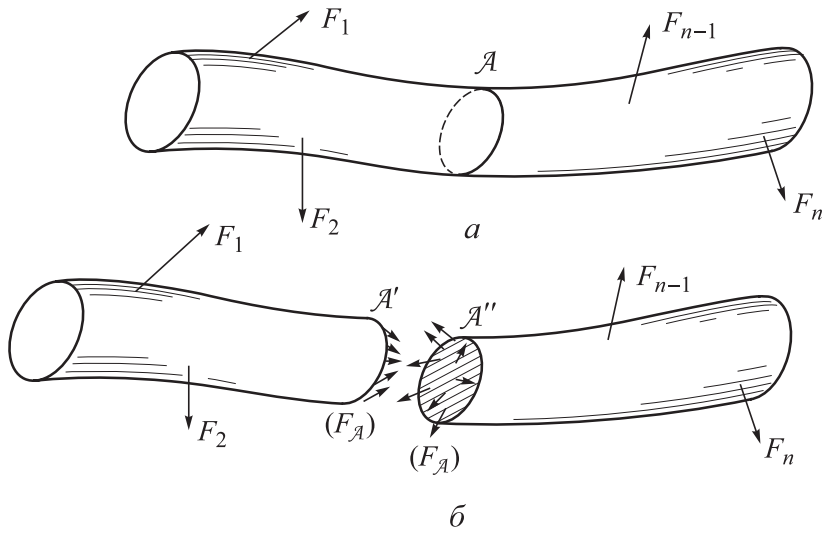


Рис. В5

Внутренние силы по принципу действия и противодействия всегда взаимны. Правая часть действует на левую точно так же, как левая на правую, и система сил, возникающих в плоскости $\mathcal{A}'$, обратна по знаку системе сил в плоскости $\mathcal{A}''$ (см. рис. В5, *б*).

Понятно, что внутренние силы распределяются некоторым, вообще говоря, сложным образом по поверхности проведенного сечения, но во всех случаях они должны быть такими, чтобы удовлетворялись условия равновесия для правой и левой частей стержня в отдельности. Символически эти условия можно записать в виде

$$(F_n)_{\text{л}} + (F_{\mathcal{A}}) = 0,$$

а также

$$-(F_{\mathcal{A}}) + (F_n)_{\text{п}} = 0,$$

где под $(F_n)_{\text{л}}$ и $(F_n)_{\text{п}}$ понимается сумма внешних сил или сумма моментов для части стержня, расположенной слева или справа от сечения. Под величиной $(F_{\mathcal{A}})$ понимается то же самое для системы внутренних сил в сечении. Первое символически написанное уравнение дает шесть условий равновесия для левой части тела, а второе — для правой.

Поскольку система внешних сил удовлетворяет условиям равновесия и, следовательно,

$$(F_n)_{\text{л}} + (F_n)_{\text{п}} = 0,$$

то написанные ранее уравнения становятся тождественными. Это значит, что равнодействующая внутренних сил $(F_{\mathcal{A}})$ в сечении $\mathcal{A}$

может определяться с равным успехом из условий равновесия либо левой, либо правой части рассеченного тела.

Если вернуться к уравнениям равновесия, то, очевидно, при их помощи можно определить не закон распределения внутренних сил, а только их равнодействующие, да и то при условии, если все внешние силы заданы.

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил к центру тяжести сечения. В результате получим главный вектор **R** и главный момент **M** (рис. B6). Выберем далее систему координат x, y, z. Ось z направим по нормали к сечению, а оси x и y расположим в его плоскости. Спроецировав главный вектор и главный момент на оси x, y, z, получаем шесть составляющих: три силы и три момента. Эти составляющие называются *внутренними силовыми факторами в сечении стержня*.

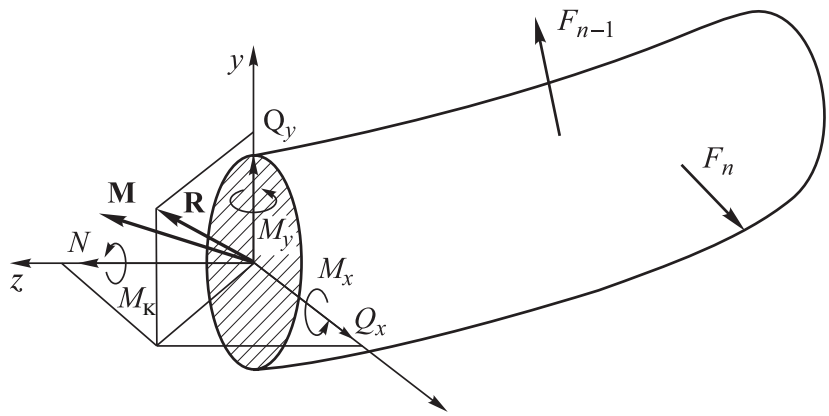


Рис. B6

Составляющая внутренних сил по нормали к сечению (N) называется *нормальной* или *продольной силой* в сечении. Силы Q_x и Q_y называются *поперечными силами*. Момент относительно нормальной оси ($M_к$) называется *крутящим моментом*, а моменты M_x и M_y — *изгибающими моментами* относительно осей x и y. При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части стержня.

По аналогии с приведенными наименованиями производится классификация основных видов нагружения. Так, если на каком-то участке стержня в поперечных сечениях возникает только нормальная сила N, а прочие внутренние силовые факторы обращаются в нуль, то на этом участке имеет место *растяжение* или *сжатие*, в зависимости от направления силы N. Если в поперечном сечении

возникает только момент $M_к$, то в данном сечении стержень испытывает *кручение*. Наконец, в случае если внешние силы приложены таким образом, что в поперечных сечениях возникает только изгибающий момент M_x (или M_y), имеет место *чистый изгиб* в плоскости yz (или xz). Обычно в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом (например M_x) возникает и поперечная сила Q_y. Такой случай нагружения называется *поперечным изгибом* (в плоскости yz). Возможны случаи нагрузок, когда стержень работает на кручение и изгиб или растяжение одновременно.

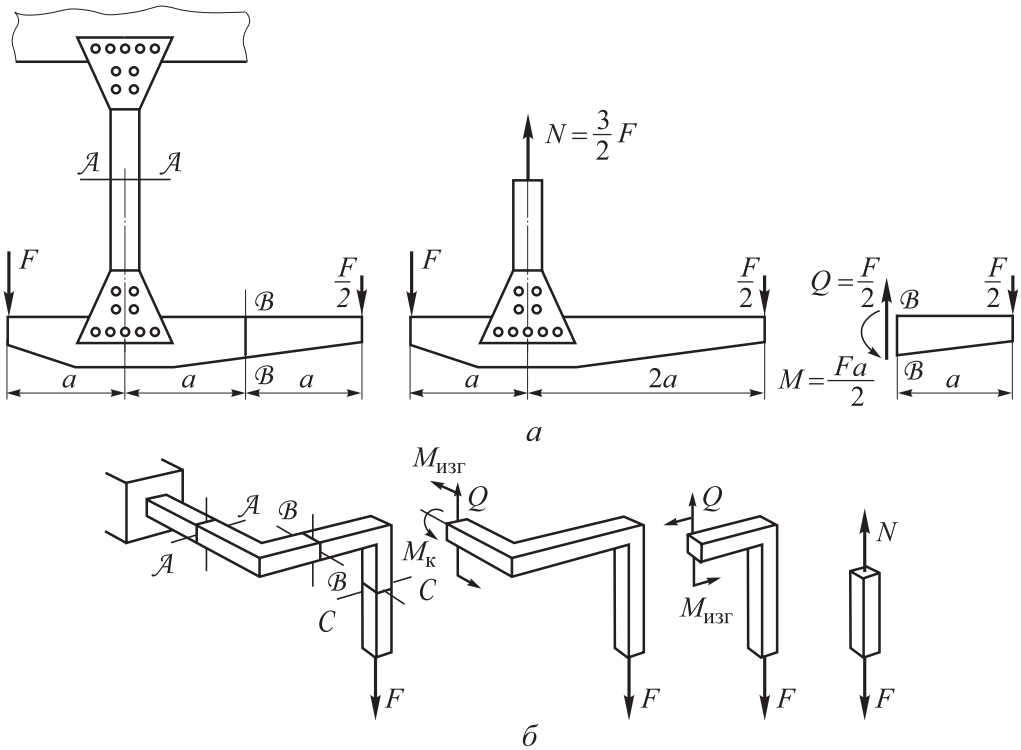


Рис. В7

Для того чтобы определить, на растяжение, кручение или изгиб работает стержень, необходимо воспользоваться методом сечений. Так, например, разрезая брус, показанный на рис. В7, *а*, в сечении $АА$, определяем из условий равновесия отсеченной части, что в этом сечении возникает только нормальная сила $N = 3F/2$. Следовательно, здесь имеет место растяжение. В сечении $ВВ$ возникают поперечная сила $Q = F/2$ и изгибающий момент $M = Fa/2$. Таким образом, приходим к выводу, что горизонтальный участок бруса работает на изгиб. Для сечений $АА$, $ВВ$, $СС$ и стержневой системы, показанной на рис. В7, *б*, получаем соответственно поперечный изгиб с кручением, поперечный изгиб и растяжение.

B4. Напряжения

Чтобы характеризовать распределение внутренних сил по сечению, необходимо ввести для них числовую меру. За такую меру принимается *напряжение*.

Рассмотрим сечение $\mathcal{A}$ некоторого тела (рис. B8). В окрестности точки K выделим элементарную площадку ΔA, в пределах которой выявлена внутренняя сила ΔQ. За среднее напряжение на площадке ΔA принимаем отношение $\Delta Q/\Delta A = p_{\text{ср}}$. Будем уменьшать площадку ΔA, стягивая ее в точку K. Поскольку среда непрерывна, возможен предельный переход при $\Delta A \to 0$. В пределе получаем

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = p.$$

Векторная величина p представляет собой *полное напряжение* в точке K в сечении $\mathcal{A}$. Напряжение имеет размерность силы, деленной на площадь. В технике напряжения обычно измеряют в килограммах на квадратный сантиметр или на квадратный миллиметр.

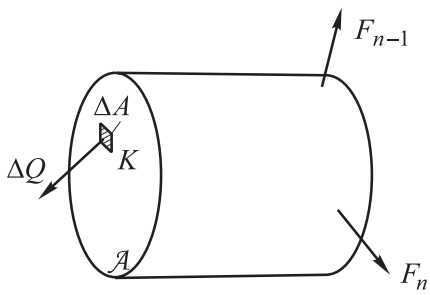


Рис. B8

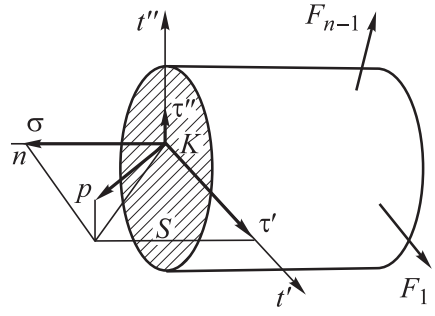


Рис. B9

В Международной системе единиц (СИ) напряжение измеряется в паскалях (Па), т. е. в ньютонах на квадратный метр. Удобнее измерять его в мегапаскалях (МПа).

Полное напряжение p может быть разложено на три составляющие: по нормали к плоскости сечения и по двум осям в плоскости сечения (рис. B9). Составляющую вектора полного напряжения по нормали обозначают σ и называют *нормальным напряжением*. Составляющие в плоскости сечения называются *касательными напряжениями* и обозначаются τ. В зависимости от расположения и наименования осей обозначения σ и τ снабжают системой индексов, порядок которых будет установлен в дальнейшем.

Если через точку K в теле провести другую секущую площадку, напряжение p в той же точке будет, вообще говоря, другим. Сово-

купность напряжений для всего множества площадок, проходящих через точку, образует *напряженное состояние* в точке.

Напряженное состояние, как мы узнаем в дальнейшем, определяется шестью числовыми величинами и является в сопротивлении материалов одним из наиболее важных понятий. Оно будет подробно рассмотрено в гл. 7. Начало же курса связано с рассмотрением наиболее простых и часто встречающихся частных случаев напряженного состояния.

В5. Перемещения и деформации

Ни один из существующих в природе материалов не является абсолютно твердым; под действием внешних сил все тела в той или иной мере меняют свою форму (деформируются). Изменение формы напряженного тела существенно влияет на распределение в нем внутренних сил, хотя само по себе это изменение формы может быть незначительным и обнаруживаться в большинстве случаев только при помощи чувствительных инструментов.

Под действием внешних сил точки тела меняют свое положение в пространстве. Вектор, имеющий начало в точке A недеформированного тела, а конец — в соответствующей точке A' деформированного, называется вектором *полного перемещения точки*. Его проекции на оси координат носят название *перемещений по осям*. Они обозначаются через u, v и w соответственно осям x, y и z (рис. В10).

Кроме линейного перемещения, введем понятие *углового перемещения*. Если рассмотреть отрезок прямой между двумя близкими точками до и после изменения формы тела, то легко установить,

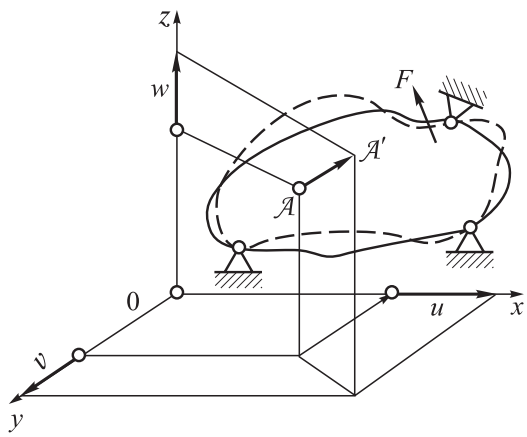


Рис. В10

что этот отрезок поворачивается в пространстве на некоторый угол. Этот угол поворота также характеризуется вектором, который может быть разложен по осям x, y и z.

Если на систему наложены связи, достаточные для того, чтобы исключить ее перемещение в пространстве как жесткого целого, система называется *кинематически неизменяемой*. Именно такие системы и рассматривают, как правило, в сопротивлении материалов. В противном случае из перемещений всех точек исключают слагающую переноса тела как абсолютно жесткого и сохраняют ту часть, которая характеризует только изменение формы. Тогда для большинства рассматриваемых в сопротивлении материалов систем перемещения u, v и w любой точки являются малыми по сравнению с геометрическими размерами тела.

На основе малости перемещений в сопротивлении материалов в методику анализа внутренних сил вводят упрощения, носящие принципиальный характер. Одно из них носит название *принципа начальных размеров*. Согласно этому принципу, при составлении уравнений статики (уравнений равновесия) тело рассматривают как недеформированное, имеющее те же геометрические размеры, какие оно имело до нагружения внешними силами.

Так, если в точке A системы, показанной на рис. В11, *а*, приложить некоторую силу F, то канат AB удлинится, стержень AC несколько укоротится, да и вообще система изменится (рис. В11, *б*). Для определения внутренних сил в канате и стержне надо воспользоваться методом сечений и составить уравнения равновесия для отсеченного деформированного узла A (рис. В11, *в*). Здесь, однако, возникает затруднение, связанное с тем, что новые геометрические размеры системы остаются неизвестными, пока не определены внутренние силы, зависящие, в свою очередь, от

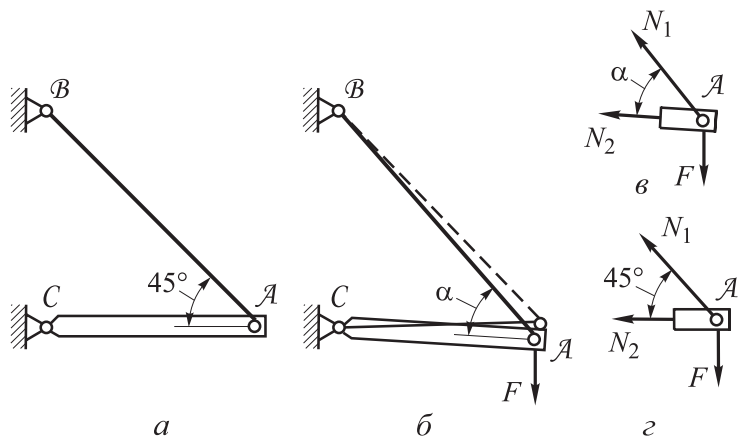


Рис. В11

геометрических размеров. При малых перемещениях указанным обстоятельством можно пренебречь, поскольку деформированная система мало отличается от недеформированной. В этом случае в соответствии с принципом начальных размеров уравнения равновесия составляют для недеформированного узла (рис. В11, *г*), и тогда $N_1 = F\sqrt{2};\ N_2 = -F.$

Понятно, что изложенный принцип нельзя применять в случае больших перемещений. Кроме того, принцип начальных размеров может оказаться неприемлемым и при малых перемещениях, если при этом форма системы меняется качественно. Например, для двух шарнирно связанных стержней, расположенных на одной прямой, условия равновесия узла $\mathcal{A}$ (рис. В12) следует составлять обязательно с учетом угла наклона α, возникающего вследствие удлинения стержней.

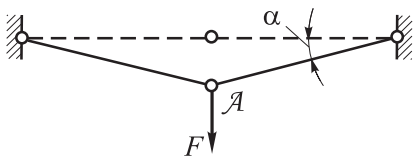


Рис. В12

Системы подобного рода называются *мгновенными механизмами*. Это означает, что в какой-то момент система является кинематически изменяемой, т. е. допускает перемещения элементов, не сопровождающиеся деформациями. В данном случае кинематическая изменяемость имеет место в окрестности исходного положения, в котором три шарнира находятся на одной прямой. В отличие от мгновенного обычный механизм обладает кинематической изменяемостью независимо от взаимного расположения составляющих элементов.

Особый класс задач, где, по существу, необходимо отступить от принципа начальных размеров, образуют задачи устойчивости, приведенные в гл. 13.

Для того чтобы характеризовать интенсивность изменения формы и размеров, рассмотрим точки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ недеформированного тела, расположенные одна относительно другой на расстоянии s (рис. В13). Пусть в результате изменения формы тела это расстояние увеличится на Δs. Отношение приращения длины отрезка Δs к его начальной длине назовем средним удлинением на отрезке s: $\dfrac{\Delta s}{s} = \varepsilon_{\text{ср.}}$ Будем, далее, уменьшать отрезок s, приближая точку $\mathcal{B}$ к точке $\mathcal{A}$. В пределе получим

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Delta s}{s} = \varepsilon_{\mathcal{AB}};$$

величина $\varepsilon_{\mathcal{AB}}$ называется *линейной деформацией* (или просто *деформацией*) в точке $\mathcal{A}$ по направлению $\mathcal{AB}$. В той же точке в другом

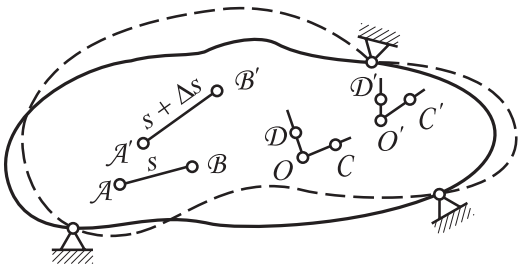


Рис. B13

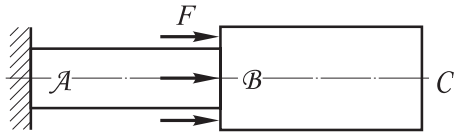


Рис. B14

направлении деформация, вообще говоря, будет другой. Если рассматривают деформации в направлении координатных осей x, y и z, в обозначение ε вводятся соответствующие индексы. Тогда имеем ε_x, ε_y и ε_z.

Следует подчеркнуть, что слово «деформация» имеет двоякий смысл. В обиходном языке под деформацией понимается вообще всякое изменение формы без количественной оценки. В сопротивлении материалов и в теории упругости деформация имеет данное выше строгое определение и является количественной мерой изменения геометрических размеров в окрестности точки. Деформация является безразмерной величиной (ее измеряют также в процентах Δs по отношению к s). Поскольку форма тела меняется незначительно, деформации также имеют малую величину. Для конструкционных материалов, в частности, деформации лежат в пределах долей процента.

Кроме линейной деформации, введем понятие *угловой деформации*. Рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном теле двумя отрезками $O\mathcal{D}$ и $O\mathcal{C}$ (см. рис. B13). После нагружения тела внешними силами этот угол изменится и станет равным $C'O'\mathcal{D}'$. Будем уменьшать отрезки $O\mathcal{C}$ и $O\mathcal{D}$, приближая точки $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ к точке O и оставляя при этом угол $\mathcal{C}O\mathcal{D}$ прямым. Предел разности углов $\mathcal{C}O\mathcal{D}$ и $C'O'\mathcal{D}'$

$$\gamma_{\mathcal{C}O\mathcal{D}} = \lim_{\substack{O\mathcal{C}\to 0 \\ O\mathcal{D}\to 0}} \left(\widehat{\mathcal{C}O\mathcal{D}} - \widehat{C'O'\mathcal{D}'} \right)$$

называется *угловой деформацией*, или *углом сдвига* в точке O в плоскости $\mathcal{C}O\mathcal{D}$. В координатных плоскостях углы сдвига обозначают через γ_{xy}, γ_{yz} и γ_{zx}.

Совокупность линейных деформаций по различным направлениям и угловых деформаций в различных плоскостях для одной точки образует *деформированное состояние* в точке. Деформированное состояние, так же как и напряженное состояние, определяется

шестью числовыми величинами. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в гл. 7.

Следует четко различать понятия деформации и перемещения и не допускать довольно распространенной ошибки, когда абсолютное удлинение стержня или осадку витой пружины называют деформацией. Это — не деформации, а перемещения. Заметим также, что если какой-то участок стержня перемещается, то это вовсе не значит, что он деформируется. Наглядный тому пример показан на рис. В14. Участок стержня $\mathcal{BC}$ получает перемещения вследствие деформации участка $\mathcal{AB}$, но сам не деформируется.

В6. Закон Гука и принцип независимости действия сил

Многочисленные наблюдения за поведением твердых тел показывают, что в большинстве случаев *перемещения в определенных пределах пропорциональны действующим силам*.

Эта закономерность была дана Гуком в 1660 г. в формулировке «каково удлинение, такова сила», что по латыни звучало «ut tensio sic vis». Но закон был опубликован только в 1676 г. в виде анаграммы «ceiiinosssttuv». Так выглядела приоритетная заявка того времени.

Если рассмотреть перемещение произвольно взятой точки $\mathcal{A}$ (см. рис. В10) по некоторому направлению, например по оси x, то

$$u_{\mathcal{A}} = \delta_x F, \qquad \text{(В1)}$$

где F — сила, под действием которой происходит перемещение $u_{\mathcal{A}}$, а δ_x — коэффициент пропорциональности между силой и перемещением.

Очевидно, этот коэффициент зависит как от физических свойств материала, так и от взаимного расположения точки $\mathcal{A}$ и точки приложения силы и вообще от геометрических особенностей системы. Таким образом, выражение (В1) следует рассматривать как закон Гука *для системы*.

В современной трактовке *закон Гука* определяет линейную зависимость между напряжением и деформацией, а не между силой и перемещением. При этом устанавливаются линейные зависимости, свойственные состоянию материала *в точке*.

Коэффициенты пропорциональности в этом случае представляют собой физические константы материала и уже не связаны с геометрическими особенностями системы в целом. Закон, таким

образом, выражает свойства самого материала. На основе такой формулировки закона Гука могут быть получены линейные зависимости типа (В1) между перемещениями и силами для конкретных систем. Физические константы материала будут введены в последующих главах при рассмотрении частных случаев напряженного и деформированного состояний. В обобщенной трактовке закон Гука будет сформулирован в гл. 7. Пока же для выявления основных свойств напряженных тел ограничимся рассмотрением соотношения (В1), типичного для подавляющего большинства систем.

Заметим сразу, что принятая линейная зависимость между перемещениями и силами сохраняется как при возрастании, так и при убывании сил и предопределяет, следовательно, упругие свойства системы. Это же подтверждается и опытом, который показывает, что в случае указанной линейной зависимости твердое тело полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму после устранения внешних сил.

Системы, для которых соблюдается условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами, называются линейными и подчиняются принципу *суперпозиции*, или *принципу независимости действия сил*. В соответствии с этим принципом перемещения и внутренние силы, возникающие в упругом теле, считаются не зависящими от порядка приложения внешних сил: если к системе приложено несколько сил, то можно определить внутренние силы, напряжения, перемещения и деформации от каждой силы в отдельности, а затем результат действия всех сил получить как сумму действий каждой силы.

Положим, что к некоторой системе приложена сила F_1. Перемещение, которое вызовет эта сила в произвольной точке $\mathcal{A}$ по направлению, например, оси x, будет, согласно выражению (В1), следующим:

$$u_{\mathcal{A}_1} = \delta_{x_1} F_1. \qquad \text{(В2)}$$

Примем теперь, что сила F_1 снята и в некоторой другой точке упругого тела приложена сила F_2. Перемещение, которое вызовет эта сила в точке $\mathcal{A}$, будет таким:

$$u_{\mathcal{A}_2} = \delta_{x_2} F_2. \qquad \text{(В3)}$$

Коэффициенты пропорциональности δ_{x_1} и δ_{x_2} будут различными, поскольку силы F_1 и F_2 приложены в разных точках тела. Рассмотрим теперь совместное действие сил F_1 и F_2. Приложим сначала силу F_1, а затем, не снимая ее, силу F_2. Тогда перемеще-

ние, которое получит точка $\mathcal{A}$, можно представить следующим выражением:

$$u_{\mathcal{A}} = \delta_{x_1} F_1 + \delta'_{x_2} F_2 . \qquad \text{(В4)}$$

Коэффициент δ_{x_1} будет тем же, что и в формуле (В2), поскольку силу F_1 прикладывали к ненагруженной системе. Коэффициент же δ'_{x_2} в отличие от формулы (В3) помечен штрихом, так как силу F_2 прикладывали не к свободной системе, а к системе, предварительно нагруженной силой F_1.

Если коэффициенты δ'_{x_2} и δ_{x_2} различны, то следует признать, что δ'_{x_2} зависит от силы F_1. Но это противоречит принятому предположению о линейной зависимости перемещений от действующих сил. Следовательно, δ'_{x_2} от сил не зависит. Выражение (В4) при $F_1 = 0$ должно переходить в выражение (В3). Поэтому $\delta'_{x_2} = \delta_{x_2}$, и тогда

$$u_{\mathcal{A}} = \delta_{x_1} F_1 + \delta_{x_2} F_2 . \qquad \text{(В5)}$$

Таким образом, перемещение определяется как сумма результатов независимых действий сил F_1 и F_2. Если изменить порядок приложения сил, то можно путем аналогичных рассуждений прийти к тому же выражению (В4). Следовательно, результат действия сил не зависит от порядка их приложения. Это положение легко обобщается и на случай любого числа сил.

Итак, в основе принципа независимости действия сил лежит предположение о линейной зависимости между перемещениями и силами, а также связанное с ним предположение об обратимости процессов нагрузки и разгрузки. Системы, не подчиняющиеся изложенному в предыдущем параграфе принципу начальных размеров, обнаруживают нелинейные зависимости между силами и перемещениями, поэтому к таким системам неприменим также и принцип независимости действия сил (см., например, систему, представленную на рис. В12). Вместе с тем не всякая система, подчиняющаяся принципу начальных размеров, будет подчиняться и принципу независимости действия сил. Если при малых перемещениях сами свойства материала таковы, что перемещения зависят от сил нелинейно, то такая система, подчиняясь первому принципу, не подчиняется второму. Принцип независимости действия сил является основным при решении большинства линейных задач сопротивления материалов.

B7. Общие принципы расчета элементов конструкции

В результате расчета нужно получить ответ на вопрос, удовлетворяет или нет конструкция требованиям прочности и жесткости, которые к ней предъявляют. Для этого необходимо прежде всего сформулировать принципы, положенные в основу оценки предъявляемых требований. Без этого анализ конкретной конструкции сам по себе не может иметь целевого назначения. Так, если в конструкции определяются напряжения, надо предварительно четко представить себе, зачем это нужно и что с найденными напряжениями надлежит делать в дальнейшем. Точно так же, если определяется форма деформированного тела, надо заранее наметить путь дальнейшего использования полученного результата в оценке надежности конструкции. Все эти вопросы находят свое решение в выборе общего *метода расчета*.

Наиболее распространенным методом расчета деталей машин и элементов сооружений на прочность является *расчет по допускаемым напряжениям*. В основу этого метода положено предположение, что критерием прочности конструкции является напряжение или, точнее говоря, напряженное состояние в точке. Последовательность расчета при этом выглядит следующим образом.

На основании анализа конструкции выявляют ту точку в теле, где возникают наибольшие напряжения. Найденное значение напряжений в этой точке сопоставляют с предельным значением для данного материала, полученным на основе предварительных лабораторных испытаний. В качестве предельного значения напряжения для пластических материалов принимают предел текучести, а для хрупких материалов — предел прочности. Из сопоставления найденных расчетных и предельных напряжений делают заключение о прочности конструкции.

Этот метод используется при решении большинства практических задач. Вместе с тем не следует думать, что такой подход является единственно возможным. В ряде случаев быстрее приводят к цели другие методы. Бывает и так, что расчет по напряжениям оказывается попросту неприемлемым, например, при проверке находящейся под действием высоких перепадов температур оболочки жидкостного ракетного двигателя.

Основная концепция изложенного метода, по которой напряжения в одной точке можно рассматривать как определяющий фактор в оценке прочности всей конструкции, не всегда оказывается правильной. В качестве примера, иллюстрирующего сказанное,

рассмотрим конструкцию, отдельный элемент или локальная зона которой находится в пластически деформированном состоянии. При этом сама конструкция может не терять своих функциональных свойств (не разрушаться), т. е. выдерживать нагрузку большую, чем та, которая вызывает пластическую деформацию в локальной зоне. Данный метод расчета получил название *расчета по разрушающим нагрузкам*.

В этом методе путем расчета определяют не напряжения, а находят предельную нагрузку, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь или не изменяя существенно свою форму. Предельную (разрушающую) нагрузку сопоставляют с рабочей и на основании этого делают выводы о степени прочности конструкции в рабочих условиях. Этот метод обладает тем недостатком, что расчетное определение разрушающей нагрузки возможно только в наиболее простых конструктивных схемах.

Методы расчета выбирают в зависимости от условий работы конструкции и требований, которые к ней предъявляют. Если необходимо добиться наименьших изменений формы конструкции, например при проектировании отражателя прожектора или системы зеркал астрономического прибора, проводят расчет по *допускаемым перемещениям*, или, как говорят, *расчет на жесткость*. Это не исключает, понятно, одновременной проверки системы на прочность по напряжениям. Наряду с упомянутыми существуют другие методы расчетов, связанные с качественно отличными явлениями, такими как устойчивость, эффект повторных нагрузок (выносливость), динамическое воздействие, ударное нагружение и др.

Курс сопротивления материалов не претендует на то, чтобы точно указать, где и когда следует пользоваться тем или иным из упомянутых методов расчета конкретных конструкций, он дает в основном только изложение практически приемлемых средств для решения вопросов, связанных с определением напряжений, деформаций, перемещений, разрушающих нагрузок и пр. в типичных элементах конструкции. Вопрос о степени надежности конструкции в конкретных условиях изучают в основном в курсах деталей машин, прочности самолета, прочности корабля и т. д. Тем не менее, изучая сопротивление материалов, не следует забывать, что определение напряжений и перемещений не является самоцелью и что за определением этих величин стоит неизбежный вопрос о возможности использования полученных результатов в оценке надежности конструкции.

Глава 1

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

1.1. Внутренние силы и напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня при растяжении и сжатии

Под растяжением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные силы, а все прочие внутренние силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Обычным является растяжение стержня силами, приложенными к его концам. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, как это показано на рис. 1.1, *а*—*в*. Во всех случаях, однако, система внешних сил образует равнодействующую *F*, направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня расчетная схема в рассматриваемых случаях оказывается единой. Она показана на рис. 1.1, *г*.

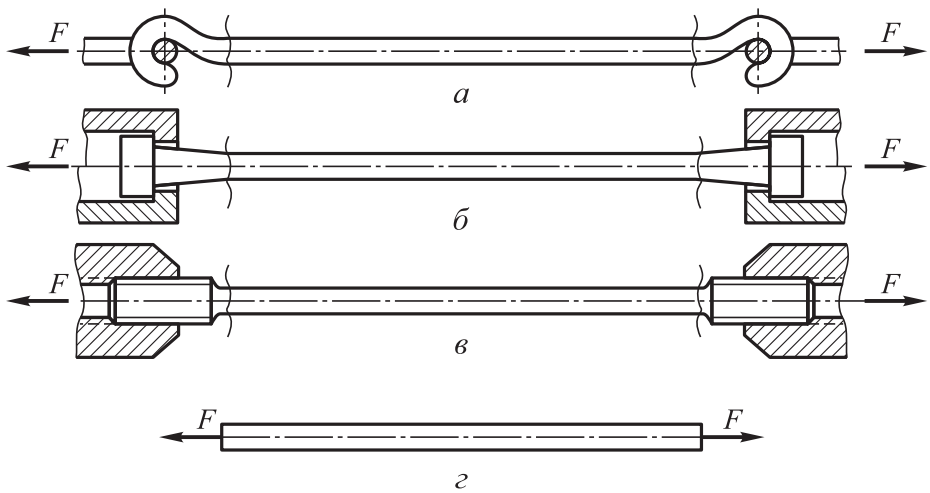


Рис. 1.1

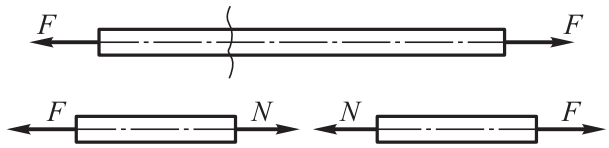


Рис. 1.2

Если воспользоваться методом сечений, то становится очевидным, что во всех поперечных сечениях стержня возникают нормальные силы N, равные силе F (рис. 1.2): $N = F$.

Сжатие отличается от растяжения формально только знаком силы N. При растяжении нормальная сила N направлена от сечения, а при сжатии — к сечению. Таким образом, при анализе внутренних сил сохраняется единство подхода к вопросам растяжения и сжатия. Вместе с тем между этими двумя типами нагружения могут обнаружиться и качественные различия, например при изучении процессов разрушения материалов или при исследовании поведения длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается, как правило, изгибом.

Рассмотрим напряжения, возникающие в поперечном сечении растянутого стержня. Нормальная сила N является равнодействующей внутренних сил в сечении (рис. 1.3). Естественно предположить, что для однородного стержня внутренние силы распределены по сечению равномерно. Тогда нормальное напряжение для всех точек сечения будет одним и тем же:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \tag{1.1}$$

где A — площадь поперечного сечения.

Понятно, что высказанное предположение о равномерном распределении внутренних сил в поперечном сечении справедливо лишь постольку, поскольку из рассмотрения исключаются особенности конкретно взятого стержня в связи с условиями его закрепления на концах. Здесь руководствуются правилом, которое принято называть *принципом Сен-Венана* по имени известного французского ученого прошлого века. Принцип Сен-Венана является общим,

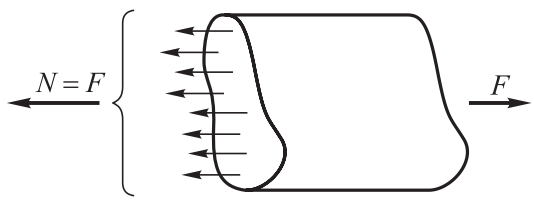


Рис. 1.3

но применительно к стержням он может быть сформулирован следующим образом: особенности приложения внешних сил к растянутому стержню проявляются, как правило*, на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения стержня. Это значит, что при изучении растянутого стержня достаточно принимать во внимание только равнодействующую внешних сил F, не интересуясь особенностями приложения нагрузки. Для этого надо исключить из рассмотрения часть стержня, расположенную в зоне приложения внешних сил. На рис. 1.1 это как раз и показано. Отбрасывая части стержня, примыкающие к его концам, получаем единую расчетную схему (см. рис. 1.1, *а*) независимо от способа приложения внешних сил.

Приведенные рассуждения могут быть отнесены также и к особым участкам стержня, содержащим резкое изменение геометрических форм. Например, для ступенчатого бруса, показанного на рис. 1.4, следует исключить из рассмотрения зону скачкообразного

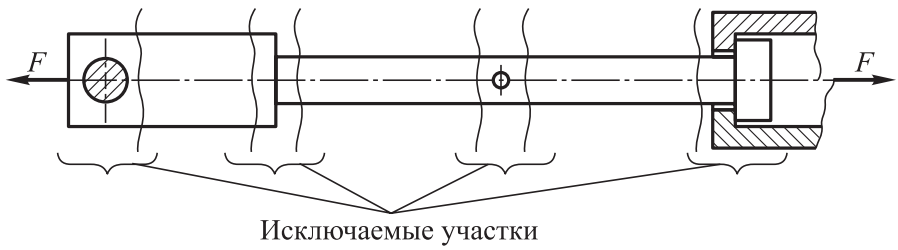


Рис. 1.4

перехода от одного диаметра к другому и зоны, примыкающие к отверстиям. Во всех остальных участках напряжения в поперечных сечениях будут распределены равномерно и их можно определить по формуле (1.1).

Для нагруженного по концам растянутого однородного стержня напряжения остаются постоянными как по сечению, так и по длине, т. е. сохраняются неизменными для всех точек объема, занимаемого телом. Такое напряженное состояние называется *однородным*. При однородном напряженном состоянии все точки тела находятся в одинаковых условиях.

Понятие однородного напряженного состояния тесно связано с понятием сплошной среды. Ясно, что распределение внутренних сил в реальных условиях не может быть равномерным из-за неоднородности кристаллических зерен металла и молекулярного строения вещества. Поэтому, когда говорят о равномерном распределении внутренних сил по сечению, имеют в виду распределение без микроскопической детализации в пределах площадок, суще-

*Исключение могут составлять тонкостенные стержни.

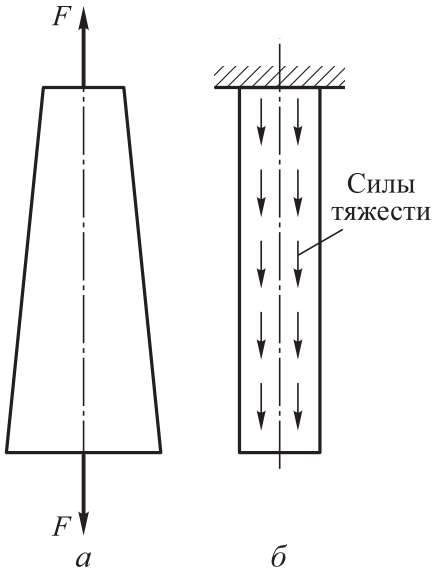


Рис. 1.5

ственно превышающих размеры сечений кристаллических зерен. Сделанная оговорка относится не только к растяжению и сжатию, но и ко всем другим видам нагружения, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

При растяжении, однако, не всегда возникает однородное напряженное состояние. Например, у стержня с переменной площадью поперечного сечения (рис. 1.5, *а*) напряжения меняются по длине и напряженное состояние неоднородно. То же самое имеет место и для стержня, нагруженного собственным весом (рис. 1.5, *б*).

1.2. Удлинения стержня и закон Гука

Размеры растянутого стержня меняются в зависимости от величины приложенных сил. Если до нагружения стержня его длина была равна l, то после нагружения она станет равной $l + \Delta l$ (рис. 1.6). Величину Δl называют *абсолютным удлинением стержня*.

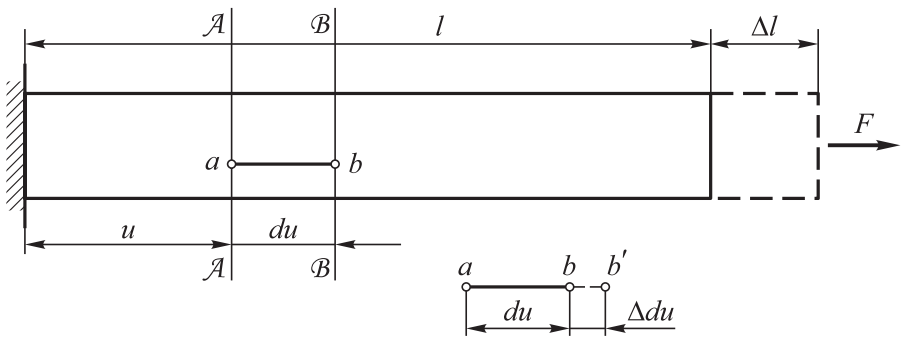


Рис. 1.6

Будем считать, что абсолютное удлинение и деформации связаны только с напряжениями, возникающими в стержне. В действительности имеются и другие факторы, влияющие на деформации. Так, деформации зависят от температуры и времени действия нагрузки. Неупругие деформации зависят от «истории» нагружения,

т. е. от порядка возрастания и убывания внешних сил. Пока, однако, этих вопросов мы касаться не будем.

Если стержень нагружен только силой F, то напряженное состояние является однородным и все участки растянутого стержня находятся в одинаковых условиях; деформация ε по оси стержня остается одной и той же, равной своему среднему значению по длине l:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{1.2}$$

Эта величина называется *относительным удлинением стержня*.

Если бы в стержне (см. рис. 1.6) возникало неоднородное напряженное состояние, деформация в сечении AA определялась бы путем предельного перехода к малому участку длиной du, и тогда

$$\varepsilon = \frac{\Delta(du)}{du}. \tag{1.3}$$

Заметим, что вследствие равномерного распределения напряжений по сечению удлинения для всех элементарных отрезков (см. рис. 1.6), взятых на участке du, оказываются одинаковыми. Следовательно, если концы отрезков до нагружения образуют плоскость, то и после нагружения стержня они образуют плоскость, но смещенную вдоль оси стержня. Это положение может быть взято в основу толкования механизма растяжения и сжатия и трактуется как *гипотеза плоских сечений* (гипотеза Бернулли). Если эту гипотезу принять как основную, то тогда из нее, уже как следствие, вытекает высказанное ранее предположение о равномерности распределения напряжений в поперечном сечении.

В пределах малых удлинений для подавляющего большинства материалов справедлив закон Гука, который устанавливает прямую пропорциональность между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{1.4}$$

Величина E представляет собой коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости первого рода*. Модуль упругости является физической константой материала и определяется экспериментально. Величина E измеряется в тех же единицах, что и σ, т. е. в мегапаскалях. Ввиду того, что модуль упругости может иметь довольно большие числовые значения, его предпочтительнее измерять не в мега-, а в гигапаскалях: 1 ГПа = 1000 МПа.

Для наиболее часто применяемых материалов модуль упругости E имеет следующие значения, ГПа:

Сталь	190 — 200
Медь	120
Латунь	100 — 120
Алюминий и алюминиево-магниевые сплавы	70 — 80
Бериллий	240
Вольфрам	410
Молибден	330
Титан	100
Алмаз	1050
Дерево (вдоль волокон)	8 — 12
Стекловолокно	70 — 85
Кварцевое волокно	70
Бороволокно	430
Карбидное волокно	430
Промышленное углеродное волокно:	
высокомодульное	310 — 345
высокопрочное	220 — 250
Эпоксидные смолы	2 — 3
Усы (нитевидные кристаллы):	
графит	до 690
сапфир (Al_2O_3)	до 530
асбест	170

Закон Гука представляет собой простейшую и очевидную аппроксимацию наблюдаемой в опытах зависимости удлинения от напряжения. Естественно, что точность этой аппроксимации определяется в первую очередь тем, сколь широкий диапазон изменения напряжения имеется в виду. Всегда можно подобрать достаточно малый интервал напряжений, чтобы в его пределах функцию $\varepsilon = f(\sigma)$ можно было бы с заданной точностью рассматривать как линейную. И конечно, для разных материалов это выглядит по-разному. Для некоторых материалов, таких как, например, сталь, закон Гука соблюдается с высокой степенью точности в широких пределах изменения напряжений. Для отожженной меди, для чугуна этот интервал изменения напряжений существенно меньше. В тех случаях, когда закон Гука явно не соблюдается, деформацию задают в виде некоторой нелинейной функции от напряжения $\varepsilon = f(\sigma)$ с таким расчетом, чтобы эта функция отвечала кривой, полученной при испытании материала.

Вернемся к выражению (1.4) и заменим в нем σ на N/A, а ε на $\Delta(du)/du$. Тогда получим

$$\Delta(du) = \frac{Ndu}{EA}.$$

Абсолютное удлинение стержня переменного сечения на длине l можно выразить следующим образом:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N\,du}{EA}. \tag{1.5}$$

В том случае, когда стержень нагружен только по концам, нормальная сила $N = F$ не зависит от u. Если, кроме того, стержень имеет постоянные размеры поперечного сечения A, то из выражения (1.5) получаем

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}. \tag{1.6}$$

При решении многих практических задач возникает необходимость наряду с удлинениями, обусловленными напряжением σ, учитывать также удлинения, связанные с температурным воздействием. В этом случае пользуются способом суперпозиции и деформацию ε рассматривают как сумму силовой и чисто температурной деформации:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha T,$$

где α — коэффициент температурного расширения материала.

Для однородного стержня, нагруженного по концам и равномерно нагретого, получаем

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + l\alpha T. \tag{1.7}$$

Таким образом, силовая и температурная деформации рассматриваются как независимые. Основанием этому служит экспериментально установленный факт, что модуль упругости E при умеренном нагреве слабо меняется с температурой, точно так же как и α практически не зависит от σ. Для стали это имеет место до температуры порядка 300 ... 400 °С. При более высоких температурах необходимо учитывать зависимость E от T.

Рассмотрим примеры определения напряжений и перемещений в некоторых простейших случаях растяжения и сжатия.

Пример 1.1. Требуется выявить закон изменения нормальных сил, напряжений и перемещений по длине ступенчатого стержня, нагруженного на конце силой F (рис. 1.7, *а*), определить числовые значения наибольшего напряжения и наибольшего перемещения, если $F = 50$ кН, $A = 2$ см^2, $l = 1$ м. Материал — сталь, $E = 200$ ГПа. Поскольку сила F велика, собственный вес стержня можно не учитывать.

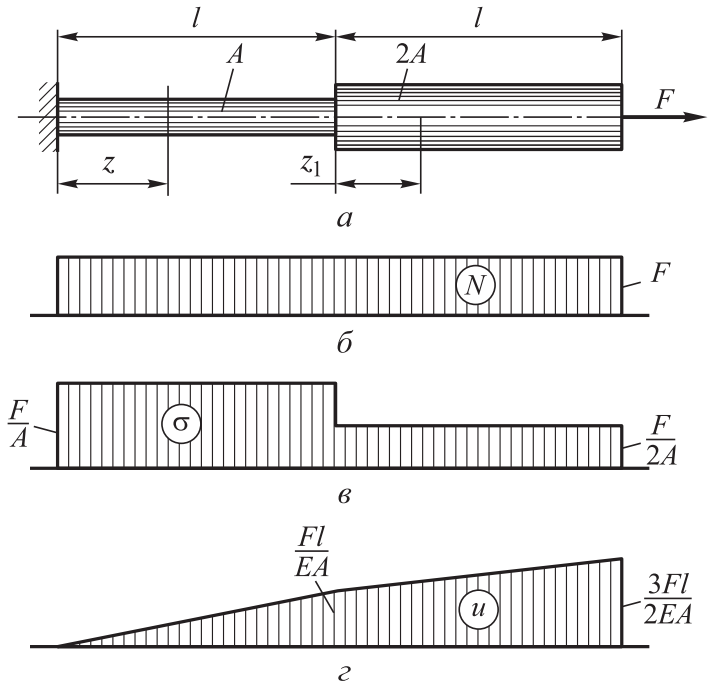


Рис. 1.7

Из условий равновесия любой отсеченной части стержня вытекает, что нормальная сила N в каждом сечении стержня равна внешней силе F. Построим график изменения силы N вдоль оси стержня. Графики подобного рода называются в сопротивлении материалов эпюрами. Они дают наглядное представление о законах изменения различных исследуемых величин. В данном случае эпюра нормальной силы представлена на рис. 1.7, *б* прямоугольником, поскольку $N = F = \text{const}$. На рисунке эпюра N заштрихована линиями, которые проведены параллельно откладываемым на графике значениям N. В данном случае значение силы N откладывают вверх, поэтому штриховка проведена вертикально.

Для того чтобы получить эпюру напряжений σ, надо ординаты эпюры N изменить обратно пропорционально величине A (рис. 1.7, *в*). Большее значение σ равно $\sigma_{max} = F/A_{min} = 50$ кН/2 см^2 = 250 МПа.

Определим перемещение u (см) каждого сечения стержня по направлению силы F. Перемещение z-го сечения равно удлинению отрезка длиной z. Следовательно, согласно формуле (1.6), $u = Fz/EA$. Таким образом, на участке изменения z от нуля до l перемещение u пропорционально z (рис. 1.7, *г*). На втором участке стержня перемещение $u = Fl/EA + Fz_1/2EA$. Зависимость u от z_1 также будет линейной. Наибольшее перемещение имеет торцевое сечение стержня: $u_{max} = 3Fl/2EA = 1{,}87$ мм.

Пример 1.2. Построить эпюры нормальных сил, напряжений и перемещений для свободно подвешенного цилиндрического стержня, нагруженного силами собственного веса (рис. 1.8, *а*). Длина стержня l, площадь поперечного сечения A, плотность материала ρ.

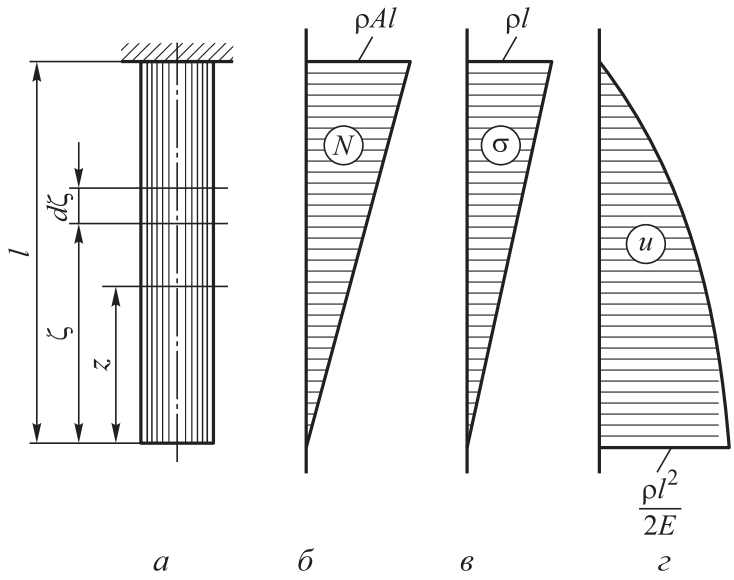


Рис. 1.8

Нормальная сила в сечении z равна весу нижележащей части стержня: $N = \rho A z$. Следовательно, нормальная сила пропорциональна z. Эпюру N в данном случае штрихуют горизонтальными линиями, поскольку значения N откладывают в горизонтальном направлении (рис. 1.8, *б*). Напряжение в z-м сечении $\sigma = \rho z$ (рис. 1.8, *в*).

Перемещение u в сечении z равно удлинению верхнего участка стержня. Согласно формуле (1.5),

$$u = \int_z^l \frac{\rho A \zeta \, d\zeta}{EA} = \frac{\rho}{2E}(l^2 - z^2).$$

Таким образом, закон изменения u изображается квадратичной функцией z. Наибольшее перемещение $u_{\max}$ имеет нижнее торцевое сечение (рис. 1.8, *г*):

$$u_{\max} = \frac{\rho l^2}{2E}.$$

Пример 1.3. Колонна (рис. 1.9, *а*) нагружена силой F и силами собственного веса. Требуется подобрать такой закон изменения площади поперечного сечения $A = A(z)$, чтобы напряжения во всех сечениях были одинаковы и равны F/A_0. Построить эпюры нормальных сил, напряжений и перемещений.

На расстоянии z от торца нормальная сжимающая сила

$$N = F + \rho \int_0^z A \, d\zeta.$$

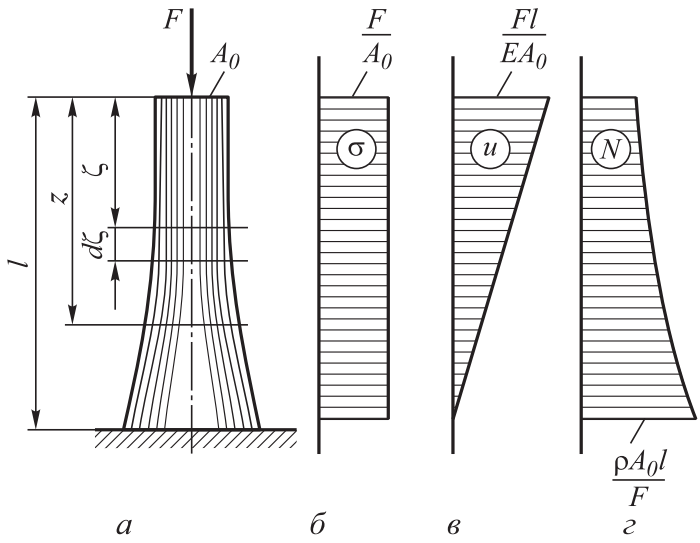


Рис. 1.9

По условию задачи

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F + \rho\int_0^z A d\zeta}{A} = \frac{F}{A_0} = \text{const},$$

откуда

$$F + \rho\int_0^z A\, d\zeta = \frac{F}{A_0} A.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по z, получим $\rho A = \frac{F}{A_0}\frac{dA}{dz}$, или $dz = \frac{F}{\rho A_0}\frac{dA}{A}$. После интегрирования находим

$$z = \frac{F}{\rho A_0}(\ln A - \ln C), \qquad \text{или} \qquad A = Ce^{\frac{\rho A_0 z}{F}}.$$

При $z = 0$ $A = A_0$, следовательно, $C = A_0$ и тогда искомый закон изменения площади A принимает вид $A = A_0 e^{\rho A_0 z/F}$.

Построение эпюр удобнее всего начинать с эпюры напряжения σ, которое вдоль оси колонны по условию не меняется (рис. 1.9, *б*). Поскольку напряжение постоянно, то постоянным будет и относительное удлинение ε. Поэтому перемещение *u* возрастает пропорционально расстоянию от основания колонны (рис 1.9, *в*).

Нормальная сила в сечении z $N = \sigma A = Fe^{\rho A_0 z/F}$. Эпюра N показана на рис. 1.9, *г*.

Рассмотренная задача относится к числу часто встречающихся в сопротивлении материалов задач на отыскание условий равнопрочности. Если напряжение в некотором теле (в данном случае в колонне) будет постоянно для всех точек объема, такую конструкцию называют равнопрочной. В подобных конструкциях материал используется наиболее эффективно.

Пример 1.4. Кронштейн $\mathcal{ABC}$ нагружен в точке $\mathcal{B}$ силой F (рис. 1.10, *а*). Требуется подобрать поперечное сечение стержней $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BC}$ с таким расчетом, чтобы возникающие в них напряжения имели одинаковую заданную величину σ. При этом угол α должен быть выбран из условия минимального веса конструкции при заданном вылете кронштейна l.

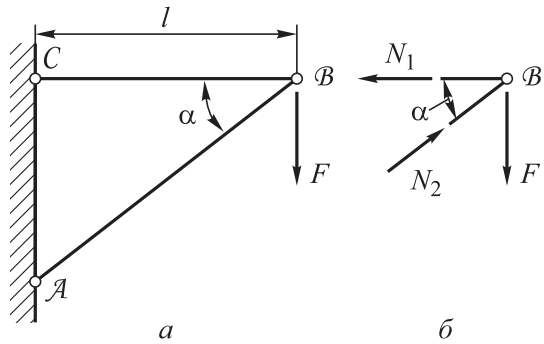


Рис. 1.10

Из условий равновесия узла $\mathcal{B}$ (рис. 1.10, *б*) находим нормальные силы в стержнях: $N_1 = F\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $N_2 = F/\sin\alpha$.

Далее определяем площади поперечного сечения стержней по величине заданного напряжения σ:

$$A_1 = \frac{N_1}{\sigma} = \frac{F}{\sigma}\mathrm{ctg}\,\alpha; \qquad A_2 = \frac{N_2}{\sigma}\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Вес конструкции кронштейна пропорционален объему: $V = l_1A_1 + l_2A_2$. Подставляя длины и площади стержней, находим

$$V = \frac{Fl}{\sigma}\left(\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right).$$

Величина V имеет минимум при $\cos^2\alpha = 1/3$; $\alpha = 55°$.

1.3. Потенциальная энергия деформации

Рассмотрим энергетические процессы, происходящие при деформировании упругого тела.

Внешние силы, приложенные к упругому телу, совершают работу. Обозначим ее через W. В результате этой работы накапливается потенциальная энергия деформированного тела U. Кроме того, работа идет на сообщение скорости массе тела, т. е. преобразуется в кинетическую энергию K. Баланс энергий имеет вид $W = U + K$.

Если нагружение производится медленно, скорость перемещения масс тела будет весьма малой. Такой процесс нагружения называется *статическим*. Тело в любой момент времени находится в состоянии равновесия. В этом случае $W = U$ и работа внешних сил целиком преобразуется в потенциальную энергию деформации.

При разгрузке тела за счет потенциальной энергии производится работа. Таким образом, упругое тело является аккумулятором энергии. Это свойство упругих тел широко используется, например, в заводных пружинах часовых механизмов и в различных упругих амортизирующих элементах (рессоры, пружины, торсионные валы и др.).

На рис. 1.11 показан растянутый стержень. Для большей наглядности последующих рассуждений удлинение стержня изображено в увеличенном масштабе и соответственно отрезку Δl внизу показан график изменения силы F.

Поскольку на пути Δl сила F не остается постоянной, работа, затраченная на растяжение стержня, должна быть определена интегрированием по элементарным участкам пути. На элементарном перемещении $d(\Delta l)$ работа текущей силы F равна $dW = Fd(\Delta l)$. Очевидно, работа на перемещении Δl численно равна площади треугольника OBC, т.е. $W = U = 1/2F\Delta l$.

Таким образом, работа силы на упругом перемещении определяется половиной произведения наибольшего значения силы и пере-

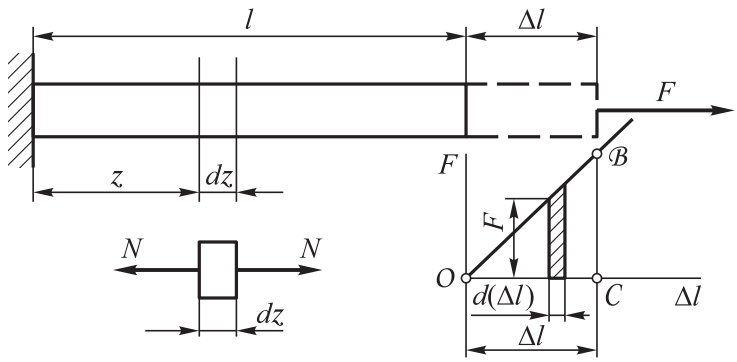


Рис. 1.11

мещения Δl. Если бы между силой и перемещением не было прямой пропорциональности, вместо коэффициента 1/2 был бы получен какой-то другой коэффициент. В частности, при постоянной силе он равен единице. В дальнейшем при определении работы внешних сил коэффициент 1/2 будем ставить без пояснений. Исключая из полученного для U выражения Δl, найдем

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}. \tag{1.8}$$

Если нормальная сила N меняется вдоль оси стержня, то потенциальная энергия деформации должна определяться суммированием по участкам dz (см. рис. 1.11). Для элементарного участка $dU = \frac{N^2 dz}{2EA}$, а для всего стержня

$$U = \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EA}. \tag{1.9}$$

Энергетические соотношения широко используются при определении перемещения в сложных упругих системах. Общие теоремы, относящиеся к этому вопросу, будут рассмотрены в гл. 5.

1.4. Статически определимые и статически неопределимые системы

Во всех рассмотренных до сих пор задачах нормальные силы в поперечных сечениях стержня определяли при помощи метода сечений из условий равновесия отсеченной части. Но такое нахождение нормальных сил, да и вообще внутренних сил, далеко не всегда возможно. На практике постоянно встречаются системы, в которых имеется большое число наложенных связей, и для определения внутренних сил уравнений статики оказывается недостаточно. Такие системы называются *статически неопределимыми*.

На рис. 1.12, *а* показан обычный кронштейн, состоящий из двух стержней. Усилия в стержнях легко определить из условий равновесия узла *А*. Если конструкцию кронштейна усложнить, добавив еще один стержень (рис. 1.12, *б*), то усилия в стержнях прежним способом уже найдены быть не могут: для узла *А* может быть по-прежнему составлено только два уравнения равновесия, а число неизвестных сил равно трем. В таких случаях говорят, что

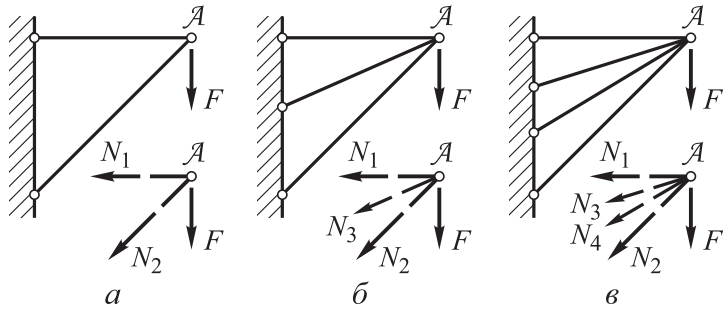


Рис. 1.12

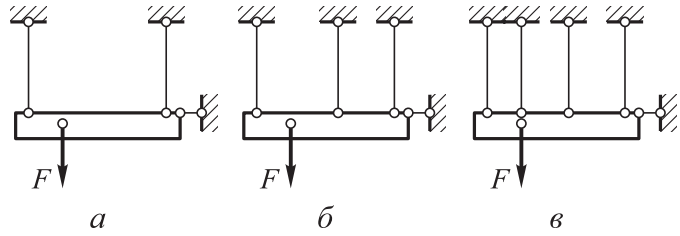


Рис. 1.13

система один раз статически неопределима. Усложняя конструкцию, вводя новые стержни, можно получить два (рис. 1.12, *в*), три и т. д. раза статически неопределимые системы. На рис. 1.13 показано еще три системы. Первая из них статически определимая, вторая и третья — соответственно один и два раза статически неопределимые.

Для всех вариантов конструкций на рис. 1.13, состоящих из разного числа стержней и бруса, можно получить только два независимых уравнения равновесия. Для варианта *а* этих уравнений достаточно, чтобы однозначно определить силы в двух стержнях; для вариантов *б* и *в* число сил в стержнях больше числа уравнений, поэтому определить три (вариант *б*) или четыре (вариант *в*) силы из двух уравнений невозможно. В теоретической механике подобные задачи определенного решения не имеют, в то время как это наиболее распространенный случай в технике.

Если стержни, например, в варианте *в* прикрепить к динамометрам, то при нагружении силой F они покажут, какие силы в них возникли. Причем сколько бы раз стержни не нагружали силой F, возникающие в них силы будут одни и те же. Определить их в так называемых статически неопределимых задачах можно только с учетом реальных свойств элементов конструкций. В этом принципиальное отличие теоретической механики от сопротивления материалов. Учет реальных свойств материалов

позволяет рассчитывать любые конструкции, когда число связей в системе превышает число независимых уравнений статики.

Можно сказать, что под *n* раз статически неопределимой системой понимается такая, в которой число связей превышает число независимых уравнений статики на *n* единиц. Определение всех неизвестных сил, или, как говорят, раскрытие статической неопределимости, возможно только путем составления уравнений, дополняющих число уравнений статики до числа неизвестных. Эти дополнительные уравнения отражают особенности геометрических связей, наложенных на деформируемые системы, и условно называются *уравнениями перемещений* (уравнениями совместности перемещений). Для стержневых систем, показанных на рис. 1.12, уравнения перемещений должны отразить тот факт, что узел A деформированной системы должен быть общим для всех стержней. В примере, показанном на рис. 1.13, уравнения перемещений в случае, если брус жесткий, должны показать, что все нижние концы стержней после нагружения остаются на одной прямой и т. п.

Рассмотрим принципы составления уравнений перемещений на простейших примерах раскрытия статической неопределимости систем.

Пример 1.5. Прямой однородный стержень (рис. 1.14) жестко закреплен по концам и нагружен продольной силой F, приложенной на расстоянии одной трети длины от верхней заделки. Требуется определить наибольшие напряжения, возникающие в стержне.

Система, очевидно, один раз статически неопределима, поскольку две реакции опор R_A и R_B не могут быть определены из одного уравнения равновесия $R_A + R_B = F$.

Уравнение перемещений должно отразить тот факт, что общая длина стержня не меняется. На сколько удлинится верхняя часть, на столько же сократится нижняя. Следовательно, $|\Delta l_{AC}| = |\Delta l_{BC}|$. Выражая удлинения через силы, получим

$$\frac{R_A \frac{1}{3} l}{EA} = \frac{R_B \frac{2}{3} l}{EA},$$

или

$$R_A = 2R_B.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением равновесия, находим: $R_A = 2/3F$, $R_B = 1/3F$.

Наибольшее напряжение $\sigma_{\max} = \frac{2}{3}\frac{F}{A}$.

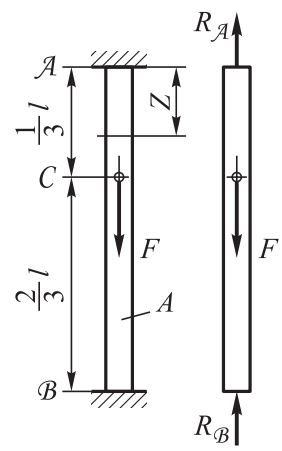


Рис. 1.14

Пример 1.6. Система трех стержней одинаковых сечений (рис. 1.15, *а*) нагружена вертикальной силой F. Определить усилия в стержнях.

При составлении уравнений равновесия узла A (рис. 1.15, *б*) воспользуемся принципом неизменности начальных размеров. Поскольку под действием силы F угол α меняется незначительно, будем считать его неизменным. Тогда получаем

$$N_1 = N_3; \quad 2N_1 \cos\alpha + N_2 = F.$$

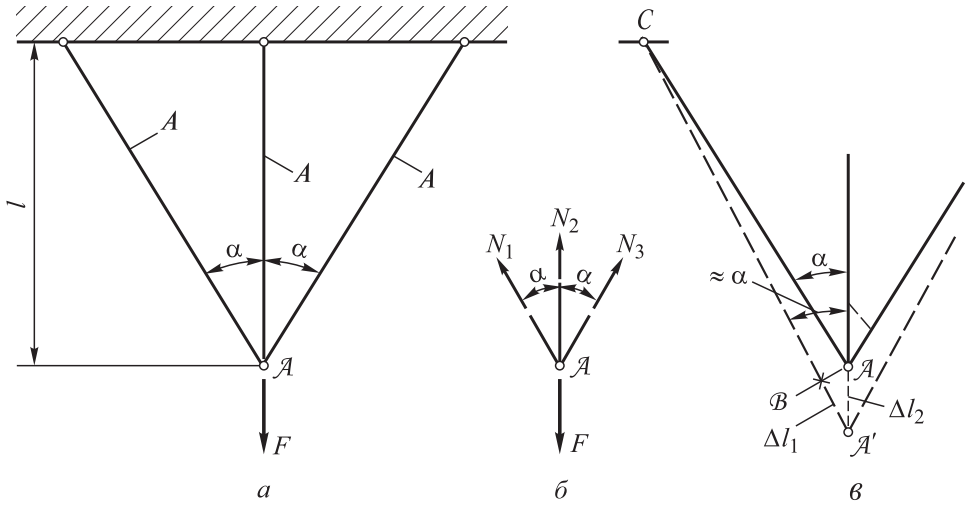


Рис. 1.15

Этих уравнений недостаточно для определения всех сил. Необходимо дополнительно составить одно уравнение перемещений. Для этого сопоставим форму узла A до и после нагружения (рис. 1.15, *в*). Отрезок AA' представляет собой вертикальное перемещение узла A. Оно равно, очевидно, удлинению среднего стержня: $AA' = \Delta l_2$. Из точки A проводим дугу окружности AB с центром в точке C. Отрезок $A'B$ представляет собой удлинение бокового стержня: $A'B = \Delta l_1$.

Вследствие малости перемещений дугу AB можно принять за отрезок, перпендикулярный прямой $A'C$, считая, что угол α в результате удлинений стержней меняется незначительно,

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha.$$

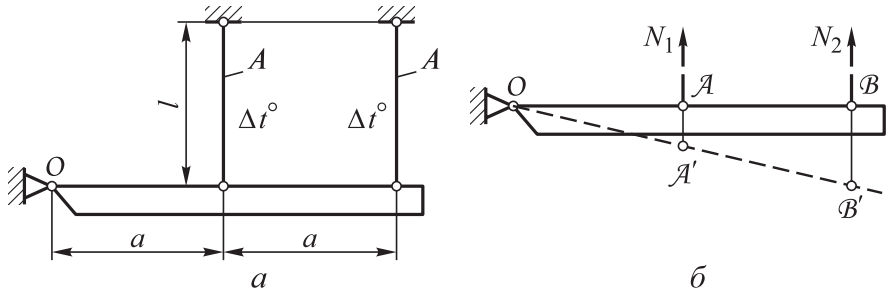
Это и есть искомое уравнение перемещений. Выразим удлинения через силы: $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 l}{EA\cos\alpha}$, $\Delta l_2 = \dfrac{N_2 l}{EA}$; тогда

$$N_1 = N_2 \cos^2\alpha.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением равновесия, получим

$$N_1 = N_3 = \frac{F\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}; \qquad N_2 = \frac{F}{1+2\cos^3\alpha}.$$

Пример 1.7. Жесткая невесомая балка шарнирно закреплена в точке O и связана с двумя одинаковыми упругими стержнями (рис. 1.16, *а*). Определить усилия, возникающие в стержнях при нагреве их на $\Delta t°$.



а *б*

Рис. 1.16

Разрезаем стержни и вводим силы N_1 и N_2 (рис. 1.16, *б*). Далее, приравнивая нулю сумму моментов сил относительно шарнира O, получим

$$N_1 a + 2N_2 a = 0.$$

Положим, что в результате нагрева стержней жесткая балка повернется и займет положение $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$ (см. рис. 1.16, *б*). Из подобия треугольников $O\mathcal{A}\mathcal{A}'$ и $O\mathcal{B}\mathcal{B}'$ получаем $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$ или, согласно формуле (1.7),

$$\frac{N_2 l}{EA} + l\alpha\Delta t° = 2\left(\frac{N_1 l}{EA} + l\alpha\Delta t°\right),$$

откуда

$$N_2 - 2N_1 = EA\alpha\Delta t°.$$

Решая полученное уравнение совместно с уравнением равновесия, найдем

$$N_1 = -(2/5)EA\alpha\Delta t°; \qquad N_2 = (1/5)EA\alpha\Delta t°.$$

Знак минус перед N_1 указывает на то, что первый стержень не растянут, как это предполагалось ранее, а сжат.

Пример 1.8. При сборке стержневой системы (рис. 1.17, *а*) было обнаружено несоответствие длин стержней (см. узел $\mathcal{A}$). Сборка была произведена путем принудительного совмещения шарниров $\mathcal{A}$ и C на величину Δ. Определить усилия в стержнях после сборки.

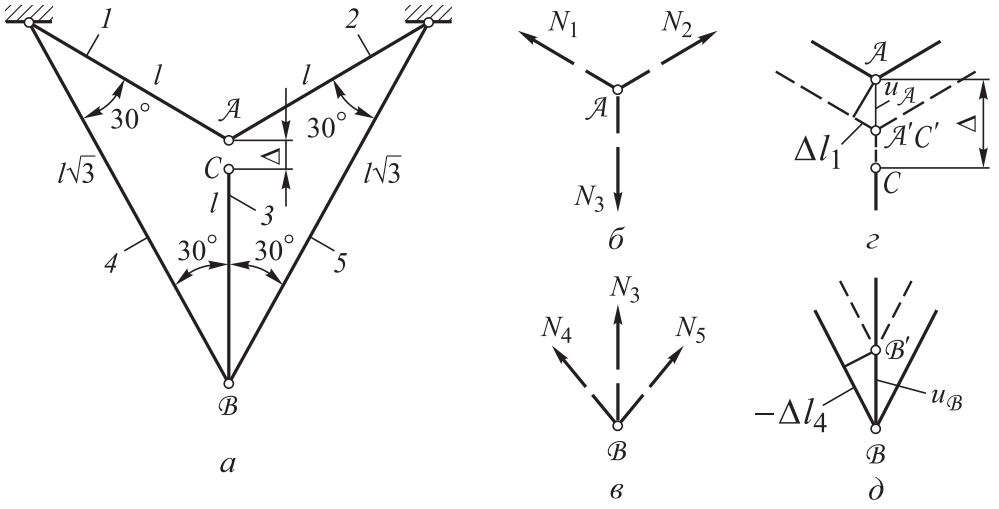


Рис. 1.17

Имеем пять стержней и, следовательно, пять искомых сил. Для узлов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ может быть составлено четыре уравнения равновесия, по два на каждый узел. Следовательно, система один раз статически неопределима.

Из условий равновесия узлов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (рис. 1.17, *б* и *в*) получаем

$$N_1 = N_2 = N_3; \qquad N_4 = N_5; \qquad N_3 + 2N_4 \cos 30^\circ = 0.$$

Положим, что после сборки шарнир $\mathcal{A}$ сместился вниз на величину $u_{\mathcal{A}}$ и занял положение $\mathcal{A}'$, а шарнир $\mathcal{B}$ сместился вверх на $u_{\mathcal{B}}$ (рис. 1.17, *г* и *д*). Тогда, очевидно,

$$\Delta l_1 = u_{\mathcal{A}} \sin 30^\circ; \qquad \Delta l_4 = -u_{\mathcal{B}} \cos 30^\circ.$$

Удлинение среднего стержня

$$\Delta l_3 = \Delta - u_{\mathcal{A}} - u_{\mathcal{B}}.$$

Исключая из этих выражений $u_{\mathcal{A}}$ и $u_{\mathcal{B}}$, получим уравнение перемещений

$$\Delta l_3 = \Delta - 2\Delta l_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta l_4.$$

Преобразуем это уравнение, выразив удлинения через силы:

$$2N_1 - 2N_4 + N_3 = \frac{\Delta}{l}EA.$$

После совместного решения уравнения перемещений с уравнениями равновесия получим

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}\frac{\Delta}{l}EA;$$

$$N_4 = N_5 = -\frac{1}{2+3\sqrt{3}}\frac{\Delta}{l}EA.$$

Рассмотренные примеры уже дают достаточное представление о принципиальной стороне приемов, используемых при раскрытии статической неопределимости. Прочное овладение этими приемами может быть достигнуто при решении достаточно большого числа задач.

Более общий метод раскрытия статической неопределимости будет рассмотрен в гл. 6.

В заключение необходимо обратить внимание на два последних примера. В одном определялись температурные, а в другом — монтажные усилия. И те и другие могут возникать только в статически неопределимых системах, и это достаточно очевидно. Температурные и монтажные деформации принимаются в расчет только при составлении уравнений деформаций. А для статически определимых систем в этих уравнениях нет никакой надобности.

1.5. Напряженное и деформированное состояния при растяжении и сжатии

Рассмотрим более детально особенности напряженного состояния, возникающего в однородном растянутом стержне. Определим сначала напряжения в некоторой наклонной площадке, составляющей угол α с плоскостью нормального сечения (рис. 1.18, *а*). Полное напряжение p на этой площадке, согласно условию однородности напряженного состояния для всех точек площадки, будет одним и тем же. Равнодействующая же внутренних сил в сечении должна быть направлена по оси стержня и равна растягивающей силе σA, т. е.

$$pA_\alpha = \sigma A,$$

где A_α — площадь косого сечения, $A_\alpha = A/\cos\alpha$. Таким образом, полное напряжение на наклонной площадке

$$p = \sigma \cos\alpha.$$

Раскладывая это напряжение по нормали и по касательной к наклонной площадке (рис. 1.18, *б*), находим

$$\sigma_\alpha = p\cos\alpha; \qquad \tau_\alpha = p\sin\alpha,$$

или

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2\alpha; \qquad (1.10)$$

$$\tau_\alpha = 1/2\,\sigma \sin 2\alpha. \qquad (1.11)$$

Как видим, для одной и той же точки растянутого стержня значения возникающих в сечении напряжений оказываются различными в зависимости от ориентации секущей площадки. Поэтому, в частности, неточным было бы утверждение, что при растяжении

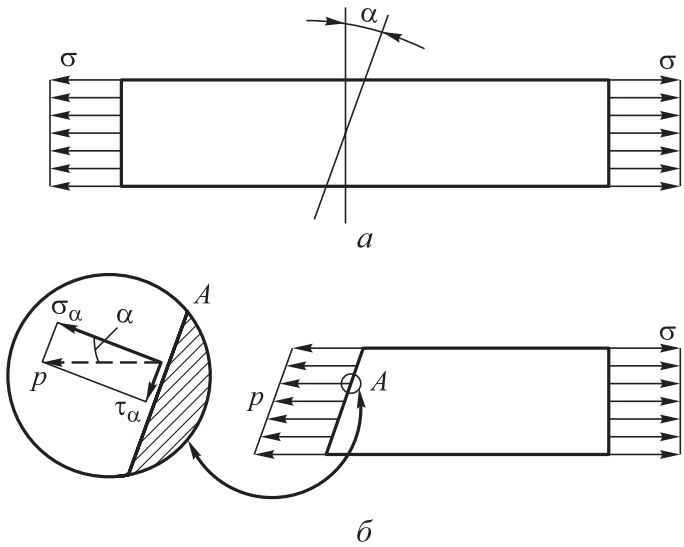


Рис. 1.18

возникают только нормальные напряжения. Это верно только для площадок, нормальных к оси стержня.

Если положить $\alpha = 0$, то из выражений (1.10) и (1.11) мы получим напряжения в поперечном сечении стержня, т. е.

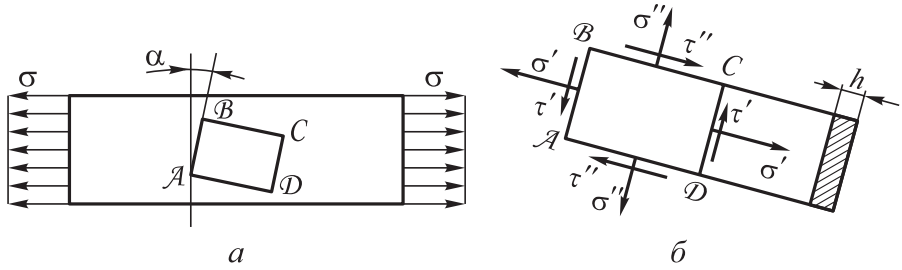
$$\sigma_\alpha = \sigma; \qquad \tau_\alpha = 0.$$

При $\alpha = 90°$, т. е. в продольных сечениях, $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$. Это значит, что продольные слои растянутого стержня не имеют между собой силового взаимодействия по боковым поверхностям. В этом смысле растяжение стержня можно уподобить растяжению пучка не связанных между собой параллельных нитей.

Касательное напряжение τ_α, обращаясь в нуль в продольных и поперечных сечениях, имеет наибольшее значение на площадках, наклоненных под углом 45° к оси растянутого стержня:

$$\tau_{max} = \sigma/2.$$

Если из растянутой полосы выделить прямоугольник (рис. 1.19, *а*), то на его гранях AB и CD следует приложить напряжения σ_α и τ_α,



а *б*

Рис. 1.19

определяемые выражениями (1.10) и (1.11). На рис. 1.19, *б* эти напряжения отмечены сверху одним штрихом. На гранях $\mathcal{BC}$ и $\mathcal{AD}$ напряжения вычисляют также по формулам (1.10), (1.11), в которых только угол α заменяют углом $\alpha + \pi/2$. Эти напряжения отмечены двумя штрихами. Таким образом, то напряженное состояние, которое показано на рис. 1.19, *б*, представляет собой обыкновенное растяжение, но изображенное в непривычном для нас ракурсе.

Существенно отметить, что переход от произвольной площадки, расположенной под углом α, к площадке, расположенной под углом $(\alpha + 90^\circ)$, не сказывается на абсолютной величине касательного напряжения τ_α. Действительно,

$$\left|\frac{1}{2}\sigma \sin 2\alpha\right| = \left|\frac{1}{2}\sigma \sin 2(\alpha + 90^\circ)\right|.$$

Следовательно, на двух взаимно перпендикулярных площадках (если пока отвлечься от знаков) касательные напряжения должны быть равными. Это условие является общей особенностью любого напряженного состояния и носит название закона *парности касательных напряжений*.

Этому закону можно дать наглядное толкование. Если рассмотреть произвольно взятый элемент $\mathcal{ABCD}$ с длинами ребер $l_{\mathcal{AB}} = l_{\mathcal{CD}}$, а $l_{\mathcal{BC}} = l_{\mathcal{AD}}$ (см. рис. 1.19, *а*), то легко заметить, что независимо от значений нормальных напряжений σ' и σ'' касательные напряжения τ' и τ'' должны иметь такое значение и такое направление, чтобы моменты их пар взаимно уравновешивались (см. рис. 1.19, *б*). Для произвольно взятого элемента, имеющего толщину h (см. рис. 1.19, *б*), очевидно, что

$$\tau' l_{\mathcal{AB}} l_{\mathcal{AD}} h = \tau'' l_{\mathcal{AD}} l_{\mathcal{AB}} h.$$

Таким образом,

$$\tau' = \tau''.$$

При этом, как видно на рис. 1.19, *б*, векторы касательных напряжений в двух взаимно перпендикулярных площадках направлены либо оба к общему ребру (ребра AB и AD), либо от общего ребра (ребра DA и DC).

Закон парности касательных напряжений в самом общем виде сложного напряженного состояния будет рассмотрен еще раз в гл. 7.

Теперь обратимся к анализу деформированного состояния растянутого стержня.

Наблюдения показывают, что удлинение стержня в осевом направлении сопровождается уменьшением его поперечных размеров (рис. 1.20). Таким образом, при растяжении возникает не только продольная, но и поперечная деформация стержня:

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{\Delta l}{l}, \qquad \varepsilon_{\text{попер}} = \frac{\Delta a}{a}.$$

Экспериментально установлено, что в пределах применимости закона Гука поперечная деформация пропорциональна продольной:

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \nu \varepsilon_{\text{прод}}, \tag{1.12}$$

где ν — безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом Пуассона*. Коэффициент ν характеризует свойства материала. Определяют его экспериментальным путем. Для всех металлов числовые значения ν лежат в пределах 0,25...0,35. Далее, в гл. 7, будет показано, что для изотропного материала значение ν вообще не может превышать 0,5.

Вернемся к рис. 1.19, *а*. Полоса удлиняется в продольном направлении и сужается в поперечном. Стороны прямоугольника $ABCD$, начерченного на поверхности полосы, изменят свою длину, а сам прямоугольник перекосится и превратится в параллелограмм. Углы при вершинах A и C уменьшатся, а B и D — увеличатся. Это изменение прямого угла для заданной ориентации сторон, как нам уже известно, называется угловой деформацией

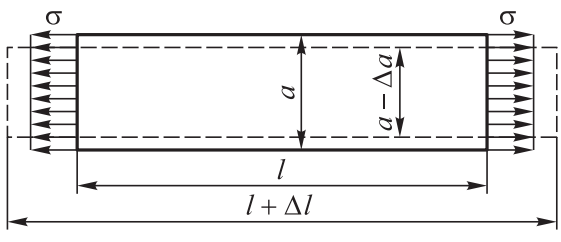


Рис. 1.20

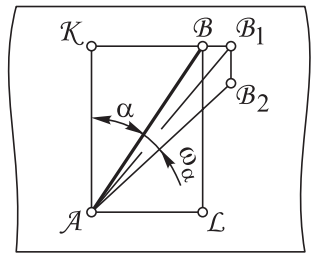


Рис. 1.21

или углом сдвига. Чтобы найти его, мы определим сначала углы, на которые повернутся отрезки AB и AD. Разность этих углов и даст нам искомый угол сдвига.

Начнем с отрезка AB (рис. 1.21). Построим на нем, как на диагонали, вспомогательный прямоугольник $AKBL$, стороны которого KB и AL ориентированы по продольной оси стержня. Вследствие продольного удлинения точка B переместится вправо и отрезок AB повернется на угол

$$\frac{BB_1}{AB}\cos\alpha = \frac{BK}{AB}\varepsilon_{\text{прод}}\cos\alpha.$$

В результате поперечного сужения отрезок AB получит дополнительный угол поворота

$$\frac{B_1B_2}{AB}\sin\alpha = \frac{AK}{AB}\varepsilon_{\text{попер}}\sin\alpha.$$

Сумма этих углов дает нам искомый угол поворота отрезка AB:

$$\omega_\alpha = (\varepsilon_{\text{прод}} + \varepsilon_{\text{попер}})\sin\alpha\cos\alpha$$

или

$$\omega_\alpha = \frac{\sigma}{2E}(1+\nu)\sin 2\alpha.$$

Изменяя угол α на 90°, найдем положение отрезка AB:

$$\omega_{\alpha+90^\circ} = -\frac{\sigma}{2E}(1+\nu)\sin 2\alpha.$$

Угловая деформация (угол сдвига) определяется разностью углов поворота отрезков, т. е.

$$\gamma_\alpha = \omega_\alpha - \omega_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma}{2E}(1+\nu)\sin 2\alpha.$$

Сопоставляя это выражение с выражением (1.11), выведенным для напряжения τ_α, замечаем, что угол сдвига между гранями AB и AC независимо от α пропорционален касательному напряжению, т. е.

$$\gamma_\alpha = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_\alpha.$$

Это соотношение в случае изотропного материала является единым для всех типов напряженных состояний и носит название *закона Гука для сдвига*. Опуская индекс α, напишем последнее выражение в виде

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \tag{1.13}$$

где величина G называется *модулем сдвига*, или *модулем упругости второго рода*:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{1.14}$$

Модуль G измеряется в тех же единицах, что и модуль E.

Таким образом, если закон Гука для растяжения постулируется при помощи соотношений (1.4) и (1.12), то для сдвига он вытекает из них как следствие.

1.6. Испытание материалов на растяжение и сжатие

При решении простейших задач на растяжение и сжатие мы уже встретились с необходимостью иметь некоторые исходные экспериментальные данные, на основе которых можно было бы построить теорию. К числу таких исходных экспериментальных данных относится в первую очередь уже знакомый нам закон Гука. Основными характеристиками материалов при этом являются модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν. Понятно, что в зависимости от свойств материала эти величины меняются. В первую очередь E и ν зависят от типа материала и в некоторой степени от условий термической и механической обработки.

Для решения практических задач необходимо иметь еще числовые характеристики прочностных свойств материалов. При изучении процессов гибки и штамповки нужны числовые показатели, характеризующие способность материала пластически деформироваться. В ряде случаев надо иметь данные о способности материала противостоять действию высоких температур, работать при переменных нагрузках и т. д.

В связи с этим создано много различных видов испытаний, но основными и наиболее распространенными являются испытания на растяжение и сжатие. С их помощью удается получить наиболее

важные характеристики материала, находящие прямое применение в расчетной практике.

Для испытания на растяжение используют специально изготовленные образцы, которые большей частью вытачивают из прутковых заготовок или вырезают из листа. Основной особенностью таких образцов является наличие усиленных мест захвата и плавного перехода к сравнительно узкой ослабленной рабочей части. На рис. 1.22 показано несколько типов таких образцов.

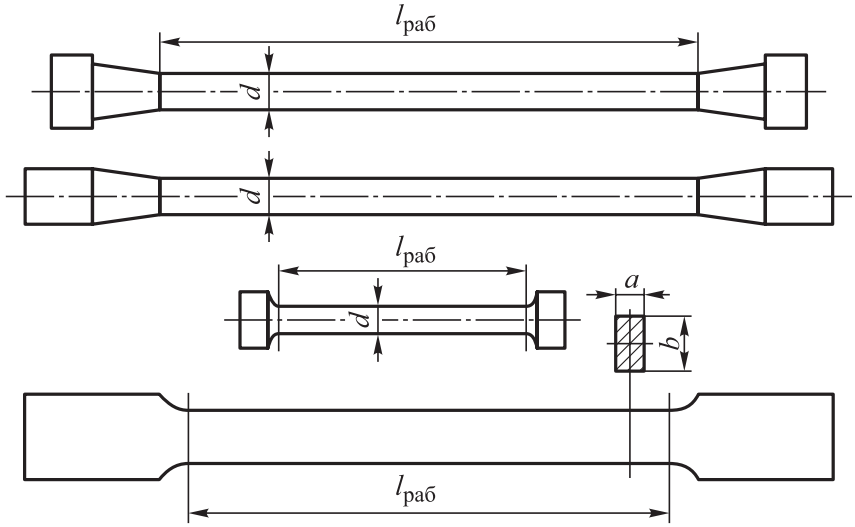


Рис. 1.22

Длину рабочей части $l_{раб}$ выбирают обычно раз в 15 больше диаметра d. При замерах деформаций используют только часть этой длины, не превышающую десяти диаметров. Существуют, однако, и более короткие образцы, у которых отношение $l_{раб}/d \le 5$. В случае прямоугольного поперечного сечения в качестве характеристики, определяющей рабочую длину $l_{раб}$, принимают диаметр равновеликого круга d.

При испытании на сжатие используют короткие цилиндрические образцы, высота которых превышает размеры поперечного сечения не более чем в два раза (рис. 1.23). При большой высоте сжатие образца сопровождается, как правило, его искривлением, искажающим результаты испытаний.

Абсолютные размеры образцов при испытаниях как на растяжение, так и на сжатие зависят от располагаемой мощности*

* Когда говорят о мощности испытательной машины или пресса, имеют в виду не работу, производимую в единицу времени, а те наибольшие силы, которые способна создать машина.

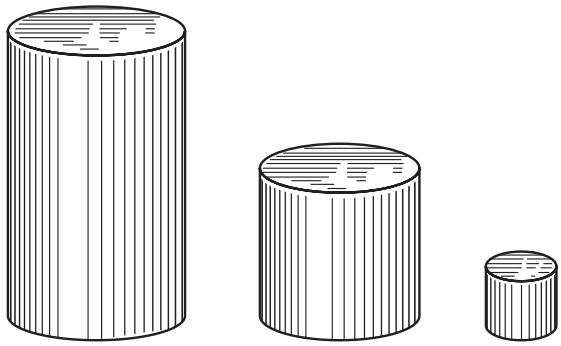


Рис. 1.23

испытательных машин и от размеров заготовки, из которой изготовляют образцы.

Испытания на растяжение и сжатие проводят на специальных машинах, где усилие создают либо с помощью груза, действующего на образец через систему рычагов, либо с помощью гидравлического давления, передаваемого на поршень. В первом случае машина называется *рычажной*, во втором — *гидравлической*.

На рис. 1.24 показана схема простейшей испытательной машины рычажного типа. От червяка *1* вручную или посредством электропривода поворачивается червячное колесо *3*, смещающее вниз силовой винт *2*. В образце *4* при этом возбуждается усилие, которое через рычаги *5*, *6*, *7* уравновешивается весом груза *F* на плече *a*. На рычаге *7* имеется градуировка в единицах силы, приходящейся на образец. Перемещение груза по рычагу возможно не только вручную, но и автоматически.

На рис. 1.25 показана схема гидравлической испытательной машины универсального типа, т.е. предназначенной для испытаний на растяжение и сжатие. В рабочую полость цилиндра *1* с помощью насоса *9* под давлением подается масло, и плунжер *2* поднимается. На плунжере установлена рама *3*, в верхней части которой имеется захват для образца *5*, испытываемого на растяжение. В случае испытания на сжатие образец устанавливают на нижнюю часть рамы. На рис. 1.25 образец для испытания на сжатие отмечен цифрой *6*. Рама *4* неподвижна, ее плоскость условно совмещена с плоскостью рисунка и рамы *3*. Усилие измеряется манометром *7*, проградуированным в единицах силы, приходящейся на образец. По окончании испытания масло под действием веса рамы *3* вытесняется через вентиль *8* обратно в масляную ванну *10*.

Мощность испытательных машин колеблется в пределах от нескольких граммов (для испытания волокон и нитей) до сотен

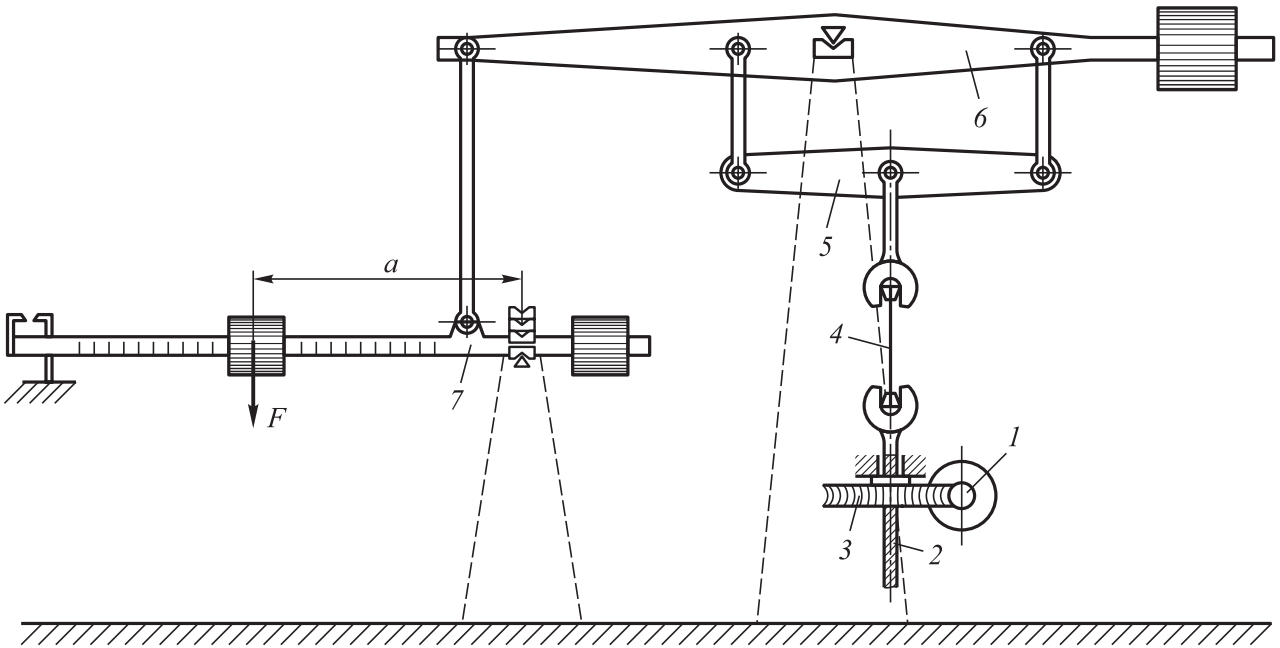


Рис. 1.24

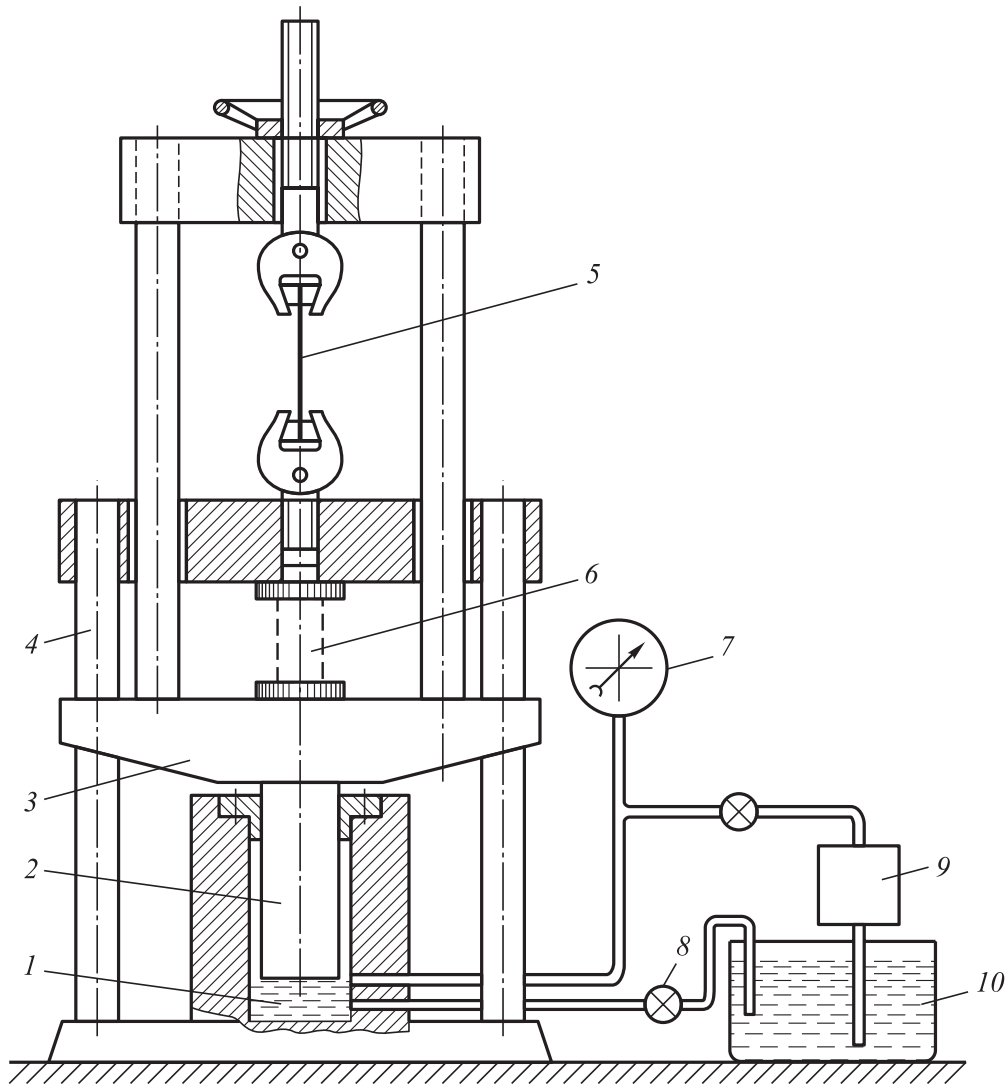


Рис. 1.25

тонн (для испытания крупных конструкций). Машины малой мощности (до тонны) выполняют обычно как рычажные. Для бо̀льших мощностей предпочтительным является гидравлический принцип.

При испытании на растяжение образец закрепляют в зажимах разрывной машины либо с помощью самозатягивающихся клиньев (рис. 1.26, *а*), либо в разъемных втулках (рис. 1.26, *б*). Зажимы на машине проектируют таким образом, чтобы исключить перекос образца и создать по возможности центральную передачу усилий без дополнительного изгиба. При испытании на сжатие цилиндрический образец свободно устанавливают между параллельными плитами.

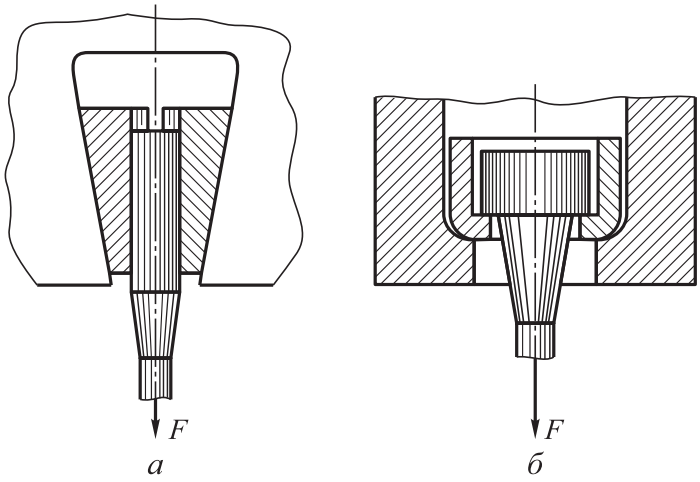


Рис. 1.26

Основной задачей испытания на растяжение (сжатие) является построение диаграммы растяжения (сжатия), т. е. зависимости между силой, действующей на образец, и его удлинением. Силу в рычажной машине определяют по положению уравновешивающего груза. В гидравлической машине силу определяют по шкале соответствующим образом проградуированного манометра. Для грубого замера удлинений используют простые приспособления (часто рычажного типа), фиксирующие смещение зажимов машины один относительно другого. Это смещение при больших удлинениях можно рассматривать как удлинение образца.

Для точного замера малых удлинений используют специальные приборы, называемые *тензометрами*. Установленный непосредственно на образце такой прибор регистрирует взаимные смещения двух сечений на рабочей части образца. Устройство и работа некоторых типов тензометров будут рассмотрены в гл. 14.

Современная испытательная машина обычно снабжена прибором для автоматической записи диаграммы растяжения — сжатия. Это дает возможность сразу после испытаний получить вычерченную в определенном масштабе кривую $F = f(\Delta l)$.

1.7. Диаграмма растяжения

Рассмотрим основные особенности диаграммы растяжения.

На рис. 1.27 показана типичная для углеродистой стали диаграмма испытания образца в координатах F, Δl. Полученная кривая условно может быть разделена на следующие четыре зоны.

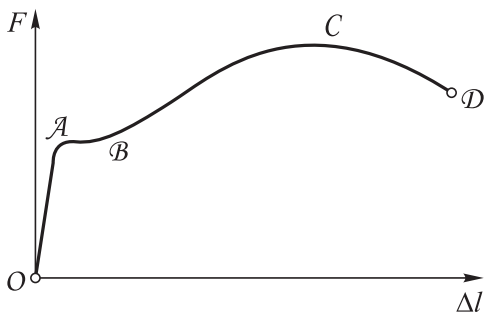


Рис. 1.27

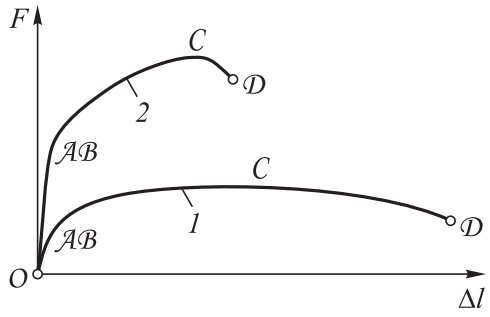


Рис 1.28

Зона OA носит название *зоны упругости*. Здесь материал подчиняется закону Гука и

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}.$$

Этот участок кривой на рис. 1.27 для большей наглядности показан с отступлением от масштаба. Удлинения Δl на участке OA очень малы, и прямая OA, будучи вычерченной в масштабе истинных удлинений, совпала бы в пределах толщины линии с осью ординат.

Значение силы, до которой остается справедливым закон Гука, зависит от размеров образца и физических свойств материала.

Зона AB называется *зоной общей текучести*, а участок AB диаграммы — площадкой текучести. Здесь происходит существенное изменение длины образца без заметного увеличения нагрузки. Наличие площадки текучести AB для металлов не является характерным. В большинстве случаев при испытании на растяжение и сжатие площадка AB не обнаруживается и диаграмма растяжения образца имеет вид кривых, показанных на рис. 1.28. Кривая *1* типична для алюминия и отожженной меди, кривая *2* — для высококачественных легированных сталей.

Зона BC (см. рис. 1.27) называется *зоной упрочнения*. Здесь удлинение образца сопровождается возрастанием нагрузки, но неизмеримо более медленным (в сотни раз), чем на упругом участке. В стадии упрочнения на образце намечается место будущего разрыва и начинает образовываться так называемая *шейка* — местное сужение образца (рис. 1.29). Однако место будущего разрыва намечается ранее — при общей текучести. Обнаружить его можно с помощью наклеенных термопар, выявляющих место наиболее интенсивного повышения температуры образца.

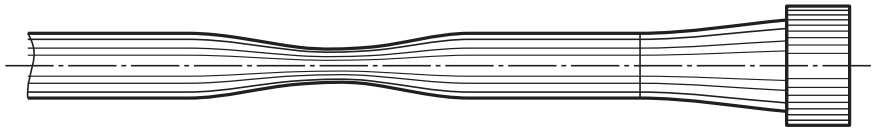


Рис. 1.29

По мере растяжения образца утонение шейки прогрессирует. Когда относительное уменьшение площади сечения сравняется с относительным возрастанием напряжения, сила F достигнет максимума (точка C). В дальнейшем удлинение образца происходит с уменьшением силы, хотя среднее напряжение в поперечном сечении шейки и возрастает. Удлинение образца носит в этом случае местный характер, и поэтому участок кривой CD называется *зоной местной текучести*. Точка D соответствует разрушению образца.

Если испытуемый образец, не доводя до разрушения, разгрузить (точка K на рис. 1.30), то в процессе разгрузки зависимость между силой F и удлинением Δl изобразится прямой KL (см. рис. 1.30). Опыт показывает, что эта прямая параллельна прямой OA. При разгрузке удлинение полностью не исчезает. Оно уменьшается на величину упругой части удлинения (отрезок LM). Отрезок OL представляет собой остаточное удлинение. Его называют также пластическим удлинением, а соответствующую ему деформацию — пластической деформацией. Таким образом,

$$OM = \Delta l_{\text{упр}} + \Delta l_{\text{ост}}.$$

Соответственно

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{упр}} + \varepsilon_{\text{ост}}.$$

Если образец был нагружен в пределах участка OA и затем разгружен, то удлинение будет чисто упругим и $\Delta l_{\text{ост}} = 0$.

При повторном нагружении образца диаграмма растяжения принимает вид прямой LK и далее — кривой KCD (см. рис. 1.30), как будто промежуточной разгрузки и не было.

Положим, что у нас имеются два одинаковых образца, изготовленных из одного и того же материала. Один из образцов до испытания нагружению не подвергается, а другой был пред-

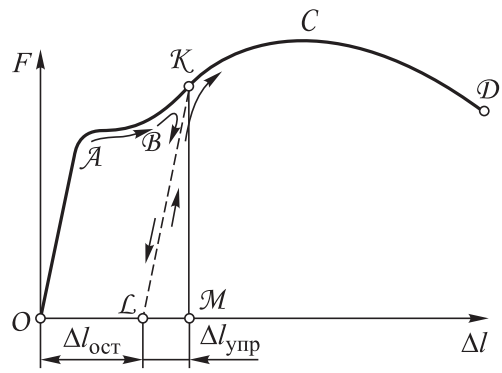


Рис. 1.30

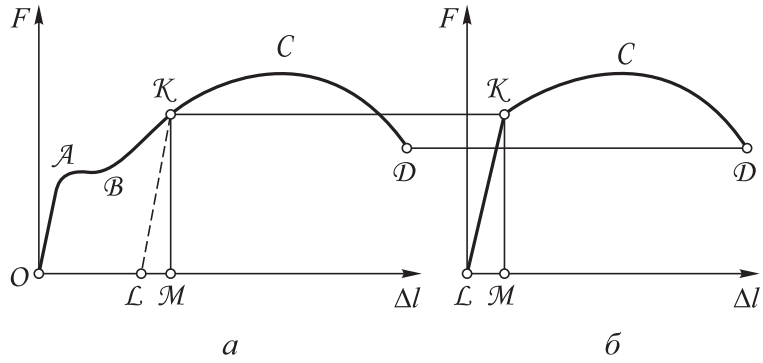


Рис. 1.31

варительно нагружен силами, вызвавшими в образце остаточные деформации.

Испытывая первый образец, мы получим диаграмму растяжения $OABCD$, показанную на рис. 1.31, *а*. При испытании второго образца отсчет удлинения будет производиться, естественно, от ненагруженного состояния и остаточное удлинение OL учтено не будет. В результате получим укороченную диаграмму $LKCD$ (рис. 1.31, *б*). Отрезок MK соответствует силе предварительного нагружения. Таким образом, вид диаграммы для одного и того же материала зависит от степени начального нагружения (вытяжки), а само нагружение выступает теперь уже в роли некоторой предварительной технологической операции. Весьма существенным является то, что отрезок LK (см. рис. 1.31, *а*) оказывается больше отрезка OA. Следовательно, в результате предварительной вытяжки материал приобретает способность воспринимать без остаточных деформаций бо̀льшие нагрузки.

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования носит название *наклепа или нагартовки* и широко используется в технике.

Например, для придания упругих свойств листовую медь или латунь в холодном состоянии прокатывают на валках. Цепи, тросы, ремни часто подвергают предварительной *вытяжке* силами, превышающими рабочие, чтобы избежать остаточных удлинений в дальнейшем. В некоторых случаях явление наклепа оказывается нежелательным, как, например, в процессе штамповки многих тонкостенных деталей. В этом случае для того, чтобы избежать разрыва листа, вытяжку производят в несколько ступеней. Перед очередной операцией вытяжки деталь подвергают отжигу, в результате которого наклеп снимается.

1.8. Механизм образования деформации

До сих пор, говоря об испытании образца на растяжение, мы касались только внешней стороны явления, не затрагивая внутренних процессов, происходящих на уровне молекулярного строения. И это естественно, поскольку в основу подхода была положена схема сплошной среды, лишенной каких бы то ни было структурных особенностей. Между тем процессы, происходящие в материале при деформации и разрушении, определяются структурой вещества и принципиально не могут быть объяснены средствами механики сплошной среды. Поэтому их изучение выходит за рамки задач, рассматриваемых в курсе сопротивления материалов. Это — уже вопросы физики твердого тела, построенной на совершенно отличной от сопротивления материалов основе. Тем не менее, изучая сопротивление материалов, необходимо иметь хотя бы самое общее представление о том, что происходит в материале при нагружении и от чего зависят упругость и пластичность.

Твердые тела подразделяются, как известно, на аморфные и кристаллические. Что касается первых, то диаграмма растяжения таких тел не носит стабильного характера; она существенно зависит от времени действия сил, а сами материалы в своем поведении обнаруживают качественное сходство с вязкой жидкостью. Мы остановимся только на механизме деформирования металлов. Все металлы в том виде, в каком они применяются в машиностроении, имеют поликристаллическую структуру, т.е. состоят из множества мелких кристалликов, хаотически расположенных в объеме. Внутри кристаллов атомы металла располагаются в определенном порядке, образуя правильную пространственную решетку. Система расположения атомов зависит от свойств атомов. Она меняется также в зависимости от физических условий кристаллизации.

Между атомами кристаллической решетки существуют силы взаимодействия. При большом расстоянии между двумя атомами имеет место сила взаимного притяжения, при малом расстоянии — отталкивания. Наличием этих сил и законами их изменения по разным направлениям определяется система кристаллизации, свойственная данному металлу. Для свободного, ненагруженного кристалла система указанных сил является такой же строго определенной, как и расположение самих атомов.

Под действием внешних сил атомы в решетке получают взаимные смещения и силы взаимодействия между ними меняются. Зависимость сил взаимодействия от смещений носит сложный характер, однако в пределах малых перемещений ее можно рассма-

тривать как линейную. Возникающие в кристаллической решетке смещения по разным направлениям для множества хаотически расположенных кристалликов интегрально порождают пропорциональную зависимость между смещениями точек тела и внешними силами, что и находит свое выражение в законе Гука.

По устранении внешних сил атомы снова занимают в кристаллической решетке свое строго определенное положение и геометрические размеры тела полностью восстанавливаются. Таким образом объясняется свойство упругости.

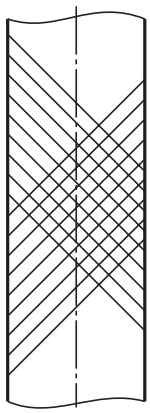


Рис. 1.32

Рассмотрим теперь процесс возникновения пластических деформаций. Опыт показывает, что образование пластических деформаций связано со сдвигом в кристаллической решетке. Наглядное подтверждение этому дает, в частности, наблюдение за поверхностью полированного образца при испытании на растяжение. В зоне общей текучести и упрочнения, т. е. при возникновении заметных пластических деформаций, поверхность образца покрывается системой тонких линий или, как их называют, *полос скольжения* (рис. 1.32). Эти линии имеют преимущественное направление, составляющее угол, близкий к 45°, с осью стержня, и практически совпадают с плоскостями максимальных касательных напряжений.

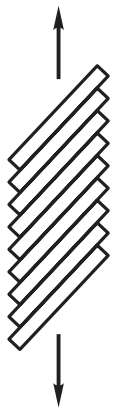


Рис. 1.33

Механизм удлинения показан в упрощенном виде на рис. 1.33. Действительная картина является более сложной, так как носит пространственный характер, и сдвиг происходит не только в одном семействе параллельных плоскостей, как это показано на рисунке, а вообще во всех семействах плоскостей, составляющих угол, близкий к 45°, с осью стержня.

В пределах одного кристалла образование пластических деформаций происходит в результате смещения части кристалла по некоторой плоскости на целое число элементов решетки (плоскость AA на рис. 1.34). Наименьшая пластическая деформация соответствует смещению на один элемент. Это — своего рода квант пластической деформации. В результате такого смещения каждый предыдущий атом занимает место последующего, и в итоге все атомы оказываются на местах, присущих данной кристаллической структуре. Следовательно, кристалл сохраняет свои свойства, меняя лишь внешнюю конфигурацию.

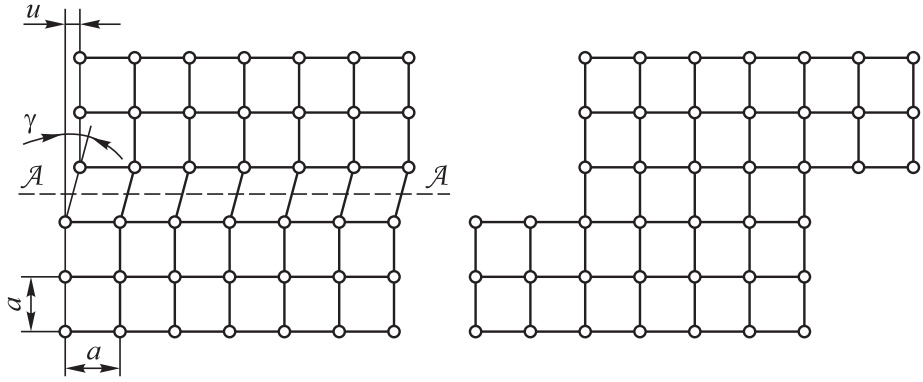


Рис. 1.34

Предположим, что смещение атомов при сдвиге происходит одновременно по всей плоскости AA (см. рис. 1.34), и оценим порядок касательных напряжений, необходимых для образования в кристалле пластических деформаций. Достаточно очевидно, что касательная составляющая сил взаимодействия в плоскости AA при сдвиге меняется в зависимости от взаимного смещения частей кристалла по некоторому периодическому закону (рис. 1.35).

Пока взаимное смещение u составляет меньше половины расстояния между атомами ($<a/2$), силы сцепления препятствуют сдвигу. Однако если половина пути от исходной позиции до соседней пройдена, силы взаимодействия способствуют дальнейшему смещению решетки к новому устойчивому положению равновесия. Таким образом, при $u = a/2$ напряжение τ меняет знак. Примем, что τ изменяется по синусоидальному закону $\tau = \tau_{max} \sin \frac{2\pi u}{a}$, где τ_{max} — напряжение, по достижении которого образуются пластические деформации.

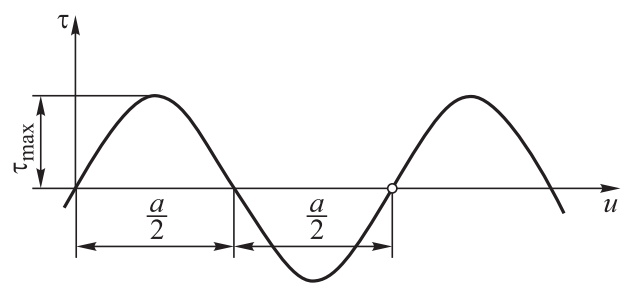


Рис. 1.35

При малых смещениях $\sin\frac{2\pi u}{a} \approx \frac{2\pi u}{a}$, и тогда имеем прямую пропорциональность, соответствующую закону Гука, $\tau = \tau_{max}\frac{2\pi u}{a}$, но $u/a = \gamma$, а $\tau = G\gamma$. Следовательно, $\tau_{max} = \frac{G}{2\pi}$.

При растяжении стержня наибольшие касательные напряжения возникают в площадках, наклоненных под углом 45° к оси образца, и равны $\sigma/2$. Полагая, что среднее значение коэффициента Пуассона для изотропных материалов $\nu = 0{,}3$, получаем $G = \frac{E}{2{,}6}$, откуда $\sigma_{max} \approx \frac{E}{2{,}6\,\pi}$.

Таким образом, можно ожидать, что стержень при растяжении способен без образования пластических деформаций выдерживать напряжения порядка одной десятой от значения модуля упругости *E*.

Конечно, такой способ расчета не может претендовать на высокую точность; многое зависит от ориентации кристалла, его строения, а также от типа связей между атомами в кристаллической решетке. Но любопытно, что множество достаточно точных расчетов по оценке так называемой идеальной (расчетной) прочности дает для всех материалов практически тот же результат. Напряжения необратимого скольжения, а также и отрыва по основным кристаллографическим плоскостям лежат для всех материалов в пределах 5...16 % от *E*. Прямая связь между идеальной прочностью и модулем упругости очевидна. Они имеют общее происхождение и определяются характером межатомного сцепления.

Следует отметить, что для всех материалов результаты теоретических расчетов по идеальной прочности находятся в резком противоречии с тем, что мы получаем при испытании образцов на растяжение. И возникновение общей текучести, и последующий разрыв образца происходят при напряжениях как минимум в десятки, а то и в сотни раз меньших, чем те, которые прогнозируются расчетом.

Основная погрешность принятой расчетной схемы заключается в предположении, что смещение атомов при сдвиге происходит по всей плоскости одновременно. На самом деле переход атомов в соседнее положение происходит с линейными нарушениями чередования атомных плоскостей в кристаллической решетке твердых

тел — *дислокациями* (в переводе с греческого языка — *смещение*) и распространяющимися по плоскости подобно волне.

Геометрические формы линейных дефектов очень сложные. Однако предельные их случаи — краевая и винтовая — могут быть представлены в виде простых схем (рис. 1.36).

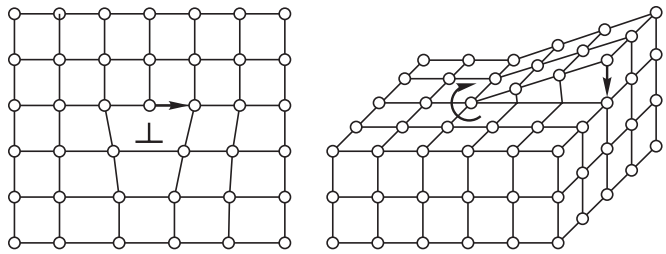


Рис. 1.36

На рис. 1.37 показана простейшая схема так называемой краевой дислокации, которая характеризуется наличием лишней вертикальной атомной полуплоскости в верхней части кристалла. После того как дислокация «пробежала» весь кристалл слева направо (см. рис. 1.37), форма кристалла изменилась, хотя структура осталась неизменной.

Рис. 1.37

Перемещение дислокации через кристалл можно уподобить движению складки по ковру. Когда складка прошла через весь ковер, последний оказывается несколько сдвинутым. Но сила, необходимая для перемещения складки, существенно меньше той, которая нужна, чтобы сдвинуть весь ковер целиком.

Кстати, нечто похожее получается и при разрыве связи между атомами. Попробуйте разорвать лист бумаги, взяв его за противоположные края. Ничего не получится. Поэтому мы и рвем бумагу хорошо всем известным и давно зарекомендовавшим себя способом.

Движение дислокаций сопровождается динамическими эффектами. Атомы приобретают кинетическую энергию и совершают колебания около вновь приобретенного положения равновесия. Следовательно, имеет место выделение теплоты; образец при пластических деформациях заметно нагревается. Возникают и акустические эффекты. Они могут быть обнаружены даже на самой ранней стадии возникновения пластических деформаций с помощью специальной чувствительной аппаратуры.

В металлах образование пластических деформаций начинается уже при сравнительно небольших нагрузках. Среди множества хаотически ориентированных кристалликов всегда находится некоторое количество неблагополучно расположенных или даже имеющих внутренние дефекты, вследствие которых возможны остаточные изменения уже при сравнительно небольших силах в пределах упругой зоны диаграммы растяжения. Число таких кристалликов, однако, невелико, и местные пластические деформации не сказываются заметным образом на общей линейной зависимости между силой и перемещением, свойственной первой стадии нагружения образца.

При достаточно больших силах пластические деформации в образце становятся преобладающими. Необратимые сдвиги происходят в большинстве кристаллов в их наиболее слабых плоскостях, особенно, если последние имеют направление, близкое к плоскостям максимальных касательных напряжений в образце. Это находит свое выражение в образовании полос скольжения.

При растяжении образца соседние кристаллы взаимодействуют между собой, и возникшее в одном кристалле пластическое смещение не может возрастать неограниченно, так как оказывается блокированным соседним, более удачно ориентированным кристаллом. Этим обстоятельством и объясняется возникновение зоны упрочнения и некоторое увеличение растягивающей силы при наличии пластических деформаций.

Не следует, однако, думать, что с вытяжкой число дислокаций уменьшается. Напротив. Каждый кристаллик взаимодействует с соседними, и возникают новые дислокации. Некоторые типы дислокаций (на рис. 1.36 показан только один тип, а их много) способны к воспроизводству. Если дислокация не находит выхода и упирается в соседний кристаллик, то к месту блокировки подходят следом новые и новые. Дислокации в этом месте накапливаются. Но несколько непосредственно соседствующих дислокаций — это уже микротрещина, которая по мере увеличения растягивающих напряжений способна начать расширяться. В структуре материала возможно существование микротрещин и по условиям кристаллизации.

Получается, что процесс разрушения имеет в своей основе два взаимообусловленных и взаимоконкурирующих механизма, «борющихся» за право разрушить образец. Первый механизм — образование пластических деформаций путем сдвига по определенным кристаллографическим плоскостям. Второй — образование и развитие трещин с последующим разрывом. Иногда верх берет первый, иногда — второй. Об этих вопросах нам предстоит поговорить еще и в дальнейшем.

Возвращаясь к закону разгрузки, следует указать, что в результате приложения к образцу внешних сил в кристаллах возникают смещения атомов не только на целое число позиций, но сохраняется также и некоторое искажение кристаллической решетки. Следовательно, наряду с пластической деформацией существует и упругая. При разгрузке форма искаженной решетки восстанавливается, т.е. снимается упругая деформация. Пластическая же деформация, понятно, не восстанавливается.

Весьма существенно, что процесс снятия упругой деформации происходит по тем же законам изменения внутрикристаллических сил, что и в начальной стадии нагружения образца. Поэтому прямая разгрузки KL (см. рис. 1.30) параллельна прямой начального нагружения OA.

Перейдем теперь к числовым механическим характеристикам, которые определяют при испытании материалов на растяжение и сжатие.

1.9. Основные механические характеристики материала

Чтобы дать количественную оценку описанным выше свойствам материала, перестроим диаграмму растяжения $F = f(\Delta l)$ в координатах σ и ε. Для этого поделим усилие на начальную площадь поперечного сечения образца A_o, а удлинение — на рабочую длину образца до нагружения l_o. Так как эти величины постоянны, то диаграмма $\sigma = f(\varepsilon)$ (рис. 1.38) имеет тот же вид, что и диаграмма растяжения (см. рис. 1.30), но будет характеризовать уже не свойства образца, а свойства материала и называться *условной диаграммой растяжения*.

Отметим на диаграмме характерные точки и дадим определение соответствующих им числовых величин.

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называется *пределом пропорциональности* $\sigma_{пц}$. Предел пропорциональности зависит от условно принятой степени при-

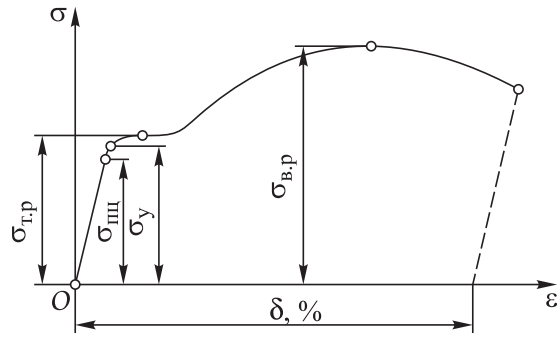


Рис. 1.38

ближения, с которой начальный участок диаграммы можно рассматривать как прямую. Степень отклонения кривой $\sigma = f(\varepsilon)$ от прямой $\sigma = E\varepsilon$ определяют по величине угла, который составляет касательная к диаграмме с осью σ. В пределах закона Гука тангенс этого угла определяется величиной $1/E$. Обычно считают, что если отношение $d\varepsilon/d\sigma$ оказалось на 50 % больше, чем $1/E$, то предел пропорциональности достигнут.

Упругие свойства материала сохраняются до напряжения, называемого пределом упругости. Под *пределом упругости* $\sigma_у$ понимается такое наибольшее напряжение, до которого материал не получает остаточных деформаций.

Для того чтобы найти предел упругости, необходимо после каждой дополнительной нагрузки разгружать образец и следить, не образовалась ли остаточная деформация. Так как пластические деформации в отдельных кристаллах появляются уже на самой ранней стадии нагружения, ясно, что предел упругости, как и предел пропорциональности, зависит от требований точности, которые устанавливают на производимые замеры. Обычно остаточную деформацию, соответствующую пределу упругости, принимают в пределах $\varepsilon_{ост} = (1 \ldots 5)\cdot 10^{-5}$, т.е. 0,001 ... 0,005 %. Соответственно этому допуску предел упругости обозначают через $\sigma_{0,001}$ или $\sigma_{0,005}$.

Понятия предела пропорциональности и предела упругости довольно условны; они решающим образом зависят от условно принятой нормы на угол наклона касательной и на остаточную деформацию. Поэтому значения $\sigma_{пц}$ и $\sigma_у$ в справочные данные по свойствам материалов обычно не включают.

Следующей, более определенной характеристикой является предел текучести. Под *пределом текучести* $\sigma_т$ понимается то напряжение, при котором происходит рост деформации без заметного увеличения нагрузки. В тех случаях, когда на диаграмме отсутствует явно выраженная площадка текучести, за предел текучести условно

принимают напряжение, при котором остаточная деформация $\varepsilon_{ост} = 0{,}002$, т.е. 0,2 % (рис. 1.39). В некоторых случаях устанавливают предел $\varepsilon_{ост} = 0{,}005$ или $\varepsilon_{ост} = 0{,}5$ %.

Условный предел текучести обозначают через $\sigma_{0,2}$ и $\sigma_{0,5}$ в зависимости от принятой величины допуска на остаточную деформацию. Индекс 0,2 обычно в обозначениях предела текучести опускают. Если необходимо отличить предел текучести на растяжение от предела текучести на сжатие, то в обозначение вводится дополнительный индекс «р» или «с» — соответственно растяжению или сжатию. Таким образом, для предела текучести получаем обозначения $\sigma_{т.р}$ и $\sigma_{т.с}$.

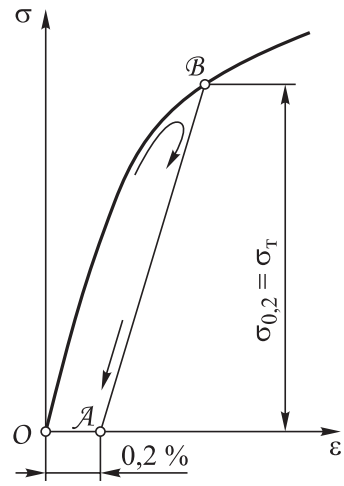


Рис. 1.39

Предел текучести легко поддается определению и является одной из основных механических характеристик материала. Только не следует думать, что для определения условного предела текучести необходима последовательная нагрузка и разгрузка, пока остаточная деформация не достигнет заданного уровня. Все гораздо проще. Надо при прямом нагружении записать диаграмму испытания (см. рис. 1.39) и по оси абсцисс отложить заданную деформацию 0,2 %. Затем из полученной точки A провести прямую, параллельную начальному прямому участку. Ордината точки пересечения этой прямой с диаграммой (точка B) как раз и даст искомое значение условного предела текучести.

Отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к его начальной площади поперечного сечения носит название *предела прочности*, *или временного сопротивления*. Временное условное сопротивление при испытании на растяжение обозначают через $\sigma_{в.р}$, на сжатие — через $\sigma_{в.с}$.

Существенно заметить, что $\sigma_{в.р}$ не является напряжением, при котором разрушается образец. Если относить растягивающую силу не к начальной площади сечения образца, а к наименьшему сечению в данный момент, можно обнаружить, что среднее напряжение, которое называется *истинным напряжением*, в наиболее узком сечении образца перед разрывом существенно больше, чем $\sigma_{в.р}$.

Значения $\sigma_{т.р}$ и $\sigma_{в.р}$ для некоторых наиболее часто встречающихся материалов приведены в табл. 1.1.

Для высокопрочных нитей и нитевидных кристаллов основной характеристикой наряду с модулем упругости и плотностью явля-

Таблица 1.1

Материал	$\sigma_{т.р}$	$\sigma_{т.с}$	$\sigma_{в.р}$	$\sigma_{в.с}$	δ, % ($l_0 = 5d$)
	МПа				
Сталь низкоуглеродистая	250	250	390	—	42
Сталь 30 незакаленная	330	330	530	—	28
Сталь 30 закаленная	1030	900	1100	—	11
Сталь 45 незакаленная	370	370	620	—	24
Сталь 45 закаленная	1040	970	1080	—	13
Сталь У8 незакаленная	250	430	630	—	25
Сталь У8 закаленная	700	700	1100	—	16
Сталь 30ХГСА закаленная	1400	1400	1620	—	10
Сталь 40ХНВ закаленная	1720	2100	2050	—	10
Чугун серый СЧ28	140	310	150	640	0,6
Титан технический	520	520	600	—	23
Медь отожженная	55	55	220	—	46
Медь прутковая	250	250	320	—	15
Латунь	330	330	450	—	17
Бронза	110	110	140	—	7,5
Алюминий	50	50	85	—	35
Дюраль	340	340	540	—	13

Таблица 1.2

Материал	$\sigma_{в.р}$, МПа	ρ, кг/м^3
Вольфрамовая проволока	4000	19 300
Стекловолокно	3500 — 4600	2500
Бороволокно	3400	2200 — 2600
Карбидное волокно	3400	3000
Промышленное углеродное волокно:		
высокомодульное	2400	1870
высокопрочное	3300	1760
Усы (нитевидные кристаллы):		
графит	20 000	2200
сапфир (Al_2O_3)	15 000	4000
асбест	6000	3400

ется временное сопротивление (табл. 1.2). Именно им в первую очередь и определяется прочность создаваемого композита. Что же касается предела текучести, то его для этих структурных элементов не определяют. Нити и нитевидные кристаллы лишены тех структурных свойств, которые лежат в основе явления общей текучести и последующего упрочнения.

При испытании на растяжение определяют еще одну характеристику материала — так называемое *удлинение при разрыве* δ, представляющее собой среднюю остаточную деформацию на определенной стандартной длине образца к моменту разрыва. Определяют δ в процентах следующим образом.

Перед испытанием на поверхность образца наносят ряд рисок, делящих рабочую часть образца на равные части. После того как образец испытан и разорван, обе его части составляют по месту разрыва (рис. 1.40). Далее, по имеющимся на поверхности рискам

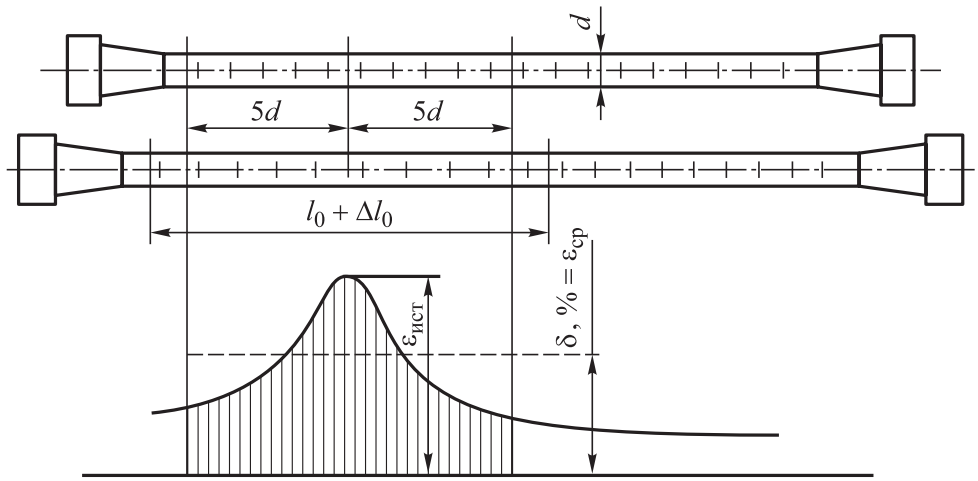


Рис. 1.40

от сечения разрыва вправо и влево откладывают отрезки, имевшие до испытания длину 5*d* (см. рис. 1.40). Таким образом определяется среднее удлинение на стандартной длине $l_0 = 10d$. В некоторых случаях за l_0 принимают длину, равную 5*d* (см. табл. 1.1).

Удлинение при разрыве в процентах будет следующим:

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} 100.$$

Возникающие деформации распределены по длине образца неравномерно. Если произвести обмер отрезков, расположенных между соседними рисками, можно построить эпюру остаточных

удлинений, показанную на рис. 1.40. Наибольшее удлинение возникает в месте разрыва. Оно называется обычно *истинным удлинением при разрыве*.

Диаграмма растяжения, построенная с учетом уменьшения площади A и местного увеличения деформации, называется *истинной диаграммой растяжения* (кривая $OC'\mathcal{D}'$ на рис. 1.41).

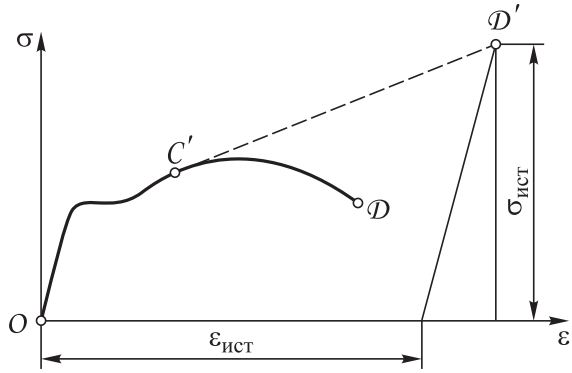


Рис. 1.41

Построение истинной диаграммы бывает необходимо при теоретическом анализе операции глубокой штамповки и вообще при решении задач образования больших деформаций. Это построение выполняют приближенными способами.

Один из них заключается в следующем. Сначала определяют координаты $\sigma_{ист}$ и $\varepsilon_{ист}$ точки $\mathcal{D}'$ — истинной точки разрыва (см. рис. 1.41). Очевидно,

$$\sigma_{ист} = F_D/A_{ш},$$

где F_D — значение растягивающей силы в момент разрыва в точке D; $A_{ш}$ — площадь поперечного сечения шейки после разрыва.

Значение $\varepsilon_{ист}$ легко определить обмером разорванного образца из условия равенства объемов материала до и после испытания. Вблизи места разрыва единица длины образца имеет до испытания объем $A \cdot 1$, а после разрыва — $A_{ш}(1 + \varepsilon_{ист})$. Тогда $A = A_{ш}(1 + \varepsilon_{ист})$, откуда

$$\varepsilon_{ист} = \frac{A}{A_{ш}} - 1.$$

Абсциссу точки $\mathcal{D}'$ определим по формуле

$$\varepsilon_{\mathcal{D}'} = \frac{A}{A_{ш}} - 1 + \frac{\sigma_{ист}}{E}.$$

Далее, из найденной таким образом точки D' к кривой OD проводят касательную $D'C'$. На участке OC' обычная диаграмма совпадает с истинной, поскольку шейка на образце еще не образовалась. При больших деформациях за истинную диаграмму принимают прямую $C'D'$. Вместо прямой $C'D'$ можно было бы с той же степенью приближения провести также плавно изменяющуюся кривую, касательную к кривой OD.

1.10. Пластичность и хрупкость. Твердость

Способность материала без разрушения получать большие остаточные деформации носит название *пластичности*. Свойство пластичности имеет решающее значение для таких технологических операций, как штамповка, вытяжка, волочение, гибка и др. Мерой пластичности является удлинение δ при разрыве. Чем больше δ, тем более пластичным считается материал. К числу весьма пластичных материалов относятся отожженная медь, алюминий, латунь, низкоуглеродистая сталь и др. Менее пластичными являются дюраль и бронза. К числу слабо пластичных материалов относятся многие легированные стали.

Свойством, противоположным пластичности, является *хрупкость*, т. е. способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. Материалы, обладающие этим свойством, называются *хрупкими*. Для таких материалов удлинение δ при разрыве не превышает 2…5 %, а в ряде случаев измеряется долями процента. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, стекло, кирпич, камни и др. Диаграмма растяжения хрупких материалов не имеет площадки текучести и зоны упрочнения (рис. 1.42).

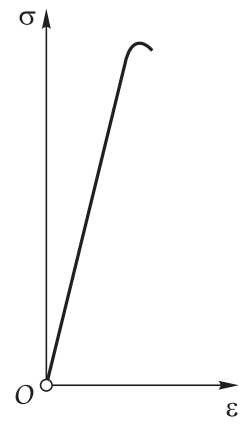


Рис. 1.42

По-разному ведут себя пластичные и хрупкие материалы и при испытании на сжатие. Как уже упоминалось, для испытания на сжатие используют короткие цилиндрические образцы, располагаемые между параллельными плитами. Для низкоуглеродистой стали диаграмма сжатия образца имеет вид кривой, показанной на рис. 1.43. Здесь, как и у диаграммы растяжения, обнаруживается площадка текучести с последующим переходом к зоне упрочнения. Однако нагрузка не падает, как при растяжении, а резко возрастает. Происходит

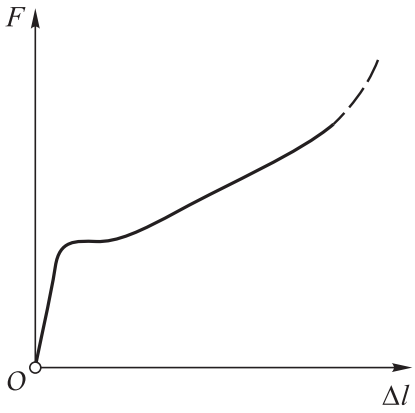


Рис. 1.43

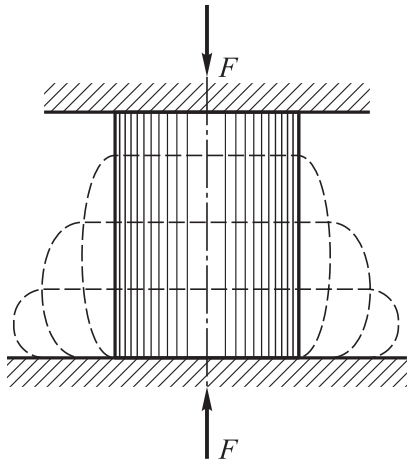


Рис. 1.44

это в результате того, что площадь поперечного сечения сжатого образца увеличивается; сам образец вследствие трения на торцах принимает бочкообразную форму (рис. 1.44). Довести образец пластичного материала до разрушения практически не удается. Испытуемый цилиндр расплющивается в тонкий диск (см. рис. 1.44), и дальнейшее испытание ограничивается возможностями машины. Поэтому предел прочности при сжатии для такого рода материалов найден быть не может (см. табл. 1.1).

Иначе ведут себя при испытании на сжатие хрупкие материалы. Диаграмма сжатия этих материалов сохраняет качественные особенности диаграммы растяжения (см. рис. 1.42). Предел прочности хрупкого материала при сжатии определяется так же, как и при растяжении. Разрушение образца происходит с образованием трещин по наклонным или продольным плоскостям (рис. 1.45).

Сопоставление предела прочности хрупких материалов при растяжении $\sigma_{в.р}$ с пределом прочности при сжатии $\sigma_{в.с}$ показывает, что эти материалы обладают, как правило, более высокими прочностными показателями при сжатии, нежели при растяжении. Отношение

$$k = \frac{\sigma_{в.р}}{\sigma_{в.с}}$$

для чугуна колеблется в пределах 0,2 ... 0,4; для керамических материалов $k = 0{,}1 \ldots 0{,}2$.

Для пластичных материалов прочностные характеристики на растяжение и сжатие сопоставляют по пределу текучести. Принято считать, что $\sigma_{т.р} \approx \sigma_{т.с}$. Принято... Но так ли это на самом деле — ска-

Рис. 1.45

зать трудно. Справочная литература не щедра на характеристики материалов при сжатии. Значения предела текучести при сжатии, приведенные ранее, определяли в свое время специально, чтобы заполнить второй столбец табл. 1.1*. Что же касается предела прочности при сжатии, то здесь также многое остается неясным. Достаточно сказать, что в отличие от растяжения результаты испытания оказываются зависящими также и от формы поперечного сечения образца. Испытывать на сжатие цилиндр или кубик — не совсем одно и то же.

Существуют материалы, способные воспринимать при растяжении бо́льшие нагрузки, чем при сжатии. Это обычно материалы, имеющие волокнистую структуру, — дерево и некоторые композиты. Этим свойством обладают и некоторые металлы, например магний.

Деление материалов на пластичные и хрупкие является условным не только потому, что между теми и другими не существует резкого перехода в значениях δ. В зависимости от условий испытания многие хрупкие материалы способны вести себя как пластичные, а пластичные — как хрупкие.

Например, чугунный образец при испытании на растяжение под большим давлением окружающей среды ($p > 400$ МПа) разрывается с образованием шейки. Многие горные породы, находящиеся под давлением вышележащих слоев, при сдвигах земной коры претерпевают пластические деформации. Образец пластичного материала, имеющий кольцевую выточку (рис. 1.46), при растяжении получает хрупкий разрыв в связи с тем, что в ослабленном

* Опыты ставил К. К. Лихарев.

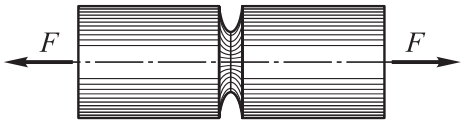


Рис. 1.46

сечении затруднено образование пластических деформаций сдвига по наклонным площадкам.

Очень большое влияние на проявление свойств пластичности и хрупкости оказывают скорость нагружения и температура. При быстром нагружении более резко проявляется свойство хрупкости, а при медленном — свойство пластичности. Например, хрупкое стекло способно при длительном воздействии нагрузки при нормальной температуре получать остаточные деформации. Пластичные же материалы, такие как низкоуглеродистая сталь, под воздействием резкой ударной нагрузки проявляют хрупкие свойства.

Одной из основных технологических операций, позволяющих изменять в нужном направлении свойства материала, является термообработка. Из данных, приведенных в табл. 1.1, видно, например, что закалка резко повышает прочностные характеристики стали и одновременно снижает ее пластические свойства. Для большинства широко применяемых в машиностроении материалов хорошо известны те режимы термообработки, которые обеспечивают получение необходимых механических характеристик материала.

Испытание образцов на растяжение и сжатие дает объективную оценку свойств материала. В производстве, однако, для оперативного контроля за качеством изготовляемых деталей этот метод представляет в ряде случаев значительные неудобства. Например, при помощи испытания на растяжение — сжатие трудно контролировать правильность термообработки готовых изделий. Для такого контроля нужно было бы для каждой партии деталей изготовлять несколько образцов, проходящих все стадии термообработки вместе с деталями, а затем подвергать эти образцы испытанию на растяжение или сжатие и таким образом определять механические характеристики для готовой партии деталей. Такой прием сильно загружал бы производство и снижал бы оперативность контроля.

Поэтому на практике большей частью прибегают к сравнительной оценке свойств материала с помощью пробы на твердость.

Под *твердостью* понимается способность материала противодействовать механическому проникновению в него посторонних тел. Понятно, что такое определение твердости повторяет, по существу, определение прочности. В материале при вдавливании в него постороннего тела возникают местные пластические деформации, сопровождающиеся при дальнейшем увеличении сил местным разрушением. Поэтому показатель твердости связан с

показателями прочности и пластичности и зависит от конкретных условий ведения испытания.

Наиболее широкое распространение получили методы измерения твердости по Бринеллю и по Роквеллу. В первом случае в поверхность исследуемой детали вдавливают стальной шарик диаметром 10 мм, во втором — алмазный острый наконечник. По обмеру полученного отпечатка судят о твердости материала. Испытательная лаборатория обычно располагает составленной путем экспериментов переводной таблицей, с помощью которой можно приближенно по показателю твердости определить предел прочности материала. Таким образом, в результате испытаний на твердость удается определить прочностные показатели материала, не разрушая деталь.

1.11. Влияние температуры и фактора времени на механические характеристики материала

Все сказанное выше о свойствах материалов относилось к испытаниям в так называемых нормальных условиях, т. е. при температуре 20 °С и при сравнительно небольших скоростях изменения нагрузок и удлинений, которые обеспечиваются обычными испытательными машинами. Нормальной скоростью деформации считается $d\varepsilon/dt = 0{,}01 \ldots 3$ мин$^{-1}$.

Диапазон температур, в пределах которого реально работают конструкционные материалы, выходит далеко за рамки указанных нормальных условий. Есть конструкции, где материал находится под действием чрезвычайно высоких температур, как, например, в стенках камер воздушно-реактивных и ракетных двигателей. Имеются конструкции, где, напротив, рабочие температуры оказываются низкими. Это — элементы холодильных установок и резервуары, содержащие жидкие газы.

В широких пределах изменяются также и скорости нагружения, и время действия внешних сил. Есть нагрузки, действующие годами, а есть такие, время действия которых исчисляется миллионными долями секунды.

Понятно, что в зависимости от указанных обстоятельств механические свойства материалов будут проявляться по-разному.

Обобщающий анализ свойств материала с учетом температуры и фактора времени оказывается очень сложным и не укладывается в простые экспериментально полученные кривые, подобные диаграммам растяжения. Функциональная зависимость между четырьмя

параметрами: σ, ε, температурой T и временем t ($f(\sigma, \varepsilon, T, t) = 0$) не является однозначной и содержит дифференциальные и интегральные соотношения входящих в нее величин.

Так как в общем виде аналитическое или графическое описание указанной функции дать не удается, то влияние температуры и фактора времени рассматривают в настоящее время применительно к частным классам задач. Деление на классы осуществляют в основном по типу действующих внешних сил. Различают медленно, быстро и весьма быстро изменяющиеся нагрузки.

Основными нагрузками, изучаемыми в сопротивлении материалов, являются медленно изменяющиеся, или статические. Скорость изменения этих нагрузок во времени настолько мала, что кинетическая энергия, которую получают перемещающиеся частицы деформируемого тела, составляет ничтожно малую долю от работы внешних сил. Иначе говоря, работа внешних сил преобразуется только в упругую потенциальную энергию, а также в необратимую тепловую энергию, связанную с пластическими деформациями тела. Испытание материалов в так называемых нормальных условиях происходит под действием статических нагрузок.

Если вести испытания на растяжение при различных температурах образца, оставаясь в пределах нормальных скоростей деформации ($d\varepsilon/dt = 0{,}01 \ldots 3$ мин$^{-1}$), то можно в определенном интервале получить зависимость механических характеристик от температуры. Эта зависимость обусловлена температурным изменением внутрикристаллических и межкристаллических связей, а в некоторых случаях и структурными изменениями материала.

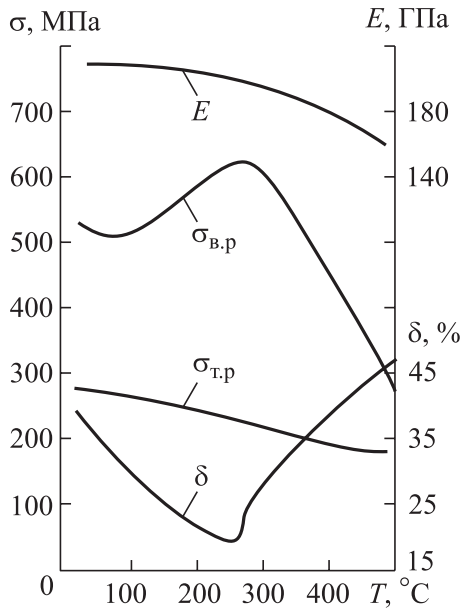


Рис. 1.47

На рис. 1.47 показана зависимость модуля упругости E, предела текучести $\sigma_{т.р}$, временного сопротивления $\sigma_{в.р}$ и удлинения при разрыве δ от температуры для низкоуглеродистой стали в интервале 0 ... 500 °С. Как видно из рисунка, модуль упругости в пределах 0 ... 300 °С практически не меняется. Более существенные изменения претерпевают $\sigma_{в.р}$ и δ, причем имеет место, как говорят, «охрупчивание» стали — удлинение при разрыве уменьшается.

При дальнейшем увеличении температуры пластические свойства стали восстанавливаются, а прочностные показатели быстро падают.

Явление «охрупчивания» при повышенных температурах свойственно в основном низкоуглеродистой стали. Легированные стали и цветные сплавы при повышении температуры обнаруживают большей частью монотонное возрастание δ и такое же монотонное снижение $\sigma_{т.р}$ и $\sigma_{в.р}$. На рис. 1.48 показаны соответствующие кривые для хромомарганцевой стали марки 30ХГСА.

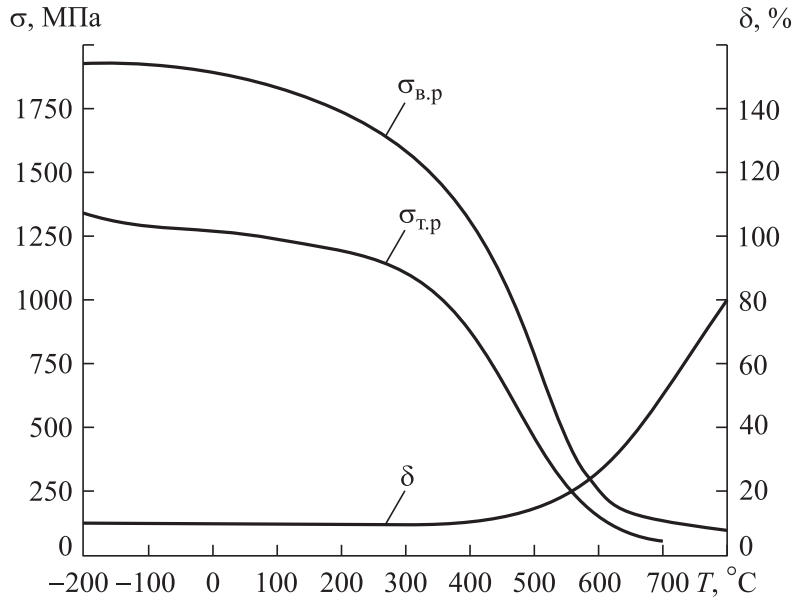


Рис. 1.48

Чем выше температура, тем труднее определить механические характеристики материала. Происходит это не только потому, что возрастают сложности в технике эксперимента, но и вследствие того, что сами характеристики становятся менее определенными. При статическом нагружении, начиная с некоторых значений температур, резко сказывается фактор времени. Для одних материалов это происходит при более низких, для других — при более высоких температурах. Влияние фактора времени обнаруживается и при нормальных температурах. Однако для металлов его влиянием можно пренебречь. Для некоторых же органических материалов даже при низких температурах скорость нагружения существенно сказывается на определяемых характеристиках.

Изменение во времени деформаций и напряжений, возникающих в нагруженной детали, носит название *ползучести*.

Частным проявлением ползучести является рост необратимых деформаций при постоянном напряжении. Это явление носит название *последействия*. Наглядной иллюстрацией последействия может служить наблюдаемое увеличение размеров диска и лопаток газовой турбины, находящихся под воздействием больших центробежных сил и высоких температур. Это увеличение размеров необратимо и проявляется обычно после многих часов работы двигателя.

Другим частным проявлением свойств ползучести является *релаксация* — самопроизвольное изменение во времени напряжений при неизменной деформации. Релаксацию можно наблюдать, в частности, на примере ослабления затяжки болтовых соединений, работающих в условиях высоких температур.

Наиболее просто исследовать явление последействия. Если нагрузить образец постоянно действующей силой (рис. 1.49) и следить за изменением его длины в условиях фиксированной температуры, можно получить диаграммы последействия (рис. 1.50), дающие зависимость деформации от времени при различных значениях напряжения σ.

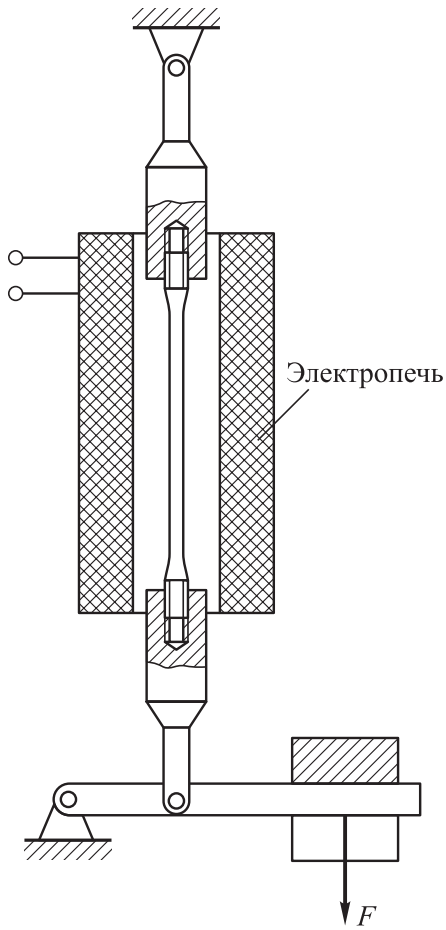


Рис. 1.49

Как видно из этих кривых, нарастание деформаций происходит вначале очень быстро. Затем процесс стабилизируется и деформации увеличиваются с постоянной скоростью. С течением времени на образце, как и при обычном испытании, появляется шейка. Незадолго до разрыва имеет место быстрое возрастание местных деформаций в результате уменьшения площади сечения. При более высоких температурах изменение деформаций во времени происходит быстрее. Для данного материала можно с помощью методов теории ползучести перестроить диаграммы последействия в диаграммы релаксации. Последние, впрочем, можно получить и экспериментально. Для этого, правда, требуется более сложная аппаратура, так как

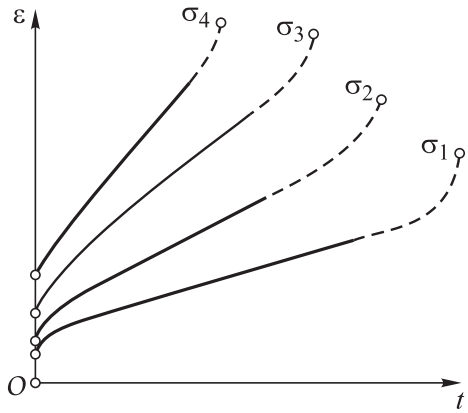


Рис. 1.50

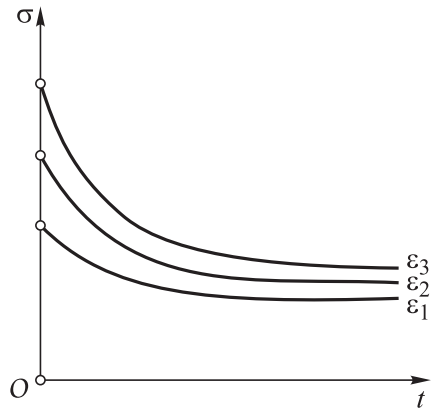


Рис. 1.51

необходимо, сохраняя удлинение образца, замерять изменения растягивающей силы.

Вид диаграмм релаксации, дающих зависимость напряжения от времени, представлен на рис. 1.51.

Основными механическими характеристиками материала в условиях ползучести являются предел длительной прочности и предел ползучести.

Пределом длительной прочности называется отношение нагрузки, при которой происходит разрушение растянутого образца через заданный промежуток времени, к первоначальной площади сечения.

Таким образом, предел длительной прочности зависит от заданного промежутка времени до момента разрушения. Последний выбирается равным сроку службы детали и изменяется в пределах от десятков часов до сотен тысяч часов. Соответственно столь широкому диапазону изменения времени меняется и предел длительной прочности. С увеличением времени он, естественно, падает.

Пределом ползучести называется напряжение, при котором пластическая деформация за заданный промежуток времени достигает заданной величины.

Как видим, для определения предела ползучести необходимо задать интервал времени (который определяется сроком службы детали) и интервал допустимых деформаций (который определяется условиями эксплуатации детали).

Пределы длительной прочности и ползучести сильно зависят от температуры. С увеличением температуры они, очевидно, уменьшаются.

Среди различных типов статических нагрузок особое место занимают периодически изменяющиеся, или *циклические*, нагрузки. Вопросы прочности материалов в условиях таких нагрузок составляют содержание специального раздела сопротивления материалов и связываются с понятиями *выносливости*, или *усталости*, материала. Эти вопросы будут рассмотрены подробно в гл. 12.

После статических рассмотрим класс быстро изменяющихся, или динамических, нагрузок.

Существует два подхода в оценке этих нагрузок. С одной стороны, нагрузка считается быстро изменяющейся, если она вызывает заметные скорости деформации частиц тела, причем настолько большие, что суммарная кинетическая энергия движущихся масс составляет уже значительную долю от общей работы внешних сил. С другой стороны, скорость изменения нагрузки может быть связана со скоростью протекания пластических деформаций. Нагрузку можно рассматривать как быстро изменяющуюся, если за время нагружения тела пластические деформации не успевают полностью реализоваться. Это заметно сказывается на характере наблюдаемых зависимостей между деформациями и напряжениями.

Первый критерий в оценке быстро изменяющихся нагрузок используют в основном при анализе вопросов колебаний упругих тел, второй — при изучении механических свойств материалов в связи с процессами быстрого деформирования.

Поскольку при быстром нагружении пластические деформации не успевают полностью реализоваться, материал с увеличением скорости деформации становится более хрупким и δ уменьшается. Так как скольжение частиц образца по наклонным площадкам затруднено, должна несколько увеличиться разрушающая нагрузка. Сказанное можно проиллюстрировать, сопоставив диаграммы растяжения при медленно и быстро изменяющихся нагрузках (рис. 1.52).

Поскольку при быстром нагружении развитие пластических деформаций затруднено, главенствующим механизмом разрушения оказывается развитие трещин. В этом случае материал очень чувствителен к местному повышению напряжения. Это позволяет создать специальный метод испытания материала на чувствительность к хрупкому разрушению — так называемое испытание на *ударную вязкость*.

Термин достаточно образный. В вязком твердом теле развивающаяся трещина «вязнет». Следовательно, под вязкостью понимается свойство структуры твердого тела задерживать, затруднять, противостоять развитию трещин.

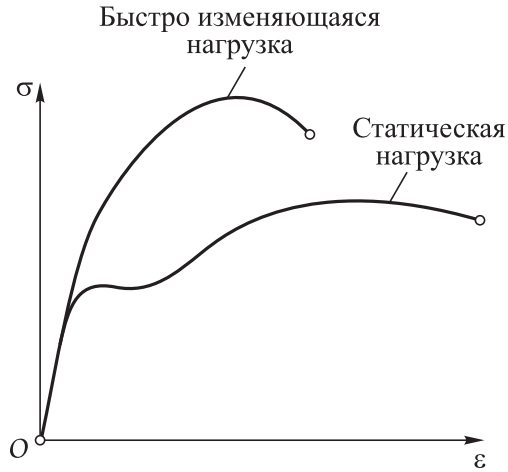


Рис. 1.52

Испытание на ударную вязкость заключается в следующем. На образце квадратного сечения 10×10 делают надрез глубиной 2 мм. Образец укладывают на опоры (рис. 1.53) и по нему со стороны, обратной надрезу, с помощью маятникового копра наносят удар. Разность высот маятника до и после удара позволяет определить энергию, затраченную на разрушение образца. Эта энергия тем больше, чем больше вязкость материала. Сравнительной мерой вязкости служит энергия, отнесенная к площади ослабленного сечения.

Важно отметить, что ударная вязкость с уменьшением температуры падает, что кажется естественным. Но коварство заключается в неравномерности этого падения. Для многих материалов

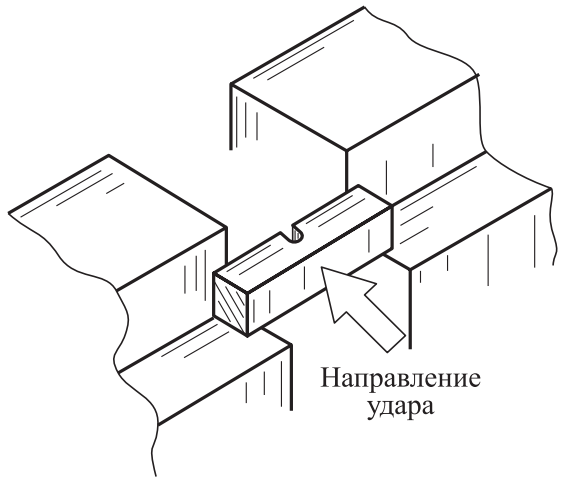


Рис. 1.53

существуют критические низкие температуры, при переходе через которые ударная вязкость скачком уменьшается в несколько раз. Некоторые стали, например, проявляют свойство хладоломкости, на которое приходится обращать особое внимание, в частности, при выборе материалов для сооружений и транспортных средств, работающих в арктических условиях.

Последними из трех рассматриваемых видов нагрузок являются весьма быстро изменяющиеся во времени нагрузки. Скорость их изменения настолько велика, что работа внешних сил почти полностью переходит в кинетическую энергию движущихся частиц тела, а энергия упругих и пластических деформаций оказывается сравнительно малой.

Весьма быстро изменяющиеся нагрузки возникают при ударе тел, движущихся со скоростями в несколько сотен метров в секунду и выше. С этими нагрузками приходится иметь дело при изучении вопросов бронепробиваемости, при оценке разрушающего действия взрывной волны, при исследовании пробивной способности межпланетной пыли, встречающейся на пути космического корабля.

Так как энергия деформации материала в условиях весьма больших скоростей нагружения оказывается сравнительно малой, то свойства материала как твердого тела имеют в данном случае второстепенное значение. На первый план выступают законы движения легко деформируемой (почти жидкой) среды, и особую роль приобретают вопросы физического состояния и физических свойств материала в новых условиях. Таким образом, задачи, связанные с весьма большими скоростями нагружения, не рассматриваются в курсе сопротивления материалов.

1.12. Коэффициент запаса

В результате испытаний на растяжение и сжатие мы получаем основные данные о механических свойствах материала. Теперь рассмотрим вопрос о том, как использовать полученные результаты испытаний в практических расчетах инженерных конструкций на прочность.

Как уже указывалось в В7, основным и наиболее распространенным является метод расчета по напряжениям. Согласно этому методу, расчет на прочность ведут по наибольшему напряжению σ_{max}, возникающему в некоторой точке нагруженной конструкции. Напряжение σ_{max} называется максимальным рабочим напряжением.

Оно не должно превышать определенного значения, свойственного данному материалу и условиям работы конструкции.

Расчет по напряжениям ведут по формуле

$$\sigma_{max} = \sigma_L/n,$$

где σ_L — некоторое предельное для данного материала напряжение; n — число, большее единицы, называемое *коэффициентом запаса* или просто *запасом*. Обычно бывает так, что размеры конструкции уже известны и назначены, например, из эксплуатационных соображений или соображений технологичности. Расчет на прочность является поверочным. В этом случае подсчитывают σ_{max} и определяют фактический коэффициент запаса

$$n = \sigma_L/\sigma_{max}.$$

Если этот запас удовлетворяет конструктора, считается, что поверочный расчет дал положительный результат.

При проектировании конструкции должны быть назначены некоторые характерные размеры непосредственно из требований прочности и значение n задают заранее. Тогда искомые размеры получают из условия

$$\sigma_{max} \le [\sigma],$$

где $[\sigma] = \sigma_L/n$ — *допускаемое напряжение*.

Остается решить вопрос, какое напряжение принимать за предельное и как назначать n.

Для того чтобы избежать в работающей конструкции образования заметных остаточных деформаций, за величину σ_L для пластичных материалов принимается обычно предел текучести. Тогда наибольшее рабочее напряжение составляет n-ю долю от $\sigma_{т.р}$ (рис. 1.54). Коэффициент в этом случае обозначается через $n_т$

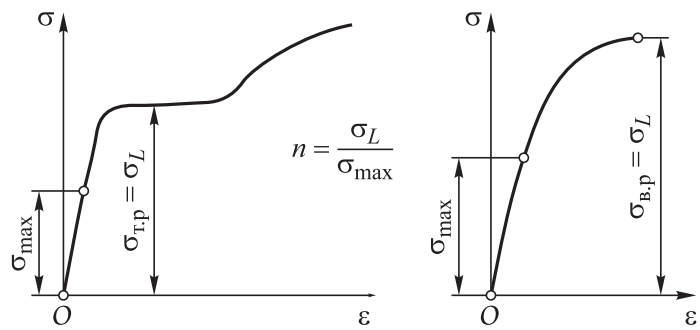


Рис. 1.54

и называется *коэффициентом запаса по текучести*. Для хрупких, а в некоторых случаях и для умеренно пластичных материалов за σ_L принимают предел прочности $\sigma_{в.р}$. Тогда получаем

$$n_в = \sigma_{в.р}/\sigma_{max},$$

где $n_в$ — *коэффициент запаса по пределу прочности*.

Как говорилось в В7, расчет по напряжениям не является единственно возможным.

Если расчет ведут по предельной нагрузке, то аналогично может быть введено понятие запаса по предельной нагрузке

$$n = F_L/F_{раб},$$

где F_L и $F_{раб}$ — соответственно предельная и рабочая нагрузки. В случае расчета на жесткость

$$n = \delta_L/\delta_{раб},$$

где δ_L и $\delta_{раб}$ — предельное и рабочее перемещения.

Значение n выбирают на основе ряда различных соображений, выходящих в большинстве случаев за пределы вопросов, рассматриваемых в курсе сопротивления материалов.

Прежде всего, коэффициент запаса не может быть назначен без учета конкретных условий работы рассчитываемой конструкции. Коэффициент n, по существу, определяют исходя из практического опыта создания аналогичных конструкций за прошедшее время и уровня развития техники в данный период. В каждой области техники уже сложились свои традиции, свои требования, свои методы и, наконец, своя специфика расчетов, в соответствии с которыми назначают коэффициент запаса. Так, при проектировании стационарных строительных сооружений, рассчитанных на долгие сроки службы, принимают довольно большие значения коэффициента запаса ($n_в = 2 \ldots 5$). В авиационной технике, где на конструкцию накладывают серьезные ограничения по массе, коэффициенты запаса (или так называемые коэффициенты безопасности) устанавливают по пределу прочности в интервале $1{,}5 \ldots 2$. В связи с ответственностью конструкции в этой области техники сложилась практика проведения обязательных статических испытаний отдельных узлов и целых летательных аппаратов для прямого определения предельных нагрузок.

Выбор коэффициента запаса зависит от методов расчета напряжений, степени точности этих методов и серьезности тех последствий, которые повлечет за собой разрушение детали.

Значение коэффициента запаса зависит и от свойств материала. В случае пластичного материала запас по пределу текучести может быть меньшим, чем в случае расчета детали из хрупкого материала. Это достаточно очевидно, поскольку хрупкий материал более чувствителен к различным случайным повреждениям и неожиданным дефектам производства. Кроме того, случайное повышение напряжений в пластичном материале может вызвать только небольшие остаточные деформации, в хрупком же материале последует прямое разрушение.

Изучение вопросов о конкретном выборе коэффициента запаса входит как составная часть в дисциплины, связанные с расчетом прочности конструкций. Правильность выбора коэффициента запаса определяется в значительной мере опытом и искусством расчетчика и конструктора.

Глава 2

КРУЧЕНИЕ

2.1. Чистый сдвиг и его особенности

На примере растяжения и сжатия были выявлены некоторые наиболее важные свойства напряженного состояния. При растяжении в зависимости от ориентации секущих площадок на гранях выделенного прямоугольного элемента (см. рис. 1.19) возникают как нормальные, так и касательные напряжения. Последние, независимо от значений нормальных напряжений, подчиняются условию парности (см. 1.5).

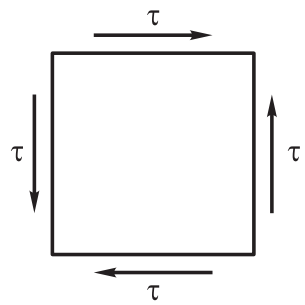


Рис. 2.1

Теперь положим, что имеется такое напряженное состояние, когда на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения τ (рис. 2.1). Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*[*].

Наиболее просто однородный чистый сдвиг может быть осуществлен непосредственным нагружением пластины, захваченной в жесткие контурные шарнирно соединенные накладки (рис. 2.2). Для всех точек пластины касательные напряжения τ будут, очевидно, следующими:

$$\tau = F/lh,$$

где h — толщина пластины. Исключение составляет узкая краевая зона, где пластина сопрягается с накладками. Здесь напряженное состояние будет отличным от чистого сдвига. Однако в соответствии с принципом Сен-Венана эти отклонения носят чисто местный характер и область их распространения мала по сравнению с общими размерами напряженной пластины.

[*] Более строгое определение чистого сдвига будет дано в гл. 7 на основе общей теории напряженного состояния.

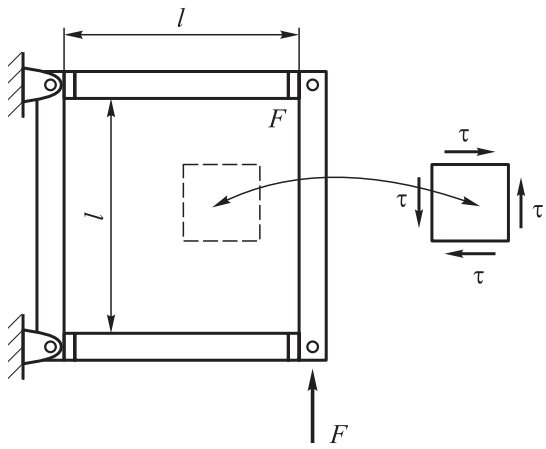


Рис. 2.2

В качестве второго примера, иллюстрирующего состояние однородного чистого сдвига, можно рассмотреть тонкостенную цилиндрическую трубку, нагруженную моментами, приложенными в торцевых плоскостях (рис. 2.3). Здесь и далее внешний момент в отличие от внутреннего обозначен через $\mathfrak{M}$.

Напряжение τ определяют из условий равенства момента равномерно распределенных по поперечному сечению внутренних сил моменту $\mathfrak{M}$:

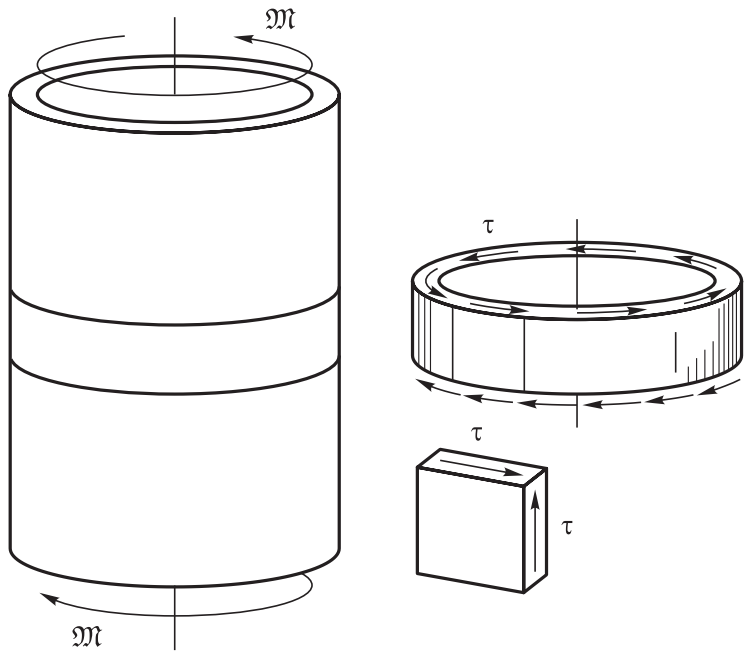


Рис. 2.3

$$\tau = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi R^2 h}, \tag{2.1}$$

где R — радиус трубки; h — ее толщина.

Посмотрим теперь, как при чистом сдвиге изменяются напряжения в зависимости от ориентации секущих площадок. Для этого из пластины, находящейся в состоянии чистого сдвига, выделим элементарную трехгранную призму $\mathcal{ABC}$ (рис. 2.4).

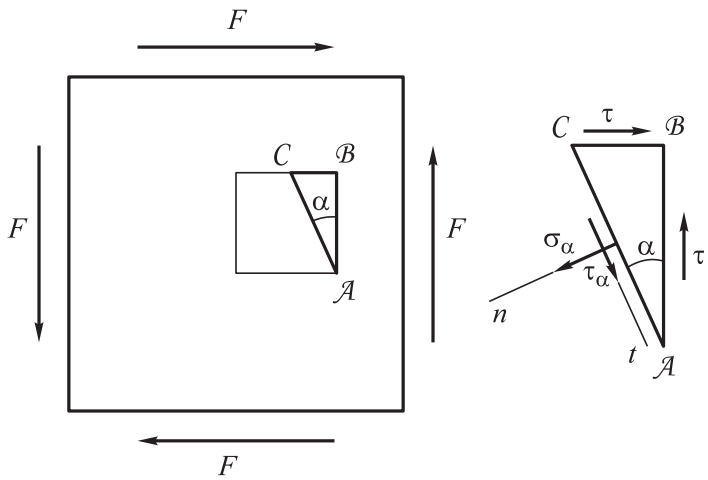


Рис. 2.4

На гранях $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BC}$ по условию возникают только касательные напряжения τ. На грани $\mathcal{AC}$ в зависимости от угла α возможно возникновение как нормального, так и касательного напряжений. Обозначим их соответственно через σ_α и τ_α.

Проецируем все силы, действующие на призму, на оси n и t. Условия равновесия дают

$$\sigma_\alpha l_{\mathcal{AC}} = \tau l_{\mathcal{AB}} \sin\alpha + \tau l_{\mathcal{BC}} \cos\alpha;$$
$$\tau_\alpha l_{\mathcal{AC}} = \tau l_{\mathcal{AB}} \cos\alpha - \tau l_{\mathcal{BC}} \sin\alpha.$$

Длины отрезков $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BC}$ связаны с $\mathcal{AC}$ очевидными соотношениями $l_{\mathcal{AB}} = = l_{\mathcal{AC}} \cos\alpha$, $l_{\mathcal{BC}} = l_{\mathcal{AC}} \sin\alpha$. Поэтому

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha; \qquad \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha.$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$ напряжения σ_α и τ_α принимают значения, соответствующие исходным площадкам, т. е. $\sigma_\alpha = 0$, а $\tau_\alpha = \tau$. При $\alpha = = \pm 45^\circ$ $\tau_\alpha = 0$, а $\sigma_\alpha = \pm\tau$. Следовательно, если из пластины выделить прямоугольный элемент, грани которого повернуты относительно исходных плоскостей на угол 45°, то на секущих площадках

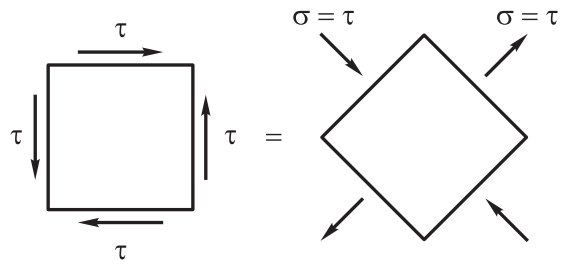


Рис. 2.5

будут обнаружены только нормальные напряжения, причем на одной паре граней эти напряжения являются растягивающими, а на другой — сжимающими. Таким образом, чистый сдвиг может быть представлен как одновременное растяжение и сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 2.5).

Рассмотрим деформации при сдвиге. Касательное напряжение τ связано с угловой деформацией γ соотношением (1.13): $\tau = G\gamma$, где, как мы уже знаем, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ (см. 1.5).

В результате возникающих угловых деформаций пластина, показанная на рис. 2.2, перекашивается, а торцевые сечения трубки (рис. 2.6) получают взаимные угловые смещения φ. Характер возникающих смещений показан на рис. 2.7, причем

$$\varphi = \gamma l / R. \qquad (2.2)$$

При чистом сдвиге, как и при растяжении (да и вообще при всяком напряженном состоянии), в деформируемом теле накапливается упругая потенциальная энергия. Эту энергию легко

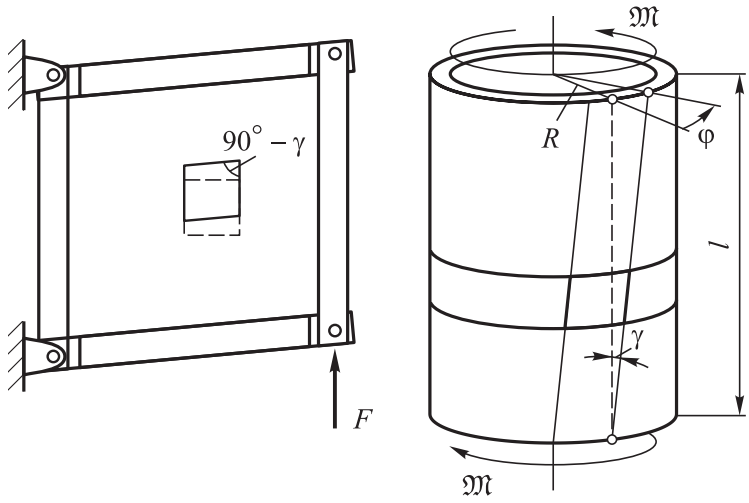


Рис. 2.6

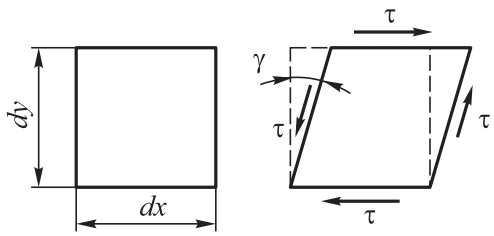


Рис. 2.7

подсчитать, рассматривая изменение формы прямоугольного элемента с размерами dx, dy и толщиной h (см. рис. 2.7).

Примем нижнюю грань элемента условно за неподвижную. Тогда при смещении верхней грани сила τdxh совершит работу на перемещении γdy. Так как сила меняется пропорционально смещению, то ее работа равна половине произведения $\tau dxh \cdot \gamma dy$ (см. 1.3).

Следовательно, потенциальная энергия деформации, накопленная в элементе, равна $dU = 1/2\tau\gamma dx dy h$. Если отнести энергию к единице объема, получим

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau\gamma.$$

Выразим γ через τ по закону Гука. Тогда

$$U_0 = \frac{\tau^2}{2G}. \qquad (2.3)$$

Величина U_0 называется *удельной потенциальной энергией при сдвиге* и измеряется в Дж/м^3.

Аналогично испытанию на растяжение и сжатие можно провести испытание материала в условиях чистого сдвига. Для этого удобнее всего воспользоваться испытанием тонкостенной трубки (рис. 2.8). Если во время испытания производить замер момента $\mathfrak{M}$

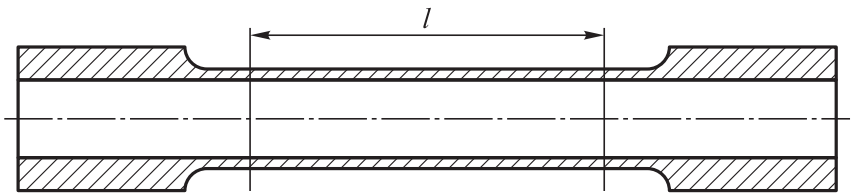


Рис. 2.8

и взаимного угла поворота сечений φ на длине l, можно построить для образца диаграмму $\mathfrak{M} = f(\varphi)$. В дальнейшем эту диаграмму, согласно выражениям (2.1) и (2.2), можно легко привести к переменным τ и γ. Таким образом может быть получена диаграмма сдвига для материала $\tau = f(\gamma)$.

Сопоставление диаграммы сдвига с диаграммой растяжения для одного и того же материала показывает их качественное сходство.

На диаграмме сдвига также имеется упругая зона, зоны текучести и упрочнения.

Аналогичным образом для сдвига, как и для растяжения, можно было бы дополнительно ввести следующие характеристики: предел пропорциональности при сдвиге, предел упругости, предел текучести и т. д. Прежде, когда изучение механики деформируемых тел находилось еще в начальной стадии, так обычно и поступали. В дальнейшем, однако, было установлено, что характеристики сдвига связаны с характеристиками растяжения. В настоящее время теория пластичности дает возможность построить теоретически диаграмму сдвига по диаграмме растяжения, а также выразить все характеристики сдвига через уже знакомые нам механические характеристики растяжения. Точно так же допускаемые напряжения и коэффициенты запаса при чистом сдвиге могут быть связаны с соответствующими величинами для простого растяжения. Эти вопросы будут подробно рассмотрены в гл. 10.

2.2. Кручение стержня с круглым поперечным сечением

Под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только крутящий момент. Прочие силовые факторы (изгибающие моменты, нормальная и поперечные силы) равны нулю. Для крутящего момента, независимо от формы сечения, принято следующее правило знаков. Если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видит момент $M_к$ направленным против часовой стрелки, то момент считается положительным. При противоположном направлении моменту приписывается знак минус.

На рис. 2.9 показан стержень, нагруженный по концам моментами $\mathfrak{M}$. Если посмотреть на плоскость $\mathcal{A}$ со стороны внешней нормали (со стороны точки C), то мы увидим, что момент $M_к$ направлен по часовой стрелке. Следовательно, $M_к$ будет отрицательным. Тот же самый результат может быть получен, если посмотреть из точки C на плоскость $\mathcal{B}$.

Указанным правилом знаков руководствуются при построении эпюр крутящих моментов. На рис. 2.10 показано несколько примеров нагружения стержня сосредоточенными $\mathfrak{M}$ и распределенными μ_z (Н · м/м) внешними моментами. Для этих моментов применено условное обозначение в виде двух кружков. Кружок с точкой обо-

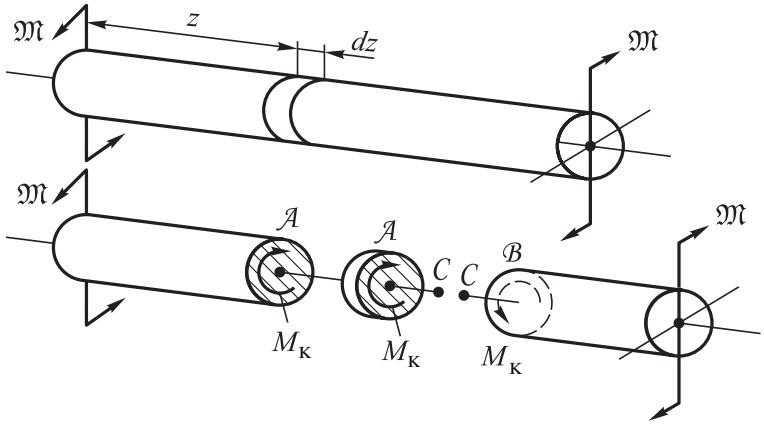


Рис. 2.9

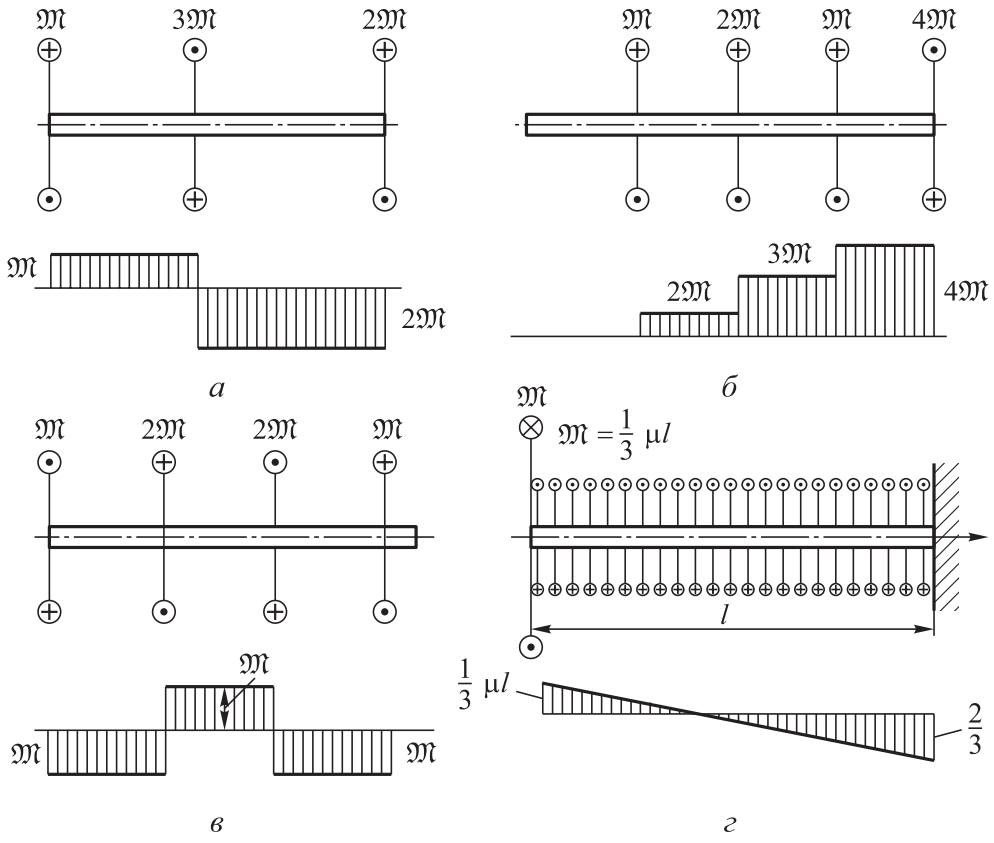


Рис. 2.10

значает силу, направленную *на* наблюдателя, а кружок с крестиком — силу, направленную *от* наблюдателя. На рис. 2.10 приведены соответствующие эпюры крутящих моментов. Положительные моменты отложены над линией.

При расчете стержня на кручение надо решить две основные задачи. Требуется определить напряжения и найти угловые перемещения в зависимости от внешних моментов. Эти задачи решают по-разному, смотря по тому, какой вид имеет поперечное сечение стержня. Наиболее просто можно получить решение в случае кругового сечения, а также для широкого класса тонкостенных стержней.

Механизм деформирования стержня с круглым поперечным сечением можно представить себе в следующем виде: будем считать, что каждое поперечное сечение в результате действия внешних моментов поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как жесткое целое. Этот угол поворота для различных сечений будет различным. Сказанное представляет собой *гипотезу плоских сечений* — предположение, оправдываемое общими правдоподобными соображениями о характере возникающих перемещений.

Окончательным критерием пригодности любой гипотезы является опыт. Получив расчетную формулу, нужно прежде всего сопоставить результаты расчета с экспериментом, и если между ними обнаруживается достаточно хорошее соответствие, гипотеза считается приемлемой.

Надо сказать, что задача о кручении стержня может быть решена не только методами сопротивления материалов, но и методами теории упругости без принятия каких-либо гипотез, кроме предположения о непрерывности строения вещества. Решение, полученное этим путем, показывает, что круглое поперечное сечение бруса действительно остается плоским и поворачивается как жесткое целое. В поперечных сечениях возникают только касательные напряжения.

Вернемся к стержню с круговым поперечным сечением, нагруженному по торцам двумя моментами (см. рис. 2.9). В поперечных сечениях стержня возникает постоянный крутящий момент

$$M_{\text{к}} = \mathfrak{M}.$$

Двумя поперечными сечениями выделим из стержня элемент длиной dz, а из него, в свою очередь, двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$ — элементарное кольцо, показанное на рис. 2.11.

Правое торцевое сечение кольца поворачивается при кручении относительно левого на угол $d\varphi$. Образующая цилиндра $\mathcal{AB}$ поворачивается при этом на угол γ и занимает положение $\mathcal{AB}'$. Отрезок $\mathcal{BB}'$ равен, с одной стороны, $rd\varphi$, а с другой — γdz. Следовательно,

$$\gamma = r\frac{d\varphi}{dz}.$$

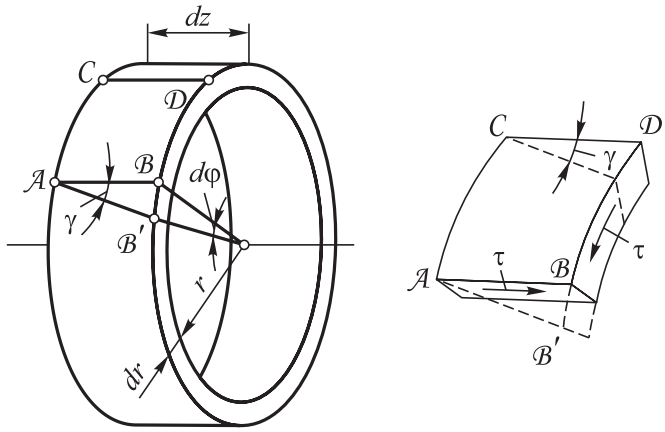


Рис. 2.11

Угол γ является углом сдвига цилиндрической поверхности. Величину $d\varphi/dz$ обозначают обычно через θ:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \theta, \tag{2.4}$$

и называют *относительным углом закручивания или круткой*. Величина θ аналогична относительному удлинению при растяжении $\Delta l/l$. Используя обозначение θ, получаем

$$\gamma = r\theta. \tag{2.5}$$

По закону Гука для сдвига

$$\tau = G\theta r, \tag{2.6}$$

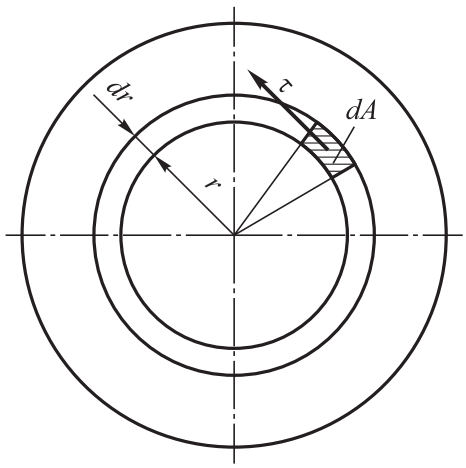


Рис. 2.12

где τ — касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении бруса. Парные им напряжения образуются в продольных плоскостях — в осевых сечениях (см. рис. 2.11).

Элементарные силы τdA (рис. 2.12) можно привести к крутящему моменту $M_к = \int_A \tau r dA$. Выполним интегрирование для всей площади поперечного сечения A. Подставив в подынтегральную функцию напряжение τ из выра-

жения (2.6), получим $M_к = G\theta\int_A r^2 dA$. Интеграл $\int_A r^2 dA$ представляет собой чисто геометрическую характеристику с размерностью м^4 и носит название *полярного момента инерции сечения*:

$$J_p = \int_A r^2 dA. \tag{2.7}$$

Таким образом, получаем $M_к = GJ_p\theta$, или

$$\theta = \frac{M_к}{GJ_p}. \tag{2.8}$$

Произведение GJ_p называют *жесткостью стержня при кручении*.

Через относительный угол закручивания θ легко определить и взаимный угол поворота сечений φ. Согласно выражениям (2.4) и (2.8),

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_к}{GJ_p}, \tag{2.9}$$

откуда

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_к dz}{GJ_p}, \tag{2.10}$$

где l — расстояние между сечениями, для которых определяют взаимный угол поворота φ.

Если крутящий момент по длине стержня не изменяется, $M_к = \mathfrak{M}$, а жесткость остается постоянной, то

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}l}{GJ_p}. \tag{2.11}$$

Вернемся теперь к выражению (2.6). Исключив из него θ, получим

$$\tau = \frac{M_к r}{J_p}. \tag{2.12}$$

Таким образом, касательные напряжения в поперечном сечении распределены вдоль радиуса по линейному закону и имеют наибольшее значение в точках, наиболее удаленных от оси (рис. 2.13). При этом

$$\tau_{max} = \frac{M_к r_{max}}{J_p}.$$

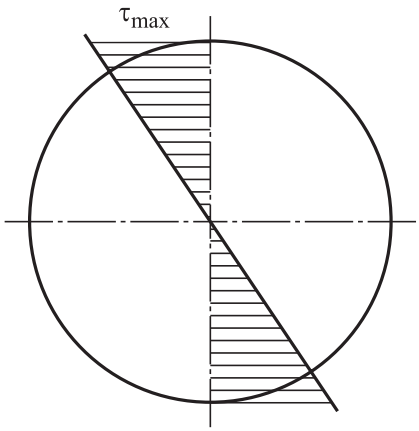


Рис. 2.13

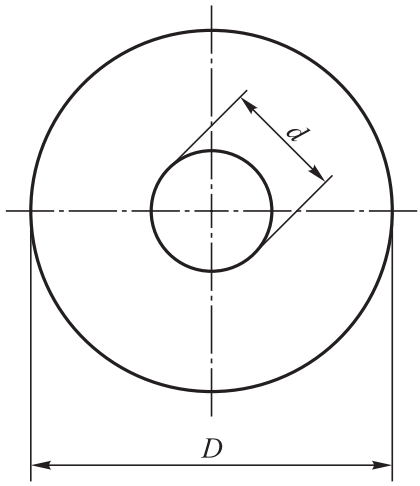


Рис 2.14

Величина

$$\frac{J_p}{r_{\max}} = W_p \tag{2.13}$$

называется *полярным моментом сопротивления* и измеряется в м^3. Окончательно имеем

$$\tau_{\max} = \frac{M_к}{W_p}. \tag{2.14}$$

Формулы (2.11) и (2.14) являются основными расчетными формулами для кручения стержня с круговым поперечным сечением. Они справедливы как для сплошного, так и для полого кругового сечения.

Определим геометрические характеристики сечения J_p и W_p. Для этого подставим в выражение (2.7) вместо dA площадь пояска $2\pi r dr$ (см. рис. 2.12). Если стержень имеет сплошное круговое сечение, то

$$J_p = 2\pi \int_0^{D/2} r^3 dr,$$

где D — диаметр сечения, или

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}. \tag{2.15}$$

Если же в стержне имеется внутренняя центральная полость диаметром d (рис. 2.14), то

$$J_p = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} r^3 dr,$$

или

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \tag{2.16}$$

Соответственно этим выражениям определяем полярный момент сопротивления W_p (см. формулу (2.13)). Для сплошного сечения

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0{,}2 D^3, \tag{2.17}$$

для кольцевого сечения (полый вал)

$$W_p \approx 0{,}2 D^3\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \tag{2.18}$$

Таким образом, из выражений (2.11) и (2.15) видно, что при заданном крутящем моменте угловые перемещения вала обратно пропорциональны четвертой степени диаметра. Что же касается наибольшего напряжения, то оно, согласно выражениям (2.14) и (2.17), обратно пропорционально кубу диаметром D.

Касательные напряжения в поперечных сечениях стержня направлены в каждой точке перпендикулярно текущему радиусу r. Из условия парности следует, что точно такие же напряжения возникают и в продольных сечениях (рис. 2.15). Наличие этих напряжений проявляется, например, при испытании на кручение деревянных образцов.

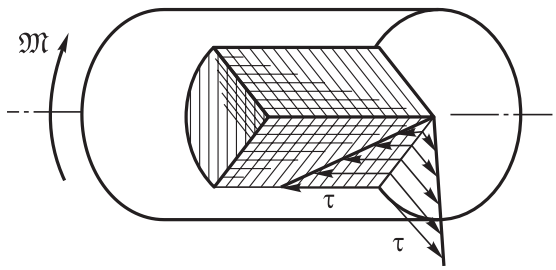


Рис. 2.15

Дерево, как известно, обладает ярко выраженной анизотропией упругих и прочностных свойств. Древесина имеет сравнительно низкую прочность на скалывание вдоль волокон. Поэтому разрушение деревянного образца при кручении начинается с образования продольных трещин (рис. 2.16).



Рис. 2.16

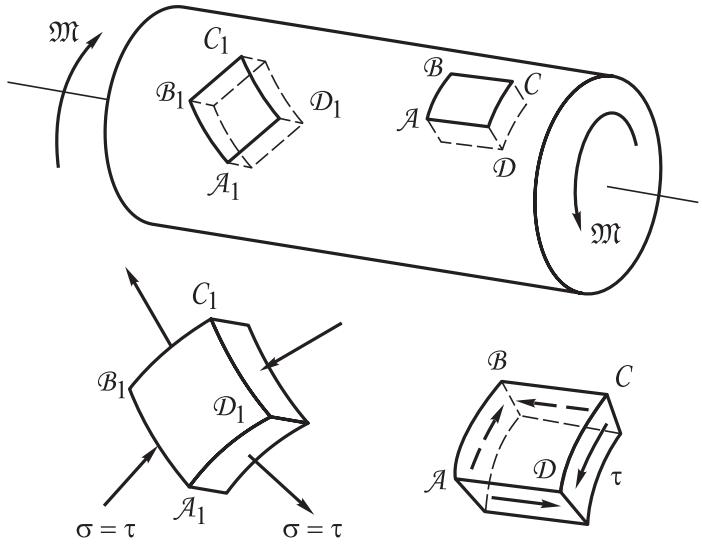


Рис 2.17

Если двумя парами осевых и поперечных сечений выделить из закрученного стержня элемент $\mathcal{ABCD}$, показанный на рис. 2.17, то на его гранях будут обнаружены только касательные напряжения. Следовательно, во всех точках стержня при кручении возникает состояние чистого сдвига, как и при кручении трубки. Здесь, однако, чистый сдвиг не будет однородным, поскольку значение τ изменяется по радиусу поперечного сечения.

Из материала, изложенного в 2.1, мы уже знаем, что если изменить ориентацию сечений, повернув их в плоскости сдвига на 45°, то в новых площадках обнаруживаются только нормальные напряжения, имеющие одинаковое с τ значение. При этом одно из них является растягивающим, а второе — сжимающим.

Согласно сказанному, на гранях элемента $\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1C_1\mathcal{D}_1$, выделенного из стержня при помощи винтовых сечений, проведенных под углом 45° к образующим, возникают нормальные напряжения, показанные на рис 2.17.

Наглядной иллюстрацией этого может служить характер разрушения хрупких образцов при кручении. Хрупкие материалы разрушаются обычно по поверхности наибольших растягивающих напряжений.

Если подвергнуть испытанию на кручение образец из хрупкого материала, например чугуна, то разрушение произойдет по сложной винтовой поверхности, соответствующей максимальным растягивающим напряжениям (рис. 2.18).

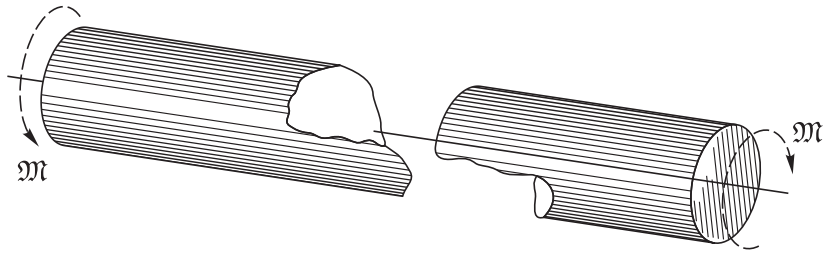


Рис. 2.18

Наличие растягивающих и сжимающих напряжений в наклонных площадках при кручении можно наглядно проиллюстрировать и другим способом. На поверхности цилиндра, изготовленного из

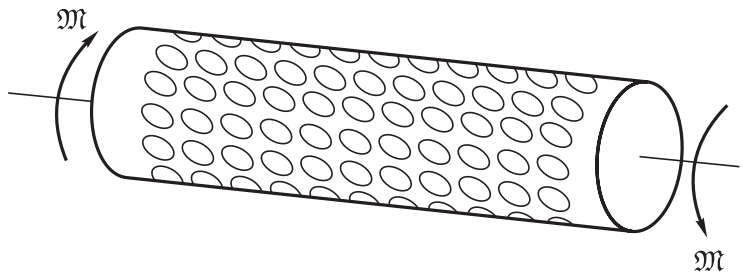


Рис. 2.19

пластичного материала (рис. 2.19), краской было предварительно нанесено множество мелких кружочков. При закручивании бруса кружки превратились в эллипсы с главными осями, направленными под углом 45° к образующим. По направлению больших осей эллипса произошло удлинение, а вдоль малых осей — сжатие.

Потенциальную энергию деформации, накопленную стержнем при кручении, можно определить аналогично тому, как это делали в случае растяжения. Рассмотрим участок закрученного стержня длиной dz (рис. 2.20). Энергия, накопленная в этом элементе, равна

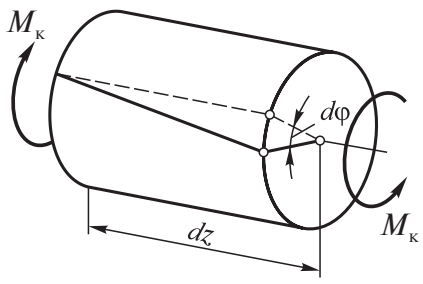


Рис. 2.20

работе моментов $M_к$, приложенных по торцам:

$$dU = \frac{1}{2} M_к d\varphi,$$

где $d\varphi$ — взаимный угол поворота сечений. Двойка, стоящая в знаменателе, опять же является следствием того, что момент $M_к$ меняется пропорционально $d\varphi$.

В полученное выражение подставляем $d\varphi$ согласно формуле (2.9). Тогда

$$dU = \frac{M_к^2 dz}{2GJ_p}. \qquad (2.19)$$

Потенциальную энергию во всем стержне определяем интегрированием выражения (2.19) по длине:

$$U = \int_0^l \frac{M_к^2 dz}{2GJ_p}. \qquad (2.20)$$

Если момент $M_к$ по длине не меняется и жесткость постоянна, то $M_к = \mathfrak{M}$ и

$$U = \frac{\mathfrak{M}^2 l}{2GJ_p}.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 2.1. Вал передает момент $\mathfrak{M}$ = 10 000 Н·м. Требуется подобрать размеры поперечного сечения вала для двух случаев: а) для сплошного кругового сечения; б) для кругового сечения с отверстием ($d = 7D/8$). Сравнить оба сечения по расходу металла. Допускаемое напряжение $[\tau]$ = 60 МПа.

Согласно формуле (2.14), для обоих сечений

$$W_p = M_к/[\tau] = 167 \text{ см}^3.$$

Для сплошного сечения, согласно выражению (2.17),

$$D^3 = 167/0{,}2 = 835 \text{ см}^3; \qquad D^{(а)} = 9{,}41 \text{ см}.$$

Для полого сечения из выражения (2.18) получаем

$$D^3 = \frac{167}{0{,}2(1 - 7^4/8^4)} = 2014 \text{ см}^3; \quad D^{(б)} = 12{,}6 \text{ см}.$$

Расход металла пропорционален площади поперечного сечения. В первом случае

$$A^{(а)} = \pi D^2/4 = 69{,}6 \text{ см}^2,$$

во втором —

$$A^{(б)} = \frac{\pi D^2}{4}\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right) = 29{,}2 \text{ см}^2.$$

Таким образом, полое сечение является более экономичным и в рассматриваемом случае (при $d/D = 7/8$) дает более чем двукратное снижение расхода металла.

То, что полый вал является более выгодным, чем вал сплошного сечения, ясно из рассмотрения эпюры напряжений в сечении вала (рис. 2.21). В центральной части сплошного сечения материал напряжен сравнительно мало и его использование далеко не полно. Для сечения с отверстием напряжения распределены более равномерно (см. рис. 2.21) и степень использования материала повышается.

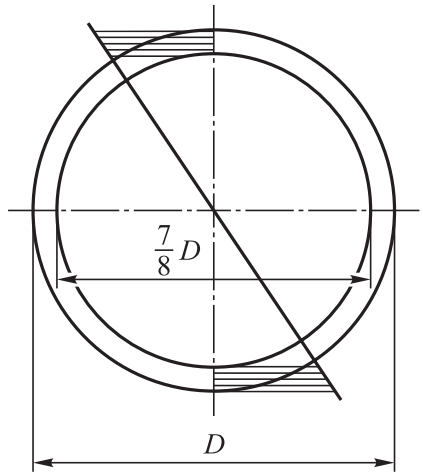


Рис. 2.21

Пример 2.2. Построить эпюры крутящих моментов, напряжений и углов поворота для вала, показанного на рис. 2.22, *а*.

Система является один раз статически неопределимой. Поэтому сначала раскрываем статическую неопределимость. Для этого отбрасываем левую заделку и ее действие на вал заменяем моментом $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ (рис. 2.22, *б*). Этот момент определяется из условия, что поворот левого торцевого сечения относительно правого равен нулю.

Угол поворота сечения $\mathcal{A}$ может быть выражен как алгебраическая сумма взаимных углов поворота торцевых сечений на участках $\mathcal{AB}$, $\mathcal{BC}$, $\mathcal{CD}$ и $\mathcal{DE}$.

Согласно формуле (2.11), соответственно этим участкам получаем

$$\frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{A}} 2l}{GJ_p} + \frac{(\mathfrak{M}_{\mathcal{A}} - \mathfrak{M})l}{GJ_p} + \frac{(\mathfrak{M}_{\mathcal{A}} - \mathfrak{M})l}{GJ'_p} + \frac{(\mathfrak{M}_{\mathcal{A}} - 5\mathfrak{M})2l}{GJ'_p} = 0,$$

где GJ_p — жесткость на участке с диаметром D, а GJ'_p — жесткость на участке с диаметром $2D$. Очевидно,

$$GJ'_p = 16GJ_p.$$

Учитывая это соотношение, находим

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{A}} = \frac{9}{17}\mathfrak{M}.$$

Теперь легко построить эпюру крутящих моментов (рис. 2.22, *в*), а по формуле (2.14) определить τ_{max} во всех сечениях вала (рис. 2.22, *г*).

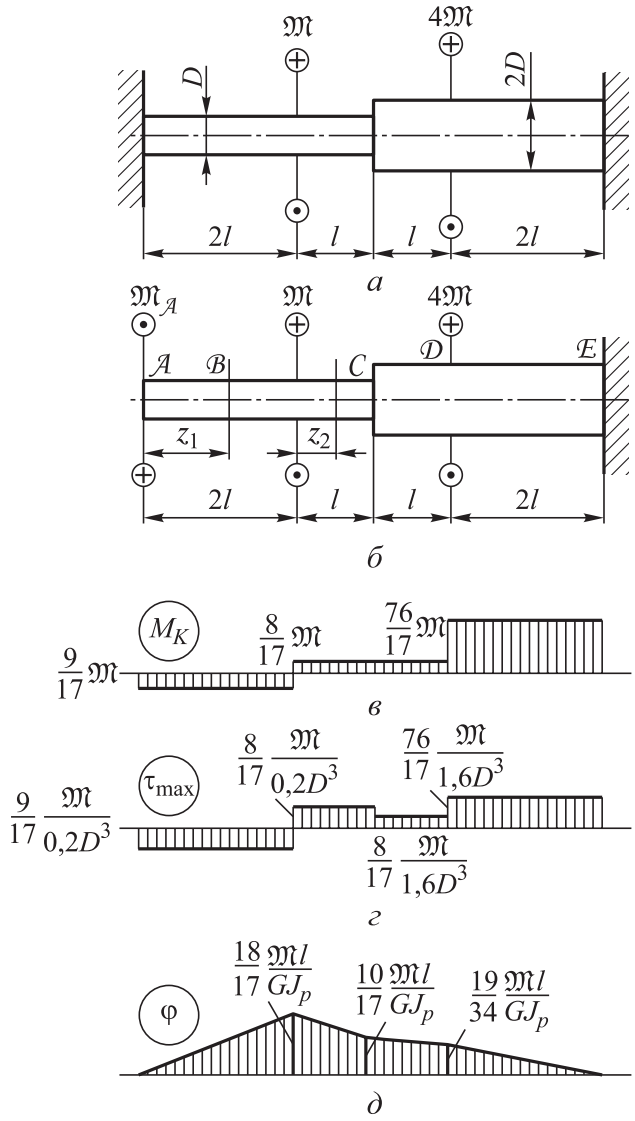


Рис. 2.22

При рассмотрении построенной эпюры напряжений следует учитывать, что в зонах приложения внешних моментов имеет место отклонение действительного закона распределения напряжений в сечении от полученного линейного. Однако, согласно принципу Сен-Венана, эти отклонения носят местный характер и практически не распространяются по оси за пределы расстояний порядка диаметра сечения.

Находим углы поворота сечений. На первом участке угол поворота сечения, расположенного на расстоянии z_1 от заделки,

$$\varphi_z = \frac{\mathfrak{M}_A z_1}{GJ_p} = \frac{9\mathfrak{M}z_1}{17GJ_p}.$$

Эта зависимость изображается прямой, показанной на эпюре φ (рис. 2.22, *д*). При $z_1 = 2l$ имеем

$$\varphi = \frac{18\mathfrak{M}l}{17GJ_p}.$$

На втором участке к этому углу прибавляется величина

$$\frac{(\mathfrak{M}_{\mathcal{A}} - \mathfrak{M})z_2}{GJ_p},$$

где z_2 отсчитываем от левого края второго участка. Так по участкам строится эпюра, показанная на рис. 2.22, *д*.

Пример 2.3. Имеется система, показанная на рис. 2.23. Рычаги $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{CD}$ — абсолютно жесткие. Между ними образован зазор Δ. Найти вертикальное перемещение точки приложения силы *F*, если жесткости валов I и II на кручение одинаковы и равны GJ_p.

При малой силе *F* зазор Δ не перекрывается и работает только вал II. Очевидно, искомое перемещение $\delta = \varphi a$, или, согласно формуле (2.11),

$$\delta = \frac{Fa^2 l}{GJ_p}. \qquad \text{(A)}$$

После того как зазор закроется, система становится статически неопределимой. Пусть M_{I} и M_{II} — крутящие моменты, возникающие в валах I и II. Из условий равновесия

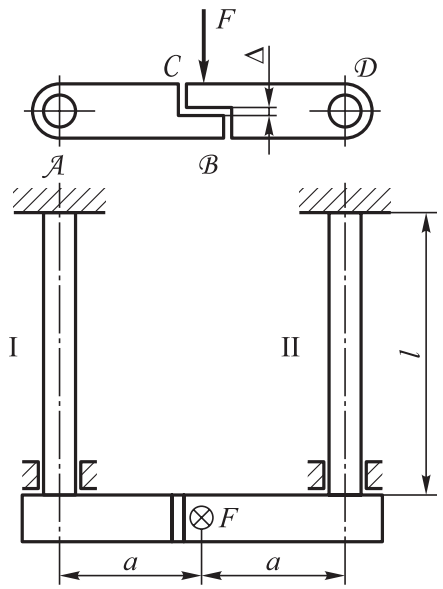


Рис. 2.23

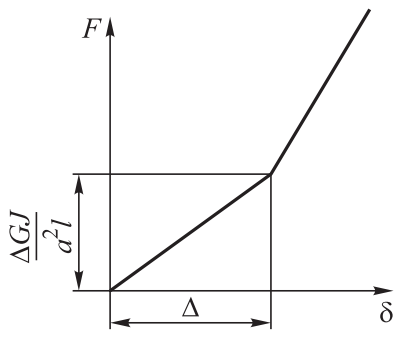


Рис. 2.24

$$M_{\text{I}} + M_{\text{II}} = Fa.$$

Уравнение перемещений будет следующим:

$$a\varphi_{\text{II}} - a\varphi_{\text{I}} = \Delta,$$

или, согласно формуле (2.11),

$$M_{\text{II}} - M_{\text{I}} = \frac{\Delta}{la} GJ_p.$$

Исключая M_{I}, находим

$$M_{\text{II}} = \frac{Fa}{2} + \frac{\Delta}{2la} GJ_p.$$

Искомое перемещение

$$\delta = \frac{M_{\text{II}} l}{GJ_p} a = \frac{Fla^2}{2GJ_p} + \frac{\Delta}{2}. \qquad \text{(В)}$$

Выражение (А) применимо до значений δ, не превышающих Δ, т.е. при

$$F \le \frac{\Delta GJ_p}{a^2 l}.$$

Если сила превышает эту величину, перемещение следует определять по формуле (В). На рис. 2.24 показана зависимость перемещения δ от силы F.

2.3. Кручение стержня с некруглым поперечным сечением

Определение напряжений в стержне с некруглым поперечным сечением представляет собой довольно сложную задачу, которая не может быть решена методами сопротивления материалов. Причина заключается в том, что для некруглого сечения упрощающая гипотеза неизменности плоских сечений, введенная ранее, оказывается неприемлемой. Сечения заметно искривляются, в результате чего существенно меняется картина распределения по ним напряжений. На рис. 2.25 в качестве примера показана форма закрученного стержня прямоугольного поперечного сечения. На

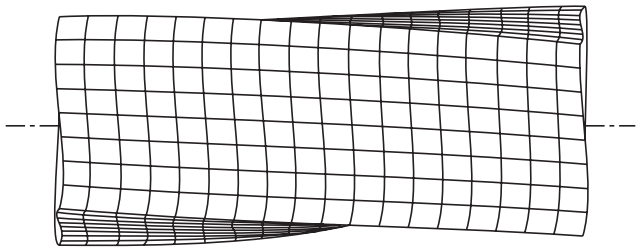


Рис. 2.25

поверхность предварительно была нанесена мелкая прямоугольная сетка, которая деформировалась вместе с поверхностными частицами материала. Поперечные линии сетки заметно искривлены, следовательно, будут искривлены и поперечные сечения.

Таким образом, при определении углов сдвига необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но и местный перекос, связанный с их искривлением. Задача, кроме того, резко усложняется тем, что для некруглого сечения напряжения будут функцией уже не одной независимой переменной (r), а двух (x и y).

Выскажем общие соображения относительно законов распределения напряжений в поперечных сечениях некруговой формы, а затем приведем готовые формулы, полученные методами теории упругости для некоторых, наиболее часто встречающихся форм поперечных сечений.

Прежде всего, можно довольно просто установить, что касательные напряжения в поперечных сечениях для точек, расположенных вблизи контура, направлены по касательной к дуге контура. Действительно, положим, что в точке A (рис. 2.26) касательное напряжение τ вблизи контура направлено под некоторым углом к контуру. Разложим это напряжение на две составляющие — по касательной к контуру τ_t и по нормали τ_n.

По условию парности на свободной поверхности стержня должно возникнуть касательное напряжение $\tau'_n = \tau_n$. Но внешняя поверхность свободна от нагрузки, и к ней никаких внешних сил не приложено, кроме, разве что, сил атмосферного давления. Таким образом, $\tau'_n = 0$. Следовательно, $\tau_n = 0$ и касательное напряжение τ вблизи контура направлено по касательной к контуру.

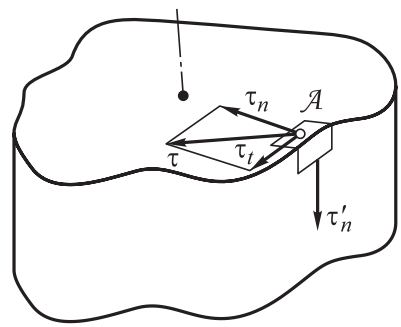


Рис. 2.26

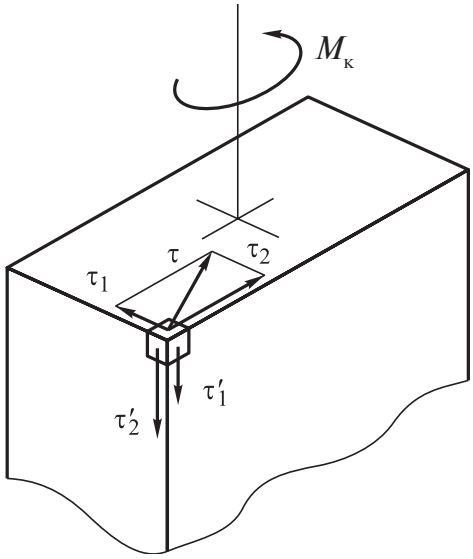


Рис. 2.27

Аналогично можно показать, что если поперечное сечение имеет внешние углы, то в них касательные напряжения обращаются в нуль. Раскладывая напряжение τ вблизи угла (рис. 2.27) на две составляющие по нормалям к сторонам угла, получаем напряжения τ_1 и τ_2. Так как парные им напряжения τ'_1 и τ'_2 равны нулю, то в нуль обращаются и напряжения τ_1 и τ_2. Значит, вблизи внешнего угла касательные напряжения в поперечном сечении отсутствуют.

На рис. 2.28 показана полученная методами теории упругости эпюра касательных напряжений для бруса прямоугольного сечения. В углах, как видим, напряжения равны нулю, а наибольшие напряжения возникают по серединам больших сторон в точках $\mathcal{A}$:

$$\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\max} = \frac{M_к}{\alpha a b^2}. \qquad (2.21)$$

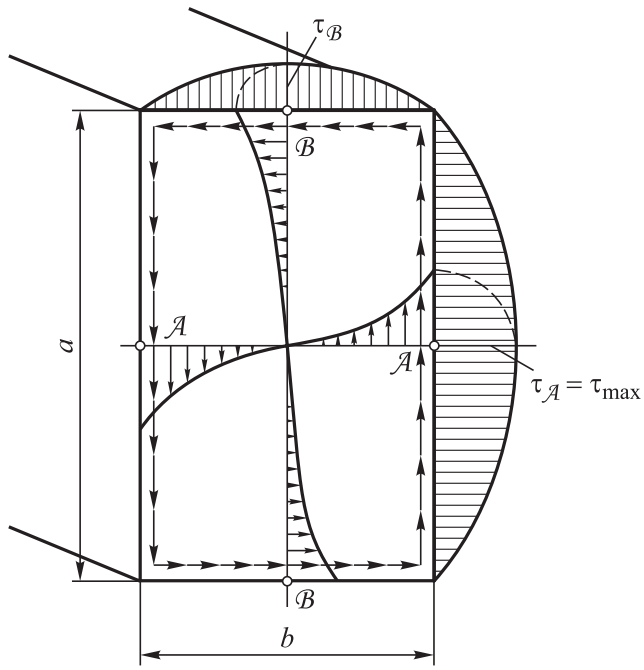


Рис. 2.28

В точках $\mathcal{B}$

$$\tau_{\mathcal{B}} = \eta\tau_{\max}, \tag{2.22}$$

где a — большая, а b — малая сторона прямоугольника.

Таблица 2.1

a/b	α	β	η	a/b	α	β	η
1	0,208	0,141	1,00	4	0,282	0,281	0,745
1,5	0,231	0,196	0,859	6	0,299	0,299	0,743
1,75	0,239	0,214	0,82	8	0,307	0,307	0,742
2	0,246	0,229	0,795	10	0,313	0,313	0,742
2,5	0,258	0,249	0,766	∞	0,333	0,333	0,742
3	0,267	0,263	0,753				

Угловое перемещение определяется по формуле

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}l}{G\beta\, b\, a^3}. \tag{2.23}$$

Коэффициенты α, β и η зависят от отношения сторон a/b . Их числовые значения приведены в табл. 2.1.

Для эллиптического сечения (рис. 2.29) наибольшие напряжения возникают в точках $\mathcal{A}$ по концам малой оси:

$$\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\max} = \frac{2M_{\text{к}}}{\pi ab^2};$$

в точках $\mathcal{B}$

$$\tau_{\mathcal{B}} = \frac{2M_{\text{к}}}{\pi ba^2},$$

где a и b — полуоси эллипса.

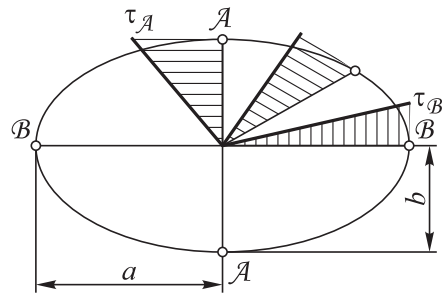


Рис. 2.29

Угловое перемещение для стержня эллиптического сечения имеет следующее выражение:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}l}{G\dfrac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}.$$

Для сечения, имеющего форму равностороннего треугольника со сторонами a, наибольшие напряжения возникают в серединах сторон и равны

$$\tau_{max} = 20M_к / a^3.$$

Угловое перемещение в этом случае

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}l}{G\frac{\sqrt{3}}{80}a^4}.$$

Обобщая все эти формулы, можно отметить, что при кручении

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}; \tag{2.24}$$

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}l}{GJ_к}, \tag{2.25}$$

а также

$$M_к = GJ_к\theta. \tag{2.26}$$

Потенциальная энергия, накопленная закрученным брусом, согласно формуле (2.20), равна

$$U = \int_0^l \frac{M_к dz}{2GJ_к}. \tag{2.27}$$

Здесь $W_к$ и $J_к$ — геометрические параметры, зависящие от формы сечения (табл. 2.2). Для круглого сечения $W_к$ и $J_к$ совпадают соответственно с W_p и J_p, т.е. с полярным моментом сопротивления и полярным моментом инерции.

2.4. Краткие сведения о пленочной (мембранной) аналогии

В результате того, что аналитическое решение задачи о кручении стержня с некруглым поперечным сечением является достаточно сложным, возникла необходимость создания косвенных методов исследования этого вопроса. Среди таких методов первое место занимает *метод аналогий*.

В задачах механики часто встречаются случаи, когда решения совершенно различных по физической сущности задач сводятся

к одним и тем же дифференциальным уравнениям. Тогда между задачами может быть установлена аналогия. Можно, не решая уравнения, сказать, например, что между переменными x_1 и y_1 из одной задачи существует та же зависимость, что и между переменными x_2 и y_2 из другой задачи. Тогда говорят, что переменная x_2 является аналогом переменной x_1, а y_2 — аналогом переменной y_1. Часто бывает так, что в первой задаче, не решая уравнений, трудно представить себе связь между переменными x_1 и y_1, а физическое содержание второй задачи допускает простое и наглядное толкование зависимости x_2 от y_2. В таком случае установленная аналогия дает возможность наглядно представить себе закономерности, существующие в первой задаче.

Так, в частности, обстоит дело с задачей о кручении. Оказывается, что, независимо от формы исследуемого сечения, задача о кручении стержня сводится к тому же дифференциальному уравнению, что и задача о равновесии пленки, натянутой по контуру той же формы и нагруженной равномерно распределенным давлением. Аналогом напряжения является угол, который составляет касательная к поверхности пленки с плоскостью контура, а аналогом крутящего момента — объем, заключенный между плоскостью контура и поверхностью пленки.

Характер деформации пленки под действием давления можно всегда представить себе, если не точно, то, во всяком случае, ориентировочно.

Следовательно, всегда имеется возможность представить и закон распределения напряжений при кручении стержня с заданной формой сечения.

Положим, например, что нужно установить закон распределения напряжений в сечении, показанном на рис. 2.30. Представим себе, что на заданный контур натянута пленка, которая нагружена равномерно распределенным давлением. Изобразим несколько разрезов пленки. Соответственно углам наклона пленки покажем ориентировочно распределение напряжений по сечению (см. рис. 2.30).

Методом пленочной аналогии можно получить не только качественные, но и количественные соотношения. Для этого используют специальный несложный прибор*, состоящий из подвижного столика, на котором расположена

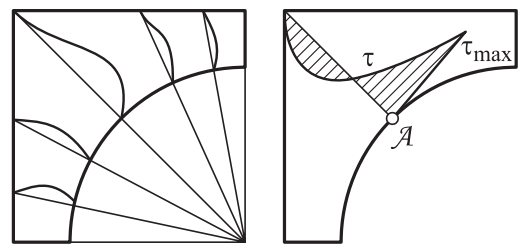


Рис. 2.30

* Более подробно с конструкцией прибора можно ознакомиться в предыдущих изданиях настоящего учебника.

плоская коробка с натянутой тонкой резиновой пленкой. Сверху пленка вплотную накрыта крышкой с отверстием по форме исследуемого сечения. К нижней части коробки подведена трубка, сообщающаяся со стеклянным манометром. Поднимая трубку, повышают давление под резиновой пленкой, и последняя деформируется. Легко провести обмер пленки посредством вертикально установленного микрометра. Координаты точки на пленке устанавливают продольным и поперечным перемещениями столика. После того как определены перемещения, могут быть найдены и углы наклона касательной к поверхности пленки.

Если по форме исследуемого сечения изготовить пробку и плотно закрыть ею отверстие в верхней крышке, то пленка распрямится и жидкость из объема под пленкой будет вытеснена. По уровню жидкости в стеклянной трубке определяют объем между прогнувшейся пленкой и горизонтальной плоскостью. Этот объем, как уже говорилось, является аналогом крутящего момента.

В зависимости от толщины пленки и силы предварительного натяжения замеренные прогибы и объемы будут различными. Чтобы исключить влияние жесткости пленки, одновременно с исследуемым сечением на том же приборе производят обмер пленки с круговым очертанием. Для стержня кругового сечения жесткость и напряжения могут быть определены расчетным путем. Поэтому оказывается возможным, сопоставляя результаты замеров, найти требуемые характеристики заданного сечения по характеристикам кругового сечения из соображений пропорциональности.

Например, геометрический параметр $J_к$ исследуемого сечения (см. формулу (2.25)) можно определить из соотношения

$$\frac{J_к}{J_p} = \frac{V}{V_0},$$

где $J_p = \pi D^4/32$ — полярный момент инерции круга, D — диаметр кругового сечения; V, V_0 — объемы, ограниченные пленкой, для исследуемого и кругового сечений при одном и том же давлении.

Аналогично можно вычислить и геометрический параметр $W_к$ (см. формулу (2.24)):

$$\frac{W_к}{W_p} = \frac{\alpha_{0\max}}{\alpha_{\max}},$$

где $W_p = \pi D^3/16$ — полярный момент сопротивления кругового сечения; $\alpha_{\max}$, $\alpha_{0\max}$ — максимальные углы наклона касательной

к поверхности пленки для исследуемого и кругового сечений, полученные замером при одинаковых объемах, ограниченных пленкой.

Рассмотренная аналогия не является единственной. Для задачи о кручении стержня могут быть предложены и другие аналогии, связанные, например, с законами гидродинамики. В теории упругости при решении некоторых задач используются также электростатические аналогии, где законы распределения напряжений в упругом теле устанавливаются путем замера напряженности электростатического поля в различных точках исследуемой модели.

2.5. Кручение тонкостенного стержня

В практике машиностроения и особенно самолетостроения часто возникает необходимость расчета на кручение так называемых тонкостенных стержней. Типичные формы прокатанных, гнутых, тянутых и прессованных профилей показаны на рис. 2.31. Характерной геометрической особенностью тонкостенных стержней является то, что их толщина существенно меньше прочих линейных размеров.

Тонкие профили подразделяются на замкнутые и открытые. Так, профили *а*–*г*, показанные на рис. 2.31, являются открытыми, а *д*–*ж* — замкнутыми.

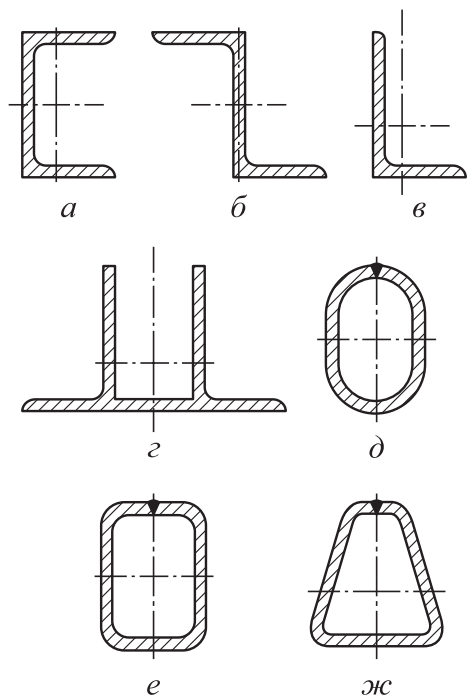


Рис. 2.31

Характер распределения напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня проще всего установить с помощью пленочной аналогии. Представим себе вырезанное в плоской плите отверстие по форме профиля и натянутую на нем пленку. Если приложить к пленке равномерно распределенную нагрузку, то пленка деформируется, но по-разному, в зависимости от того, замкнутым или открытым является профиль. Это различие иллюстрирует рис. 2.32. В случае замкнутого профиля область внутри контура не связана с внешней областью и под действием давле-

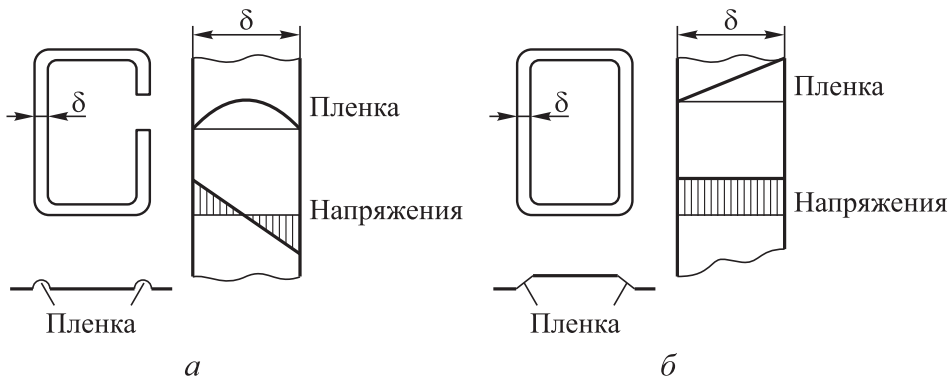


Рис. 2.32

ния смещается (рис. 2.32, *б*). Это и предопределяет качественное различие между формами пленки для случаев замкнутого и открытого профилей.

Для открытого профиля пленка имеет наибольшие углы наклона по концам нормального отрезка (рис. 2.32, *а*), причем примерно в середине толщины происходит смена знака угла наклона. С большой степенью точности можно принять, что напряжения по толщине незамкнутого профиля распределены линейно.

В случае замкнутого контура деформированная пленка образует поверхность примерно постоянного угла подъема (см. рис. 2.32, *б*), откуда следует, что распределение напряжений по толщине профиля близко к равномерному.

Перейдем к составлению расчетных формул. Начнем с открытого профиля. Достаточно очевидно, что форма пленки (см. рис. 2.32, *а*), а следовательно, и напряжения в стержне сильно не изменятся, если профиль сечения распрямить. Иначе говоря, напряжения в криволинейном открытом профиле будут примерно такими же, как и в прямом. Но в этом случае могут быть использованы расчетные формулы, приведенные ранее для прямоугольного сечения с большим отношением сторон.

Обращаясь к формулам (2.21), (2.23) и табл. 2.1, при $a/b = \infty$ получаем

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{\text{к}}}{\delta^2 s}; \tag{2.28}$$

$$\varphi = \frac{3\mathfrak{M}l}{G\delta^3 s}, \tag{2.29}$$

где δ — толщина профиля (меньшая сторона прямоугольника); s — длина контура поперечного сечения (бо́льшая сторона прямоугольника).

Полученные таким образом расчетные формулы являются общими, т.е. не зависят от формы профиля, если только последний может быть развернут в прямоугольник.

В случае, если тонкостенный незамкнутый профиль является составным, как это, например, показано на рис. 2.33, и не может быть развернут в вытянутый прямоугольник, поступают следующим образом: момент $M_к$ рассматривают как сумму моментов, возникающих в отдельных участках. Тогда, согласно формуле (2.29),

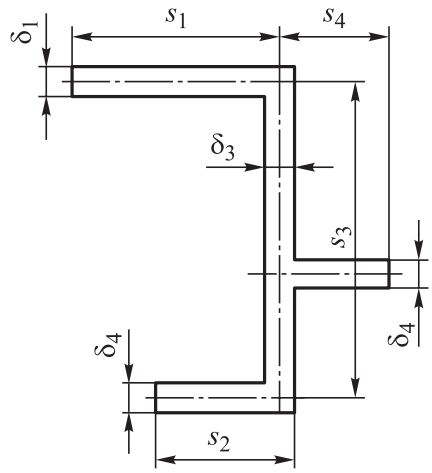


Рис. 2.33

$$\mathfrak{M} = M_к = \frac{\varphi G}{3l}(\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \ldots + \delta_n^3 s_n)$$

и

$$\varphi = \frac{3\mathfrak{M}l}{G(\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \ldots + \delta_n^3 s_n)}. \qquad (2.30)$$

При помощи пленочной аналогии легко установить, что наибольшие напряжения возникают на участке с наибольшей толщиной δ_{max}. Для этого отдельно взятого участка, которому мы припишем номер i, справедливы формулы (2.28) и (2.29):

$$\tau_i = \tau_{max} = \frac{3M_i}{\delta_i^2 s_i}; \qquad \varphi = \frac{3M_i l}{G\delta_i^3 s_i},$$

где M_i — доля крутящего момента, соответствующего i-му участку; φ — угловое перемещение, единое для всех участков. Исключая из этих выражений M_i, находим

$$\tau_i = \tau_{max} = \varphi G \frac{\delta_{max}}{l},$$

или, учитывая выражение (2.30), получаем

$$\tau_{max} = \frac{3M_к \delta_{max}}{(\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \ldots + \delta_n^3 s_n)}. \qquad (2.31)$$

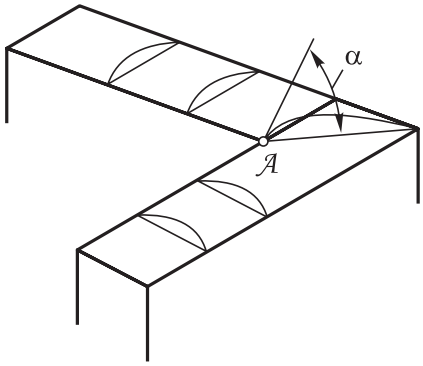


Рис. 2.34

Изложенный метод определения напряжений в незамкнутом профиле является приближенным, поскольку не учитываются повышенные местные напряжения во внутренних углах ломаного профиля. Чем меньше радиус закругления во внутренних углах, тем больше местные напряжения. Это наглядно можно проиллюстрировать при помощи пленочной аналогии (рис. 2.34). Местный угол наклона α пленки в точке *A* больше, чем в остальных точках внутреннего контура. Во избежание местных перенапряжений внутренние углы в профилях выполняют скругленными.

Рассмотрим теперь кручение стержня, имеющего поперечное сечение в форме замкнутого тонкостенного профиля (рис. 2.35).

Здесь в отличие от открытого профиля напряжения распределены по толщине равномерно. Выделим из стержня элементарную призму длиной *dz*. Размер призмы в направлении дуги контура, т. е. расстояние между точками *1* и *2*, является произвольным. Пусть толщина контура в точке *1* будет δ_1, а в точке *2* — δ_2. Соответственно через τ_1 и τ_2 обозначим напряжения в поперечном сечении. В продольных сечениях возникают парные напряжения $\tau'_1 = \tau_1$ и $\tau'_2 = \tau_2$.

Составим для выделенного элемента уравнение равновесия, спроецировав все силы на направление оси бруса. Очевидно,

$$\tau_1 \delta_1 dz = \tau_2 \delta_2 dz.$$

Так как точки *1* и *2* взяты произвольно, то $\tau\delta = \text{const}$.

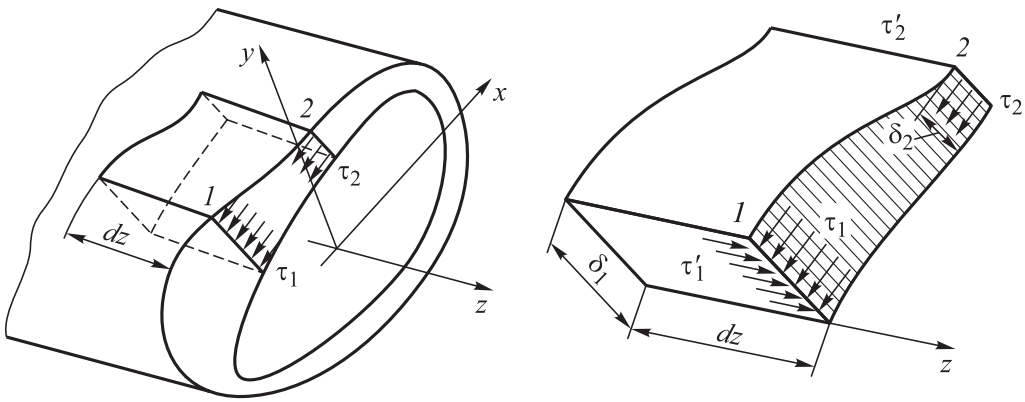


Рис. 2.35

Таким образом, произведение $\tau\delta$ по длине замкнутого контура не изменяется. На участках, имеющих меньшую толщину, напряжения будут соответственно бо́льшими.

Выразим крутящий момент через напряжения τ. Для этого возьмем на контуре элементарный участок длиной ds (рис. 2.36).

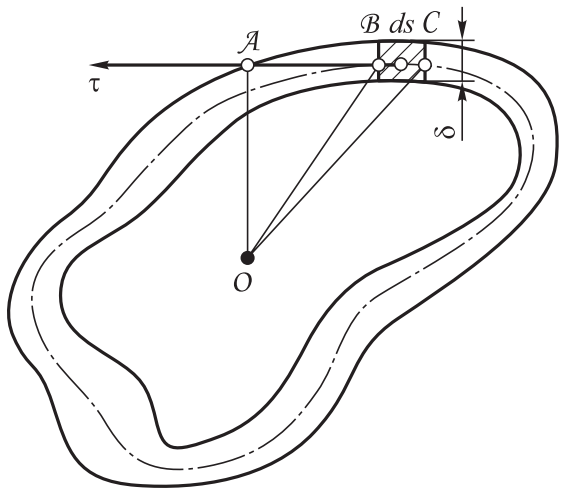


Рис. 2.36

Момент силы $\tau\delta ds$ относительно произвольно взятой точки O равен $\tau\delta ds|OA|$. Тогда

$$M_{\text{к}} = \int \tau\delta |OA|\, ds.$$

Поскольку произведение $\tau\delta$ по длине дуги контура не изменяется, то

$$M_{\text{к}} = \tau\delta \int_s |OA|\, ds.$$

Произведение $|OA|ds$ представляет собой удвоенную площадь треугольника OBC, а интеграл от этого произведения по длине замкнутого контура дает удвоенную площадь, ограниченную средней линией контура. Обозначим эту площадь через A^* в отличие от A (т. е. от площади реального сечения). Таким образом,

$$M_{\text{к}} = \tau\delta 2A^*.$$

Наибольшее напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{2A^*\delta_{\min}}. \qquad (2.32)$$

Остается определить угловое перемещение φ для тонкостенного стержня замкнутого профиля поперечного сечения. Сделаем это путем сопоставления потенциальной энергии, выраженной через напряжение τ, с потенциальной энергией, выраженной через внешний момент $\mathfrak{M}$. Обратимся к выражению удельной потенциальной энергии при сдвиге (2.3)

$$U_0 = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Энергия, накопленная в элементарном объеме с размерами *ds*, *dz*, δ, равна

$$dU = \frac{\tau^2}{2G}\delta dz ds.$$

Это выражение должно быть проинтегрировано по длине стержня *l* и по дуге замкнутого контура. Если стержень является однородным по длине, то

$$U = \frac{l}{2G}\int_s \tau^2 \delta ds = \frac{l\tau^2\delta^2}{2G}\int_s \frac{ds}{\delta}.$$

Интеграл $\int_s \frac{ds}{\delta}$ зависит от закона изменения толщины по дуге контура и является геометрической характеристикой сечения. Учитывая, что

$$\tau\delta = \frac{M_к}{2A^*} = \frac{\mathfrak{M}}{2A^*},$$

получим

$$U = \frac{\mathfrak{M}^2 l}{8G(A^*)^2}\int_s \frac{ds}{\delta}.$$

Однако энергию *U* можно выразить как работу внешнего момента $\mathfrak{M}$ на угловом перемещении φ:

$$U = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\varphi.$$

Приравнивая оба выражения для U, находим

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M} l}{4G(A^*)^2} \int_s \frac{ds}{\delta}.$$

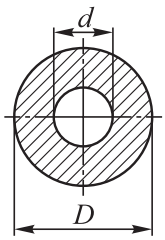
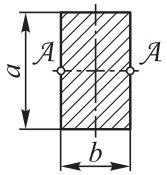
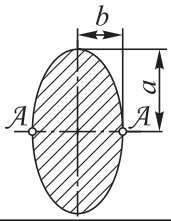
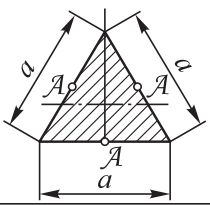
Если толщина δ по дуге контура не меняется, то

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M} ls}{4G(A^*)^2 \delta}, \tag{2.33}$$

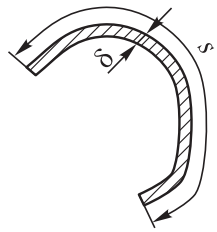
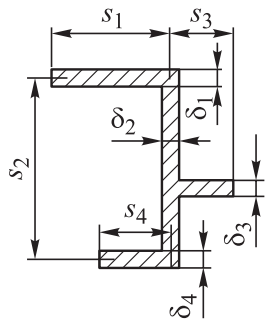
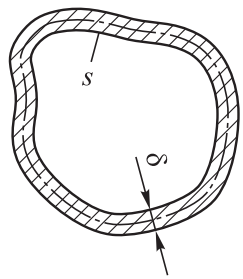
где s — длина замкнутого контура.

Геометрические параметры $W_к$ и $J_к$, входящие в формулы напряжений и углов поворота, для различных сечений приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Вид сечения			$W_к$	$J_к$
Сплошное сечение	Круговое		$0,2D^3\left(1-\frac{d^4}{D^4}\right)$	$\frac{\pi D^4}{32}\left(1-\frac{d^4}{D^4}\right)$
	Прямоугольное		$\alpha b^2 a$	$\beta b^3 a$
	Эллиптическое		$\frac{\pi a b^2}{2}$	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$
	В форме равносторонне-го треугольника		$\frac{a^3}{20}$	$\frac{\sqrt{3}}{80}a^4$

Окончание табл. 2.2

Вид сечения			$W_к$	$J_к$
Тонкостенное сечение	Открытый профиль		$\frac{1}{3}\delta^2 s$	$\frac{1}{3}\delta^3 s$
	Составной профиль		$\frac{J_к}{\delta_{max}}$	$\frac{1}{3}\sum_1^n \delta_i^3 s_i$
	Замкнутый профиль		$2A^*\delta_{min}$	$\frac{4(A^*)^2}{\int_s \frac{ds}{\delta}}$

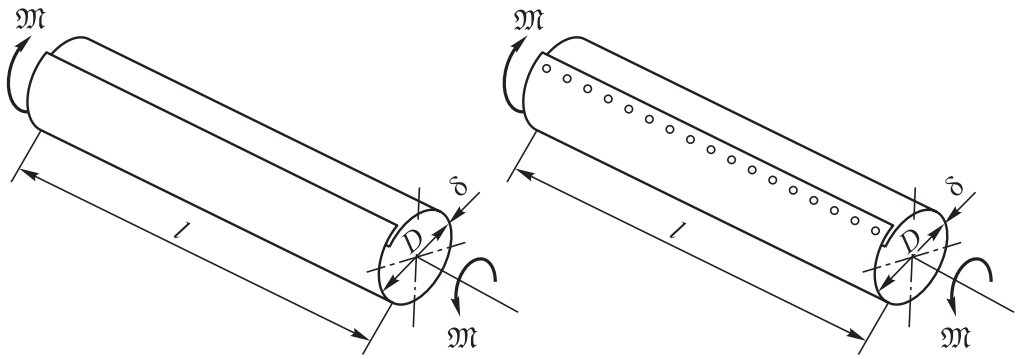
Пример 2.4. Определить напряжение и угловое перемещение в тонкостенной трубе, свернутой из листа, для двух вариантов: *а* — края листа свободны, *б* — края листа склепаны (рис. 2.37). Сопоставить напряжения и углы поворота сечений.

В первом варианте профиль поперечного сечения следует рассматривать как открытый. Пренебрегая участком профиля в зоне соединения краев внахлестку, согласно формулам (2.28) и (2.29), получаем

$$\tau_a = \frac{3\mathfrak{M}}{\pi D\delta^2}; \qquad \varphi_a = \frac{3\mathfrak{M}l}{G\pi D\delta^3}.$$

Во втором варианте профиль является замкнутым. Согласно формулам (2.32) и (2.33), имеем

$$\tau_б = \frac{\mathfrak{M}}{2\frac{\pi D^2}{4}\delta}; \qquad \varphi_б = \frac{\mathfrak{M}l\pi D}{4G\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2\delta}.$$



а *б*

Рис. 2.37

Для более наглядного сопоставления рассмотрим отношения напряжений и углов:

$$\frac{\tau_a}{\tau_б} = \frac{3}{2}\frac{D}{\delta}; \qquad \frac{\varphi_a}{\varphi_б} = \frac{3}{4}\frac{D^2}{\delta^2}.$$

Таким образом, отношение напряжений имеет значение порядка D/δ, а отношение углов поворота — порядка D^2/δ^2. Но, согласно определению тонкостенности, D много больше, чем δ. Следовательно, замкнутый профиль оказывается существенно более прочным и в еще большей степени жестким, чем такой же незамкнутый.

Этот вывод является общим. Внешний момент, приложенный к стержню с замкнутым контуром сечения, уравновешивается моментами внутренних сил с длиной плеча порядка поперечных размеров сечения, а для открытого профиля — порядка толщины. Отсюда следует, что касательные напряжения в открытом профиле будут во столько раз больше, чем в замкнутом, во сколько поперечные размеры сечения больше его толщины.

Пример 2.5. При заданном моменте $\mathfrak{M}$ и геометрических размерах трубы, рассмотренной в предыдущем примере, найти усилие, приходящееся на одну заклепку (см. рис. 2.37, вариант *б*).

Двумя продольными сечениями выделяем из трубы клепаный узел (рис. 2.38). Сила, действующая на заклепки вдоль образующей, равна $F = \tau\delta l$, но

$$\tau = \frac{\mathfrak{M}}{2\dfrac{\pi D^2}{4}\delta},$$

следовательно,

$$F = \frac{2\mathfrak{M}l}{\pi D^2}.$$

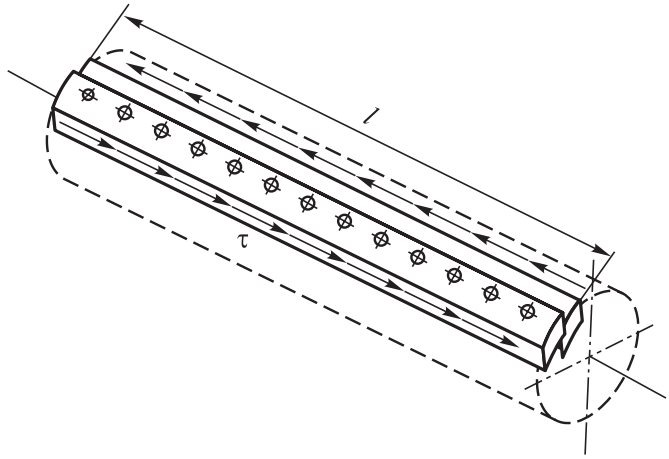


Рис. 2.38

Если число заклепок равно n, то сила, приходящаяся на одну заклепку, будет равна F/n.

Из силовой схемы, представленной на рис. 2.38, видно, что при отсутствии заклепок концы листа получили бы смещение вдоль образующей. Поперечное сечение вышло бы при этом из своей начальной плоскости и произошла бы, как говорят, *депланация* сечения. Ограничение депланации приводит к повышению жесткости и прочности стержня.

В тех случаях, когда из эксплуатационных, монтажных или конструктивных соображений приходится идти на применение незамкнутых профилей, стараются наложить местные ограничения на депланацию. Так, на рис. 2.39 показан стержень с тонкостенным незамкнутым профилем, в котором при помощи жесткой заделки и двух перемычек ограничена депланация. Кручение в таких условиях носит название *стесненного кручения*.

Пример 2.6. К тонкостенному стержню корытного профиля (рис. 2.40) приваривают стержень с угловым профилем. Определить, во

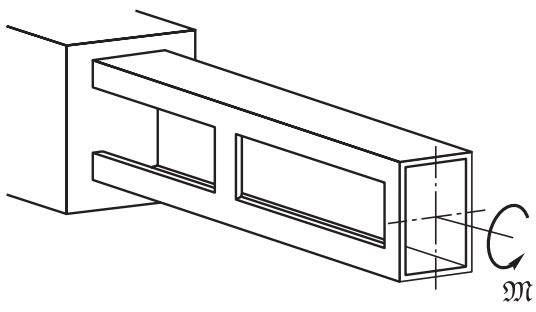


Рис. 2.39

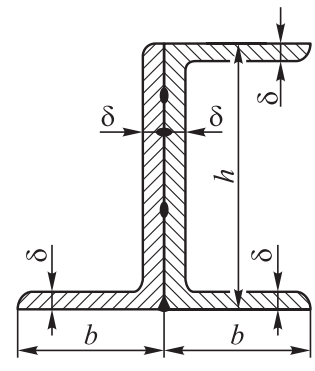


Рис. 2.40

сколько раз увеличится жесткость стержня на кручение и во сколько раз при том же моменте снизятся напряжения.

Для корытного профиля формула (2.30) дает

$$\varphi = \frac{3\mathfrak{M}l}{G\,\delta^3(2b+h)}.$$

Для составного профиля по той же формуле получаем

$$\varphi = \frac{3\mathfrak{M}l}{G\,[3b\delta^3 + (2\delta)^3 h]}.$$

Следовательно, жесткость после приварки уголка увеличится в $(3b + + 8h)/(2b + h)$ раз. Согласно формуле (2.31), для корытного профиля

$$\tau = \frac{3\mathfrak{M}}{\delta^2(2b+h)},$$

а для составного

$$\tau = \frac{3\mathfrak{M}\cdot 2\delta}{3b\delta^3 + (2\delta)^3 h}.$$

Следовательно, после приварки уголка напряжения уменьшатся в $0{,}5(3b + + 8h)/(2b + h)$ раз.

Глава 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ

3.1. Статические моменты сечения

При решении задач, связанных с изгибом, возникает необходимость оперировать некоторыми геометрическими характеристиками поперечных сечений стержня. Эти характеристики применяются в основном при решении задач изгиба и в силу своего узкого прикладного значения в общем курсе геометрии не изучаются. Их рассматривают обычно в курсе сопротивления материалов. Настоящая глава и посвящена этому вопросу.

Возьмем некоторое поперечное сечение стержня (рис. 3.1). Свяжем его с системой координат x, y и рассмотрим два следующих интеграла:

$$S_x = \int_A y dA; \qquad S_y = \int_A x dA, \tag{3.1}$$

где A у знака интеграла указывает на то, что интегрирование ведется по всей площади сечения. Каждый из этих интегралов представляет собой сумму произведений элементарных площадей dA на расстояние до соответствующей оси (x или y). Первый интеграл называется *статическим моментом сечения* относительно оси x, а второй — статическим моментом сечения относительно оси y. Статический момент измеряют в $см^3$ или $мм^3$.

При параллельном переносе осей статические моменты меняются. Рассмотрим две системы координат: x_1, y_1 и x_2, y_2. Система x_2, y_2 получена параллельными смещениями осей x_1 на расстояние b и y_1 на расстояние a (рис. 3.2). Положим, что площадь сечения A и статические моменты относительно осей x_1 и y_1, т. е. S_{x_1} и S_{y_1}, заданы. Требуется определить S_{x_2} и S_{y_2}.

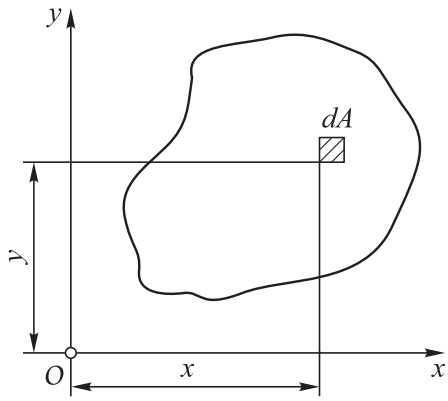


Рис. 3.1

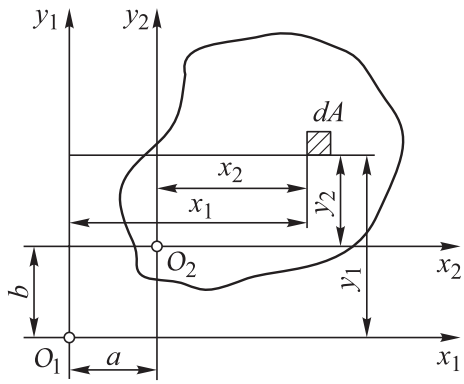


Рис. 3.2

Очевидно, $x_2 = x_1 - a$, $y_2 = y_1 - b$. Тогда искомые статические моменты будут

$$S_{x_2} = \int_A (y_1 - b)dA; \qquad S_{y_2} = \int_A (x_1 - a)dA,$$

или

$$S_{x_2} = S_{x_1} - bA; \qquad S_{y_2} = S_{y_1} - aA.$$

Таким образом, при параллельном переносе осей статический момент изменяется на величину, равную произведению площади A на расстояние между осями.

Рассмотрим более детально, например, первое из полученных выражений:

$$S_{x_2} = S_{x_1} - bA.$$

Величина b может быть любой: как положительной, так и отрицательной. Поэтому ее всегда можно подобрать (причем единственным образом) так, чтобы произведение bA было равно S_{x_1}. Тогда статический момент S_{x_2} относительно оси x_2 обращается в нуль.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*. Среди семейства параллельных осей она является единственной, и расстояние до этой оси от некоторой произвольно взятой оси x_1

$$b = y_C = \frac{S_{x_1}}{A} \qquad (3.2)$$

Аналогично для другого семейства параллельных осей

$$a = x_C = \frac{S_{y_2}}{A}. \tag{3.3}$$

Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения*. Путем поворота осей можно показать, что статический момент относительно любой оси, проходящей через центр тяжести, равен нулю.

Нетрудно установить тождественность данного определения и обычного определения центра тяжести как точки приложения равнодействующих сил тяжести. Если уподобить рассмотренное сечение однородной пластинке, то сила тяжести пластинки во всех точках будет пропорциональна элементарной площади dA, а момент сил тяжести относительно некоторой оси — статическому моменту. Этот момент относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен нулю. В нуль обращается, следовательно, и статический момент относительно центральной оси.

Выражения (3.2) и (3.3) дают возможность определить положение центра тяжести, если найдены статические моменты, или, наоборот, найти статические моменты, если известно положение центра тяжести.

Рассмотрим простейшие примеры.

Пример 3.1. Найти, на каком расстоянии от основания расположен центр тяжести треугольника (рис. 3.3).

Сначала определим статический момент треугольника относительно оси x_1:

$$S_{x_1} = \int_A y_1 dA.$$

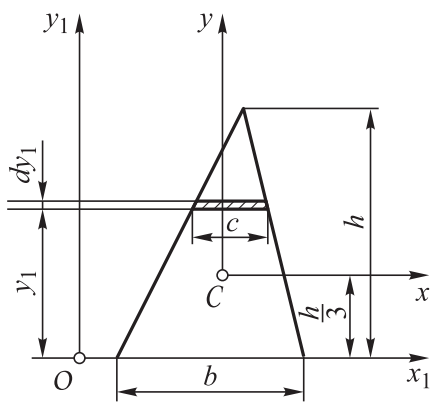


Рис. 3.3

Запишем выражение для элементарной площади: $dA = cdy_1$. Из подобия треугольников получаем $c = b\dfrac{h - y_1}{h}$, где b — основание треугольника; h — его высота.

Таким образом,

$$S_{x_1} = \frac{b}{h}\int_0^h (h - y_1)\, y_1 dy_1. \tag{3.4}$$

После интегрирования находим $S_{x_1} = bh^2/6$. Расстояние от основания треугольника до центра тяжести

$$y_C = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{bh^2/6}{bh/2} = \frac{h}{3}.$$

Пример 3.2. Определить положение центра тяжести сложного составного сечения (рис. 3.4).

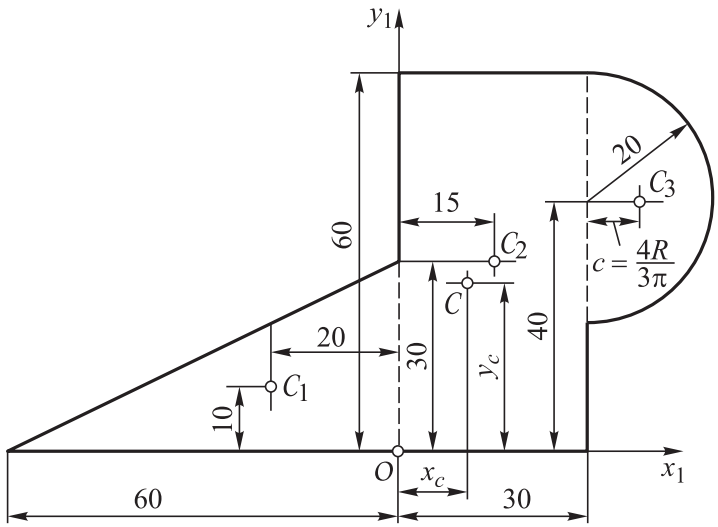


Рис. 3.4

Разбиваем сечение на три простейшие фигуры: треугольник, прямоугольник и полукруг. Выбираем произвольную систему осей x_1, y_1 и определяем координаты центров тяжести составляющих сечение фигур. У треугольника центр тяжести C_1 находится на расстоянии 1/3 высоты от основания. Для прямоугольника положение центра тяжести C_2 определяется пересечением средних линий. У полукруга центр тяжести C_3 расположен на оси симметрии на расстоянии $4R/3\pi$ от вертикального диаметра (см. рис. 3.4).

Последнее выражение (тому, кто не забыл, чему равен объем шара) удобнее всего получить на основании теоремы Гюльдена. Вращая полукруг относительно диаметра, получаем тело вращения — сферу, объем которой равен произведению дуги $2\pi c$ на площадь полукруга:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi c \frac{\pi R^2}{2}, \qquad \text{откуда } c = \frac{4R}{3\pi}.$$

Определяем статический момент составной фигуры как сумму статических моментов составляющих фигур:

$$S_{x_1} = A_1 y_{c} + A_2 y_{1} + A_3 y_{c_2}.$$

Таким образом, находим

$$S_{x_1} = \frac{1}{2}60 \cdot 30 \cdot 10 + 30 \cdot 60 \cdot 30 + \pi \frac{20^2}{2} 40 = 88\,100 \text{ мм}^3,$$

$$S_{y_1} = -\frac{1}{2}30\cdot 60\cdot 20 + 30\cdot 60\cdot 15 + \pi\frac{20^2}{2}\left(30+\frac{4\cdot 20}{3\pi}\right) = 33\,200 \text{ мм}^3.$$

Площадь составной фигуры

$$A = \frac{1}{2}60\cdot 30 + 30\cdot 60 + \frac{\pi\cdot 20^2}{2} = 3330 \text{ мм}^2.$$

Искомые координаты центра тяжести в системе осей x_1, y_1 имеют следующие значения:

$$x_c = S_{y_1}/A = 33\,200/3330 = 9{,}97 \text{ мм};$$

$$y_c = S_{x_1}/A = 88\,100/3330 = 26{,}5 \text{ мм}.$$

3.2. Моменты инерции сечения

В дополнение к статическим моментам рассмотрим еще три следующих интеграла:

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA; \quad J_{xy} = \int_A xy dA, \tag{3.5}$$

где по-прежнему через x и y обозначены текущие координаты элементарной площадки dA в произвольно взятой системе координат x, y (см. рис. 3.1). Первые два интеграла называются *осевыми моментами инерции сечения* относительно осей x и y соответственно. Третий интеграл называется *центробежным моментом инерции сечения* относительно осей x, y. Измеряют моменты инерции в см^4 или мм^4.

Осевые моменты инерции всегда положительны, поскольку положительной считается площадь dA. Центробежный момент инерции может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от расположения сечения относительно осей x, y.

Выведем формулы преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей. Для этого снова обратимся к рис. 3.2. Будем считать, что заданы моменты инерции и статические моменты относительно осей x_1, y_1. Требуется определить моменты инерции относительно осей x_2, y_2:

$$J_{x_2} = \int_A y_2^2 dA; \quad J_{y_2} = \int_A x_2^2 dA; \quad J_{x_2y_2} = \int_A x_2 y_2 dA.$$

Подставляя сюда $x_2 = x_1 - a$ и $y_2 = y_1 - b$, находим

$$J_{x_2} = \int_A (y_1 - b)^2 dA; \qquad J_{y_2} = \int_A (x_1 - a)^2 dA;$$

$$J_{x_2y_2} = \int_A (x_1 - a)(y_1 - b)dA.$$

Раскрывая скобки, имеем, согласно обозначениям (3.1) и (3.5),

$$\begin{aligned} J_{x_2} &= J_{x_1} - 2bS_{x_1} + b^2A; \\ J_{y_2} &= J_{y_1} - 2aS_{y_1} + a^2A; \\ J_{x_2y_2} &= J_{x_1y_1} - aS_{x_1} - bS_{y_1} + abA. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если оси x_1 и y_1 — центральные, то $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$, и полученные выражения упрощаются:

$$\begin{aligned} J_{x_2} &= J_{x_1} + b^2A; \\ J_{y_2} &= J_{y_1} + a^2A; \\ J_{x_2y_2} &= J_{x_1y_1} + abA. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Следовательно, при параллельном переносе осей (если одна из осей — центральная) осевые моменты инерции изменяются на величину, равную произведению площади сечения на квадрат расстояния между осями.

Из первых двух формул (3.7) следует, что в семействе параллельных осей минимальный момент инерции получается относительно центральной оси ($a = 0$ или $b = 0$). Поэтому легко запомнить, что при переходе от центральных осей к нецентральным осевые моменты инерции увеличиваются, и величины a^2A и b^2A следует к моментам инерции прибавлять, а при переходе от нецентральных осей к центральным — вычитать.

При определении центробежного момента инерции по последней из формул (3.7) следует учитывать знак величин a и b. Можно, однако, и сразу установить, как изменяется значение J_{xy} при параллельном переносе осей. Для этого следует иметь в виду, что сечения, находящиеся в I и III квадрантах системы координат x_1, y_1 (рис. 3.5), имеют положительные, а сечения, находящиеся в II и IV квадрантах, — отрицательные значения центробежного момента. Поэтому при переносе осей проще

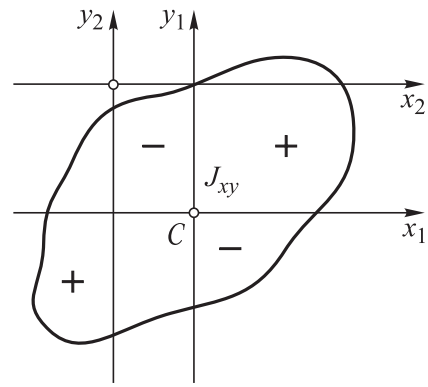


Рис. 3.5

всего устанавливать знак слагаемого abA в соответствии с тем, какие из четырех площадей увеличиваются, а какие — уменьшаются. Например, если от центральных осей x_1, y_1 (см. рис. 3.5) следует перейти к осям x_2, y_2, то видно, что в результате такого переноса резко возрастает площадь IV квадранта, следовательно, момент инерции уменьшается, и произведение abA из момента $J_{x_1y_1}$ следует вычесть.

Приведем примеры определения моментов инерции простейших сечений относительно характерных осей.

Пример 3.3. Найти момент инерции прямоугольника с основанием b и высотой h относительно основания и относительно центральной оси, параллельной основанию (рис. 3.6).

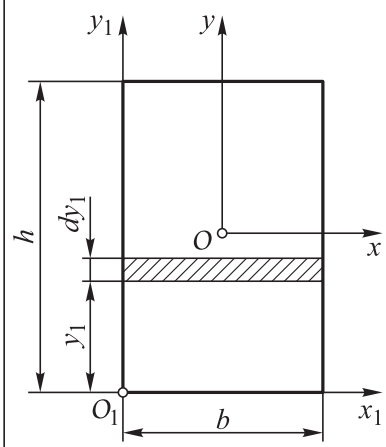


Рис. 3.6

Момент инерции относительно оси x_1

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_0^h y_1^2 b dy_1, \quad \text{или } J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}.$$

Воспользовавшись формулой переноса (3.7), найдем момент инерции относительно центральной оси:

$$J_x = J_{x_1} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 A, \quad \text{или} \quad J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Пример 3.4. Найти момент инерции рассмотренного ранее треугольника (см. рис. 3.3) относительно основания и относительно центральной оси, параллельной основанию.

Чтобы не повторять выкладок, вернемся к выражению (3.4) для статического момента треугольника и заменим величину y_1, стоящую под знаком интеграла, на y_1^2. Тогда

$$J_{x_1} = \frac{b}{h}\int_0^h (h - y_1) y_1^2 dy_1, \quad \text{откуда} \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{12}.$$

Используя формулу переноса (3.7), запишем момент инерции относительно центральной оси x (см. рис. 3.3):

$$J_x = J_{x_1} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 A, \quad \text{или} \quad J_x = \frac{bh^3}{36}.$$

Пример 3.5. Определить центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно осей, совпадающих с его катетами (рис. 3.7).

Выделим элемент площади dx_1dy_1 и, полагая величину y_1 неизменной, найдем центробежный момент полоски AB:

$$J_{x_1y_1}(\mathcal{AB}) = y_1 dy_1 \int_0^c x_1 dx_1 = y_1 dy_1 \frac{c^2}{2}.$$

Но

$$c = \frac{b}{h}(h - y_1),$$

поэтому

$$J_{x_1y_1}(\mathcal{AB}) = \frac{b^2}{2h^2}(h - y_1)^2 y_1 dy_1.$$

Проинтегрируем это выражение по y_1 от нуля до h:

$$J_{x_1y_1} = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h - y_1)^2 y_1 dy_1,$$

$$\text{или } J_{x_1y_1} = \frac{b^2h^2}{24}.$$

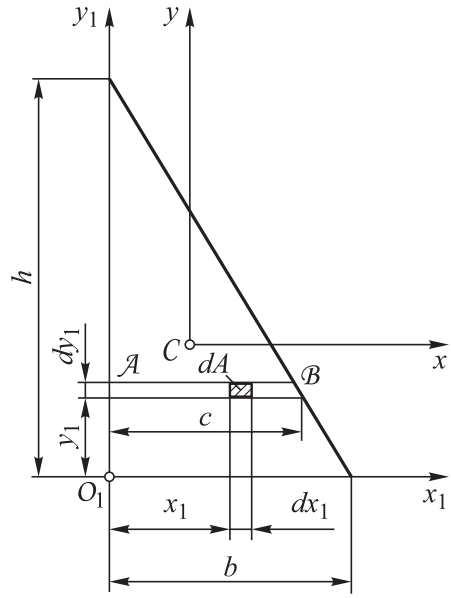


Рис. 3.7

Перейдем к центральной системе координат x, y (см. рис. 3.7). При переходе к этим осям увеличиваются площади во II и IV квадрантах, дающие отрицательные значения центробежного момента. Следовательно, согласно формуле переноса (3.7), момент $J_{x_1y_1}$ уменьшится на произведение abA:

$$J_{xy} = J_{x_1y_1} - \frac{h}{3}\frac{b}{3}A, \quad \text{или} \quad J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}.$$

Центробежный момент инерции относительно осей x, y оказался, как видим, отрицательным.

3.3. Главные оси и главные моменты инерции

Рассмотрим изменение моментов инерции при повороте осей координат. Положим, даны моменты инерции некоторого сечения относительно осей x, y (не обязательно центральных). Требуется определить J_u, J_v и J_{uv} — моменты инерции относительно осей u, v, повернутых относительно системы x, y на угол α (рис. 3.8).

Так как проекция ломаной линии $OABC$ равна проекции замыкающей, находим:

$$u = y\sin\alpha + x\cos\alpha;$$

$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

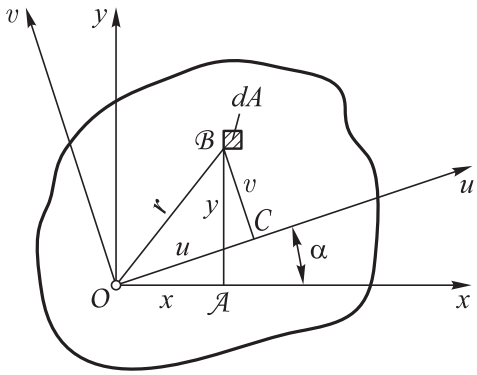


Рис. 3.8

Исключим u и v в выражениях моментов инерции:

$$J_u = \int_A v^2 dA;\ J_v = \int_A u^2 dA;\ J_{uv} = \int_A uv dA.$$

Тогда

$$J_u = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA;$$

$$J_v = \int_A (y\sin\alpha + x\cos\alpha)^2 dA;$$

$$J_{uv} = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)(y\sin\alpha + x\cos\alpha)\, dA,$$

откуда

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2\alpha; \\ J_v &= J_x \sin^2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \cos^2\alpha; \\ J_{uv} &= J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Рассмотрим два первых уравнения (3.8). Складывая их почленно, получим

$$J_u + J_v = J_x + J_y = \int_A (y^2 + x^2) dA.$$

Таким образом, сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей не зависит от угла α и при повороте осей остается постоянной. Заметим при этом, что

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

где r — расстояние от начала координат до элементарной площадки (см. рис. 3.8). Таким образом,

$$J_x + J_y = J_p, \qquad (3.9)$$

где J_p — уже знакомый нам полярный момент инерции:

$$J_p = \int_A r^2 dA,$$

значение которого, естественно, не зависит от поворота осей x, y.

При помощи выражения (3.9), в частности, легко определить осевой момент инерции круга относительно диаметра. Так как

в силу симметрии $J_x = J_y$, получаем $J_x = J_y = J_p/2$, но, как известно, $J_p = \pi D^4/32$, следовательно, для круга

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}.$$

С изменением угла поворота осей α значения моментов J_u и J_v меняются, но их сумма остается неизменной. Следовательно, существует такое α, при котором один из моментов инерции достигает своего максимального значения, в то время как другой момент инерции принимает минимальное значение.

Дифференцируя второе выражение (3.8) по α и приравнивая производную нулю, находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \tag{3.10}$$

При этом угле α один из осевых моментов будет наибольшим, а другой — наименьшим. Одновременно центробежный момент инерции J_{uv} обращается в нуль, что можно легко установить из третьей формулы (3.8).

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения, называются *главными осями*. Если они к тому же являются центральными, то тогда они называются *главными центральными осями*. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*. Определим их. Для этого первые две формулы (3.8) перепишем в виде

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_y - J_x}{2}\cos 2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha;$$

$$J_v = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_y - J_x}{2}\cos 2\alpha + J_{xy}\sin 2\alpha.$$

Учитывая, что

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \quad \text{и} \quad \sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

исключаем при помощи выражения (3.10) угол α. Тогда

$$J_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \tag{3.11}$$

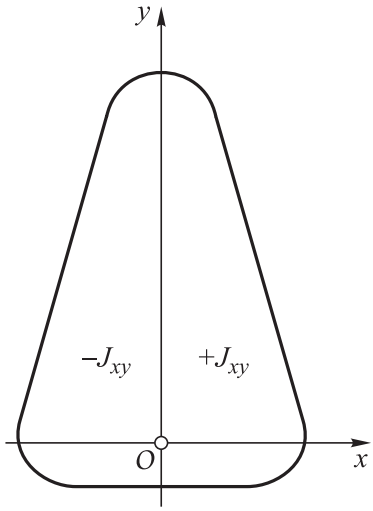


Рис. 3.9

Верхний знак соответствует максимальному моменту инерции, а нижний — минимальному. После того как сечение вычерчено в масштабе и на чертеже показано положение главных осей, нетрудно глазомерной оценкой установить, которой из двух осей соответствует максимальный, а которой — минимальный момент инерции.

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось, очевидно, всегда будет главной (рис. 3.9). Центробежный момент инерции сечений, расположенных по одну сторону от оси, равен моменту сечений, расположенных по другую сторону оси, но противоположен ему по знаку. Следовательно, $J_{xy} = 0$ и оси x и y являются главными.

Рассмотрим примеры определения главных осей и главных моментов инерции.

Пример 3.6. Определить положение главных центральных осей и главных моментов для прямоугольного треугольника, показанного на рис. 3.10.

Для центральных осей, параллельных катетам, имеем $J_x = bh^3/36$, $J_y = hb^3/36$, $J_{xy} = -b^2h^2/72$. Согласно формуле (3.10), находим $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{bh}{h^2 - b^2}$.

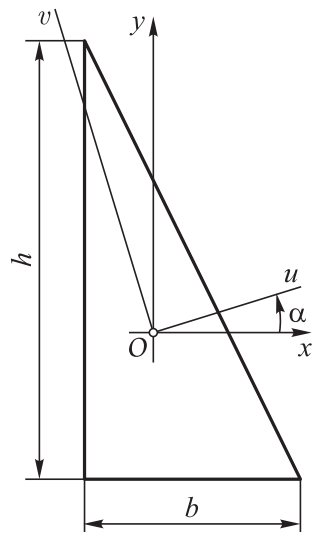


Рис. 3.10

Если $h = b$, то $\alpha = 45°$, и главная ось совпадает с осью симметрии равнобедренного треугольника. Из формулы (3.11) следует, что

$$J_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{bh}{72}\left(b^2 + h^2 \pm \sqrt{b^4 - b^2h^2 + h^4}\right).$$

Пример 3.7. Определить положение главных центральных осей и главных моментов для составного сечения (рис. 3.11).

Положение центра тяжести C для этого сечения уже было найдено ранее (см. пример 3.2). Для каждой из составляющих фигур находим моменты инерции относительно произвольно взятой системы координат x_1, y_1.

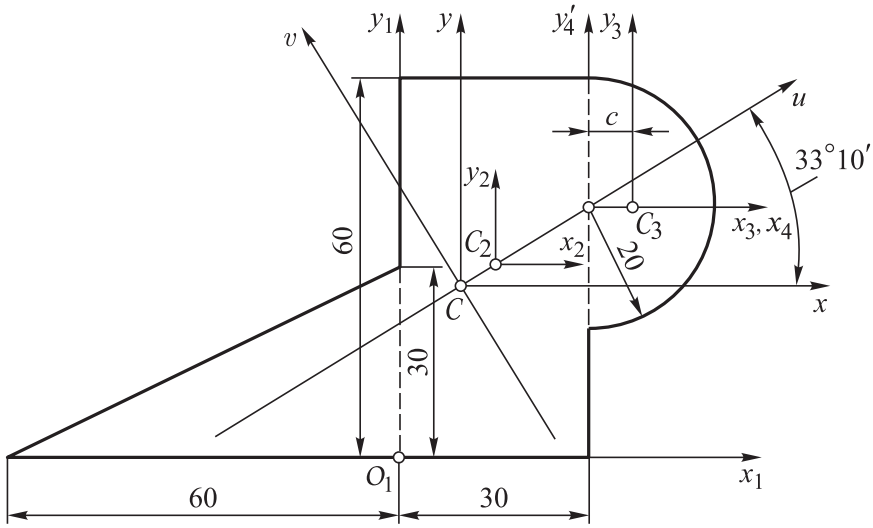


Рис. 3.11

Для треугольника

$$J_{x_1} = \frac{60 \cdot 30^3}{12} = 135\,000 \text{ мм}^4 = 13{,}5 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1} = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540\,000 \text{ мм}^4 = 54 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_1 y_1} = -\frac{30^2 \cdot 60^2}{12} = -135\,000 \text{ мм}^4 = -13{,}5 \text{ см}^4.$$

Для прямоугольника

$$J_{x_1} = \frac{30 \cdot 60^3}{3} = 2\,160\,000 \text{ мм}^4 = 216 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1} = \frac{60 \cdot 30^3}{3} = 540\,000 \text{ мм}^4 = 54 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции прямоугольника определим путем переноса осей:

$$J_{x_1 y_1} = J_{x_2 Y_2} + abA, \quad \text{или} \quad J_{x_1 y_1} = 0 + 30 \cdot 15 \cdot 30 \cdot 60 = 810\,000 \text{ мм}^4 = 81 \text{ см}^4.$$

Для полукруга воспользуемся снова методом переноса осей. Сначала определяем моменты инерции относительно центральных осей x_2, y_2:

$$J_{x_3} = \frac{1}{2}\frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 40^4}{128} = 62\,800 \text{ мм}^4 = 6{,}28 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_3} = J_{y_4} - c^2 A = \frac{\pi \cdot 40^4}{128} - \left(\frac{4 \cdot 20}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 17\ 560 \text{ мм}^4 = 1{,}76 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_3 y_2} = 0.$$

Переходя к осям x_1, y_1, получаем

$$J_{x_1} = 62\ 800 + 40^2 \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 1\ 068\ 000 \text{ мм}^4 \cong 107 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1} = 17\ 560 + (30 + c)^2 \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 948\ 000 \text{ мм}^4 = 94{,}8 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_1 y_1} = 0 + (30 + c)\, 40 \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 967\ 000 \text{ мм}^4 = 96{,}7 \text{ см}^4.$$

Суммируя полученные значения моментов инерции для составляющих фигур, находим моменты инерции относительно осей x_1, y_1 для всего сечения:

$$J_{x_1} = 336 \text{ см}^4; \quad J_{y_1} = 203 \text{ см}^4; \quad J_{x_1 y_1} = 164 \text{ см}^4.$$

Переходим к осям x, y, используя найденные ранее координаты центра тяжести C:

$$J_x = 336 - 2{,}65^2 \cdot 33{,}3 = 103 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 203 - 0{,}997^2 \cdot 33{,}3 = 170 \text{ см}^4;$$

$$J_{xy} = 164 - 0{,}997 \cdot\ 2{,}65 \cdot 33{,}3 = 76{,}3 \text{ см}^4.$$

Согласно формуле (3.10),

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 76{,}3}{170 - 103} = 2{,}28; \quad \alpha \approx 33^\circ 10'.$$

На рис. 3.11 отмечено положение главных центральных осей. Согласно формуле (3.11), находим

$$J_{\max} = 220 \text{ см}^4; \quad J_{\min} = 53{,}0 \text{ см}^4.$$

Ось u, показанная на рис. 3.11, соответствует минимальному, а ось v — максимальному значениям момента инерции.

Глава 4

ИЗГИБ

4.1. Внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях стержня при изгибе

Под *изгибом* понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты (см. В3). Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, а поперечные и нормальная силы отсутствуют, изгиб называется *чистым*. Большей частью, однако, в поперечных сечениях наряду с изгибающими моментами возникают также поперечные силы. В этом случае изгиб называют *поперечным*.

Виды изгиба классифицируют и по другим признакам; некоторые из них будут рассмотрены в дальнейшем. Стержень, работающий в основном на изгиб, часто называют балкой.

Для того чтобы правильно ориентироваться в вопросах, связанных с расчетом стержня на изгиб, необходимо, прежде всего, научиться определять законы изменения внутренних силовых факторов, т.е. строить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Рассмотрим некоторые характерные примеры и установим необходимые правила.

На рис. 4.1, *а* показан простейший двухопорный стержень, нагруженный силой *F*. Напомним еще раз, что показанная система, как и все, которые мы рассматривали до сих пор и будем рассматривать в дальнейшем, получена как результат операций, связанных с выбором расчетной схемы (см. В2). К анализу схемы двухопорного стержня сводится расчет очень многих машиностроительных конструкций, например балки мостового крана, показанной на рис. 4.2.

Анализ внутренних сил начинают обычно с определения полной системы внешних сил. В данном случае необходимо определить реакции опор. Из условий равновесия находим реакции (рис. 4.1, *б*):

$$F_{A} = \frac{Fb}{a+b}, \quad F_{B} = \frac{Fa}{a+b}.$$

На расстоянии z от левой опоры проведем сечение C (см. рис. 4.1, *б*) и разделим стержень мысленно на две части. Для того чтобы каждая из частей находилась в равновесии, в сечении C необходимо приложить силу Q и момент M. Эти силовые факторы можно определить из условий равновесия одной из частей стержня. В В3 было показано, что значение силы Q не зависит от того, рассматриваем мы условия равновесия правой или левой части стержня (рис. 4.1, *в*). В данном случае удобнее рассматривать левую часть.

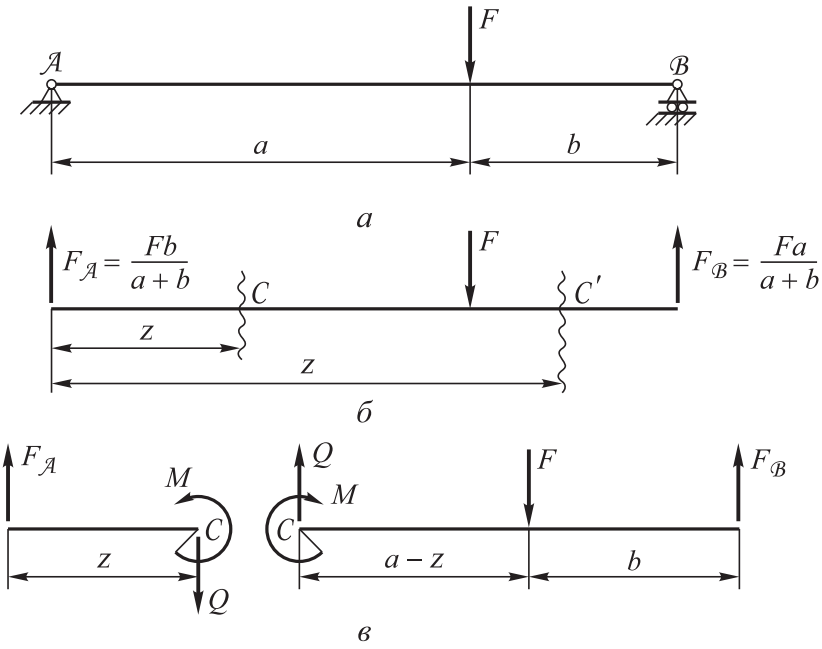


Рис. 4.1

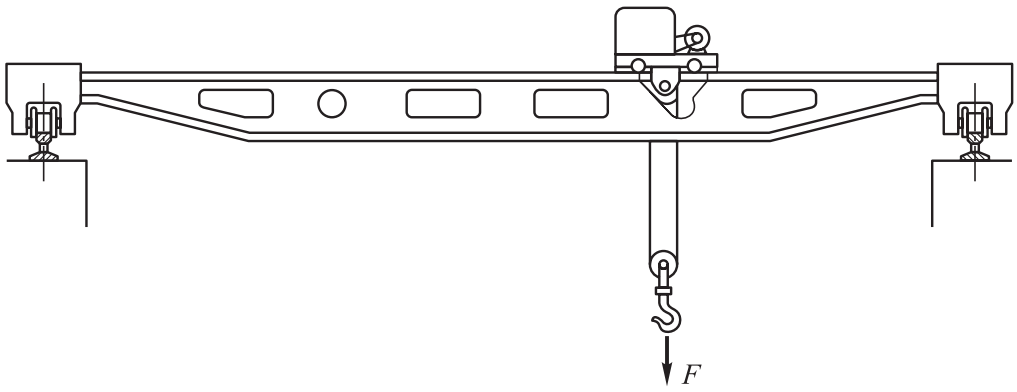


Рис. 4.2

Если взять сумму моментов всех сил, действующих на левую часть стержня относительно центральной поперечной оси в сечении C, и приравнять эту сумму нулю, то получим

$$M = F_{\text{Л}} z.$$

Если бы слева от сечения C действовали не одна, а несколько сил, изгибающий момент M в сечении определялся бы *суммой* моментов этих сил. Таким образом, изгибающий момент в сечении можно рассматривать как сумму моментов относительно поперечной оси сечения всех сил, расположенных по одну сторону от этого сечения. В дальнейшем для того, чтобы избежать громоздких рисунков, иллюстрирующих равновесие отсеченных частей стержня, изгибающий момент будем определять именно так.

Знак изгибающего момента устанавливают по знаку кривизны изогнутого стержня (рис. 4.3) в зависимости от выбранного направления осей внешней неподвижной системы координат z, y. Если ось y (см. рис. 4.3) направить в обратную сторону, то знак кривизны, а следовательно и момента, изменится на обратный. Этим правилом знаков пользуются при определении перемещений стержня и формы изогнутой оси.

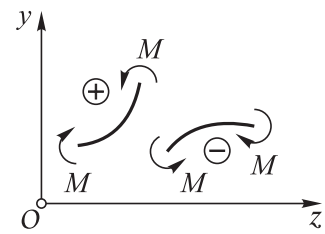


Рис. 4.3

При построении эпюр изгибающих моментов используют другое правило знаков (правило относительных знаков), при котором знак момента не зависит от направления внешних осей. Эпюру моментов строят на оси стержня, и ординату момента откладывают в сторону вогнутости упругой линии, т. е. эпюру моментов строят, как говорят, на сжатом волокне. Этому правилу можно дать и другое толкование.

Если сумма моментов сил, действующих на левую часть стержня, дает равнодействующий момент, направленный по часовой стрелке, то ординату изгибающего момента в сечении откладывают вверх. Если же равнодействующий внешний момент слева от сечения направлен против часовой стрелки, то ординату изгибающего момента откладывают вниз.

Для сил, лежащих справа от сечения, имеет место обратная зависимость: в случае равнодействующего момента, направленного по часовой стрелке, ординату изгибающего момента откладывают вниз, а в случае равнодействующего момента, направленного против часовой стрелки, — вверх. Сказанное иллюстрирует схема, представленная на рис. 4.4.

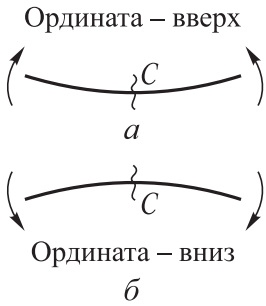


Рис. 4.4

Возвращаясь к рассматриваемому примеру двухопорного стержня, замечаем, что момент силы F_A, расположенной слева от сечения C, направлен по часовой стрелке. Следовательно, в сечении C ординату изгибающего момента нужно откладывать вверх.

В пределах изменения z от 0 до a (см. рис. 4.1) изгибающий момент

$$M = \frac{Fb}{a+b}z.$$

Рассмотрим теперь правый участок, где z изменяется от a до $a + b$. Изгибающий момент в сечении C' удобнее рассматривать как сумму моментов внешних сил, лежащих справа от сечения. Очевидно,

$$M = F_B(a+b-z) = \frac{Fa}{a+b}(a+b-z).$$

Ординату момента следует откладывать вверх, так как момент внешней силы, лежащей справа от сечения C', направлен против часовой стрелки.

В соответствии с полученными выражениями для изгибающих моментов может быть построена эпюра, показанная на рис. 4.5. Эпюра является кусочно-линейной и на всей длине стержня расположена сверху. Это значит, что ось изогнутой балки, называемая упругой линией, всюду направлена вогнутой стороной вверх, что в данном случае достаточно очевидно.

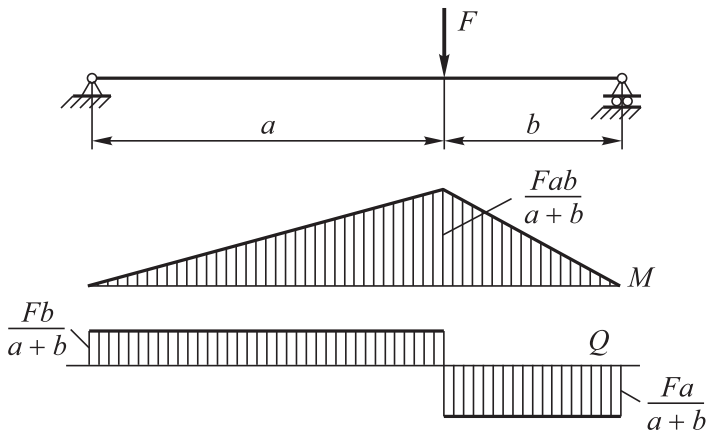


Рис. 4.5

Определим поперечные силы Q. Из условия равновесия левой или правой части разрезанного в точке C $(0 < z < a)$ стержня (см. рис. 4.1) следует, что

$$Q = F_{\mathcal{A}}, \text{ или } Q = F - F_{\mathcal{B}} = F_{\mathcal{A}}.$$

Во всех случаях поперечная сила для прямого стержня равна сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, лежащих по одну сторону от сечения. Отсюда можно установить правило знаков для поперечной силы. Если сумма внешних сил, лежащих по левую сторону от сечения, дает равнодействующую, направленную вверх, то поперечная сила в сечении считается положительной, а если вниз — отрицательной. Для сил, расположенных справа от сечения, наоборот, если равнодействующая внешних сил направлена вверх, то поперечная сила в сечении считается отрицательной, а если вниз — положительной. Это правило иллюстрирует схема, показанная на рис. 4.6.

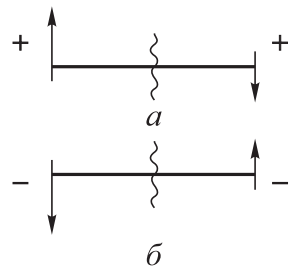


Рис. 4.6

В рассматриваемом случае двухопорной балки сила $F_{\mathcal{A}}$ в точке $\mathcal{A}$ слева от сечения C направлена вверх. Следовательно,

$$Q = F_{\mathcal{A}} = \frac{Fb}{a+b}.$$

Для правого участка балки $(a < z < a + b)$ сила $F_{\mathcal{B}}$ в точке $\mathcal{B}$ справа от сечения C' направлена вверх. Следовательно, на этом участке поперечная сила отрицательна:

$$Q = -F_{\mathcal{B}} = -\frac{Fa}{a+b}.$$

Эпюра поперечных сил в рассматриваемом двухопорном стержне изобразится двумя прямоугольниками (см. рис. 4.5).

Рассмотрим еще несколько примеров построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Двухопорный стержень длиной l нагружен равномерно распределенными силами собственного веса стержня. Эти силы характеризуются интенсивностью нагрузки q, Н/см, т. е. силой, приходящейся на единицу длины стержня.

Определим реакции опор. Очевидно,

$$F_{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{B}} = \frac{ql}{2}.$$

На рис. 4.7 эти силы показаны условно на основном рисунке. Строго говоря, их следовало бы изобразить на отдельном рисунке стержня с отброшенными внешними связями, поскольку эти силы

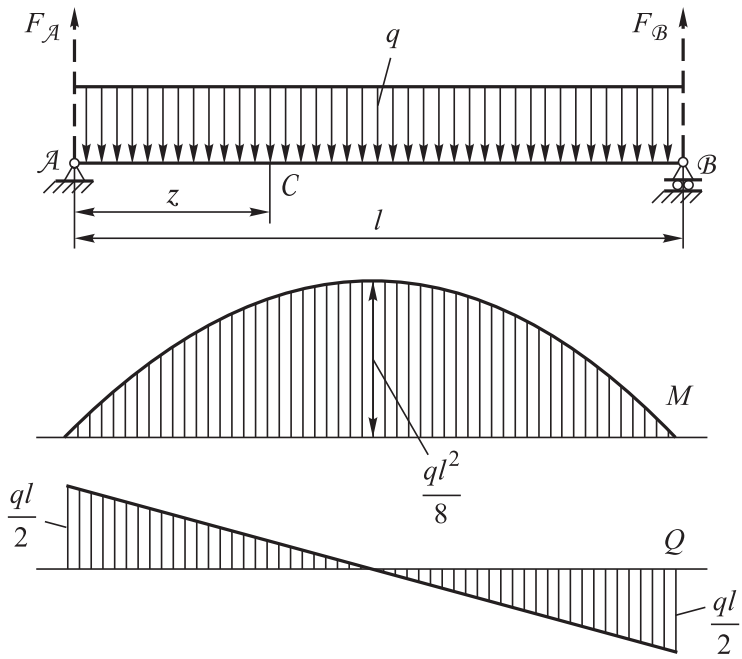


Рис. 4.7

заменяют действие связей. В предыдущем примере (см. рис. 4.1) именно так и было сделано. Однако обычно для упрощения прибегают к условному изображению реакций, как это и показано в рассматриваемом примере.

Сумма моментов внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, например по левую,

$$M = F_A z - qz\frac{z}{2},$$

где $F_A z$ — момент силы F_A — направлен по часовой стрелке (знак «+»); qz — сила собственного веса на длине z. Ее равнодействующая проходит через середину отрезка z. Следовательно, плечо силы равно $z/2$, а момент этой силы, расположенной слева от сечения C, направлен против часовой стрелки (знак «–»). Таким образом,

$$M = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}.$$

Эпюра изгибающего момента изображается параболой, показанной на рис. 4.7. Наибольшее значение изгибающий момент имеет в среднем сечении пролета при $z = l/2$:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}.$$

Поперечная сила в сечении C равна сумме сил, лежащих по одну сторону от сечения:

$$Q = F_A - qz = \frac{ql}{2} - qz.$$

Эпюра поперечной силы изображается прямой.

На рис. 4.8 показано построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил на примере стержня, защемленного одним концом. Такого рода стержни называются *консолями*. В данном случае с правой стороны на стержень не наложены связи, и изгибающие моменты и поперечные силы в любом сечении могут быть найдены без предварительного определения реакций.

В среднем сечении консоли через крестовину передается момент пары сил. В результате на эпюре изгибающих моментов возникает скачок. При переходе через сечение C сумма моментов сил, расположенных по правую или левую сторону от сечения, изменяется на величину $\mathfrak{M}$.

Рассматривая все построенные выше эпюры, нетрудно установить определенную закономерную связь между эпюрами изгибающих моментов и эпюрами поперечных сил. Судя по виду

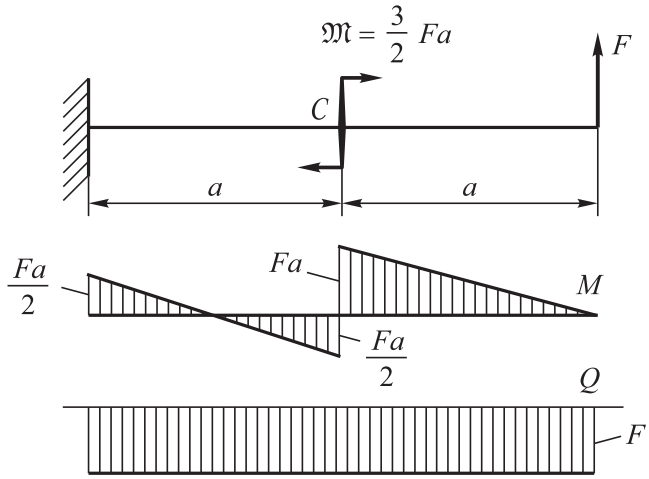


Рис. 4.8

эпюр, поперечная сила Q представляет собой производную от изгибающего момента M по координате z, направленной по длине стержня. Докажем, что эта закономерность действительно имеет место.

Пусть стержень закреплен произвольным образом и нагружен распределенной нагрузкой $q = f(z)$. Принятое направление для q будем считать положительным (рис. 4.9).

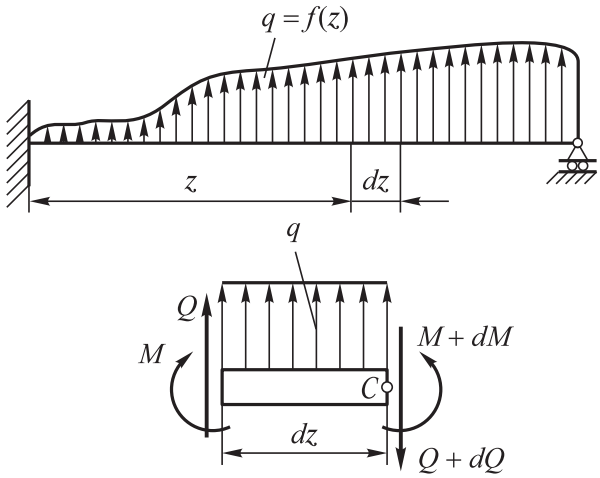


Рис. 4.9

Выделим из стержня элемент длиной dz и в проведенных сечениях приложим моменты M и $M + dM$, а также поперечные силы Q и $Q + dQ$. Направления для этих силовых факторов приняты положительными в соответствии с обусловленным выше правилом знаков. В пределах малого отрезка dz нагрузку q можно считать равномерно распределенной.

Приравниваем нулю сумму проекций всех сил на вертикальную ось и сумму моментов относительно поперечной оси C (см. рис. 4.9):

$$Q + qdz - Q - dQ = 0;$$

$$M + Q\,dz + q\,dz\frac{dz}{2} - M - dM \quad 0=$$

После упрощения и отбрасывания величины высшего порядка малости получим

$$\frac{dQ}{dz} = q; \tag{4.1}$$

$$\frac{dM}{dz} = Q. \tag{4.1}$$

Таким образом, поперечная сила действительно представляет собой производную от изгибающего момента по координате z, направленной по длине стержня. Производная же по z от поперечной силы дает интенсивность внешней распределенной нагрузки q.

Из соотношений (4.1) можно сделать некоторые общие выводы о характере эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для прямого стержня.

Если стержень нагружен только равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$, очевидно, функция Q будет линейной, а M — квадратичной. Это можно было наблюдать на примере эпюр, показанных на рис. 4.7.

Если стержень нагружен только сосредоточенными силами или моментами, то в промежутках между точками их приложения $q = 0$. Следовательно, $Q = \text{const}$, а M является линейной функцией z. В точках приложения сосредоточенных сил эпюра Q претерпевает скачок на величину внешней силы, а в эпюре M возникает соответствующий излом (разрыв производной).

4.2. Напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим наиболее простой случай изгиба, а именно, чистый изгиб. Под чистым изгибом, как уже указывалось, понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только изгибающие моменты, а $Q = 0$. Для тех участков стержня, где соблюдается это условие, изгибающий момент, согласно второму выражению (4.1), остается постоянным ($M = \text{const}$). Условия чистого изгиба могут возникать при различных внешних нагрузках. Некоторые характерные примеры показаны на рис. 4.10.

Отвлекаясь от особенностей приложения внешних сил и условий закрепления стержня в целом, рассмотрим только тот его участок, где $M = \text{const}$ и $Q = 0$. На границах этого участка действуют только моменты $\mathfrak{M}$ (рис. 4.10, *а*).

Под действием моментов M стержень изогнется. Так как в любом сечении возникает один и тот же изгибающий момент, то в случае однородного стержня изменение кривизны для всех участков будет одним и тем же. Следовательно, при чистом изгибе ось однородного стержня принимает форму дуги окружности.

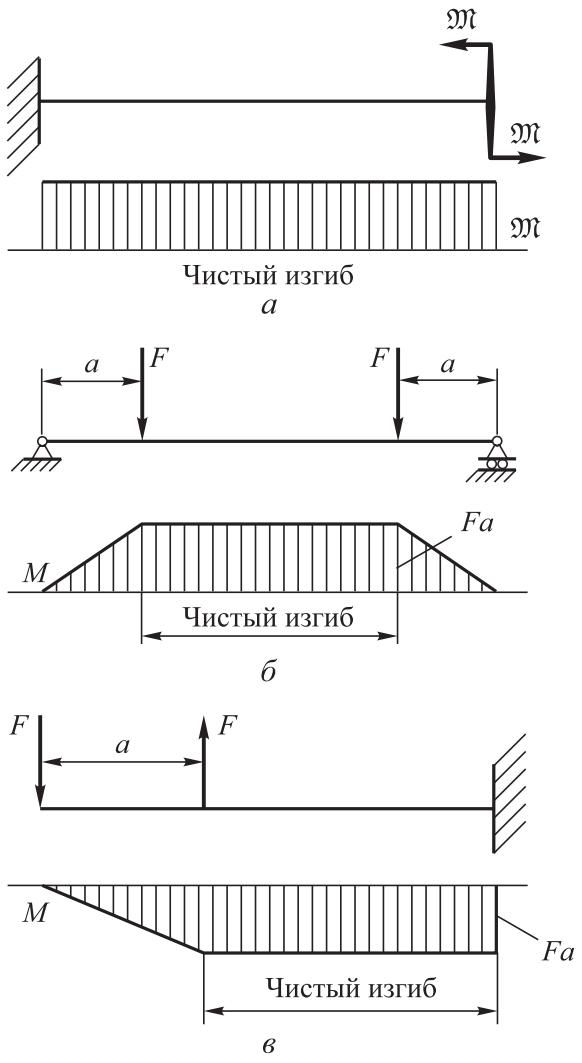


Рис. 4.10

Легко обнаружить, что совокупность точек, расположенных до изгиба в плоскости поперечного сечения стержня, после изгиба также образует плоскость, но переместившуюся в пространстве. Действительно, рассмотрим среднее поперечное сечение $А—А$ (рис. 4.11, *а*). Точки этого сечения по условиям симметрии не могут получить преимущественных смещений ни вправо, ни влево, поскольку и та и другая стороны полностью равноправны. Следовательно, это сечение остается плоским.

Разрезая стержень на две равные части сечением $А—А$, получаем участки вдвое меньшие, находящиеся точно в тех же условиях, что и целый участок (рис. 4.11, *б*). Для каждой из полученных половин

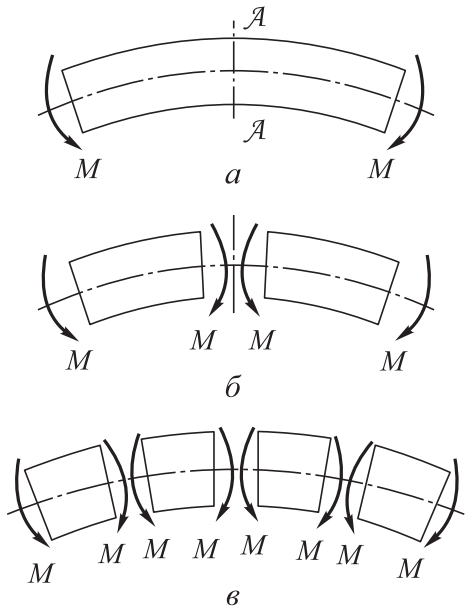


Рис. 4.11

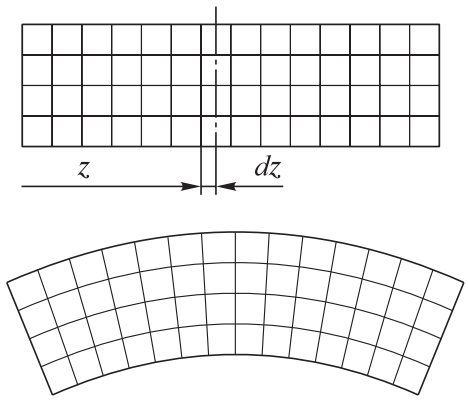


Рис. 4.12

приведенные рассуждения могут быть повторены (рис. 4.11, *в*). Следовательно, средние сечения этих половин также остаются плоскими.

Этот процесс деления можно продолжать дальше. Тем самым будет доказано, что в неограниченной близости от любого наперед заданного сечения есть сколь угодно много таких сечений, для которых соблюдается высказанное условие плоских сечений. Фактически это есть доказательство того, что все сечения однородного стержня при чистом изгибе не искривляются, а лишь поворачиваются.

Это утверждение, будучи точным для чистого изгиба, в общем случае является приближенным и именуется *гипотезой плоских сечений*.

Образование деформаций при чистом изгибе можно рассматривать как результат поворота плоских поперечных сечений одно относительно другого (рис. 4.12). Рассмотрим два смежных сечения, расположенных между собой на расстоянии dz (рис. 4.13). Примем левое сечение условно за неподвижное. Тогда в результате поворота правого сечения на угол $d\theta$ верхние слои удлинятся, а нижние — укоротятся. Очевидно, существует слой, в котором удлинения отсутствуют. Назовем его *нейтральным* слоем и отметим CD. В результате поворота сечений изменение кривизны нейтрального слоя будет следующим:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dz}.$$

Произвольно взятый отрезок $AB = dz$ (см. рис. 4.13) получит приращение длины $A'B' - AB$. Так как сечения остаются плоскими,

$$A'B' - AB = (r + y)d\theta - rd\theta = yd\theta,$$

где y — расстояние от рассматриваемого отрезка AB до нейтрального слоя CD. Положение нейтрального слоя пока неизвестно.

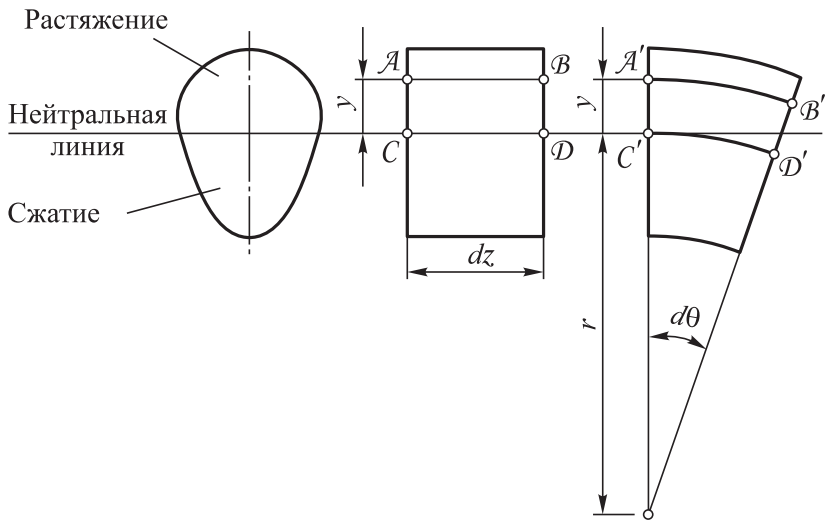


Рис. 4.13

Относительное удлинение AB равно

$$\varepsilon = \frac{y\,d\theta}{dz} = \frac{y}{r}. \tag{4.2}$$

Согласно закону Гука,

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{r}. \tag{4.3}$$

Таким образом, при чистом изгибе напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону. Геометрическое место точек в сечении, удовлетворяющее условию $\sigma = 0$, называется *нейтральной линией* сечения. Нейтральная линия, очевидно, перпендикулярна к плоскости кривизны изогнутого стержня.

Свяжем теперь напряжение σ с внутренними силовыми факторами, возникающими в поперечном сечении стержня при чистом изгибе.

Сумма элементарных сил $\sigma\, dA$ (рис. 4.14) дает нормальную силу N в сечении. Но при чистом изгибе $N = 0$. Поэтому $N = \int_A \sigma\, dA = 0$,

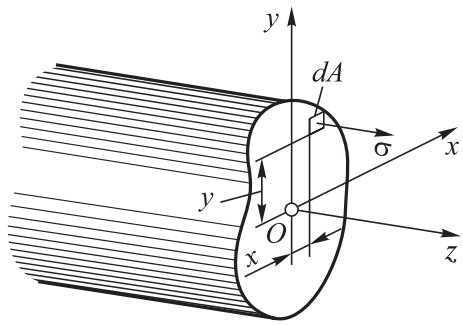


Рис. 4.14

или, согласно выражению (4.3), $\frac{E}{r}\int_A y\, dA = 0$, откуда

$$\int_A y\, dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой знакомый нам из предыдущей главы статический момент сечения относительно нейтральной линии. Так как статический момент равен нулю, *нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения*. Таким образом, координата y в выражениях (4.2) и (4.3) получает определенность: она отсчитывается от центральной оси, перпендикулярной плоскости кривизны. Точно так же получает определенность и кривизна $1/r$ как кривизна *нейтрального слоя*, или как кривизна оси стержня.

Внесем некоторую определенность в систему координат x, y, z, связанную с сечением (см. рис. 4.14). Совместим начало координат O с центром тяжести сечения. Ось z направим по нормали к сечению, а ось x по нейтральной линии. Ось y перпендикулярна оси x, следовательно, она лежит в плоскости изменения кривизны. Это — так называемая *подвижная или локальная система осей*, положение которой меняется в пространстве при переходе от одного сечения к другому.

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня, как и нормальная сила, может быть выражен через напряжения σ:

$$\int_A \sigma\, x dA = M_y; \quad \int_A \sigma y dA = M_x.$$

Заметим, что в общем случае плоскость изгибающего момента в сечении не совпадает с плоскостью yOz (см. рис. 4.14). Иными словами, изменение кривизны стержня происходит не обязательно в плоскости изгибающего момента. Этот общий случай изгиба мы

рассмотрим несколько позже, а пока ограничимся более простым частным случаем, при котором имеет место совпадение плоскостей момента и кривизны.

При указанном условии момент элементарных сил σdA относительно оси y равен нулю, а относительно оси x — полному изгибающему моменту M. Тогда получаем

$$\frac{E}{r}\int_A yx\,dA = 0; \quad \frac{E}{r}\int_A y^2\,dA = M. \tag{4.4}$$

Первое выражение приводится к виду

$$J_{xy} = 0.$$

Это значит, что изменение кривизны стержня происходит в плоскости момента в том случае, если последняя проходит через одну из *главных* осей сечения. Такой изгиб называется *прямым*. В отличие от прямого изгиба общий случай изгиба, при котором плоскость изгибающего момента с главной осью сечения не совпадает, называется *косым* изгибом.

Из выражений (4.4) получаем зависимость кривизны стержня от изгибающего момента:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ_x}, \tag{4.5}$$

где J_x — момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгибающего момента.

Величина EJ_x характеризует *жесткость* стержня при изгибе. Как и при кручении, она пропорциональна четвертой степени линейных размеров сечения при пропорциональном их изменении.

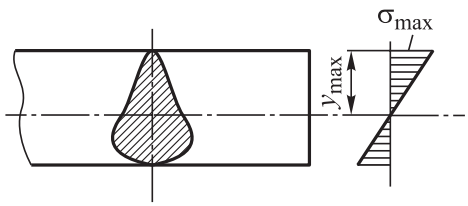


Рис. 4.15

Возвращаясь к формуле (4.3) и исключая из нее кривизну $1/r$, получаем выражение для напряжения σ:

$$\sigma = \frac{My}{J_x}. \tag{4.6}$$

Максимальное напряжение при изгибе возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (рис. 4.15):

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{J_x}.$$

Отношение $J_x/y_{\max}$ называется *моментом сопротивления* сечения при изгибе и обозначается через W_x (измеряется в см^3 или мм^3):

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}. \tag{4.7}$$

Таким образом,

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}. \tag{4.8}$$

Эта формула является основной в расчетах на прочность при изгибе.

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами b и h

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad y_{\max} = \frac{h}{2}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6}. \tag{4.9}$$

Для стержня круглого сечения

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}; \quad y_{\max} = \frac{D}{2}; \quad W_x = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0{,}1D^3. \tag{4.10}$$

Таким образом, напряжения при изгибе обратно пропорциональны третьей степени линейных размеров сечения.

Наиболее экономичными являются такие формы поперечных сечений, для которых с наименьшей затратой материала получается наибольший момент сопротивления W_x. Чтобы форма сечения была рациональной, необходимо, очевидно, по возможности распределять площадь сечения подальше от нейтральной оси. Так возникли стандартные двутавровые и корытные тонкостенные профили, показанные на рис. 4.16. При изгибе в вертикальной плоскости такие профили дают существенную выгоду по сравнению с прочими формами поперечных сечений.

Момент сопротивления W_x стандартных профилей вычислен для каждого размера заранее и приводится в соответствующих таблицах (см. Приложение). Поэтому при расчете стержня на прочность отпадает необходимость проводить громоздкие вычисления по определению моментов инерции и моментов сопротивления. В Приложении

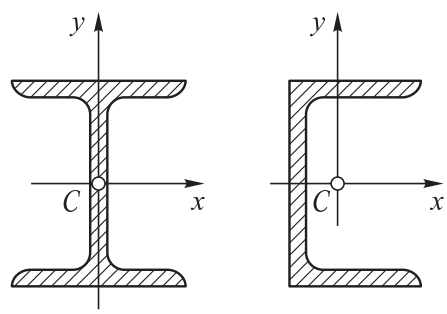


Рис. 4.16

приведены таблицы стандартных профилей. Кроме профилей, указанных в этих таблицах, существуют и другие профили, например, применяемые в самолетостроении и задаваемые специальными стандартами.

Энергия упругих деформаций стержня при изгибе определяется работой момента M на взаимном угловом перемещении $d\theta$ двух сечений (рис. 4.17):

$$dU = \frac{1}{2} M\, d\theta,$$

но

$$d\theta = \frac{dz}{r} = \frac{M}{EJ_x} dz,$$

поэтому

$$U = \int_l \frac{M^2\, dz}{2EJ_x}. \tag{4.11}$$

При выводе формул для чистого изгиба прямого стержня не было сделано произвольных допущений и найденное решение в этом смысле можно рассматривать как точное. Однако следует иметь в виду, что в рассматриваемой задаче не конкретизирован характер распределения внешних сил. Считается только, что во всех случаях эти силы сводятся к равнодействующим моментам, приложенным к торцам стержня. Решение будет точным толь-

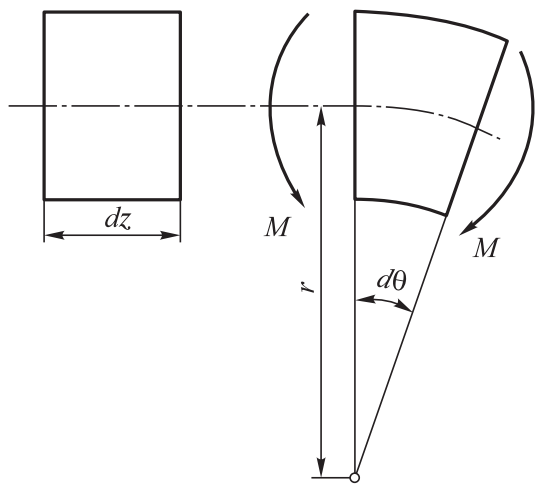


Рис. 4.17

ко для случая, если внешние силы на торцах распределены по тому же линейному закону, что и во всех поперечных сечениях. Практически это условие, понятно, никогда не соблюдается, и в окрестности торцевых сечений законы распределения напряжений отличаются от тех, которые следуют из теории чистого изгиба. Однако в соответствии с принципом Сен-Венана имеется возможность исключить краевую зону, как это показано, например, на рис. 4.18. Тогда для средней части стержня все

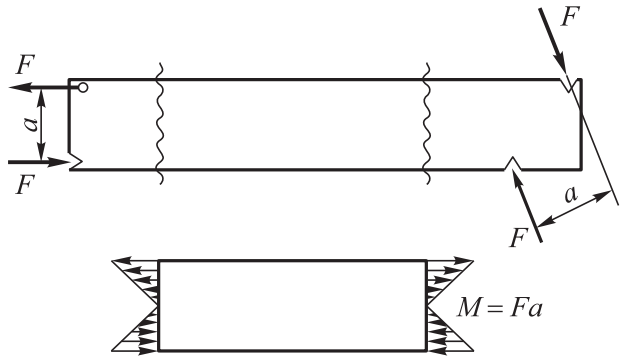


Рис. 4.18

выведенные выше формулы сохраняют свою силу и могут рассматриваться как точные.

Рассмотрим некоторые простейшие примеры, связанные с определением напряжений в стержне при чистом изгибе.

Пример 4.1. Определить, как выгоднее расположить стержень с квадратным поперечным сечением при изгибе: а) так, чтобы плоскость момента была параллельна сторонам квадрата, или б) так, чтобы она совпадала с его диагональю (рис. 4.19)?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо подсчитать момент сопротивления W_x в первом и во втором случаях.

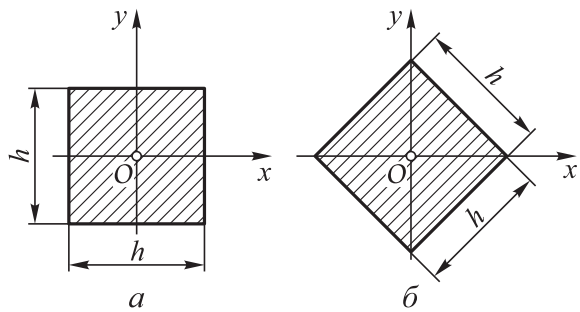


Рис. 4.19

В случае *а*, согласно выражению (4.9), $W_x = h^3/6$. В случае *б* $J_x = h^4/12$, $y_{\max} = h\sqrt{2}/2$, и тогда $W_x = h^3/6\sqrt{2}$.

Таким образом, случай *а* является более выгодным. В этом случае момент сопротивления W_x оказывается примерно на 40 % выше.

Пример 4.2. Определить, какой процент экономии металла будет достигнут, если при неизменных прочих условиях в конструкции, работающей на изгиб, применить вместо сплошного круглого сечения полое сечение с отношением диаметров $d_2/D_2 = 0{,}9$ (рис. 4.20).

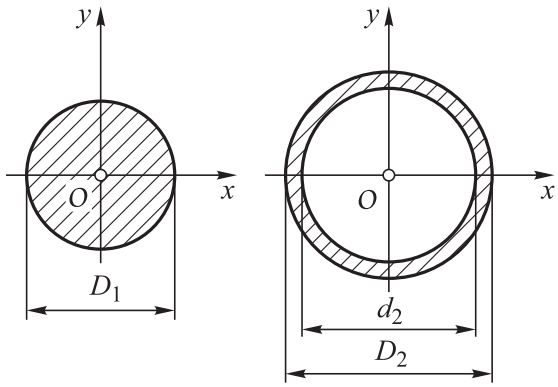


Рис. 4.20

Момент сопротивления сплошного круглого сечения определяется формулой (4.10):

$$W_{x1} = 0{,}1D_1^3.$$

Для полого сечения величина W_x представляет собой разность моментов инерции большого и малого круга, деленную на $y_{\max}$, т. е.

$$W_{x2} = \frac{\pi D_2^4/64 - \pi d_2^4/64}{D_2/2} \approx 0{,}1D_2^3\left(1 - \frac{d_2^4}{D_2^4}\right) \approx 0{,}1D_2^3 \cdot 0{,}343.$$

Из условия равнопрочности $W_{x1} = W_{x2}$, откуда $D_1/D_2 = \sqrt[3]{0{,}343} = 0{,}7$. Расход материала пропорционален площади сечения:

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}; \quad A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}\left(1 - \frac{d_2^2}{D_2^2}\right) = \frac{\pi D_2^2}{4}0{,}19.$$

Процент экономии материала определим как разность площадей, отнесенную к площади сплошного круга:

$$\frac{A_1 - A_2}{A_1}100\ \% = \left(1 - \frac{D_2^2}{D_1^2}0{,}19\right)100\ \% = 61\%.$$

Пример 4.3. На рис. 4.21 показана консоль, нагруженная двумя силами *F*. Форма сечения балки Т-образная. Материал — чугун.

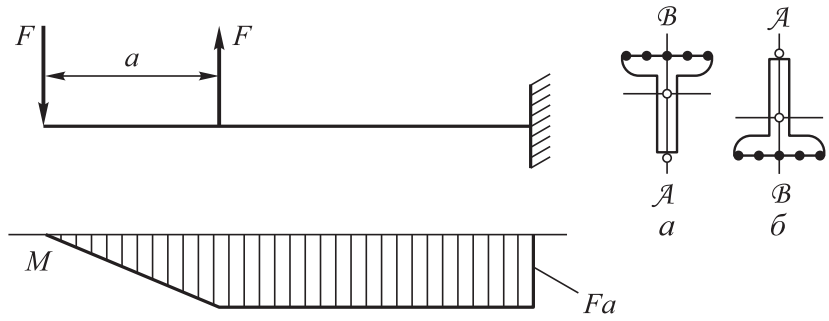


Рис. 4.21

Спрашивается, как рациональнее расположить сечение: полкой вверх — вариант *а*, или вниз — вариант *б*?

Поскольку точка A отстоит от центра тяжести сечения дальше, напряжение в ней по абсолютной величине всегда будет больше, чем в точках B. При указанном направлении сил F сжатые слои балки располагаются внизу. Так как чугун на сжатие работает лучше, нежели на растяжение, точку A рациональнее поместить вниз. Значит, сечение должно быть расположено полкой вверх, т. е. следует предпочесть вариант *а*.

Пример 4.4. Для двухопорной балки (рис. 4.22) подобрать сечение в виде двутаврового профиля, обеспечив при этом двукратный запас прочности при $F = 20$ кН, $a = 1$ м и $\sigma_т = 300$ МПа.

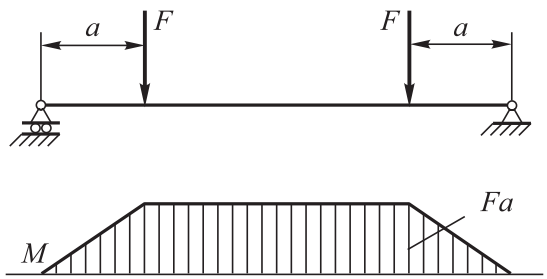


Рис. 4.22

Наибольший изгибающий момент возникает на участке чистого изгиба и равен Fa. Напряжение σ_{max} не должно превышать половины $\sigma_т$. Следовательно, $\dfrac{Fa}{W_x} \le \dfrac{300}{2}$, откуда $W_x \ge 133$ см^3.

По таблице стандартных профилей (см. Приложение) выбираем двутавр № 18, для которого $W_x = 143$ см^3.

Пример 4.5. Проволока диаметром d наматывается на барабан. Диаметр барабана равен D. Определить напряжение изгиба, возникающее в поперечных сечениях проволоки, если $d \ll D$.

Кривизна изогнутой проволоки определяется радиусом барабана: $1/r = 2/D$. Поэтому, не определяя изгибающего момента, согласно формуле (4.3), сразу находим

$$\sigma_{max} = E\frac{2y_{max}}{D} = E\frac{d}{D}.$$

Следовательно, при постоянной кривизне намотки напряжение σ_{max} пропорционально диаметру проволоки.

4.3. Напряжения при поперечном изгибе

Как было показано ранее, при чистом изгибе в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные напряжения. Соответствующие им внутренние силы приводятся к изгибающему моменту в сечении. В случае поперечного изгиба в сечении стержня возникает не только изгибающий момент, но и поперечная сила Q. Эта сила представляет собой равнодействующую элементарных распределенных сил, лежащих в плоскости сечения (рис. 4.23). Следовательно, в этом случае в поперечных сечениях возникают не только нормальные, но и касательные напряжения.

Возникновение касательных напряжений τ сопровождается появлением угловых деформаций γ. Поэтому, кроме основных смещений, свойственных чистому изгибу, каждая элементарная площадка сечения dA получает еще некоторые дополнительные угловые смещения, обусловленные сдвигом. Касательные напряжения распределены по сечению неравномерно, поэтому неравномерно будут распределены и угловые смещения. Это значит, что при поперечном изгибе в отличие от чистого изгиба поперечные

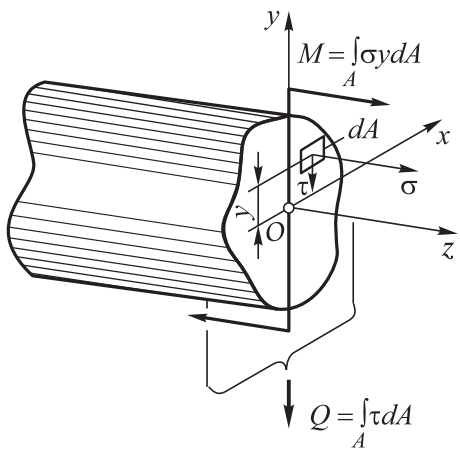


Рис. 4.23

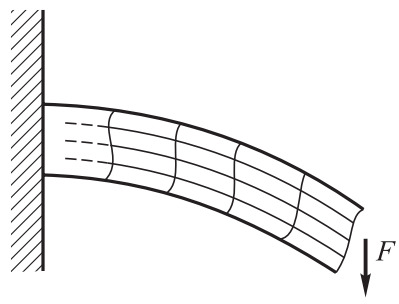


Рис. 4.24

сечения не остаются плоскими. На рис. 4.24 показана типичная картина искривления поперечных сечений.

Однако на значение нормальных напряжений искажение плоскости поперечных сечений заметным образом не сказывается. В частности, если поперечная сила Q не меняется по длине стержня, формулы (4.6) и (4.8) $\sigma = \dfrac{My}{Y_x}$ и $\sigma_{\max} = \dfrac{M}{W_x}$, выведенные для случая чистого изгиба, будут давать совершенно точные результаты и в случае поперечного изгиба. Действительно, при Q = const искривление всех сечений происходит одинаково (рис. 4.25). Поэтому при взаимном повороте двух смежных сечений удлинение продольного волокна $\mathcal{AB}$ будет одним и тем же независимо от того, осталось сечение плоским или нет ($\mathcal{A}'\mathcal{B}' = \mathcal{A}''\mathcal{B}''$).

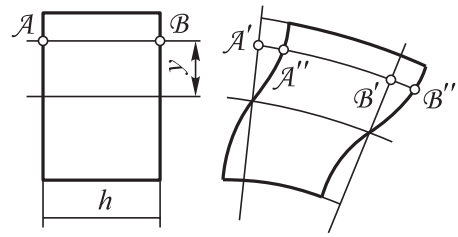


Рис. 4.25

При поперечной силе, изменяющейся вдоль оси стержня, формулы чистого изгиба дают для σ некоторую погрешность. Путем несложного анализа можно показать, что эта погрешность имеет порядок h/l по сравнению с единицей, где h — размер поперечного сечения в плоскости изгиба; l — длина стержня. Характерной особенностью стержня является то, что размеры его поперечного сечения много меньше длины. Следовательно, отношение h/l относительно мало и соответственно малой оказывается указанная погрешность.

Все сказанное дает основание принять гипотезу плоских сечений. Будем в дальнейшем считать, что совокупность точек, образующих плоскость поперечного сечения до изгиба, образует и после изгиба плоскость, повернутую в пространстве. Это предположение приемлемо в той мере, в какой угловые деформации γ в сечении можно считать существенно меньшими, чем угловые перемещения, обусловленные изменением кривизны.

Особенностью поперечного изгиба является также наличие нормальных напряжений, возникающих в продольных сечениях бруса, т. е. напряжений между слоями. Эти напряжения возникают только при переменной поперечной силе Q и весьма малы*.

Таким образом, в пределах указанных допущений формулы (4.6) и (4.8), выведенные для определения нормальных напряжений,

*Особые области, в зоне которых приложены сосредоточенные силы, из рассмотрения исключаются.

применимы не только при чистом изгибе, но и при поперечном. В такой же мере применима и формула (4.5), дающая зависимость кривизны стержня от изгибающего момента.

Определим приближенно касательные напряжения τ при поперечном изгибе. Вычислить эти напряжения проще всего через парные им касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях стержня. Выделим из бруса элемент длиной dz (рис. 4.26, *а*). При поперечном изгибе моменты, возникающие в левом и правом сечениях элемента, не одинаковы и отличаются на dM. Продольным горизонтальным сечением, проведенным на расстоянии y от нейтрального слоя (рис. 4.26, *б*), разделим элемент на две части и рассмотрим условия равновесия верхней части. Равнодействующая нормальных сил σdA в левом сечении в пределах заштрихованной площади A^* равна, очевидно,

$$N^* = \int_{A^*} \sigma dA,$$

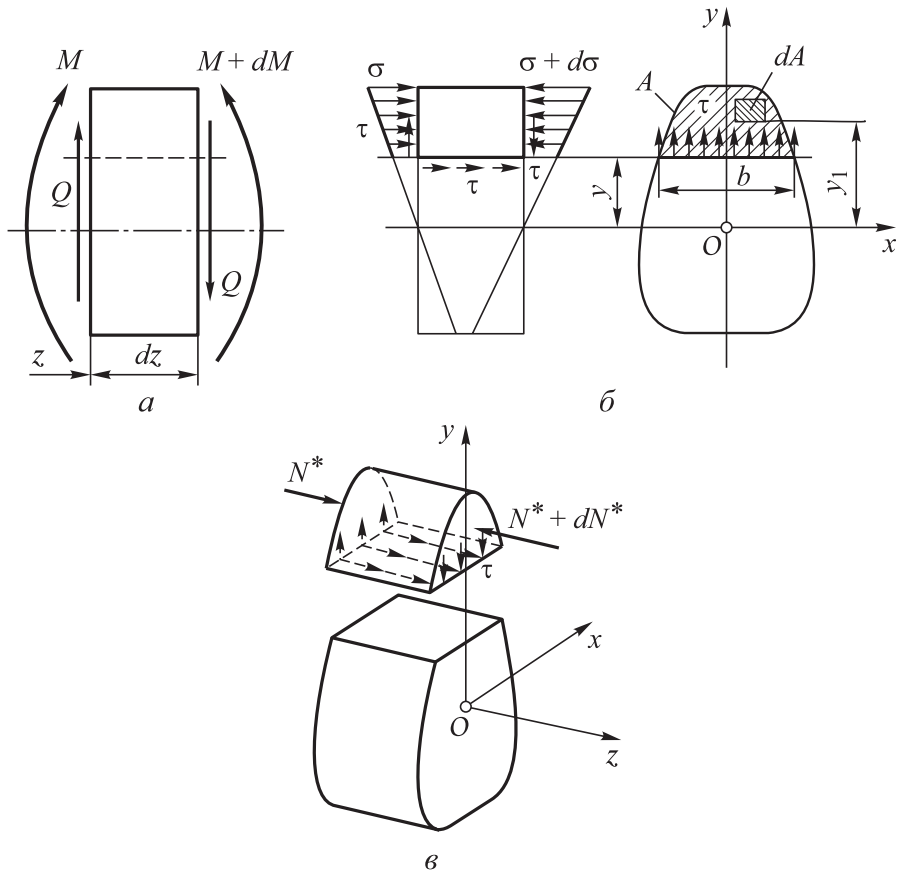


Рис. 4.26

или, согласно формуле (4.6),

$$N^* = \frac{M}{J_x}\int_{A^*} y_1\, dA,$$

где y_1 — текущая ордината площадки dA (см. рис. 4.26, *б*). Полученный интеграл представляет собой статический момент относительно оси x части площади, расположенной выше продольного сечения (выше уровня y). Обозначим этот статический момент через S_x^*. Тогда

$$N^* = \frac{MS_x^*}{J_x}.$$

В правом сечении нормальная сила будет другой:

$$N^* + dN^* = \frac{(M + dM)S_x^*}{J_x}.$$

Разность этих сил

$$dN^* = \frac{dMS_x^*}{J_x}$$

должна уравновешиваться касательными силами, возникающими в продольном сечении элемента (см. рис. 4.26, *б* и *в*).

В качестве допущения примем, что касательные напряжения в поперечном сечении поправлены вдоль оси y и распределены по ширине сечения b равномерно. Тогда

$$\frac{dMS_x^*}{J_x} = \tau b\, dz,$$

откуда

$$\tau = \frac{QS_x^*}{J_x b}. \qquad (4.12)$$

Полученная формула носит название *формулы Журавского* по имени русского ученого прошлого века, который впервые провел общее исследование касательных напряжений при поперечном изгибе.

Выражение (4.12) позволяет вычислить касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях стержня. Напряжения,

образующиеся в поперечных сечениях стержня, равны им как парные. Зависимость τ от y в сечении определяется через статический момент S_x^*. При подходе к верхней кромке сечения площадь его заштрихованной части (см. рис. 4.26, *б*) уменьшается до нуля. Здесь, следовательно, $S_x^* = 0$. При подходе к нижней кромке заштрихованная часть охватывает все сечение. Так как ось x — центральная, то и здесь $S_x^* = 0$. Поэтому касательные напряжения, как это следует из формулы (4.12), в верхних и нижних точках сечения равны нулю.

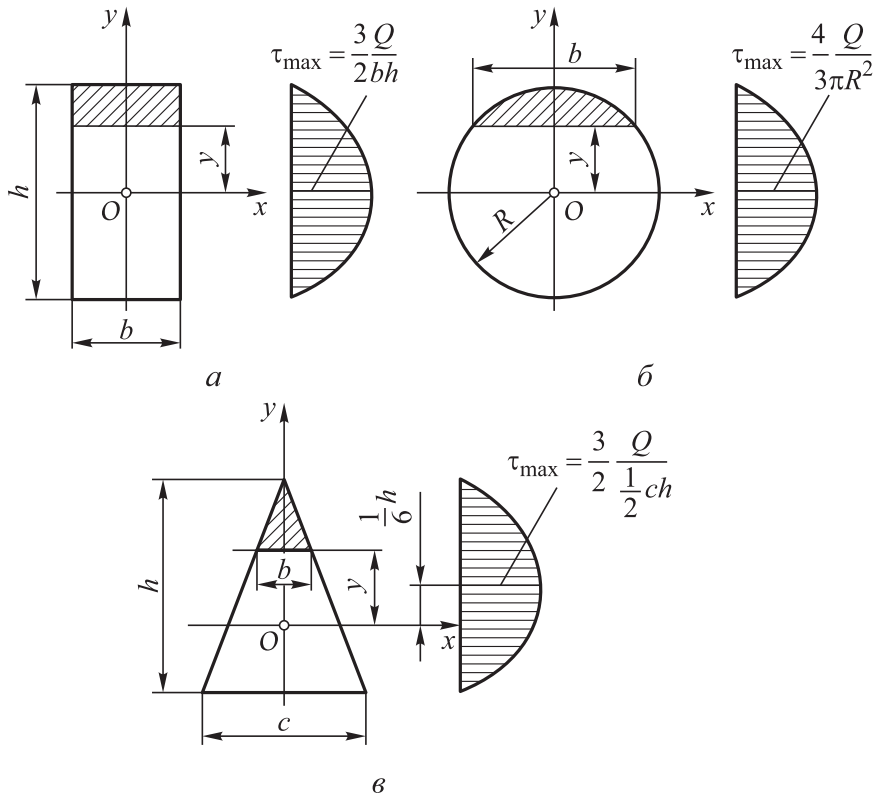


Рис. 4.27

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами b и h (рис. 4.27, *а*) имеем

$$S_x^* = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \quad J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad b = b.$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right),$$

и эпюра касательных напряжений по высоте сечения изображается квадратной параболой. Наибольшее напряжение имеет место при $y = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}.$$

Для стержня круглого сечения (рис. 4.27, *б*) путем несложной операции интегрирования можно найти

$$S_x^* = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}.$$

Кроме того,

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}; \quad b = 2\sqrt{R^2 - y^2},$$

откуда

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^4}(R^2 - y^2)$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi R^2}.$$

Для стержня, имеющего сечение в форме треугольника с основанием c и высотой h (рис. 4.27, *в*),

$$S_x^* = \frac{1}{3}b\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(\frac{1}{3}h + y\right); \quad J_x = \frac{ch^3}{36}; \quad \tau = \frac{12Q}{ch^3}\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(\frac{1}{3}h + y\right).$$

Максимальное напряжение имеет место на расстоянии $y = h/6$ от нейтральной оси:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{ch}.$$

В двух последних примерах наглядно проявляется приближенный характер производимых операций. Это видно из того, что в поперечном сечении касательные напряжения имеют составляющие не только по оси y, но и по оси x. Действительно, примем, как это делали выше, что для точек A, расположенных у контура сечения (рис. 4.28), касательное напряжение τ направлено по оси y. Раз-

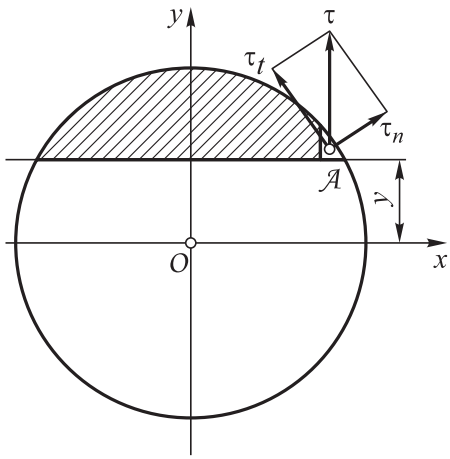


Рис. 4.28

ложим вектор τ на две составляющие — по нормали к контуру τ_n и по касательной τ_t. По условиям нагружения внешняя поверхность стержня свободна от касательных сил. Поэтому напряжения, парные τ_n, отсутствуют. Следовательно, $\tau_n = 0$, а полное касательное напряжение вблизи контура направлено по касательной к контуру, и предположение о том, что τ направлено по оси y, оказывается неверным. Тем самым обнаруживается наличие составляющих τ по оси x. Для определения этих составляющих следует прибегнуть к более сложным приемам, нежели рассмотренным ранее. Методами теории упругости можно показать, что в большинстве случаев составляющие τ по оси x играют существенно меньшую роль, нежели по оси y.

Из рассмотренных выше примеров можно сделать общий вывод, что зона максимальных касательных напряжений расположена приблизительно в средней части высоты сечения, а τ_{max} для нетонкостенных сечений имеет значение порядка Q/A.

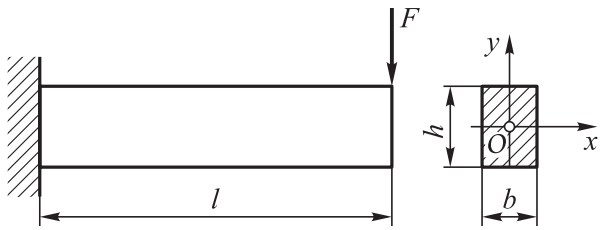


Рис. 4.29

Можно сопоставить абсолютные величины максимальных нормальных и максимальных касательных напряжений, возникающих в поперечных сечениях стержня. Например, для консоли прямоугольного сечения (рис. 4.29) имеем

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x} = \frac{6Fl}{bh^2}; \quad \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh},$$

откуда

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{h}{4l}.$$

Это значит, что максимальные касательные напряжения в поперечном сечении относятся к максимальным нормальным напряжениям примерно как высота сечения к длине стержня, т. е. касательные напряжения существенно меньше нормальных. Указанная оценка с немногочисленными исключениями сохраняется для всех нетонкостенных стержней. Что же касается тонкостенных стержней, то это вопрос особый.

В связи с малостью τ_{max} расчет на прочность при поперечном изгибе выполняют только по нормальным напряжениям, как и при чистом изгибе. Касательные напряжения во внимание не принимают. Это тем более естественно, что в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии, т. е. в наиболее опасных, касательные напряжения в поперечном сечении равны нулю.

Рассматривая качественную сторону явления, следует иметь в виду, что касательные напряжения в поперечных сечениях и парные им напряжения в продольных сечениях, несмотря на свою малость, могут в некоторых случаях существенно повлиять на оценку прочности стержня. Например, при поперечном изгибе короткого деревянного бруса возможно разрушение не по поперечному сечению в заделке, а скалывание по продольной плоскости, близкой к нейтральному слою, т. е. там, где касательные напряжения максимальны (рис. 4.30).

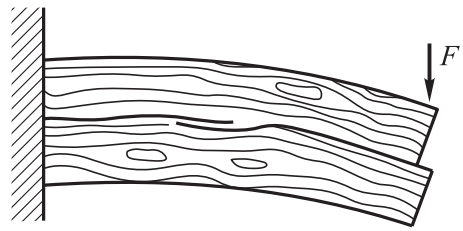


Рис. 4.30

Касательные напряжения в продольных сечениях являются выражением существующей связи между слоями бруса при поперечном изгибе. Если эта связь в некоторых слоях нарушена, характер изгиба бруса меняется. Например, в брусе, составленном из n листов (рис. 4.31, *а*), каждый лист при отсутствии сил трения изгибается самостоятельно. Внешняя сила, приходящаяся на лист, равна F/n, а наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении листа

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x} = \frac{(F/n)l}{(b/6)(h/n)^2} = \frac{6Fl}{bh^2}n.$$

Если листы плотно стянуть достаточно жесткими болтами (рис. 4.31, *б*), брус будет изгибаться как целый. В этом случае наибольшее нормальное напряжение оказывается в n раз меньше, т. е.

$$\sigma_{\max} = \frac{6Fl}{bh^2}.$$

Иными словами, связанный пакет листов способен в первом приближении выдержать нагрузку в n раз бо́льшую, чем несвязанный.

В поперечных сечениях болтов при изгибе бруса возникают поперечные силы. Наибольшая поперечная сила будет в сечении, совпадающем с нейтральной плоскостью изогнутого бруса (сечение $А—А$ на рис. 4.31, *б*). Эту силу в первом приближении можно

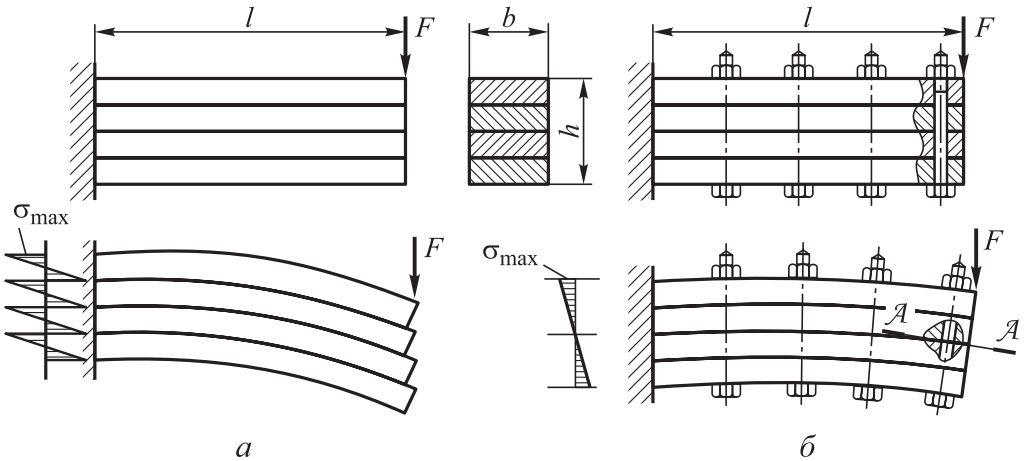


Рис. 4.31

определить из простого равенства сумм поперечных сил в сечениях болтов и продольной равнодействующей касательных напряжений в случае целого бруса:

$$mQ_{\text{болта max}} = \tau_{\max} bl = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}bl = \frac{3}{2}\frac{Fl}{h},$$

где m — число болтов.

Интересно сопоставить изменение кривизны бруса в заделке $\dfrac{1}{r}$ в случае связанного и несвязанного пакетов. Согласно формуле (4.5), для связанного пакета

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ_x} = \frac{12Fl}{Ebh^3},$$

для несвязанного пакета

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ_x} = \frac{(F/n)\,l}{E\,(b/12)(h/n)^3} = \frac{12Fl}{Ebh^3}n^2.$$

Пропорционально изменениям кривизны меняются и прогибы.

Таким образом, по сравнению с целым брусом набор свободно сложенных листов оказывается в n^2 раз более гибким и только в n раз менее прочным. Это различие в коэффициентах снижения жесткости и прочности при переходе к листовому пакету используют на практике при создании гибких рессорных подвесок. Силы трения между листами повышают жесткость пакета, так как частично восстанавливают касательные силы между слоями стержня, устраненные при переходе к листовому пакету. Рессоры нуждаются поэтому в смазке листов, и их следует оберегать от загрязнения.

Заканчивая параграф о поперечном изгибе, приведем пример, иллюстрирующий последовательность расчета стержня на прочность при изгибе.

Пример 4.6. Требуется подобрать размер a Т-образного поперечного сечения, показанного на рис. 4.32, для двухопорного стержня,

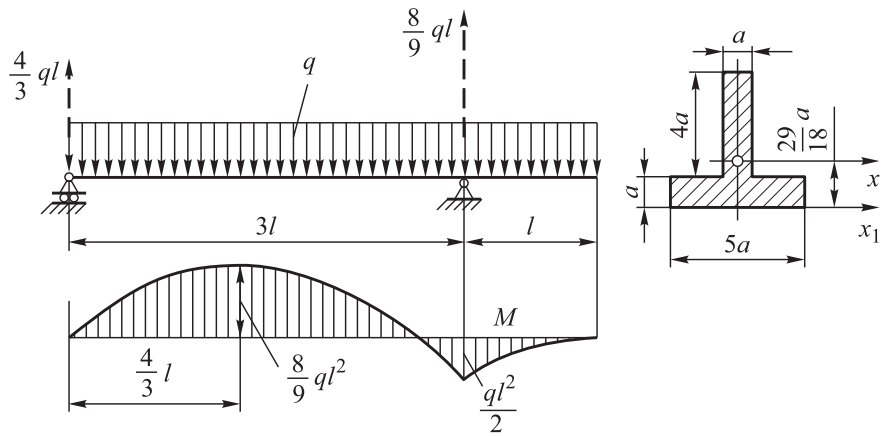


Рис. 4.32

нагруженного равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Коэффициент запаса по пределу текучести должен быть не менее чем двукратный. Дано: $l = 1$ м, $q = 100$ Н/см, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 350$ МПа.

Определяем реакции опор и строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 4.32). Расчетный изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{8}{9} ql^2.$$

Согласно условию прочности, $\dfrac{8ql^2}{9W_x} \le \dfrac{\sigma_{т.р}}{n}$, откуда момент сопротивления $W_x \ge 50{,}7$ см^3.

Рассматривая заданное сечение, определяем расстояние от оси x_1 до центра тяжести. Оно равно $\frac{29}{18}a$. Момент инерции относительно оси x_1 равен $J_{x_1} = 43a^4$. Переходя к центральной оси x, получаем $J_x = \frac{707}{36}a^4$. Момент сопротивления $W_x = J_x \Big/ \left(5a - \frac{29}{18}a\right) = \frac{707}{122}a^3$, откуда находим $a^3 \geq 50{,}7\frac{122}{707}$ см^3 или $a \geq 2{,}06$ см.

4.4. Касательные напряжения при поперечном изгибе тонкостенных стержней

При поперечном изгибе тонкостенного стержня в его сечениях преобладающими остаются нормальные напряжения, которые в основном и определяют прочность стержня. Однако в отличие от стержня сплошного сечения существенное значение приобретают величина касательных напряжений и законы их распределения.

Касательные напряжения в поперечных сечениях тонкостенного стержня определяются по тому же принципу, что и для сплошного стержня. Разность нормальных сил для элементарного участка, расположенного по одну сторону от продольного разреза (рис. 4.33), уравновешивается касательными напряжениями τ. В отличие от стержня сплошного сечения продольный разрез тонкостенного стержня следует производить не параллельной нейтральному слою плоскостью, а плоскостью $A-A$, нормальной к средней линии контура (см. рис. 4.33). Такое сечение имеет наименьшую ширину, равную δ, и в нем касательные напряжения, уравновешивающие

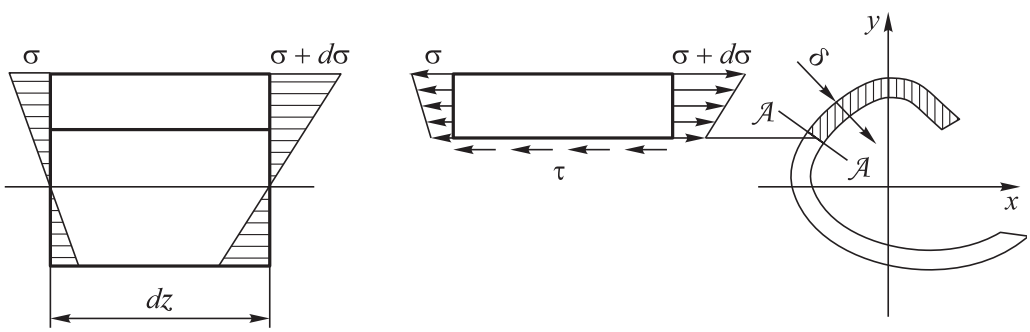


Рис. 4.33

разность нормальных сил, будут больше, чем в других продольных сечениях.

Возвращаясь к выводу формулы Журавского, проделанному в 4.3, легко обнаружить, что для тонкостенного стержня в этом выводе ничего не меняется, кроме того, что обозначение b заменяется на δ. В итоге имеем

$$\tau = \frac{QS_x^*}{J_x \delta}. \qquad (4.13)$$

В этой формуле, как и прежде, Q — поперечная сила в сечении, направленная перпендикулярно оси x; S_x^* — статический момент заштрихованной части сечения относительно оси x (см. рис. 4.33); J_x — момент инерции всего сечения относительно оси x.

Касательные напряжения τ предполагаются равномерно распределенными по ширине сечения δ. В поперечном сечении стержня возникают напряжения, парные τ. Они направлены по касательной к линии контура (рис. 4.34). Если направление поперечной силы Q не совпадает с главной осью сечения, используется принцип суперпозиции:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta} + \frac{Q_x S_y^*}{J_y \delta}, \qquad (4.14)$$

где Q_x и Q_y — составляющие поперечной силы по главным осям x и y.

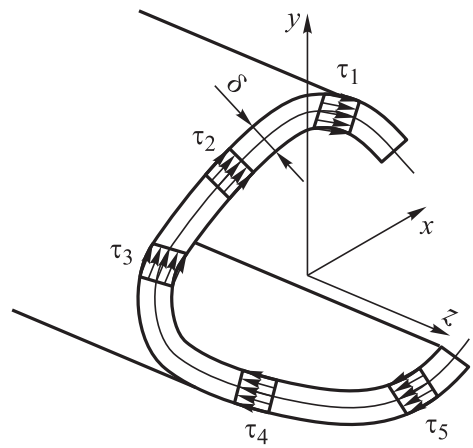


Рис. 4.34

Пример 4.7. Определить закон распределения касательных напряжений в корытном профиле при поперечном изгибе в вертикальной плоскости (рис. 4.35).

При размерах, показанных на рисунке, $J_x = \frac{h^2\delta}{12}(h+6b)$. Для участка полки длиной s (см. рис. 4.35) имеем $S_x^* = \frac{h}{2}\delta s$. Таким образом, для полки, согласно формуле (4.13),

$$\tau = \frac{6Qs}{h\delta(h+6b)}, \qquad (4.15)$$

и касательное напряжение оказывается пропорциональным s. То же самое имеет место и для нижней полки.

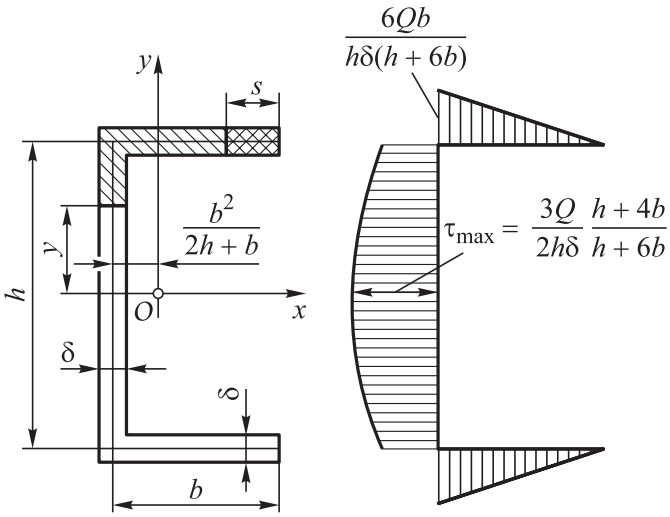


Рис. 4.35

Если разрез сечения произвести на участке вертикальной стенки, статический момент части сечения, расположенной выше уровня y, будет равен

$$S_x^* = \frac{\delta}{2}\left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2 \right),$$

и тогда

$$\tau = \frac{6Q\left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{h^2\delta(h+6b)}.$$

Здесь касательное напряжение представляет собой квадратичную функцию y.

На рис. 4.35 показана эпюра распределения касательных напряжений по контуру. Знак τ вдоль контура, как видим, не меняется. Следовательно, найденное касательное напряжение сохраняет для всех

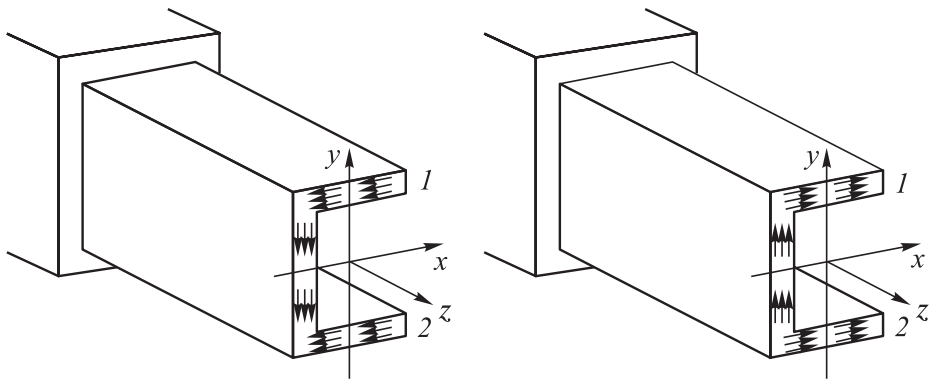


Рис. 4.36

точек сечения постоянное направление, т. е. либо от края *1* к краю *2*, либо же от края *2* к краю *1* в зависимости от знака поперечной силы (рис. 4.36).

Пример 4.8. Найти закон распределения касательных напряжений в круговом незамкнутом профиле при изгибе в плоскости, перпендикулярной оси симметрии (рис. 4.37).

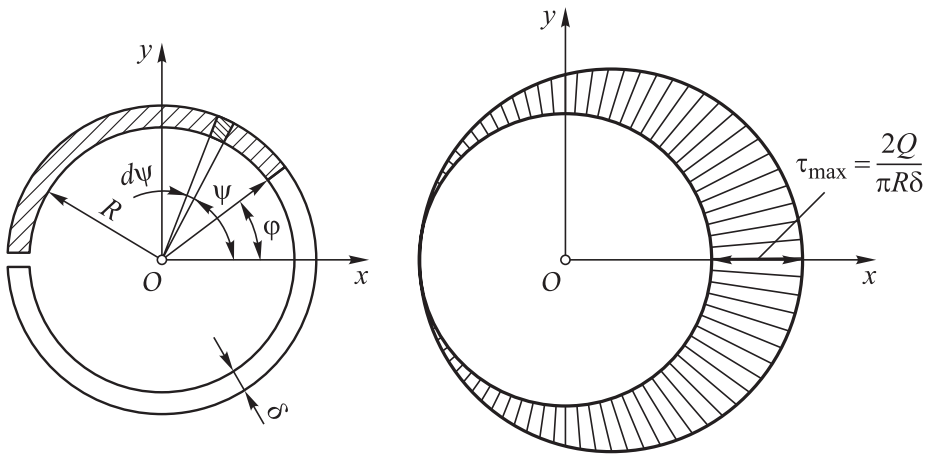


Рис. 4.37

Момент инерции сечения относительно оси x $J_x = \pi R^3\delta$. Статический момент заштрихованной части сечения определяется интегралом $S_x^* = \delta\int_{\varphi}^{\pi} R^2 \sin\psi d\psi = R^2\delta(1+\cos\varphi)$. Соответственно этому $\tau = \frac{Q}{\pi R\delta}(1+\cos\varphi)$, после чего может быть построена эпюра τ (см. рис. 4.37).

4.5. Центр изгиба

Система сил, лежащих в плоскости сечения, как известно из теоретической механики, может быть приведена к любой точке плоскости в виде равнодействующей силы и момента.

Равнодействующая сила не зависит от точки приведения и во всех случаях равна поперечной силе Q. В этом можно убедиться хотя бы на примере рассмотренного кругового незамкнутого профиля (см. рис. 4.37). Здесь равнодействующая касательных сил по оси y определяется следующим интегралом:

$$\int_A \tau \cos\varphi \, dA = \frac{Q}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\varphi)\cos\varphi \, d\varphi,$$

который, как легко установить, равен Q. То же самое имеет место и для рассмотренного выше примера корытного и вообще для любого профиля.

Что касается равнодействующего момента в сечении, то он зависит от положения точки приведения сил. Так, например, в том же случае кругового незамкнутого профиля момент касательных сил относительно центра круга (рис. 4.38) будет

$$M_O = \int_A \tau R \, dA = \frac{QR}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\varphi) \, d\varphi = 2QR.$$

При переходе от одной точки к другой момент изменится, очевидно, на величину Qa, где a — расстояние между этими точками. Так, если привести силы к точке A (рис. 4.38, *в*), то

$$M_A = M_O - QR = QR.$$

Существует такая точка, относительно которой момент касательных сил в сечении при поперечном изгибе равен нулю. Эта точка называется *центром изгиба*. В рассмотренном примере центр изгиба находится на расстоянии $2R$ от центра круга (рис. 4.38, *г*).

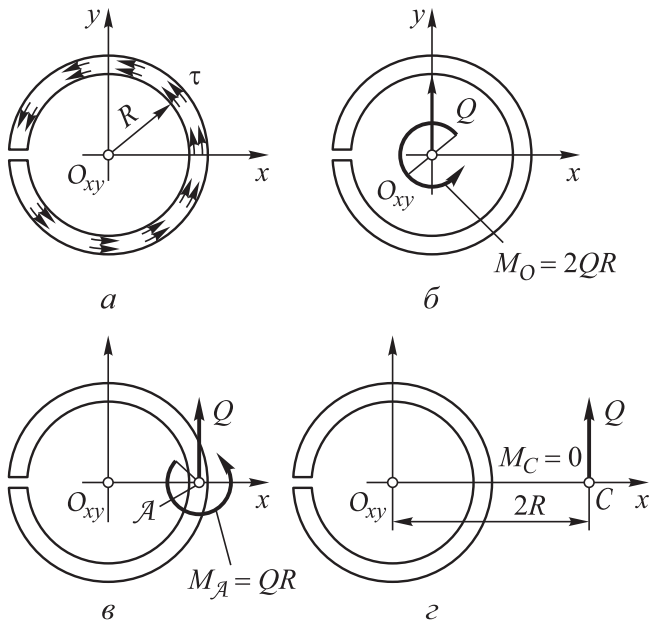


Рис. 4.38

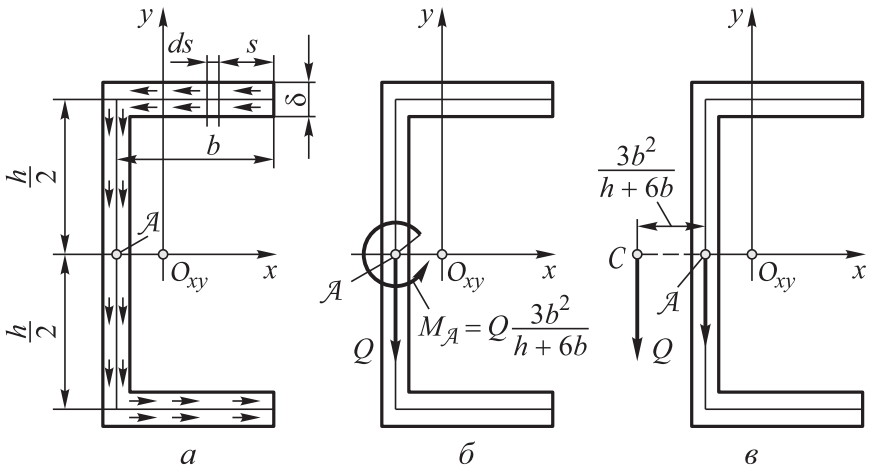


Рис. 4.39

Для корытного профиля (рис. 4.39) в точке $Д$ имеем

$$M_Д = 2\frac{h}{2}\int_0^b \tau\delta ds.$$

Согласно выражению (4.15), после интегрирования получим

$$M_Д = Q\frac{3b^2}{h+6b}.$$

Отсюда следует, что центр изгиба находится на расстоянии $\frac{3b^2}{h+6b}$ от средней линии стенки (рис. 4.39, *в*).

Для сечений, имеющих две оси симметрии, центр изгиба совпадает, очевидно, с центром тяжести.

В некоторых простейших случаях положение центра изгиба может быть указано без проведения каких бы то ни было вычислений. Например, у таврового и углового профилей (рис. 4.40) центр изгиба находится в точке пересечения средних линий стенки и полки. Момент касательных сил относительно этой точки всегда равен нулю.

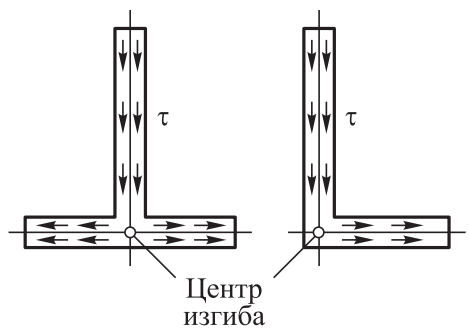


Рис. 4.40

Итак, если момент касательных сил в сечении относительно центра изгиба равен нулю, то и момент внешних сил относительно центра изгиба должен быть равен нулю, иначе в стержне будут возникать деформации, свойственные не только поперечному изгибу, но и кручению. В дальнейшем целесообразно, очевидно, при определении внутренних силовых факторов приводить касательные силы в сечении не к центру тяжести, а к центру изгиба и под крутящим моментом понимать соответственно внутренний момент относительно центра изгиба. Так, рассматривая, например, стержень, показанный на рис. 4.41, можно сказать, что поскольку

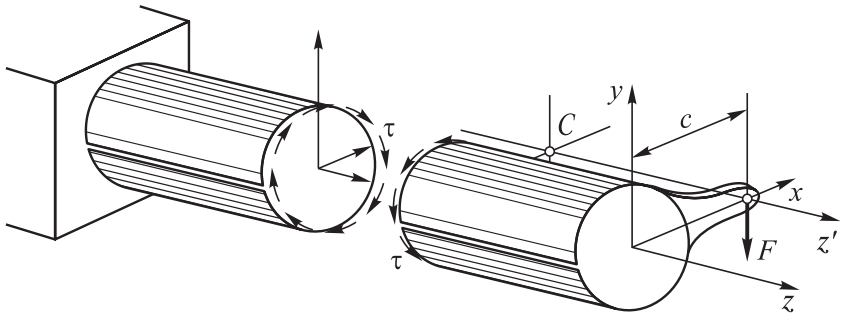


Рис. 4.41

линия действия силы проходит через ось z' (ось центров изгиба), то крутящий момент в сечении равен нулю и стержень закручиваться не будет.

Но, например, тот же самый стержень, защемленный одним концом и находящийся под действием собственного веса (рис. 4.42), будет закручиваться. Крутящий момент в заделке

$$M_{\text{к}} = Q \cdot 2R = ql \cdot 2R.$$

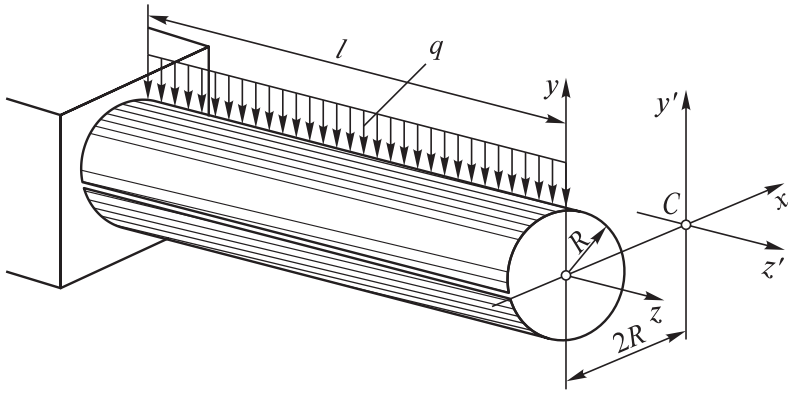


Рис. 4.42

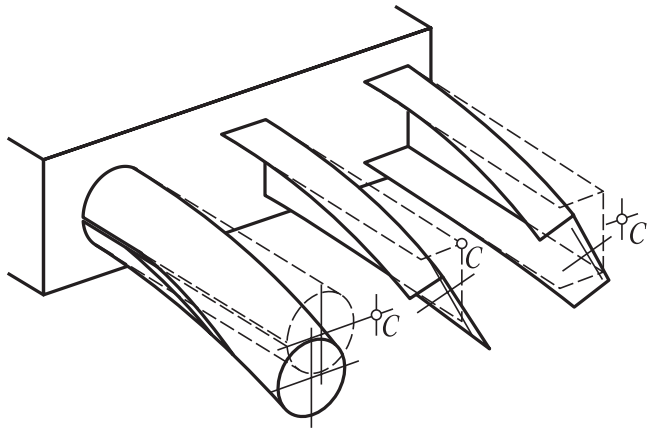


Рис. 4.43

Дополнительные касательные напряжения кручения распределяются в сечении по законам для открытого профиля. При этом (см. формулу (2.28) в 2.5)

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{\text{к}}}{\delta^2 s} = \frac{3ql}{\pi\delta^2}.$$

Аналогичная картина имеет место и при изгибе тонкостенного стержня любого профиля, если только равнодействующая внешних сил не проходит в сечении через центр изгиба (рис. 4.43).

4.6. Дифференциальное уравнение упругой линии балки. Перемещения при изгибе

Кривизну $\frac{1}{r}$ изогнутой оси балки, или кривизну упругой линии, можно определить с помощью выражения (4.5):

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_x}.$$

В неподвижной системе координат y, z (рис. 4.44) кривизна связана с координатами соотношением

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y')^{3/2}}. \qquad (4.16)$$

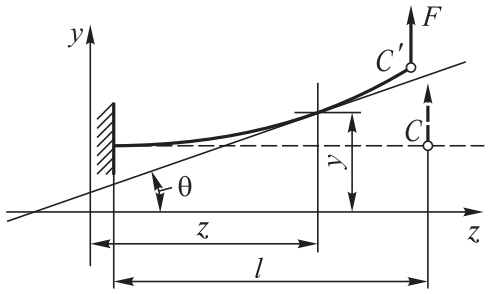


Рис. 4.44

Ограничимся рассмотрением случая малых перемещений, для которых угол наклона касательной к изогнутой оси балки θ можно считать малой величиной. Поэтому квадратом величины y' по сравнению с единицей можно пренебречь и принять

$$\frac{1}{r} \approx y'', \text{ откуда}$$

$$y'' = \frac{M}{EI_x}. \tag{4.17}$$

Сопоставляя выражение (4.17) с формулами (4.1), получаем очевидную цепочку дифференциальных соотношений:

$$\theta = y', \; M = EJ_x y'', \; Q = (EJ_x y'')', \; q = (EJ_x y'')'', \tag{4.18}$$

или для балки с постоянным сечением:

$$\theta = y', \; M = EJ_x y'', \; Q = EJ_x y''', \; q = EJ_x y^{\mathrm{IV}}. \tag{4.19}$$

Из этих формул видно, что в случае нагружения балки постоянного сечения равномерно распределенной нагрузкой ($q = \text{const}$) имеем

$$y^{\mathrm{IV}} = \frac{q}{EJ_x} = \text{const}.$$

Следовательно, форма оси изогнутой балки описывается кривой четвертого порядка.

Если на некотором участке балки $q = 0$ ($Q = \text{const}$), то ось балки будет изогнута по кривой третьего порядка.

Понятно, что все написанные выше соотношения являются точными в той мере, в какой перемещения можно считать малыми. Подавляющее большинство задач, связанных с расчетами на прочность и жесткость при изгибе, решается в указанном предположении, причем с весьма высокой степенью точности, поскольку величина y'^2, отброшенная в выражении (4.16), действительно ничтожно мала.

В некоторых случаях возникает необходимость решить задачу при больших упругих перемещениях. Такого рода задачи встречаются в основном при исследовании специальных пружин приборов.

Если система способна при больших перемещениях сохранять упругие свойства, то она называется гибкой, независимо от того, идет ли речь об изгибе, кручении или растяжении. При изгибе предельные упругие перемещения определяются не только свойствами материала, но в равной мере отношением длины балки к размеру поперечного сечения в плоскости изгиба.

Наибольшее относительное удлинение при изгибе, согласно формуле (4.2),

$$\varepsilon_{\max} = \frac{y_{\max}}{r},$$

а напряжение —

$$\sigma_{\max} = E\frac{y_{\max}}{r}.$$

Большие перемещения стержень сможет получить при условии большого изменения кривизны $1/r$. Но при напряжениях, не превышающих предела упругости, это возможно только при достаточно малом $y_{\max}$, т. е. при малой высоте сечения. Гибкий стержень имеет поэтому обычно форму тонкой ленты или тонкой проволоки и часто называется *тонким гибким стержнем*.

Дифференциальное уравнение упругой линии гибкого стержня имеет вид

$$\frac{M_{\text{изг}}}{EJ_x} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Отличие этого уравнения от уравнения (4.17) заключается не только в том, что здесь сохраняется нелинейный член y'^2 в знаменателе. В случае гибкого стержня выражение для $M_{\text{изг}}$ должно составляться с обязательным учетом перемещений, возникающих в стержне, что при обычном построении эпюр моментов не делается. Указанная особенность гибких стержней наглядно иллюстрируется примером консоли (см. рис. 4.44). Видно, что с ростом прогибов вертикальная сила F получает горизонтальное смещение. В результате этого изгибающий момент в каждой точке стержня изменится на некоторую величину, зависящую как от местного горизонтального смещения, так и от горизонтального смещения точки приложения силы F.

Общие методы изучения больших перемещений при изгибе объединяются так называемой *теорией гибких стержней*. Эта теория

выходит за рамки сопротивления материалов и в настоящем курсе не рассматривается.

Рассмотрим некоторые примеры определения формы упругой линии изогнутой балки при малых перемещениях.

Пример 4.9. Составить уравнение упругой линии консоли, нагруженной на конце сосредоточенной силой F (рис. 4.45).

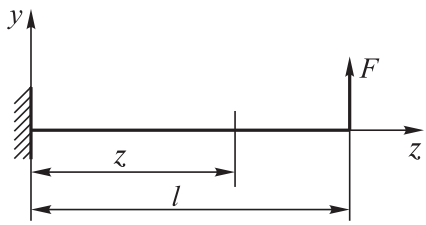


Рис. 4.45

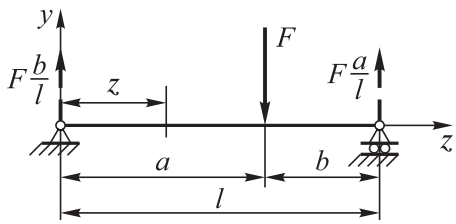


Рис. 4.46

Поместим начало системы координат z, y в заделке. Изгибающий момент в сечении z $M = F(l - z)$. Подставив это выражение в (4.17) и дважды проинтегрировав полученное уравнение, найдем

$$y = \frac{F}{EJ_x}\left(l\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + zC_1 z + C_2 \right),$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий. В данном случае при $z = 0$ имеем $y = 0$ и $y' = 0$, откуда $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Тогда

$$y = \frac{F}{EJ_x}\left(l\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)z.$$

Наибольший прогиб имеет место в точке приложения силы F, т. е. при $z = l$, и равен

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ_x}.$$

Пример 4.10. Двухопорная балка длиной l нагружена силой F, расположенной на расстоянии a от левой опоры (рис. 4.46). Требуется составить уравнение упругой линии и найти перемещение точки приложения силы.

Начало системы координат z, y располагаем на левой опоре. Изгибающие моменты на первом и втором участках бруса определяются по формулам:

$$M_1 = F\frac{b}{l}z, \quad M_2 = F\frac{b}{l}z - F(z - a).$$

После подстановки этих выражений в (4.17) и двукратного интегрирования полученных уравнений находим

$$y_1 = \frac{F}{EJ_x}\left(\frac{b}{l}\frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2\right),$$

$$y_2 = \frac{F}{EJ_x}\left(\frac{b}{l}\frac{z^3}{6} - \frac{z^3}{6} + a\frac{z^2}{2} + C_3 z + C_4\right).$$

Постоянные интегрирования определяются из условий закрепления балки и условий непрерывности при переходе с первого участка на второй: при $z = 0$ $y_1 = 0$, при $z = a$ $y_1 = y_2$ и $y_1' = y_2'$, при $z = l$ $y_2 = 0$.

Из этих условий находим $C_1 = \frac{a}{6l}\left(3al - 2l^2 - a^2\right)$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\frac{a}{6l}\left(2l^2 + a^2\right)$, $C_4 = \frac{a^3}{6}$. После преобразований получим

$$y_1 = \frac{F}{6EJ_x}\frac{b}{l}\left[z^3 - za\left(2l - a\right)\right],$$

$$y_2 = \frac{F}{6EJ_x}\frac{a}{l}\left[-z^3 + 3z^2 l - z\left(2l^2 + a^2\right) + a^2 l\right].$$

В точке приложения силы F имеем $y_1 = y_2 = -\frac{Fa^2b^2}{3EJ_x l}$. Если сила приложена посередине пролета, то $y_1 = y_{\max} = -\frac{Fl^3}{48EJ_x}$.

Координата y точки приложения силы после изгиба балки оказывается отрицательной. Балка прогибается в сторону, противоположную положительному направлению оси y.

Из рассмотренных примеров видно, что для балки, имеющей несколько участков, определение формы упругой линии становится затруднительным. Уравнение каждого участка после интегрирования содержит две произвольные постоянные. Если балка имеет n участков, необходимо совместно решить $2n$ уравнений для определения $2n$ постоянных интегрирования. Естественно, еще более громоздкими будут выкладки для балки переменной жесткости.

В свое время на преодоление этих трудностей было затрачено много усилий. Но, как всегда, с годами поиска вырабатывается что-то наиболее простое и целесообразное. История сопротивления материалов в этом смысле достаточно поучительна. Существуют

графические и графоаналитические методы построения упругой линии, изучение которых еще до недавнего времени в курсах строительной механики считалось совершенно обязательным. Существует универсальное уравнение упругой линии для балки постоянного сечения, где при любом числе пролетов можно ограничиться определением всего двух постоянных интегрирования. Могут быть предложены и другие, родственные им приемы построения упругой линии. Однако в настоящее время в связи с развитием ЭВМ в технике безраздельно господствуют численные методы. И сейчас, когда подобного рода задачи без труда решаются на ЭВМ, родившиеся в начале века графические приемы сохраняют лишь исторический интерес, а некоторые остроумные упрощения порой представляются бьющими мимо цели.

4.7. Балка на упругом основании

Расчетная схема балки на упругом основании является достаточно универсальной и позволяет предложить экономные способы решения многих задач.

Представим себе прямую балку, опирающуюся на множество часто расположенных, не связанных между собою пружин или каких-либо других упругих элементов (рис. 4.47).

Если к балке приложены внешние силы, то со стороны пружин возникают реакции, каждая из которых пропорциональна местному прогибу. Так как расстояние между пружинами невелико,

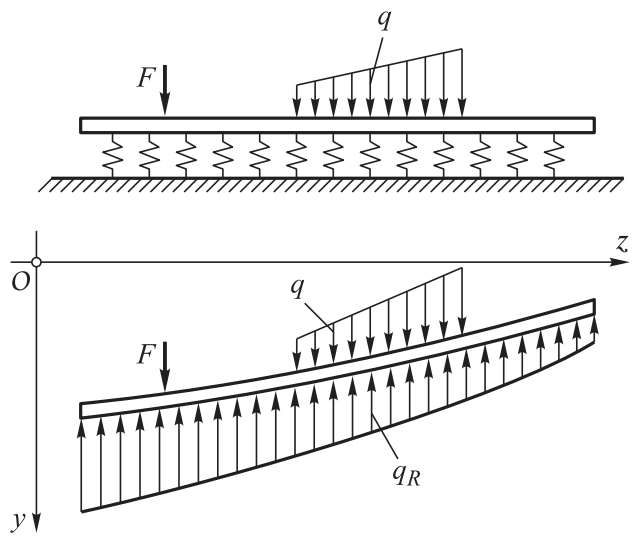


Рис. 4.47

целесообразно представить реакции в виде распределенных сил, интенсивность которых q_R пропорциональна прогибу:

$$q_R = -\varkappa v, \tag{4.20}$$

$\varkappa$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от жесткости пружин и частоты их расстановки. Знак «–» указывает на то, что реакции направлены в сторону, противоположную прогибу.

Подходя к аналогичным системам с более общих позиций, можно вообще представить пружинные опоры как некоторую сплошную упругую среду, обладающую тем свойством, что возникающие с ее стороны реакции подчиняются соотношению (4.20) независимо от физических и конструктивных особенностей основания. Балка, расположенная на такого рода сплошной деформируемой среде, носит название *балки на упругом основании*. Коэффициент $\varkappa$ называется *коэффициентом упругого основания*.

В инженерной практике такая расчетная схема получила широкое распространение и используется при анализе многих конструкций. Правда, соотношение (4.20) не всегда соблюдается, но часто его можно рассматривать как приближенное. Так, оно является почти точным в рассмотренном выше случае большого числа несвязанных упругих опор. Оно будет также точным для плавающей балки прямоугольного сечения (рис. 4.48, *а*). Здесь реакция со стороны

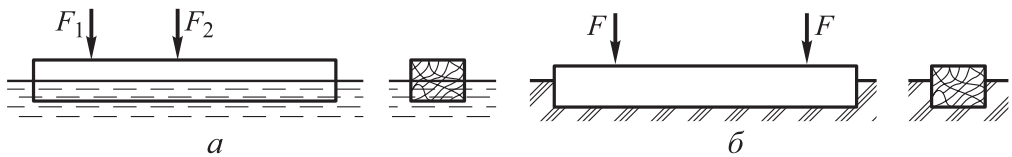


Рис. 4.48

жидкости в каждом сечении пропорциональна глубине погружения балки. В то же время для шпалы (рис. 4.48, *б*), лежащей на упругом грунте, соотношение (4.20) следует рассматривать как приближенное, поскольку реакция в каждом сечении зависит не только от местного прогиба, но и от осадки грунта в соседних точках.

Дифференциальное уравнение изгиба балки постоянного сечения на упругом основании получается из выражения (4.19). Взамен величины q надо подставить разность $q - q_R$. Тогда под величиной q будем понимать внешнюю распределенную нагрузку, а под q_R — реакцию упругого основания (4.20). В итоге для балки постоянной жесткости имеем уравнение

$$EJy^{\mathrm{IV}} + \varkappa y = q,$$

или, вводя обозначение

$$\frac{\varkappa}{EJ} = 4k^4, \tag{4.21}$$

получим

$$y^{\mathrm{IV}} + 4k^4 y = \frac{q}{EJ}. \tag{4.22}$$

Если внешняя распределенная нагрузка q отсутствует, правая часть уравнения обращается в нуль, а сосредоточенные силы и момент учитываются путем наложения соответствующих граничных условий при определении постоянных интегрирования.

Решение уравнения (4.22) можно записать в виде

$$y = e^{-kz}(C_1 \sin kz + C_2 \cos kz) + e^{kz}(C_3 \sin kz + C_4 \cos kz) + y^*, \tag{4.23}$$

где y^* — частное решение уравнения (4.22).

Во многих случаях более предпочтительной оказывается другая форма записи, которая получается из (4.23) простой перегруппировкой слагаемых:

$$\begin{aligned} y = {} & C_1 \sin kz \operatorname{sh} kz + C_2 \sin kz \operatorname{ch} kz + \\ & + C_3 \cos kz \operatorname{sh} kz + C_4 \cos kz \operatorname{ch} kz + y^*, \end{aligned} \tag{4.24}$$

где $\operatorname{sh} kz$ и $\operatorname{ch} kz$ — гиперболические синус и косинус.

Если функция y определена, то, согласно выражениям (4.19), можно определить изгибающие моменты и поперечные силы.

Пример 4.11. Деревянный брус прямоугольного поперечного сечения (рис. 4.49) плавает на воде. К брусу в середине приложена сосредоточенная сила F. Определить наибольший изгибающий момент в предположении, что сила F не очень велика и брус ею не затапливается.

Если в каком-то сечении балка сместится вниз на расстояние y, давление со стороны воды увеличится на ρy, где ρ — плотность воды.

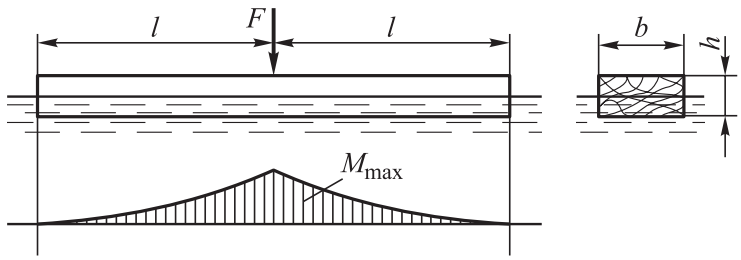


Рис. 4.49

Интенсивность сил реакции будет $q_R = -\rho b y$, где b — ширина прямоугольного сечения. Следовательно, $\varkappa = \rho b$ и, согласно выражению (4.21),

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho b}{4EJ}}. \tag{4.25}$$

Собственный вес бруса уравновешивается реакцией жидкости, поэтому полагаем в уравнении (4.22) $q = 0$. Тогда под величиной y следует понимать смещение, отсчитываемое от равновесного положения бруса, которое тот занимает при $F = 0$.

Так как $y^* = 0$, получаем, согласно (4.24),

$$y = C_1 \sin kz \operatorname{sh} kz + C_2 \sin kz \operatorname{ch} kz + C_3 \cos kz \operatorname{sh} kz + C_4 \cos kz \operatorname{ch} kz.$$

Последовательно дифференцируя это выражение, находим

$$y' = (C_1 - C_3)k \sin kz \operatorname{sh} kz + (C_1 - C_4)k \sin kz \operatorname{ch} kz +$$
$$+(C_1 + C_4)k \cos kz \operatorname{sh} kz + (C_2 + C_3)k \cos kz \operatorname{ch} kz;$$

$$y'' = 2C_1k^2 \cos kz \operatorname{ch} kz + 2C_2k^2 \cos kz \operatorname{sh} kz -$$
$$-2C_3k^2 \sin kz \operatorname{ch} kz - 2C_4k^2 \sin kz \operatorname{sh} kz;$$

$$y''' = 2(C_2 - C_3)k^3 \cos kz \operatorname{ch} kz + 2(C_1 - C_4)k^3 \cos kz \operatorname{sh} \mathrm{kz} -$$
$$-2(C_1 + C_4)k^3 \sin kz \operatorname{ch} kz - 2(C_2 + C_3)k^3 \sin kz \operatorname{sh} kz.$$

Выберем начало отсчета z в точке приложения силы F. При $z = 0$ по условию симметрии $y' = 0$, а поперечная сила справа от среднего сечения равна $-F/2$. Следовательно, $EJy'''|_{z=0} = -F/2$ при $z = l$, $M = EJy'' = 0$ и $Q = EJy''' = 0$. Таким образом, получаем четыре уравнения для определения констант C_1, C_2, C_3 и C_4:

$$C_2 + C_3 = 0; \quad C_2 - C_3 = -\frac{F}{4EJk^3};$$

$$C_1 \cos kl \operatorname{ch} kl + C_2 \cos kl \operatorname{sh} kl - C_3 \sin kl \operatorname{ch} kl - C_4 \sin kl \operatorname{ch} kl = 0;$$

$$C_1(\cos kl \operatorname{sh} kl - \sin kl \operatorname{ch} kl) + C_2(\cos kl \operatorname{ch} kl - \sin kl \operatorname{sh} kl) +$$
$$+ C_3(-\cos kl \operatorname{ch} kl - \sin kl \operatorname{sh} kl) + C_4(-\cos kl \operatorname{sh} kl - \sin kl \operatorname{ch} kl) = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{F}{8EJk^3} \frac{\operatorname{sh}^2 kl + \sin^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \sin kl \cos kl};$$

$$C_2 = -\frac{F}{8EJk^3}; \quad C_3 = \frac{F}{8EJk^3};$$

$$C_4 = -\frac{F}{8EJk^3} \frac{\operatorname{ch}^2 kl + \cos^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \sin kl \cos kl}.$$

Изгибающий момент в стержне определяем через вторую производную функции y по формуле

$$M = EJy'',$$

или

$$M = \frac{F}{4k}\left(\frac{\operatorname{sh}^2 kl + \sin^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \sin kl \cos kl} \cos kz \operatorname{ch} kz - \cos kz \operatorname{sh} kz - \right.$$

$$\left. - \sin kz \operatorname{ch} kz + \frac{\operatorname{ch}^2 kl + \cos^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \sin kl \cos kl} \sin kz \operatorname{sh} kz \right).$$

Наибольший изгибающий момент имеет место при $z = 0$:

$$M_{\max} = \frac{F}{4k} \frac{\operatorname{sh}^2 kl + \sin^2 kl}{\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl + \sin kl \cos kl}.$$

С увеличением длины l изгибающий момент растет, но не беспредельно. При очень большой длине балки $M_{\max} = F/4k$, где k определяем по формуле (4.25). Вид эпюры изгибающих моментов меняется в зависимости от длины l.

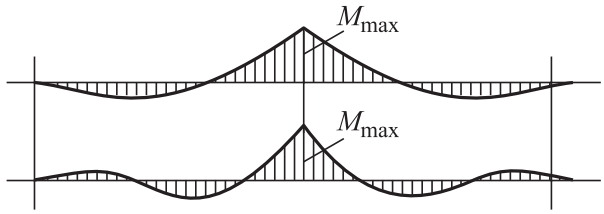


Рис. 4.50

При малой длине эпюра имеет вид кривой, показанной на рис. 4.49. Для более длинной балки эпюра изгибающего момента меняет знак и принимает вид кривых, показанных на рис. 4.50.

4.8. Косой изгиб

Под косым изгибом, как нам уже известно, понимается такой случай изгиба, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает с главной осью сечения. Косой изгиб удобнее всего рассматривать, используя принцип суперпозиции, как одновременный изгиб в двух главных плоскостях zOx и zOy (рис. 4.51). Для этого изгибающий момент M раскладывается на составляющие моменты относительно осей x и y:

$$M_x = M \sin\alpha; \qquad M_y = M \cos\alpha.$$

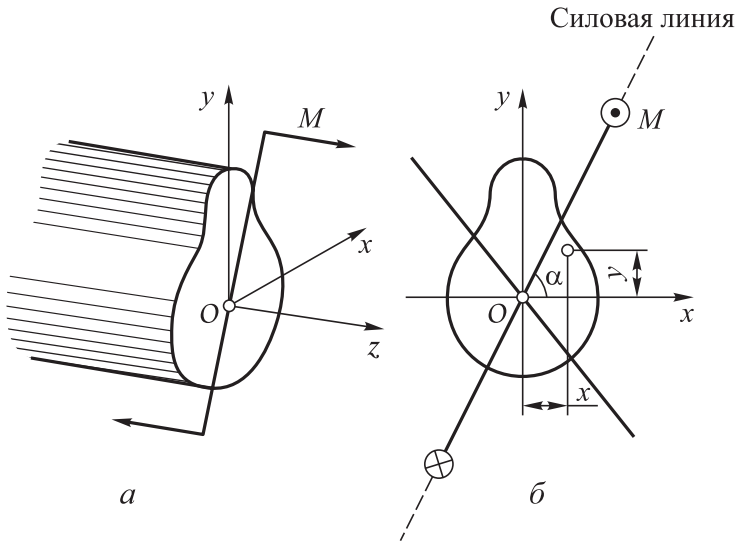


Рис. 4.51

Нормальное напряжение в точке, имеющей координаты x и y, определяется суммой напряжений, обусловленных моментами M_x и M_y, т. е.

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y}, \tag{4.26}$$

или

$$\sigma = M\left(\frac{y}{J_x}\sin\alpha + \frac{x}{J_y}\cos\alpha\right).$$

Следовательно, если в каждой точке сечения отложить по нормали вектор σ, то концы векторов, как и при простом изгибе, образуют плоскость. Уравнение нейтральной линии в сечении найдем, полагая $\sigma = 0$:

$$y = -x\frac{J_x}{J_y}\operatorname{ctg}\alpha. \tag{4.27}$$

Легко установить, что при косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна к плоскости изгибающего момента. Действительно, угловой коэффициент k_1 следа плоскости момента (рис. 4.51, *б*), называемого силовой линией, представляет собой тангенс угла α:

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha.$$

Угловой же коэффициент нейтральной линии (см. формулу (4.27)) равен

$$k_2 = -\frac{J_x}{J_y}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Так как в общем случае $J_x \neq J_y$, то условие перпендикулярности прямых, известное из аналитической геометрии, не соблюдается, поскольку $k_1 \neq -1/k_2$. Стержень, образно выражаясь, «предпочитает» изгибаться не в плоскости изгибающего момента, а в некоторой другой плоскости, где жесткость на изгиб будет меньше. Поэтому нейтральная линия не перпендикулярна силовой линии, а несколько повернута в сторону оси минимального момента инерции (см. рис. 4.51, *б*).

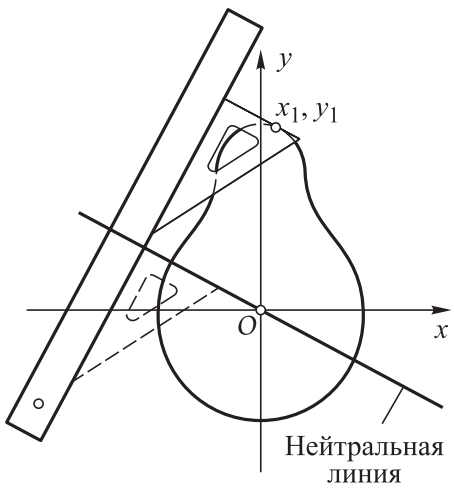


Рис. 4.52

Так как эпюра нормальных напряжений в сечении линейна, то максимальное напряжение возникает в точке, наиболее удаленной от нейтральной линии. Пусть координаты этой точки будут x_1, y_1. Тогда, согласно выражению (4.26), получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x y_1}{J_x} + \frac{M_y x_1}{J_y}. \qquad (4.28)$$

Когда сечение имеет простую форму (круг, прямоугольник), наиболее опасная точка может быть определена сразу. В случае сложной формы сечения удобно прибегать к графическому методу. Для этого сечение вычерчиваем в масштабе и проводим главные оси x и y. Затем, согласно формуле (4.27), получаем уравнение и строим нейтральную линию. При помощи линейки и угольника (рис. 4.52) определяем точку, наиболее удаленную от нейтральной линии, а ее координаты x_1, y_1 снимаем непосредственно с чертежа.

Пример 4.12. Балка равнобокого уголкового профиля (рис. 4.53), защемленная одним концом, находится под действием собственного веса. Требуется определить наибольшее напряжение в заделке. Длина балки $l = 3$ м, профиль № 10, толщина стенок профиля $\delta = 10$ мм.

По таблицам стандартных профилей (см. Приложение) определяем массу балки на единицу длины — 15,1 кг/м. Отсюда $q = 1{,}48$ Н/см. По формуле $M = ql^2/2$ находим наибольший изгибающий момент:

M = 66 600 Н·см. Плоскость этого момента параллельна стороне уголка и составляет с главными осями угол $\alpha = 45°$. Вычерчиваем в масштабе поперечное сечение (рис. 4.54) и проводим главные центральные оси x и y.

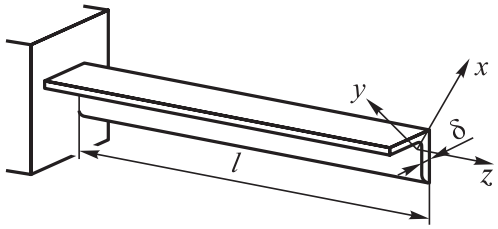


Рис. 4.53

Из таблиц сортамента находим $J_x = J_{max} = 284$ см^4, $J_y = J_{min} = 74{,}1$ см^4. Согласно формуле (4.27), получаем уравнение нейтральной линии

$$y = -x\frac{284}{74{,}1}\operatorname{ctg} 45° = -3{,}83x.$$

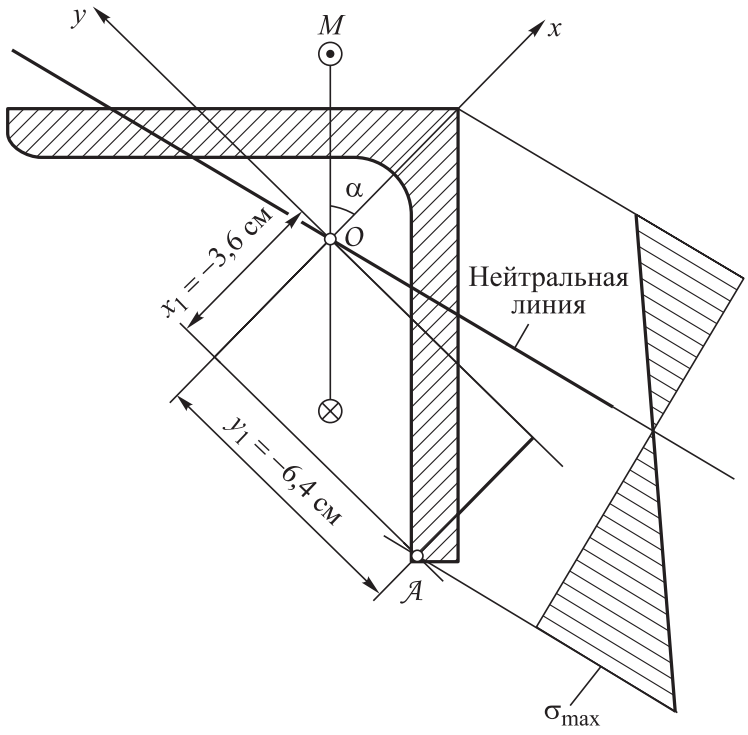


Рис. 4.54

Проводим эту прямую и определяем наиболее удаленную от нее точку A (см. рис. 4.54). Координаты этой точки будут: $x_1 = -3{,}6$ см, $y_1 = -6{,}4$ см; $M_x = M_y = M\frac{\sqrt{2}}{2} = 47\,090$ Н · см. По формуле (4.28) определяем

$$\sigma_{max} = -\frac{47\,090 \cdot 6{,}4}{284} - \frac{47\,090 \cdot 3{,}6}{74{,}1} = -33{,}5 \text{ МПа}.$$

Пример 4.13. Двухопорная балка (рис. 4.55, *а*) нагружена силами F и $2F$. Определить наибольшее напряжение, если сечение балки — прямоугольник со сторонами b и $2b$ (рис. 4.55, *б*).

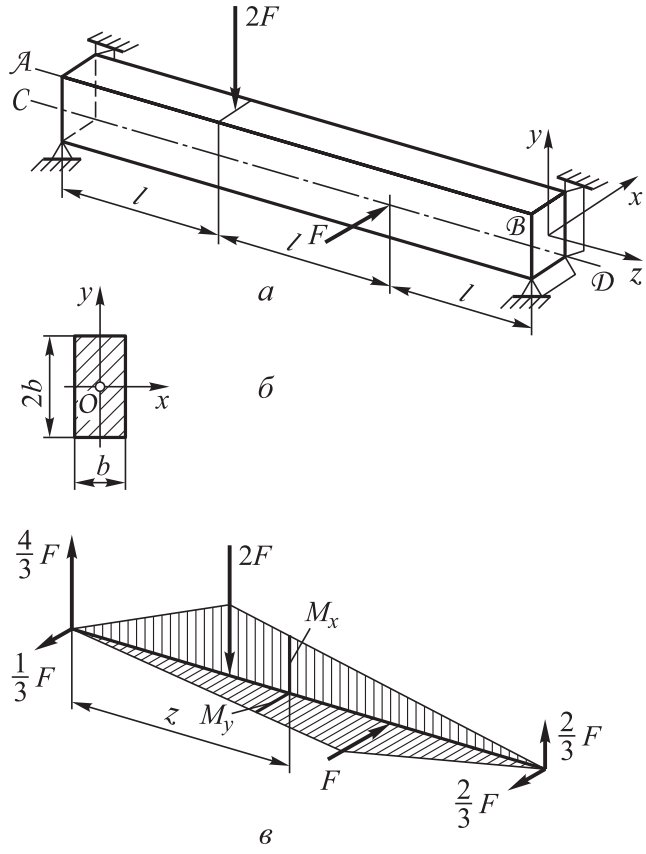


Рис. 4.55

В данном случае внешние силы приложены по главным осям сечения и удобнее всего рассмотреть эпюры изгибающих моментов от каждой силы по отдельности. Наиболее опасными будут точки, расположенные на ребре AB, где суммируются наибольшие сжимающие напряжения, или на ребре CD, где суммируются наибольшие растягивающие напряжения.

Рассмотрим средний участок. На расстоянии z от левой опоры (рис. 4.55, *в*) имеем $M_x = \frac{2F}{3}(3l - z)$; $M_y = \frac{F}{3}z$. Для точки ребра CD

$$\sigma_{max} = \frac{2F}{3}\frac{3l - z}{W_x} + \frac{F}{3}\frac{z}{W_y}.$$

Так как $W_x = b(2b)^2/6$ и $W_y = 2bb^2/6$, то для среднего участка σ_{max} оказывается не зависящим от z и равным $3Fl/b^3$. На первом и третьем участках напряжения будут меньшими.

4.9. Внецентренное растяжение и сжатие

При внецентренном растяжении равнодействующая внешних сил не совпадает с осью стержня, как при обычном растяжении, а смещена относительно оси z и остается ей параллельной (рис. 4.56).

Пусть точка $\mathcal{A}$ приложения равнодействующей внешних сил имеет в сечении координаты x_0 и y_0 (см. рис. 4.56). Тогда относительно главных осей равнодействующая сила F дает моменты

$$M_x = Fy_0 \qquad \text{и} \qquad M_y = Fx_0.$$

Таким образом, внецентренное растяжение и сжатие оказывается родственным косому изгибу. В отличие от последнего, однако, при внецентренном растяжении в поперечном сечении стержня возникают не только изгибающие моменты, но и нормальная сила $N = F$.

В произвольной точке $\mathcal{B}$ с координатами x, y нормальное напряжение σ определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{Fy_0 y}{J_x} + \frac{Fx_0 x}{J_y}. \qquad (4.29)$$

Пространственная эпюра напряжений образует плоскость. Уравнение нейтральной линии получаем, приравнивая σ нулю:

$$\frac{1}{A} + \frac{y_0 y}{J_x} + \frac{x_0 x}{J_y} = 0. \qquad (4.30)$$

Наибольшие напряжения, как и при косом изгибе, имеют место в точке с координатами x_1, y_1, наиболее удаленной от нейтральной линии:

$$\sigma_{max} = F\left(\frac{1}{A} + \frac{y_0 y_1}{J_x} + \frac{x_0 x_1}{J_y}\right).$$

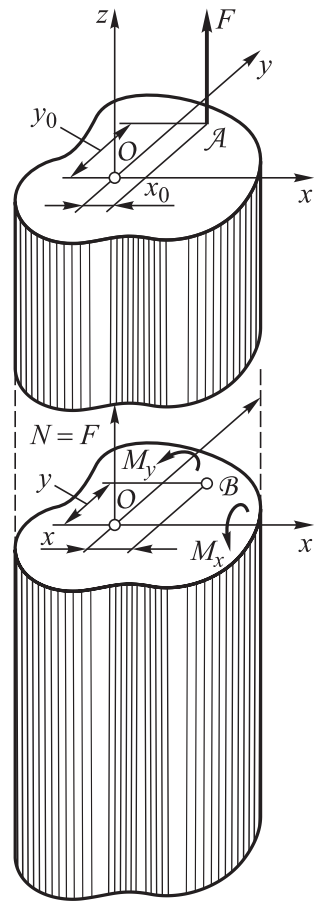


Рис. 4.56

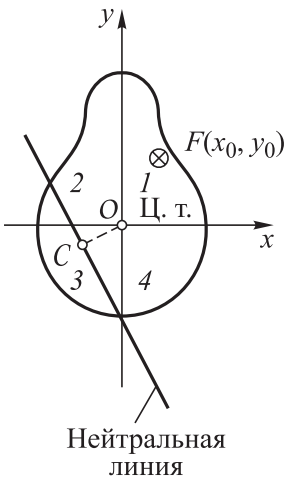


Рис. 4.57

При внецентренном растяжении и сжатии в отличие от косого изгиба нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения. При положительных x_0 и y_0 по крайней мере одна из координат x, y, входящих в уравнение (4.30), должна быть отрицательной. Следовательно, если точка приложения силы F находится в первом квадранте, то нейтральная линия проходит с противоположной стороны центра тяжести через квадранты *2*, *3* и *4* (рис. 4.57).

Расстояние от начала координат до некоторой прямой, уравнение которой

$$ay + bx + c = 0,$$

как известно из курса аналитической геометрии, будет

$$OC = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В данном случае (см. рис. 4.57)

$$OC = \frac{1/A}{\sqrt{y_0^2 / J_x^2 + x_0^2 / J_y^2}}. \qquad (4.31)$$

Следовательно, по мере того, как точка приложения силы приближается к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него.

В пределе при $x_0 = y_0 = 0$, когда сила F приложена в центре тяжести, нейтральная линия находится в бесконечности. Напряжения в этом случае распределены по сечению равномерно. По мере того как точка приложения силы удаляется от центра тяжести, отрезок OC уменьшается и нейтральная линия, следовательно, приближается к центру тяжести.

Из сказанного следует, что при внецентренном растяжении и сжатии нейтральная линия может как пересекать сечение, так и находиться за его пределами. В первом случае в сечении возникают и растягивающие, и сжимающие напряжения. Во втором случае напряжения во всех точках сечения будут одного знака.

Затронутый вопрос имеет значение, например, для расчета сжатых кирпичных колонн. Кирпичная кладка плохо сопротив-

ляется растяжению. Поэтому желательно, чтобы напряжения при внецентренном сжатии были для всего сечения сжимающими и чтобы нейтральная линия проходила за пределами сечения. Для этого нужно внешнюю силу прикладывать достаточно близко к центру тяжести.

В окрестности центра тяжести существует область, называемая *ядром сечения*. Если след силы F находится внутри ядра сечения, напряжения во всех точках сечения будут одного знака. Если сила приложена за пределами ядра сечения, нейтральная линия пересекает сечение, и напряжения в сечении будут как сжимающими, так и растягивающими. Когда точка приложения силы находится на границе ядра, нейтральная линия касается контура сечения. Чтобы определить ядро сечения, надо представить себе, что нейтральная линия обкатывается вокруг сечения. Точка приложения силы вычертит при этом контуры ядра сечения.

Пример 4.14. Установить, какой из стержней, показанных на рис. 4.58, способен выдержать бо̀льшую нагрузку без признаков пластических деформаций.

В случае *а* сила F для ослабленного сечения является нецентральной. Ее плечо относительно оси y равно $a/4$. Следовательно, наибольшее растягивающее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{a\,3a/2} + \frac{6Fa/4}{a(3a/2)^2} = \frac{4}{3}\frac{F}{a^2}.$$

В случае *б* сила F является центральной и $\sigma_{\max} = F/a^2$.

Таким образом, в стержне, имеющем вырезы с двух сторон, напряжение будет меньше.

Пример 4.15. Определить размеры ядра сечения для стержня, имеющего круглое сечение радиусом R (рис. 4.59).

По условиям симметрии ядро сечения также должно иметь форму круга. Пусть точка приложения силы находится на оси y, а нейтральная линия касается контура сечения (см. рис. 4.59). Тогда $OC = R$, $y_0 = r$, $x_0 = 0$.

Учитывая, что $A = \pi R^2$, а $J_x = \pi R^4/4$, получим из формулы (4.31) радиус ядра $y_0 = r = R/4$.

Пример 4.16. Определить ядро сечения для стержня, имеющего сечение в виде прямоугольника со сторонами b и h (рис. 4.60).

Сначала по формуле (4.31) определяем ординату y_0 точки A пересечения контура ядра сечения с осью y. Когда след нормальной силы находится в точке A, нейтральная линия совпадает с нижним основанием прямоугольника, при этом $OC = h/2$, $x_0 = 0$, $A = bh$, $J_x = bh^3/12$. Формула (4.31) дает $y_0 = h/6$.

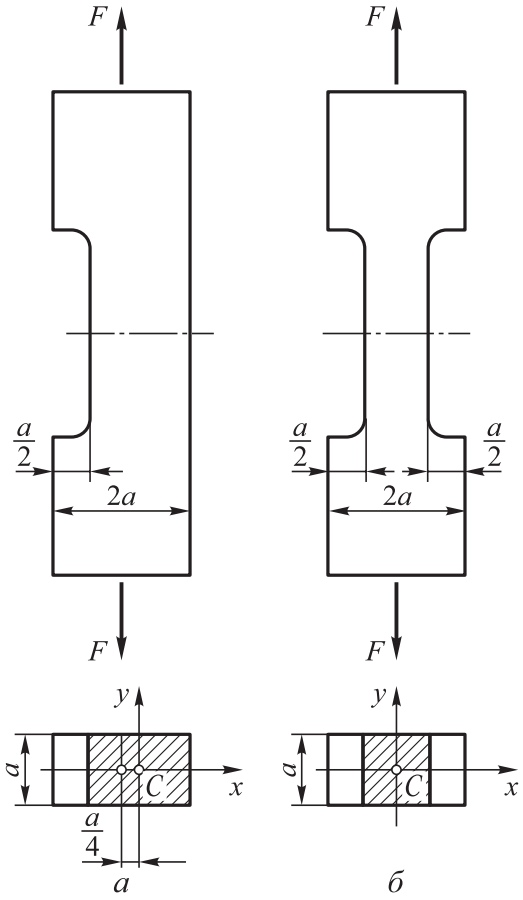


Рис. 4.58

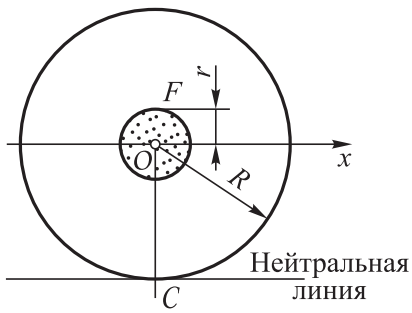


Рис. 4.59

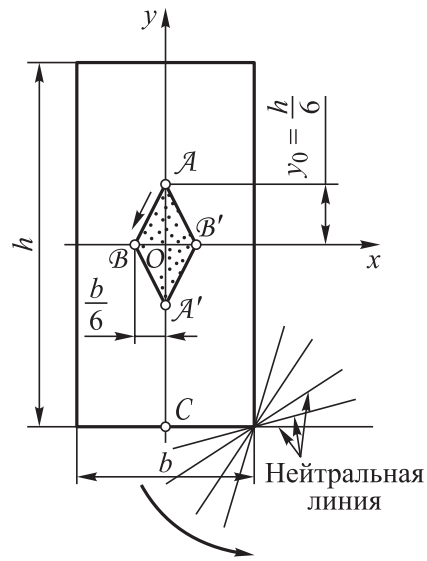


Рис. 4.60

Когда равнодействующая сил переместится в точку $\mathcal{B}$, расположенную на расстоянии $b/6$ от центра тяжести, нейтральная линия совпадет с правой стороной прямоугольника. Симметрично точкам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ располагаются точки $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$ (см. рис. 4.60).

Теперь остается решить вопрос, по какой линии от точки $\mathcal{A}$ к точке $\mathcal{B}$ будет перемещаться точка приложения силы, если нейтральная линия поворачивается вокруг правого нижнего угла сечения (см. рис. 4.60). Формула (4.30) выражает условие, при котором нормальное напряжение в некоторой точке сечения равно нулю.

Потребуем, чтобы в нижнем правом углу сечения, т. е. в точке с координатами $y = -h/2$ и $x = b/2$, напряжение равнялось нулю. Тогда, согласно уравнению (4.30), имеем

$$\frac{1}{bh} = \frac{y_0 h/}{bh^3/12} + \frac{x_0 b/2}{hb^3/12} = 0,$$

или

$$1 - \frac{6y_0}{h} = \frac{6x_0}{b} = 0.$$

Будем рассматривать x_0 и y_0 как переменные. Становится очевидным, что при вращении нейтральной линии около неподвижной точки точка приложения силы перемещается по прямой. В данном конкретном случае эта прямая проходит через точки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Соединяя точки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$ прямыми, получаем ядро сечения в виде ромба.

4.10. Изгиб бруса большой кривизны

До сих пор мы рассматривали задачи, связанные с изгибом прямого бруса. Обратимся теперь к изгибу кривого бруса, полагая, что внешние силы приложены в плоскости его кривизны.

Принято различать брус малой и большой кривизны. Основным признаком для такого деления является отношение высоты сечения h в плоскости кривизны к радиусу кривизны оси бруса r_0. Если это отношение существенно меньше единицы ($h/r_0 \le 0{,}2$), считается, что брус имеет малую кривизну. Для бруса большой кривизны отношение h/r_0 соизмеримо с единицей. Таким образом, указанное деление является условным и не имеет четкой границы.

Расчетные формулы, выведенные ранее для прямого бруса, применимы также и к брусу малой кривизны. Очевидное изменение претерпевает только формула (4.5), определяющая кривизну нагруженного бруса. Взамен нее для бруса малой кривизны имеем

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{M}{EJ_x}, \qquad (4.32)$$

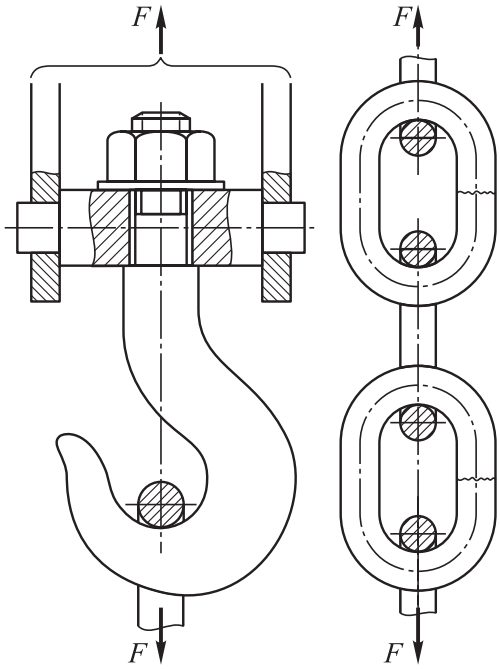


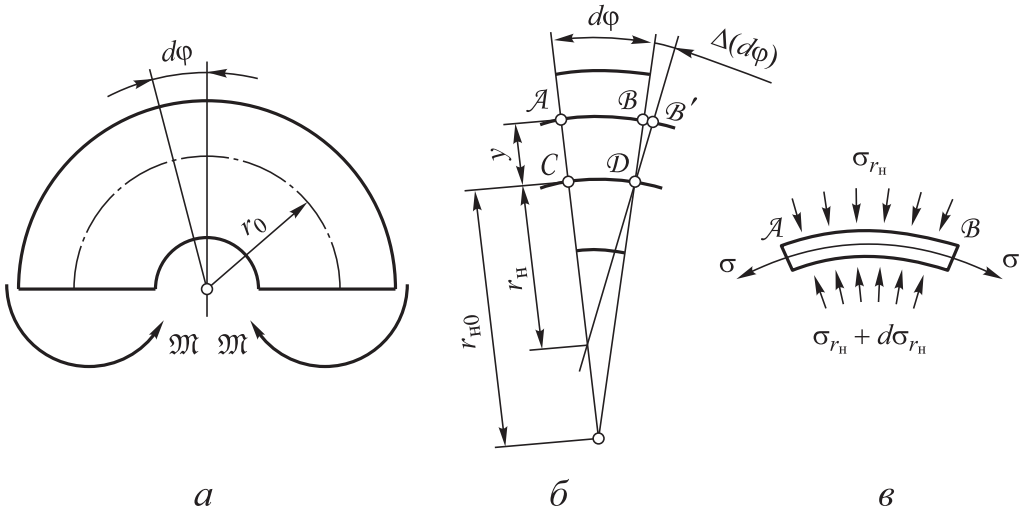
Рис. 4.61

где $1/r_0$ — кривизна ненагруженного бруса. Таким образом, задачи, связанные с расчетом бруса малой кривизны на прочность, не содержат в себе специфических особенностей. Вопрос о перемещениях будет рассмотрен особо в гл. 5.

Перейдем теперь к брусу большой кривизны. К схеме такого бруса сводится, например, задача расчета на прочность крюка подъемника или звеньев металлической цепи (рис. 4.61).

Положим, имеется участок бруса большой кривизны постоянного сечения, нагруженный по концам моментами $\mathfrak{M}$ (рис. 4.62, *а*). Так же как и для прямого бруса (см. 4.2), можно показать, что множество точек, образующих до изгиба поперечное сечение бруса, после изгиба также образует плоское сечение, но повернутое в пространстве. Иными словами, поперечные сечения бруса большой кривизны при чистом изгибе остаются плоскими.

Выделим из кривого бруса двумя близкими нормальными сечениями (рис. 4.62, *б*) элементарный участок. При изгибе смежные



а *б* *в*

Рис. 4.62

сечения повернутся одно относительно другого на угол $\Delta(d\varphi)$, и в слоях бруса возникнут некоторые удлинения.

Введем необходимые обозначения. Через r_0 (см. рис. 4.62, *а*) обозначим радиус кривизны оси бруса (линии центров тяжести сечений), а через $r_{н0}$ — радиус кривизны нейтрального слоя (рис. 4.62, *б*), величина которого пока неизвестна. В дальнейшем мы увидим, что $r_{н0}$ всегда меньше r_0 и нейтральная линия для бруса большой кривизны смещена относительно центра тяжести в сторону центра кривизны. Ординату y будем отсчитывать от нейтральной линии.

Удлинение слоя AB (см. рис. 4.62, *б*)

$$\varepsilon = \frac{BB'}{AB} = \frac{y\Delta(d\varphi)}{(r_{н0} + y)d\varphi}.$$

Здесь предполагается, что в процессе изгиба бруса величина y не меняется. Однако, строго говоря, это не так. Если рассмотреть условия равновесия элементарной полоски AB (рис. 4.62, *в*), станет очевидным, что между соседними волокнами должно существовать взаимодействие в виде сил, направленных по радиусу, в результате чего форма поперечного сечения бруса меняется и размер y не остается прежним. Для сплошных сечений это изменение несущественно. Для тонкостенного же бруса радиальные перемещения волокон довольно велики и могут коренным образом изменить картину распределения напряжений в сечении.

Отношение $\Delta(d\varphi)/d\varphi$ пропорционально изменению кривизны бруса. Из рис. 4.62 видно, что с одной стороны $CD = (d\varphi + \Delta(d\varphi))r_н$, где $r_н$ — радиус кривизны нейтрального слоя после деформации; с другой стороны $CD = r_{н0}d\varphi$. Приравнивая эти выражения, получаем

$$\frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = r_{н0}\left(\frac{1}{r_н} - \frac{1}{r_{н0}}\right).$$

Таким образом, можно написать, что

$$\varepsilon = \frac{y}{r_{н0} + y} r_{н0}\left(\frac{1}{r_н} - \frac{1}{r_{н0}}\right)$$

и, далее,

$$\sigma = E\frac{y}{r_{н0} + y} r_{н0}\left(\frac{1}{r_н} - \frac{1}{r_{н0}}\right). \qquad (4.33)$$

В полученных выражениях наглядно проявляется основная особенность бруса большой кривизны: размеры поперечного сечения соизмеримы с радиусом $r_{н0}$, поэтому величина y, стоящая в знаменателе, имеет существенное значение и напряжения по высоте сечения распределяются нелинейно. Для бруса малой кривизны величина y по сравнению с $r_{н0}$ мала и

$$\sigma = Ey\left(\frac{1}{r_н} - \frac{1}{r_{н0}}\right).$$

При $1/r_{н0} = 0$ это выражение принимает вид уравнения (4.3) для прямого бруса.

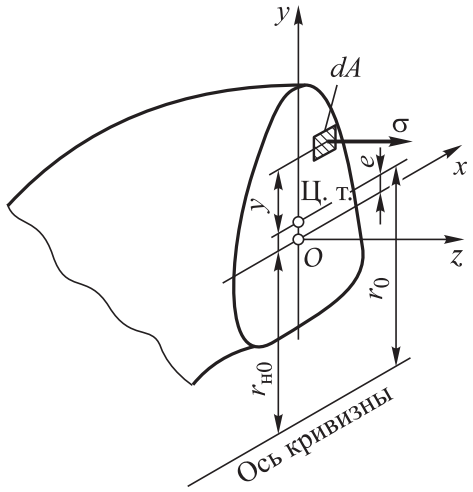


Рис. 4.63

Будем полагать для простоты, что сечение бруса симметрично относительно плоскости кривизны. Тогда ось y в сечении является осью симметрии (рис. 4.63) и момент элементарных сил σdA относительно этой оси равен нулю. Напишем теперь выражения для нормальной силы N и изгибающего момента M:

$$N = \int_A \sigma dA; \quad M = \int_A \sigma y\, dA.$$

После подстановки σ из (4.33) получаем

$$N = Er_{н0}\left(\frac{1}{r_н} - \frac{1}{r_{н0}}\right)\int_A \frac{y\,dA}{r_{н0} + y}; \quad M = Er_{н0}\left(\frac{1}{r_н} - \frac{1}{r_{н0}}\right)\int_A \frac{y^2\,dA}{r_{н0} + y}.$$

Так как нормальная сила равна нулю, то

$$\int_A \frac{y\,dA}{r_{н0} + y} = 0. \tag{4.34}$$

Выражение для M преобразуем, разбивая входящий в него интеграл на два слагаемых:

$$M = Er_{н0}\left(\frac{1}{r_н} - \frac{1}{r_{н0}}\right)\left[\int_A y\,dA - r_{н0}\int_A \frac{y\,dA}{r_{н0} + y}\right].$$

Первое слагаемое представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной линии и равно произведению Ae, где e — расстояние от нейтральной линии до центра тяжести,

$$e = r_0 - r_{н0}. \tag{4.35}$$

Второе слагаемое, согласно выражению (4.34), равно нулю. Таким образом,

$$M = Er_{н0}\left(\frac{1}{r_н} - \frac{1}{r_{н0}}\right)Ae. \tag{4.36}$$

Исключив при помощи полученного соотношения разность $1/r_н - 1/r_{н0}$ из выражения (4.33), получим следующую расчетную формулу для определения нормальных напряжений:

$$\sigma = \frac{M}{Ae}\frac{y}{r_{н0} + y}. \tag{4.37}$$

Напряжения, как видим, меняются по высоте сечения нелинейно. Эпюра напряжений представляет собой гиперболу, одна из асимптот которой совпадает с осью кривизны (рис. 4.64). В зависимости от формы сечения наибольшие напряжения могут иметь место как в верхней, так и в нижней точке сечения.

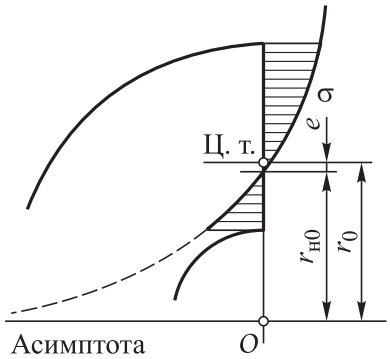


Рис. 4.64

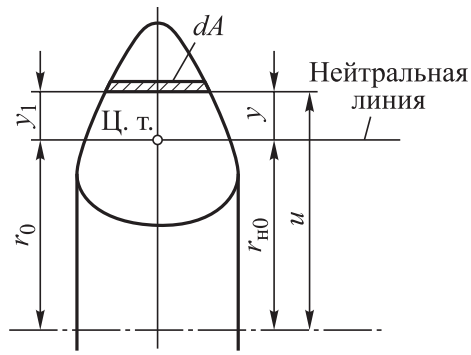


Рис. 4.65

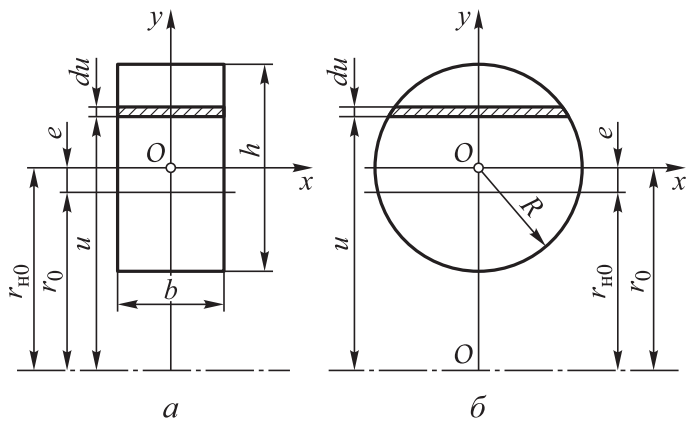
Для того чтобы пользоваться формулой (4.37), необходимо определить величину $r_{н0}$. Для этого рассмотрим интеграл (4.34). Введем новую переменную $u = r_{н0} + y$ (рис. 4.65). Тогда выражение (4.34) примет вид

$$\int_A \frac{u - r_{н0}}{u} dA = 0,$$

откуда

$$r_{н0} = \frac{A}{\int\limits_A \frac{dA}{u}}. \tag{4.38}$$

Интеграл, стоящий в знаменателе, представляет собой геометрическую характеристику сечения, такую же, как, например,



а *б*

Рис. 4.66

статический момент или момент инерции. В частности, для прямоугольника (рис. 4.66, *а*) имеем

$$\int\limits_A \frac{dA}{u} = b \int\limits_{r_0 - h/2}^{r_0 + h/2} \frac{du}{u} = b \ln \frac{r_0 + h/2}{r_0 - h/2},$$

и, согласно формуле (4.38),

$$r_{н0} = \frac{h}{\ln \frac{r_0 + h/2}{r_0 - h/2}}.$$

Смещение нейтральной линии относительно центра тяжести

$$e = r_0 - \frac{h}{\ln \frac{r_0 + h/2}{r_0 - h/2}}. \tag{4.39}$$

Аналогичным образом для бруса круглого поперечного сечения (рис. 4.66, *б*) после выполнения операции интегрирования получим

$$e = \frac{1}{2}\left(r_0 - \sqrt{r_0^2 - R^2}\right). \tag{4.40}$$

Вычисление e как разности между r_0 и $r_{н0}$ содержит в себе значительные неудобства, особенно в случае сравнительно небольшой кривизны бруса. Дело в том, что разность больших значений радиусов r_0 и $r_{н0}$ очень мала, но должна быть вычислена точно, поскольку от этого непосредственно зависит результат расчета напряжения σ по формуле (4.37). Поэтому величину $r_{н0}$ приходится подсчитывать с большим числом знаков.

Для подобных случаев выработан прием разложения вычитаемых величин в ряды с последующим исключением первых взаимно уничтожающихся членов. Например, в рассмотренном случае прямоугольного сечения это выглядит следующим образом:

$$\ln\frac{r_0 + h/2}{r_0 - h/2} = \ln\frac{1 + h/2r_0}{1 - h/2r_0} = 2\left[\frac{h}{2r_0} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2r_0}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2r_0}\right)^5 + \ldots\right],$$

откуда

$$\frac{h}{\ln\dfrac{r_0 + h/2}{r_0 - h/2}} = r_0\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2r_0}\right)^2 - \frac{4}{45}\left(\frac{h}{2r_0}\right)^4 - \frac{44}{945}\left(\frac{h}{2r_0}\right)^6 - \ldots\right].$$

Возвращаясь к выражению (4.39), видим, что величины r_0 взаимно уничтожаются, а смещение e можно определить без потери точности при помощи следующего ряда:

$$e = \frac{1}{3}r_0\left(\frac{h}{2r_0}\right)^2\left[1 + \frac{4}{15}\left(\frac{h}{2r_0}\right)^2 + \frac{44}{315}\left(\frac{h}{2r_0}\right)^4 + \ldots\right].$$

При $h/r_0 < 1/2$ можно довольствоваться с достаточной точностью одним членом ряда:

$$e \approx \frac{1}{3}r_0\left(\frac{h}{2r_0}\right)^2.$$

Аналогично для выражения (4.40) имеем

$$\sqrt{r_0^2 - R^2} = r_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\left(\frac{R}{r_0}\right)^4 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{6}\left(\frac{R}{r_0}\right)^6 - \ldots\right];$$

$$e = \frac{R^2}{4r_0}\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{R}{r_0}\right)^4 + \ldots\right].$$

Все сказанное может быть распространено и на случай сечения произвольной формы. Выражение (4.34) перепишем в виде

$$\int_A \frac{y\,dA}{r_{н0} + y} = \int_A \frac{y - e + e}{r_{н0} + e + y - e}dA = \int_A \frac{y_1 + e}{r_0 + y_1}dA = 0,$$

где $y_1 = y - e$ — расстояние от площадки dA до центральной оси. Отсюда для e получаем следующее выражение:

$$e = -\frac{\int_A \frac{y_1}{r_0 + y_1}dA}{\int_A \frac{1}{r_0 + y_1}dA}.$$

Воспользуемся разложением $\left(1 + \frac{y_1}{r_0}\right)^{-1} = 1 - \frac{y_1}{r_0} + \left(\frac{y_1}{r_0}\right)^2 - \ldots$ и ограничимся двумя первыми членами ряда. Тогда получим

$$e \approx -\frac{\int_A y_1\left(1 - \frac{y_1}{r_0}\right)dA}{\int_A \left(1 - \frac{y_1}{r_0}\right)dA}.$$

Так как y_1 отсчитывается от центральной оси, то $\int_A y_1 dA = 0$. Тогда, очевидно,

$$e \approx \frac{J_x}{r_0 A}, \tag{4.41}$$

где J_x, как и при изгибе прямого бруса, — момент инерции сечения относительно центральной оси.

Пример 4.17. Найти напряжение в точке A крюка трапецеидального сечения (рис. 4.67) со следующими размерами: $b_1 = 4$ см, $b_2 = 1$ см, $u_1 = 3$ см, $u_2 = 10$ см, $h = 7$ см. Сила $F = 20$ кН.

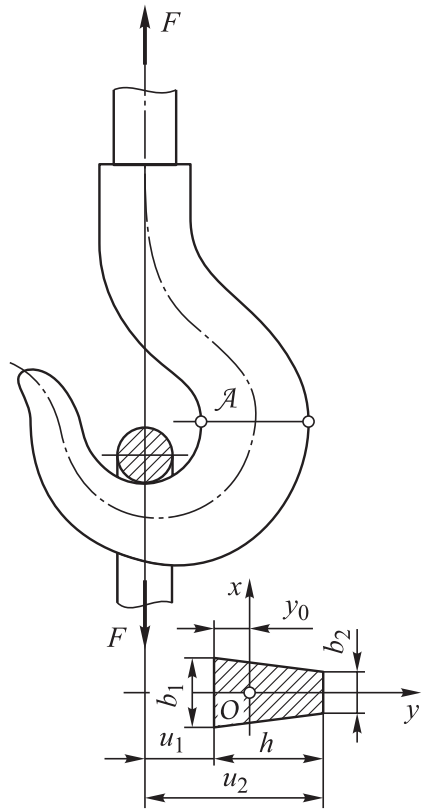


Рис. 4.67

Сначала определяем положение центра тяжести сечения. Статический момент сечения относительно большего основания

$$S = \frac{b_2 h^2}{2} + \frac{b_1 - b_2}{6} h^2.$$

Площадь сечения

$$A = \frac{b_1 + b_2}{2} h = 17{,}5\ \text{см}^2.$$

Разделив статический момент на площадь сечения, находим расстояние y_0 от основания трапеции до центра тяжести:

$$y_0 = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \frac{h}{3} = 2{,}8\ \text{см}.$$

Радиус $r_0 = y_0 + u_1 = 5{,}8$ см. Момент инерции сечения относительно основания

$$J = \frac{b_2 h^3}{3} + \frac{(b_1 - b_2) h^3}{12} = 200{,}1\ \text{см}^4.$$

Переходя к центральной оси x, получаем $J_x = 62{,}9$ см^4. Довольствуясь приближенным определением e, по формуле (4.41) находим $e = 0{,}620$ см.

Напряжение изгиба в точке A определяем по формуле (4.37), которая принимает для данного случая вид

$$\sigma = \frac{F r_0}{A e} \frac{y_0 - e}{u_1} = \frac{20\,000 \cdot 5{,}8}{17{,}5 \cdot 0{,}620} \cdot \frac{2{,}18}{3} = 77{,}7\ \text{МПа}.$$

К этому напряжению следует прибавить напряжение растяжения

$$\sigma_{\text{раст}} = F/A = 11{,}4\ \text{МПа}.$$

Таким образом,

$$\sigma_A = 89{,}1\ \text{МПа}.$$

Вычисляя значение e более точно, находим

$$e = r_0 - \frac{A}{\left(b_2 + u_2 \dfrac{b_1 - b_2}{u_2 - u_1}\right) \ln \dfrac{u_2}{u_1} - (b_1 - b_2)} = 0{,}598\ \text{см}, \qquad \sigma_A = 92\ \text{МПа}.$$

Глава 5

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

5.1. Потенциальная энергия стержня в общем случае нагружения

Выше определялись перемещения прямого стержня при растяжении, кручении и изгибе. Рассмотрим теперь общий случай нагружения, когда в поперечных сечениях могут возникать нормальные и поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты одновременно. Кроме того, расширим круг рассматриваемых вопросов, полагая, что стержень может быть не только прямым, но и криволинейным или состоять из ряда участков, образующих плоскую или пространственную систему.

Решение поставленной задачи необходимо не только для нахождения самих перемещений и оценки жесткости конструкции. На основе определения перемещений созданы общие методы определения внутренних силовых факторов в статически неопределимых системах, о чем будет сказано в следующей главе.

Наиболее просто перемещения можно найти при помощи энергетических соотношений на основе общего выражения потенциальной энергии нагруженного стержня.

Определению потенциальной энергии предшествует анализ внутренних силовых факторов, возникающих в стержне. Этот анализ проводят, как известно, при помощи метода сечений с построением эпюр изгибающих и крутящих моментов, а в тех случаях, когда это необходимо, — также эпюр нормальных и поперечных сил.

Во всех случаях эпюры внутренних силовых факторов строят на осевой линии стержня. Силовой фактор откладывают по нормали к оси, как это показано, например, на рис. 5.1. Для пространственного стержня осевую линию вычерчивают обычно в перспективе, а эпюры изгибающих моментов изображают в соответствующих

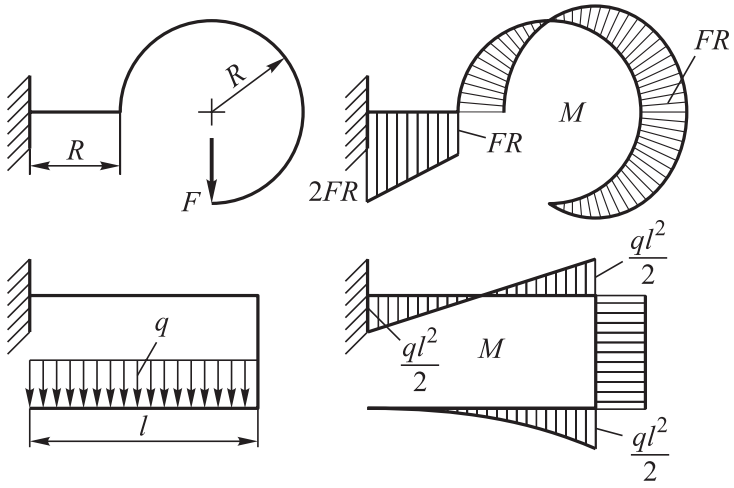


Рис. 5.1

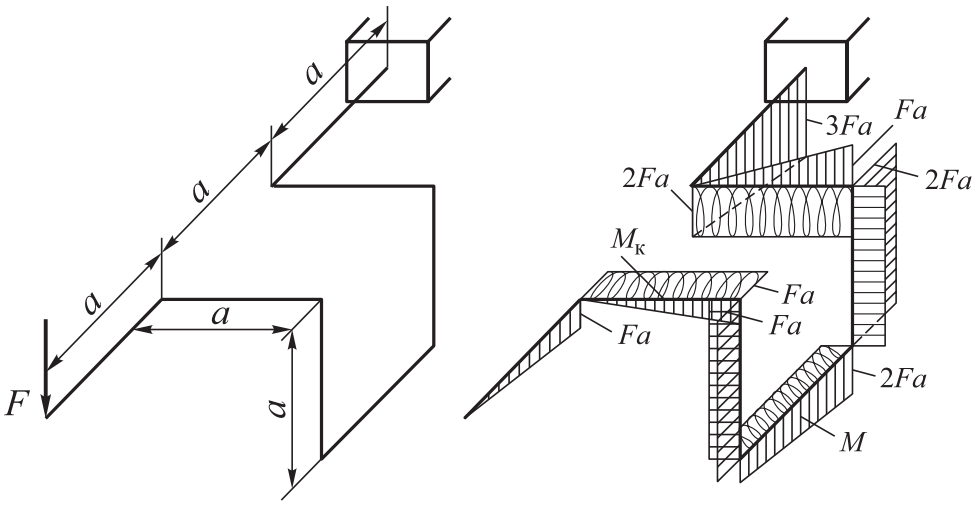


Рис. 5.2

плоскостях изгиба (рис. 5.2). Эпюру крутящих моментов не связывают с какой-либо определенной плоскостью и в отличие от эпюры изгибающих моментов штрихуют винтовой линией.

Для определения потенциальной энергии выделим из стержня элементарный участок длиной *dz* (рис. 5.3). Стержень может быть не только прямым, но и иметь малую начальную кривизну. В каждом из поперечных сечений в общем случае нагружения возникает шесть силовых факторов: три момента и три силы. По отношению к выделенному элементарному участку рассмотрим эти силовые факторы как внешние и определим работу, которая

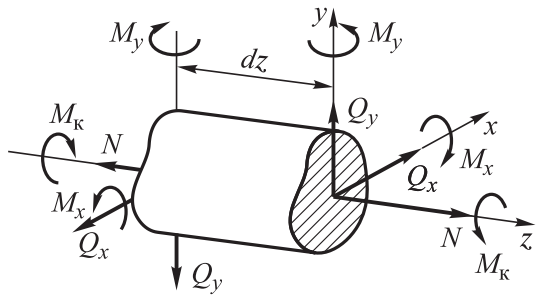


Рис. 5.3

совершается ими при деформировании элемента. Эта работа переходит в потенциальную энергию, накопленную в элементарном участке стержня.

Левое сечение элемента (см. рис. 5.3) условно будем рассматривать как неподвижное, с тем чтобы работа всех силовых факторов, приложенных к левому торцу, была равна нулю. Точка приведения сил в правом сечении вследствие деформации элемента получает некоторые малые перемещения, на которых совершается искомая работа. Очень важно, что каждому из шести силовых факторов соответствуют такие перемещения, на которых ни один из остальных пяти работы не совершает. Так, под действием момента $M_к$ возникает угол поворота сечения относительно оси z. На этом угловом перемещении работа совершается только этим моментом $M_к$. Линейное перемещение вдоль оси y возникает вследствие действия силы Q_y, и только эта сила совершает работу на этом перемещении. Следовательно, потенциальную энергию элемента можно рассматривать как сумму *независимых* работ каждого из шести силовых факторов, т. е., иначе говоря, как сумму энергий кручения, изгиба, растяжения и сдвига:

$$dU = dU(M_к) + dU(M_x) + dU(M_y) + dU(N) + dU(Q_x) + dU(Q_y). \quad (5.1)$$

Естественно, такое разделение работ возможно лишь при определенном выборе осей. В частности, точка приведения сил должна совпадать с центром тяжести сечения. Иначе нормальная сила N вызовет поворот сечения, и изгибающие моменты совершат работу на угловом перемещении, вызванном этой силой. Оси x и y должны быть главными. В противном случае момент M_x вызовет поворот сечения относительно оси y, и будет произведена взаимная работа на угловых перемещениях, вызванных двумя изгибающими моментами.

Выражения для первых четырех слагаемых нам уже известны:

$$dU(M_к)=\frac{M_к^2\,dz}{2GJ_к};\quad dU(M_x)=\frac{M_x^2\,dz}{2EJ_x};$$

$$dU(M_y)=\frac{M_y^2\,dz}{2EJ_y};\quad dU(N)=\frac{N^2\,dz}{2EA}.$$

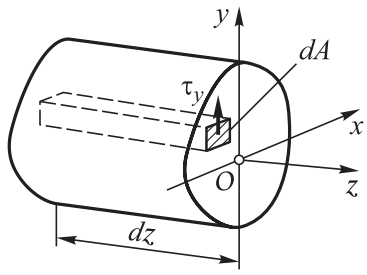


Рис. 5.4

Остается найти энергию сдвига $dU(Q_x)$ и $dU(Q_y)$.

Для определения $dU(Q_y)$ рассмотрим элементарную призму с площадью основания dA и длиной dz (рис. 5.4). Энергия, заключенная в этом объеме, равна $U_0\,dA\,dz$, где U_0 — удельная потенциальная энергия при сдвиге. Согласно выражению (2.3), $U_0=\tau_y^2/2G$. Таким образом, $U_0\,dA\,dz=\dfrac{\tau_y^2}{2G}dA\,dz$. Интегрируя по площади A, находим $dU(Q_y)=\dfrac{dz}{2G}\int\limits_A\tau_y^2\,dA$. Но, согласно формуле Журавского (см. 4.12), $\tau_y=\dfrac{Q_yS_x^*}{J_xb}$. Следовательно,

$$dU(Q_y)=\frac{Q_y^2\,dz}{2GJ_x^2}\int\limits_A\frac{S_x^{*2}\,dA}{b^2},\quad \text{или}\quad dU(Q_y)=\frac{Q_y^2\,dz}{2GA}\,\frac{A}{J_x^2}\int\limits_A\frac{S_x^{*2}dA}{b^2}.$$

Обозначим

$$\frac{A}{J_x^2}\int\limits_A\frac{S_x^{*2}dA}{b^2}=k_y. \tag{5.2}$$

Тогда

$$dU(Q_y)=k_y\,\frac{Q_y^2\,dz}{2GA}.$$

Аналогично получим

$$dU(Q_x)=k_x\,\frac{Q_x^2\,dz}{2GA}.$$

Коэффициенты k_x и k_y представляют собой безразмерные величины, зависящие от геометрической формы сечения. Например,

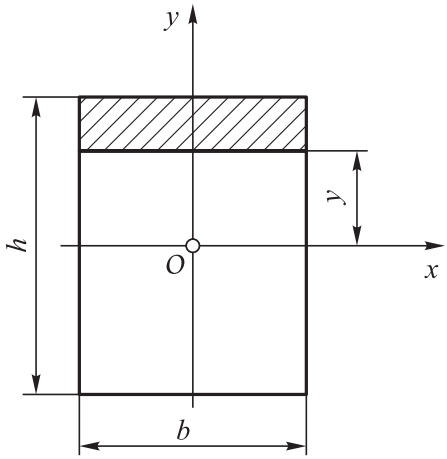


Рис. 5.5

для прямоугольного сечения с размерами b и h (рис. 5.5) статический момент заштрихованной площади относительно оси x $S_x^* = \frac{1}{2}b\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$. Далее, $dA = bdy$, $A = bh$, $J_x = bh^3/12$. Производя преобразования по формуле (5.2), получаем $k = k_x = k_y = 6/5$. Для сплошного круглого сечения $k = 10/9$. Для тонкостенного кругового профиля $k = 2$ и т. д.

Выражение (5.1) теперь принимает вид

$$dU = \frac{M_к^2\,dz}{2GJ_к} + \frac{M_x^2\,dz}{2EJ_x} + \frac{M_y^2\,dz}{2EJ_y} + \frac{N^2\,dz}{EA} + \frac{k_x}{2}\frac{Q_x^2\,dz}{GA} + \frac{k_y}{2}\frac{Q_y^2\,dz}{GA}. \quad 2$$

Чтобы получить потенциальную энергию всего стержня, это выражение следует проинтегрировать по длине:

$$U = \int_l \frac{M_к^2\,dz}{2GJ_к} + \int_l \frac{M_x^2\,dz}{2EJ_x} + \int_l \frac{M_y^2\,dz}{2EJ_y} + \int_l \frac{N^2\,dz}{2EA} + \int_l \frac{k_x Q_x^2\,dz}{2GA} + \int_l \frac{k_y Q_y^2\,dz}{2GA}. \quad (5.3)$$

Если конструкция сложная и состоит из нескольких элементов, имеющих форму стержня, то после интегрирования в пределах каждого стержня должно быть произведено суммирование энергии по числу составляющих элементов.

В выражении (5.3) не всегда все слагаемые являются равноценными. Для подавляющего большинства встречающихся на практике систем, где составляющие элементы работают на изгиб или кручение, три последних слагаемых в выражении (5.3) оказываются существенно меньшими трех первых. Иначе говоря,

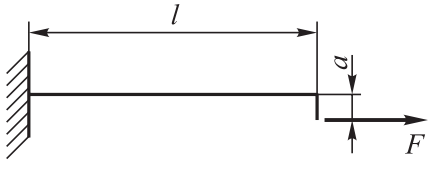


Рис. 5.6

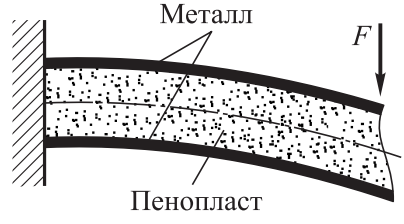


Рис. 5.7

энергия растяжения и сдвига, как правило, существенно меньше энергии изгиба и кручения.

Вместе с тем возможны такие случаи, в которых рассматриваемые слагаемые оказываются величинами одного порядка. Например, для нецентрально-растянутого стержня, показанного на рис. 5.6, энергия растяжения и энергия изгиба являются величинами одного порядка. При нагружении пластины, склеенной из двух металлических листов с пенопластовым заполнителем (рис. 5.7), энергия сдвига в заполнителе может оказаться соизмеримой с энергией изгиба.

5.2. Теорема Кастилиано

В основу определения перемещений стержня может быть положена теорема Кастилиано: *частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы*.

Высказанная формулировка требует пояснения. Условимся под перемещением в заданном направлении понимать проекцию полного перемещения на заданное направление. Поэтому перемещение точки приложения силы по направлению силы надо понимать как проекцию на направление силы полного перемещения этой точки.

Рассмотрим упругое тело, нагруженное произвольной системой сил и закрепленное тем или иным способом, но так, чтобы были исключены его смещения как жесткого целого (рис. 5.8). Пусть потенциальная энергия деформации, накопленная в объеме тела в результате работы внешних сил, равна U и выражена через силы. Одной из сил, например силе F_n, дадим приращение dF_n. Тогда потенциальная энергия U получит приращение $\dfrac{\partial U}{\partial F_n}dF_n$ и примет вид

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_n}dF_n. \qquad (5.4)$$

Изменим теперь порядок приложения сил. Приложим сначала к упругому телу силу dF_n. В точке приложения этой

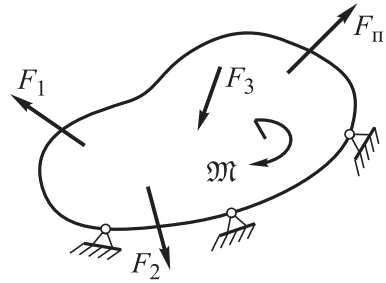


Рис. 5.8

силы возникнет соответственно малое перемещение, проекция которого на направление силы dF_n равна $d\delta_n$. Тогда работа силы dF_n оказывается равной $dF_n d\delta_n/2$. Теперь приложим всю систему внешних сил. При отсутствии силы dF_n потенциальная энергия системы снова приняла бы значение U. Но теперь эта энергия изменится на величину дополнительной работы $dF_n\delta_n$, которую совершит сила dF_n на перемещении δ_n, вызванном всей системой внешних сил. Величина δ_n опять представляет собой проекцию полного перемещения на направление силы F_n. Перед произведением $dF_n\delta_n$ множитель 1/2 отсутствует, поскольку на пути δ_n сила dF_n остается неизменной.

В итоге при обратной последовательности приложения сил выражение для потенциальной энергии получаем в виде

$$U + dF_n\delta_n + \frac{1}{2}dF_n d\delta_n. \tag{5.5}$$

Приравниваем это выражение выражению (5.4) и, отбрасывая произведение $dF_n d\delta_n/2$ как величину высшего порядка малости, находим

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial F_n}. \tag{5.6}$$

Следовательно, дифференцируя потенциальную энергию по одной из внешних сил (при прочих неизменных силах), находим перемещение точки приложения этой силы по направлению силы.

Если еще раз внимательно рассмотреть вывод, то легко установить, что в выражении (5.6) силу F_n можно трактовать как обобщенную, т. е. как некоторый силовой фактор. Тогда δ_n следует рассматривать как обобщенное перемещение, т. е. как такой геометрический параметр, на котором обобщенная сила F_n совершает работу. Например, если под F_n понимать внешний момент $\mathfrak{M}$ (см. рис. 5.8), то δ_n представляет собой угловое перемещение в точке приложения момента по направлению момента. Если тело нагружено силами гидростатического давления, то, дифференцируя потенциальную энергию по давлению, получаем изменение объема тела.

При доказательстве теоремы Кастилиано мы не накладывали ограничений ни на форму тела, ни на систему внешних сил. Мало того, мы не ставили даже вопрос о том, подчиняется или нет материал закону Гука. Однако в скрытой форме эти ограничения все же присутствуют.

Если зависимость между силами и перемещениями нелинейна, то работа, совершенная системой внешних сил, зависит от того, приложена эта система до или после силы dF_n. Иначе говоря, слагаемые U в выражениях (5.4) и (5.5) различны, и теорема Кастилиано становится несправедливой.

В подавляющем большинстве задач, с которыми приходится сталкиваться на практике, зависимость между силами и перемещениями является линейной, и к решению таких задач теорема Кастилиано полностью применима. Исключение составляют системы, к которым не может быть применен принцип неизменности начальных размеров и принцип независимости действия сил. Примеры таких систем были приведены в В6. При определении перемещений в таких системах пользоваться теоремой Кастилиано в том виде, в каком это делалось здесь, недопустимо.

В случае нелинейной зависимости между силами и перемещениями используют более общие энергетические соотношения, выведенные на основе принципа возможных перемещений. Более общую формулировку получает и теорема Кастилиано, которая в этом случае трактуется как теорема о минимуме так называемой дополнительной работы*.

Рассмотрим простейшие примеры определения перемещений при помощи теоремы Кастилиано.

Пример 5.1. Определить при помощи теоремы Кастилиано угол поворота правого торца стержня (рис. 5.9), нагруженного моментом $\mathfrak{M}$.

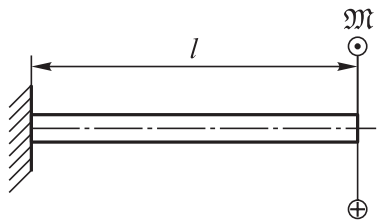


Рис. 5.9

Внутренняя потенциальная энергия стержня при кручении, согласно выражению (5.3), равна $U = \int_0^l \frac{M_к^2\, dz}{2GJ_к}$.

Так как $M_к = \mathfrak{M}$, а жесткость предполагается неизменной, то $U = \frac{\mathfrak{M}^2 l}{2GJ_к}$. Дифференцируя по $\mathfrak{M}$, находим $\varphi = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M} l}{GJ_к}$, что совпадает с известным выражением для угла закручивания.

Пример 5.2. Определить прогиб консоли (рис. 5.10), нагруженной на конце силой F.

* Подробнее см. Ю.Н. Работнов «Сопротивление материалов».

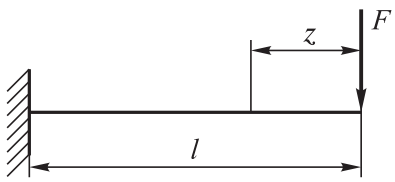


Рис. 5.10

Потенциальная энергия стержня при изгибе $U = \int_0^l \frac{M_x^2\,dz}{2EJ_x}$. На расстоянии z от конца стержня $M_x = -Fz$. При постоянной жесткости EJ_x получаем $U = \frac{F^2 l^3}{6EJ_x}$. Перемещение δ точки приложения силы F равно $\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl^3}{3EJ_x}$. Это значение прогиба уже было получено ранее методом интегрирования упругой линии стержня.

Пример 5.3. Определить вертикальное перемещение точки A для конструкции, показанной на рис. 5.11. Жесткости стержней одинаковы и равны EA.

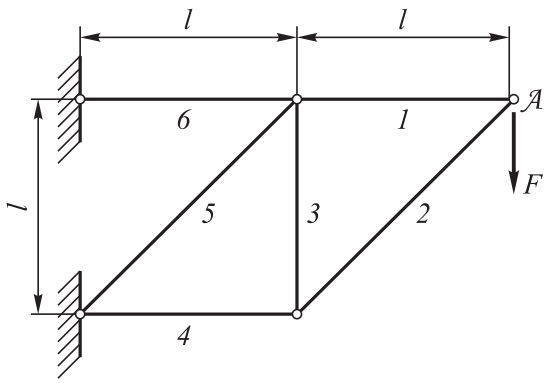


Рис. 5.11

Если не пользоваться теоремой Кастилиано, то такую задачу решить было бы довольно трудно. Нужно было бы найти удлинения всех стержней, а затем путем геометрических преобразований установить положение узлов деформированной фермы. Такой способ решения привел бы, несомненно, к громоздким выкладкам. При помощи теоремы Кастилиано эта задача решается несравненно проще.

Номер стержня	N_i	l_i	U_i	Номер стержня	N_i	l_i	U_i
1	F	l	$\frac{F^2 l}{2EA}$	4	$-F$	l	$\frac{F^2 l}{2EA}$
2	$-F\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$\frac{2F^2 l\sqrt{2}}{2EA}$	5	$-F\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$\frac{2F^2 l\sqrt{2}}{2EA}$
3	F	l	$\frac{F^2 l}{2EA}$	6	$2F$	l	$\frac{4F^2 l}{2EA}$

Сначала методом вырезания узлов находим усилия в каждом стержне и полученные значения N сводим в таблицу.

Далее определяем значение потенциальной энергии для каждого стержня $U_i = \dfrac{N_i^2 l_i}{2EA}$ и заполняем последний столбец этой таблицы. Суммируя, находим

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}\left(7 + 4\sqrt{2}\right).$$

Искомое перемещение точки $\mathcal{A}$ равно

$$\delta_{\mathcal{A}} = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl}{EA}\left(7 + 4\sqrt{2}\right).$$

5.3. Интеграл Мора

Определение перемещений при помощи теоремы Кастилиано, как можно было убедиться на примерах, обладает тем очевидным недостатком, что дает возможность найти перемещения только точек приложения внешних сил и только в направлении этих сил. На практике же возникает необходимость определять перемещения любых точек системы в любом направлении.

Выход из указанного затруднения оказывается довольно простым. Если необходимо найти перемещение точки, к которой приложены внешние силы, мы сами прикладываем в этой точке внешнюю силу Ф в интересующем нас направлении. Далее, составляем выражение потенциальной энергии системы с учетом силы Ф. Дифференцируя его по Ф, находим перемещение рассматриваемой точки по направлению приложенной силы Ф. Теперь остается вспомнить, что на самом деле силы Ф нет, и положить ее равной нулю. Таким образом можно определить искомое перемещение.

Определим перемещение точки $\mathcal{A}$ в направлении оси x_1 для стержневой системы, показанной на рис. 5.12.

Приложим в точке $\mathcal{A}$ по направлению x_1 силу Ф. Внутренние силовые факторы в каждом поперечном сечении при этом, вообще говоря, изменятся на величины, зависящие от силы Ф. Например, крутящий момент в некотором поперечном сечении будет иметь вид

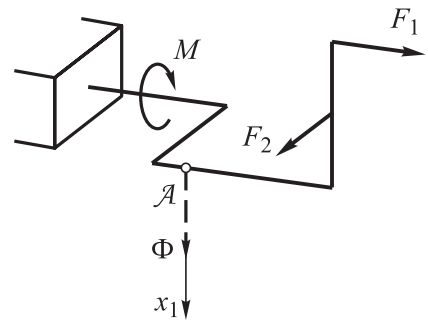


Рис. 5.12

$$M_{\text{к}F} + M_{\text{к}\Phi},$$

где первое слагаемое представляет собой момент, который возникает под действием заданной системы внешних сил, а второе слагаемое — дополнительный момент, который появляется в результате приложения силы Ф. Понятно, что и $M_{\text{к}F}$ и $M_{\text{к}\Phi}$ являются функциями z, т. е. изменяются по длине стержня. Аналогично появляются дополнительные слагаемые и у остальных внутренних силовых факторов: $M_x = M_{xF} + M_{x\Phi}$, $M_y = M_{yF} + M_{y\Phi}$ и т. д.

Совершенно очевидно, что дополнительные силовые факторы $M_{\text{к}\Phi}$, $M_{x\Phi}$, ... пропорциональны Ф. Если силу Ф, например, удвоить, удвоятся соответственно и дополнительные силовые факторы. Следовательно,

$$\begin{gathered} M_{\text{к}} = M_{\text{к}F} + M_{\text{к}1}\Phi; \quad M_x = M_{xF} + M_{x1}\Phi; \quad M_y = M_{yF} + M_{y1}\Phi; \\ N = N_F + N_1\Phi; \quad Q_x = Q_{\text{x}F} + Q_{x1}\Phi; \quad Q_y = Q_{\text{y}F} + Q_{y1}\Phi, \end{gathered} \tag{5.7}$$

где $M_{\text{к}1}$, M_{x1}, ... — некоторые коэффициенты пропорциональности, зависящие от положения рассматриваемого сечения, т. е. переменные по длине стержня. Если исключить систему внешних сил и заменить силу Ф единичной силой, то $M_{\text{к}} = M_{\text{к}1}$, $M_x = M_{x1}$ и т. д. Следовательно, $M_{\text{к}1}$, M_{x1}, M_{y1}, N_1, Q_{x1} и Q_{y1} суть не что иное, как внутренние силовые факторы, возникающие в поперечном сечении под действием единичной силы, приложенной в рассматриваемой точке в заданном направлении.

Вернемся к выражению для потенциальной энергии (5.3) и заменим в нем внутренние силовые факторы их значениями из (5.7). Тогда

$$U = \int_l \frac{(M_{\text{к}F} + M_{\text{к}1}\Phi)^2\,dz}{2GJ_{\text{к}}} + \int_l \frac{(M_{xF} + M_{x1}\Phi)^2\,dz}{2EJ_x} + \int_l \frac{(M_{yF} + M_{y1}\Phi)^2\,dz}{2EJ_y} +$$
$$+ \int_l \frac{(N_F + N_1\Phi)^2\,dz}{2EA} + \int_l \frac{k_x(Q_{xF} + Q_{x1}\Phi)^2\,dz}{2GA} + \int_l \frac{k_y(Q_{yF} + Q_{y1}\Phi)^2\,dz}{2GA}.$$

Дифференцируя это выражение по Ф и полагая после этого Ф = 0, находим перемещение точки $\mathcal{A}$:

$$\delta_{\mathcal{A}} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=0} = \int_l \frac{M_{\text{к}F}\,M_{\text{к}1}\,dz}{GJ_{\text{к}}} + \int_l \frac{M_{xF}\,M_{x1}\,dz}{EJ_x} + \int_l \frac{M_{yF}\,M_{y1}\,dz}{EJ_y} +$$
$$+ \int_l \frac{N_F\,N_1\,dz}{EA} + \int_l \frac{k_x Q_{xF} Q_{x1}\,dz}{GA} + \int_l \frac{k_y Q_{yF} Q_{y1}\,dz}{GA}. \tag{5.8}$$

Полученные интегралы носят название *интегралов Мора*.

Заметим, что интегралы Мора могут быть выведены и без использования теоремы Кастилиано из простых геометрических соображений. Рассмотрим, например, консоль, показанную на рис. 5.13, и определим перемещение точки A по направлению x_1. Будем считать для простоты, что искомое перемещение является следствием только изгиба.

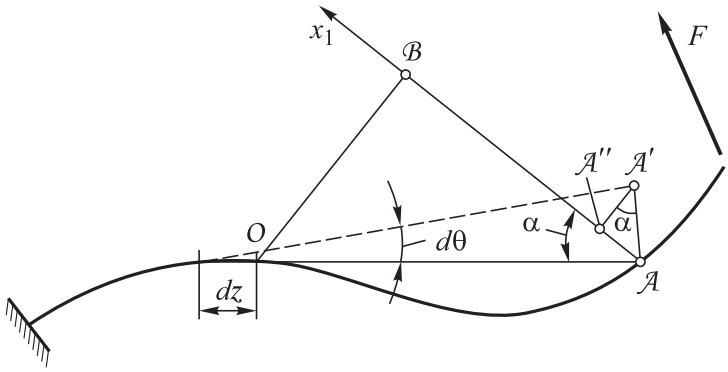


Рис. 5.13

На элементарном участке длиной dz произойдет изменение кривизны, и правое сечение повернется относительно левого на угол

$$d\theta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) dz,$$

где $1/r$ — новая, а $1/r_0$ — старая кривизна.

Вследствие возникновения местного угла поворота правая часть повернется как жесткое целое, и точка A переместится по направлению x_1 на $d\delta_A = AA'' = AA' \sin\alpha = OA \sin\alpha d\theta$. Но $OA \sin\alpha = OB$. Следовательно, $d\delta_A = OB d\theta$. Отрезок OB представляет собой не что иное, как момент относительно точки O единичной силы, приложенной в точке A по направлению x_1. Таким образом, $d\delta_A = M_1 d\theta$, или

$$d\delta_A = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) M_1\, dz,$$

откуда

$$\delta_A = \int_l \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) M_1\, dz.$$

Аналогично можно составить выражения перемещений для кручения, растяжения и сдвига. В общем случае

$$\delta_{\mathcal{A}} = \int_l \theta_F M_{к1} dz + \int_l \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)_{xF} M_{x1} dz + \int_l \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)_{yF} M_{y1} dz +$$

$$+ \int_l \varepsilon_F N_1 dz + \int_l \gamma_{xF} Q_{x1} dz + \int_l \gamma_{yF} Q_{y1} dz. \qquad (5.9)$$

Выражение (5.9) является более универсальным, чем выражение (5.8), поскольку в нем не предполагается линейной зависимости θ, $(1/r - 1/r_0)$, ε и т.д. от внутренних силовых факторов. Оно применимо, в частности, и для случая неупругого изгиба и кручения.

Если материал подчиняется закону Гука, то

$$\theta = \frac{M_к}{GJ_к}; \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{M}{EJ}; \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}; \quad \gamma = \frac{kQ}{GA},$$

и тогда выражение (5.9) переходит в (5.8).

Пример 5.4. Определить горизонтальное перемещение точки $\mathcal{A}$ консоли, показанной на рис. 5.14, *а*. Жесткость всех участков постоянна и равна EJ.

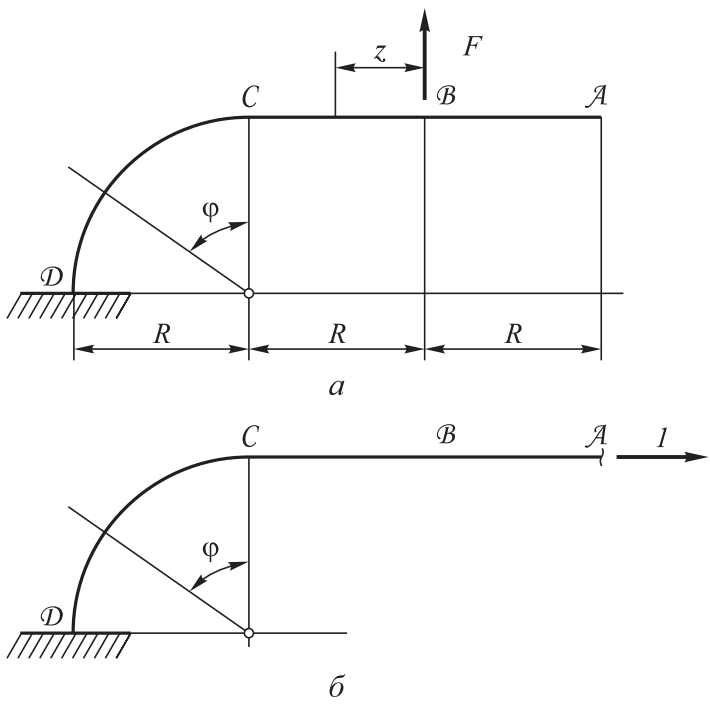


Рис. 5.14

В рассматриваемом стержне основную роль играют изгибные перемещения. Перемещения вследствие растяжения и сдвига так же малы по сравнению с перемещениями изгиба, как и энергия растяжения и сдвига по сравнению с энергией изгиба. Поэтому из шести интегралов Мора (5.8) берем один — для изгиба —

$$\delta_{\mathcal{A}} = \int_l \frac{M_F M_1 \, dz}{EJ}$$

(изгиб во второй плоскости и кручение отсутствуют).

Изгибающий момент силы F (см. рис. 5.14, *а*) на участке $\mathcal{AB}$ равен нулю. На участке $\mathcal{BC}$ $M_F = Fz$, а на участке $\mathcal{CD}$ $M_F = FR(1 + \sin\varphi)$.

Момент от единичной силы (рис. 5.14, *б*) на участке $\mathcal{AC}$ равен нулю, а на участке $\mathcal{CD}$ $M_1 = -1R(1 - \cos\varphi)$. Знак минус поставлен в связи с тем, что единичный изгибающий момент направлен в сторону, противоположную M_F.

Произведение $M_F M_1$ на участке $\mathcal{AC}$ оказывается равным нулю. Поэтому интегрирование ведем только на участке $\mathcal{CD}$. Заменяя dz на $R\,d\varphi$, получаем

$$\delta_{\mathcal{A}} = -\frac{FR^3}{EJ} \int_0^{\pi/2} (1 + \sin\varphi)(1 - \cos\varphi) \, d\varphi,$$

откуда

$$\delta_{\mathcal{A}} = -\frac{\pi - 1}{2} \frac{FR^3}{EJ}.$$

Знак минус указывает на то, что горизонтальное перемещение точки $\mathcal{A}$ направлено не по единичной силе, а против нее, т. е. влево (см. рис. 5.14, *б*).

Пример 5.5. Определить, насколько раскроется зазор в разрезанном кольце (рис. 5.15) под действием сил F. Жесткость кольца равна EJ.

В точке $\mathcal{B}$ (см. рис. 5.15) изгибающий момент M_F от заданных сил F равен $FR(1 - \cos\varphi)$, где φ — центральный угол. Полагая левый конец кольца закрепленным, прикладываем к правому единичную силу, с тем чтобы найти перемещение одного конца относительно другого (рис. 5.16, *а*). Реакция опоры будет равна единице, поэтому оба рисунка (рис. 5.16, *а* и *б*) равноценны. Из

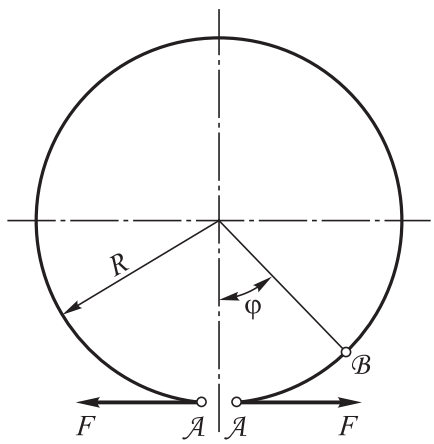


Рис. 5.15

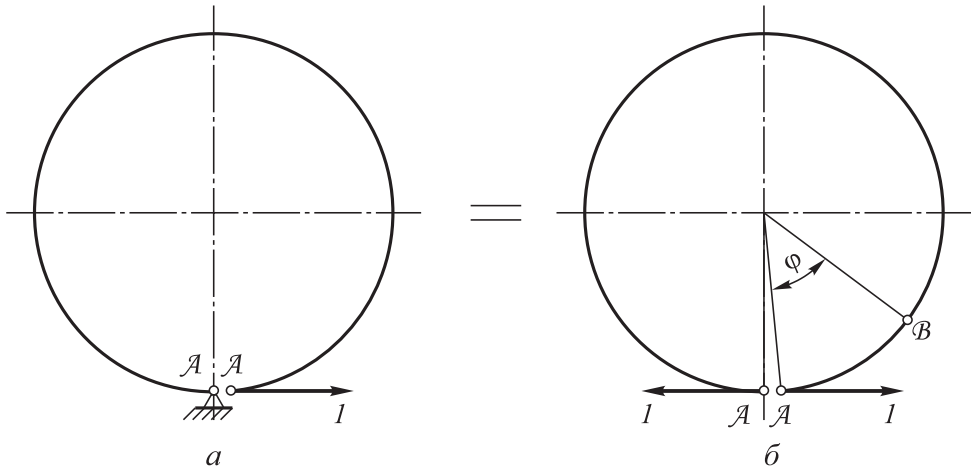


Рис. 5.16

сказанного следует, что в том случае, когда нужно найти *взаимное* смещение двух точек, необходимо прикладывать в этих точках равные, противоположно направленные единичные силы, действующие по прямой, соединяющей эти точки. Момент от единичной силы $M_1 = R(1 - \cos\varphi)$. Искомое взаимное смещение

$$\delta_{\mathcal{A}} = \int_l \frac{M_F M_1 dz}{EJ} = \frac{FR^3}{EJ}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi, \quad \text{или} \quad \delta_{\mathcal{A}} = 3\pi\frac{FR^3}{EJ}.$$

Пример 5.6. Определить взаимное смещение точек $\mathcal{A}$ в таком же кольце (см. предыдущий пример), но нагруженном силами, действующими перпендикулярно плоскости кольца (рис. 5.17, *а*).

Рассмотрим кольцо в плане (рис. 5.17, *б*). В сечении $\mathcal{B}$ возникает не только изгибающий, но и крутящий момент. Первый равен моменту силы F относительно оси y, а второй — моменту той же силы

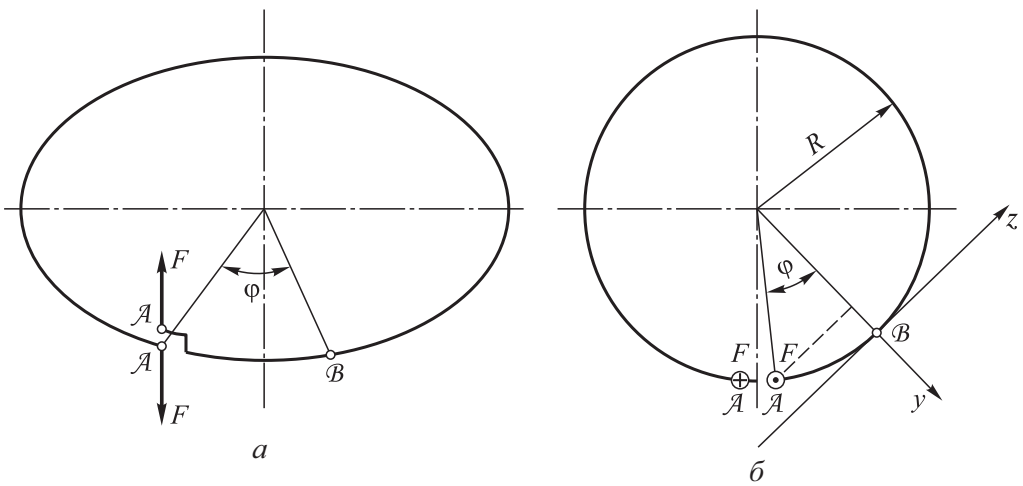


Рис. 5.17

Таблица 5.1. **Интегралы от простейших тригонометрических функций**

$f(\varphi)$	$\int_0^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi$	$\int_0^{\pi/2} f(\varphi)\,d\varphi$	$\int_0^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi$	$\int_0^{3\pi/2} f(\varphi)\,d\varphi$	$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$
$\sin\varphi$	$1-\cos\varphi$	1	2	1	0
$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	1	0	-1	0
$\sin^2\varphi$	$\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\cos^2\varphi$	$\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\sin\varphi\cos\varphi$	$\frac{1}{2}\sin^2\varphi$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
$1-\cos\varphi$	$\varphi-\sin\varphi$	$\frac{\pi}{2}-1$	π	$\frac{3\pi}{2}+1$	2π
$(1-\cos\varphi)^2$	$\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi$	$\frac{3\pi}{4}-2$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}+2$	3π
$(1-\cos\varphi)\sin\varphi$	$1-\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin^2\varphi$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0
$(1-\cos\varphi)\cos\varphi$	$\sin\varphi-\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi$	$1-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-1-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$

относительно оси z (см. рис. 5.17, *б*). Очевидно, $M_y = FR\sin\varphi$, $M_к = FR(1 - \cos\varphi)$. Прикладываем в точках $\mathcal{A}$ единичные силы взамен сил F. Тогда $M_{y1} = R\sin\varphi$, $M_{к1} = R(1 - \cos\varphi)$. Обращаясь к выражению (5.8), оставляем в нем два первых интеграла и получаем

$$\delta_{\mathcal{A}} = \frac{FR^3}{GJ_к}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi + \frac{FR^3}{EJ}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi,$$

или

$$\delta_{\mathcal{A}} = \pi FR^3\left(\frac{3}{GJ_к}+\frac{1}{EJ}\right).$$

Здесь искомое перемещение определяется жесткостью кольца как на кручение, так и на изгиб.

Из рассмотренных примеров видно, что при определении перемещений для стержня, изогнутого по дуге окружности, приходится брать интегралы от простейших тригонометрических функций в различных комбинациях. В табл. 5.1 даны наиболее часто встречающиеся при решении подобных задач интегралы.

5.4. Способ Верещагина

Основным недостатком определения перемещений при помощи интеграла Мора является необходимость составления аналитического выражения подынтегральных функций. Это особенно неудобно при определении перемещений в стержне, имеющем большое количество участков. Однако, если он состоит из прямых участков с постоянной в пределах каждого участка жесткостью, операцию интегрирования можно упростить. Это упрощение основано на том, что эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках оказываются линейными.

Положим, на участке длиной l нужно взять интеграл от произведения двух функций $f_1(z) \cdot f_2(z)$:

$$J = \int_0^l f_1(z)\cdot f_2(z)\,dz, \qquad (5.10)$$

при условии, что по крайней мере одна из этих функций — линейная. Пусть $f_2(z) = b + kz$. Тогда выражение (5.10) примет вид

$$J = b\int_0^l f_1(z)\,dz + k\int_0^l z f_1(z)\,dz.$$

Первый из написанных интегралов представляет собой площадь, ограниченную кривой $f_1(z)$ (рис. 5.18), или, короче говоря, площадь эпюры $f_1(z)$:

$$\int_0^l f_1(z)dz = \Omega_1 .$$

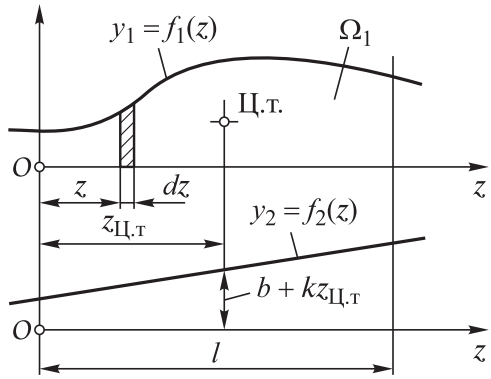


Рис. 5.18

Второй интеграл характеризует статический момент этой площади относительно оси ординат, т. е.

$$\int_0^l z f_1(z)dz = \Omega_1 z_{Ц.т} ,$$

где $z_{Ц.т}$ — координата центра тяжести первой эпюры. Теперь получаем

$$J = \Omega_1(b + kz_{Ц.т}).$$

Но $b + kz_{Ц.т} = f_2(z_{Ц.т})$. Следовательно,

$$J = \Omega_1 f_2(z_{Ц.т}).$$

Таким образом, по способу Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади первой эпюры на ординату второй (линейной) эпюры под центром тяжести первой.

Если обе функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — линейные, операция перемножения обладает свойством коммутативности. В этом случае безразлично, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или площадь второй эпюры на ординату первой.

В каждый из интегралов Мора (5.8) входит произведение функций $M_{xF}M_{x1}$, $M_{кF}M_{к1}$ и т. д. Способ Верещагина применим к любому из шести интегралов, и перемножение эпюр проводится одинаково, независимо от того, построены эти эпюры для изгибающих и крутящих моментов и нормальных и поперечных сил. Разница заключается лишь в том, что результат перемножения делится не на жесткость EJ, как при изгибе, а на жесткость $EJ_к$, если речь идет о кручении, или на EA или GA — при растяжении и сдвиге.

На первый взгляд может показаться, что способ Верещагина не дает существенных упрощений. Для его применения необходимо вычислять площадь эпюры моментов и положение ее центра тяжести, что при сложных эпюрах все равно потребует интегрирования, как и в методе Мора. Однако встречающиеся на практике эпюры

изгибающих моментов могут быть, как правило, разбиты на простейшие фигуры: прямоугольник, треугольник и параболический треугольник (рис. 5.19), для которых площадь Ω и положение цен-

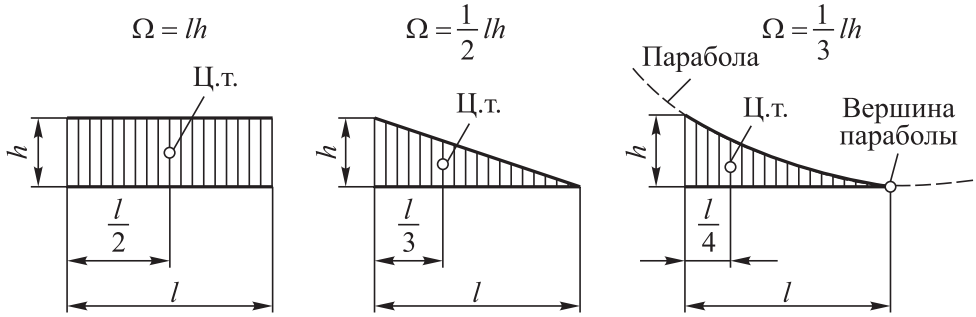


Рис. 5.19

тра тяжести известны. При кручении, растяжении и сдвиге эпюры оказываются еще более простыми: они, как правило, линейные и состоят из прямоугольников и треугольников в различных комбинациях.

Пример 5.7. При помощи правила Верещагина определить перемещение точки A для стержня, показанного на рис. 5.20, *а*.

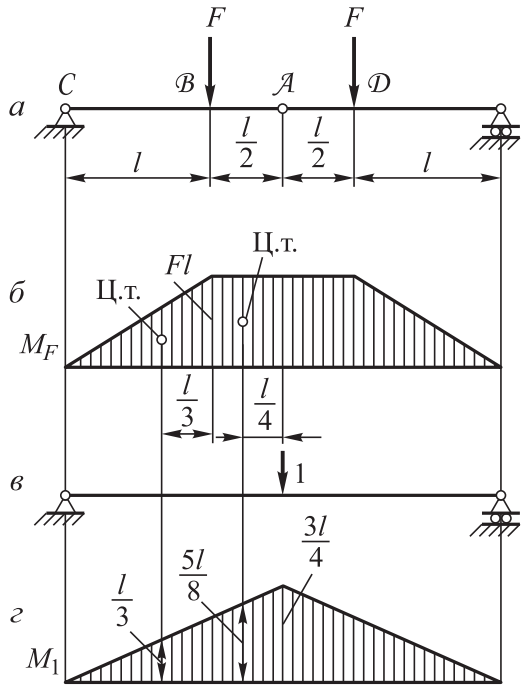


Рис. 5.20

Строим эпюру изгибающих моментов от заданных сил F (рис. 5.20, *б*). Затем, полагая внешние силы равными нулю, прикладываем в точке A единичную силу и также строим эпюру (рис. 5.20, *в* и *г*). Далее проводим перемножение эпюр.

На участке BC площадь эпюры моментов заданных сил $\Omega = Fl^2/2$.

Ордината единичной эпюры под центром тяжести эпюры моментов заданных сил для этого участка будет $M_{1\text{Ц.т}} = l/3$.

Перемножая эти величины, находим $\Omega M_{1\text{Ц.т}} = Fl^3/6$.

Участок BD нельзя рассматривать целиком, так как на этом участке эпюра моментов единичной силы является ломаной. Надо взять половину участка, т. е. отрезок AB. Здесь $\Omega = \dfrac{Fl^2}{2}$, $M_{1\text{Ц.т}} = \dfrac{5}{8}l$, $\Omega M_{1\text{Ц.т}} = \dfrac{5Fl^3}{16}$. Складывая полученные выражения для $\Omega M_{1\text{Ц.т}}$, находим $(\Omega M_{1\text{Ц.т}})_{AC} = \dfrac{23Fl^3}{48}$.

Для участков, расположенных справа от точки A, получим по условиям симметрии тот же результат. Поэтому удваиваем найденное выражение и, разделив его на EJ, находим искомое перемещение

$$\delta_A = \frac{23Fl^3}{24EJ}.$$

Пример 5.8. В системе, показанной на рис. 5.21, *а*, определить, на какое расстояние разойдутся точки A под действием сил F.

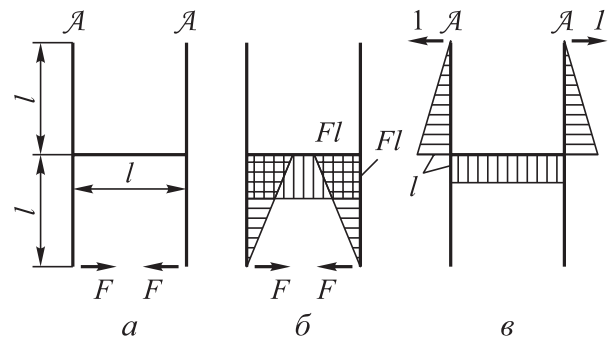


Рис. 5.21

Строим эпюры моментов от заданных сил F и от единичных сил, приложенных в точках A (рис. 5.21, *б* и *в*). Очевидно, результат перемножения эпюр на вертикальных участках будет равен нулю. Для горизонтального участка получим $\Omega = Fl^2$, $M_{1\text{Ц.т}} = 1$. Следовательно,

$$\delta_A = \frac{Fl^3}{EJ}.$$

Пример 5.9. Определить перемещение точки A консоли, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 5.22, *а*).

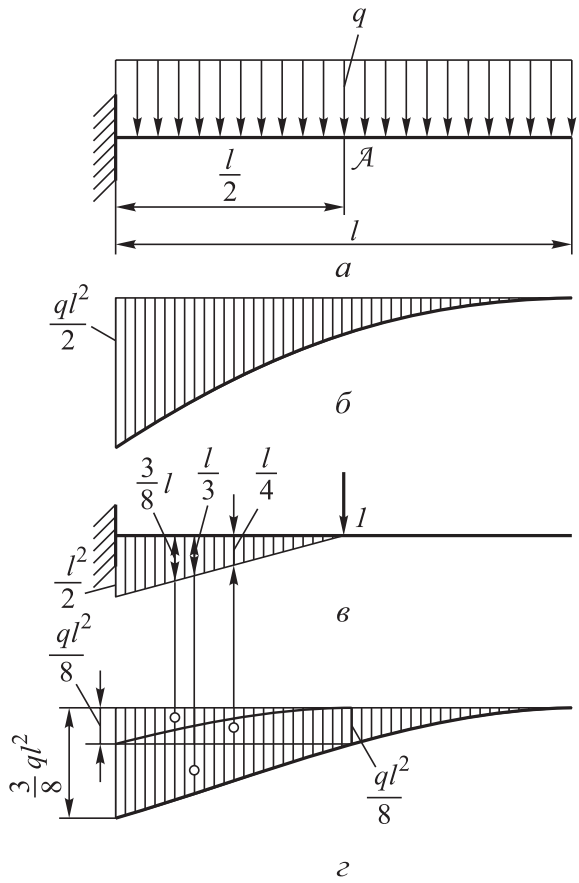


Рис. 5.22

Строим эпюры моментов от заданных сил и от единичной силы, приложенной в точке A (рис. 5.22, *б* и *в*). Перемножение эпюр должно быть проведено по участкам — для правой и левой половин стержня. Но для левой половины эпюра моментов заданных сил представляет собой параболическую трапецию, площадь и положение центра тяжести которой нам неизвестны. Поэтому проводим так называемое расслаивание эпюры. Вместо эпюры, показанной на рис. 5.22, *б*, строим отдельно эпюры от нагрузки, расположенной справа, и отдельно от нагрузки, расположенной слева от точки A (рис. 5.22, *г*). Теперь на левом участке взамен параболической трапеции имеем простые прямоугольник, треугольник и параболический треугольник. Для всех этих фигур площади и положение центров тяжести известны.

Произведение эпюр для правого участка равно нулю. На левом участке соответственно для прямоугольника, треугольника и параболического треугольника получаем следующие слагаемые:

$$\frac{ql^3}{16}\frac{l}{4},\quad \frac{ql^3}{16}\frac{l}{3},\quad \frac{ql^3}{48}\frac{3l}{8},$$

откуда

$$\delta_{\mathcal{A}} = \frac{17}{384}\frac{ql^4}{EJ}.$$

Пример 5.10. Рассмотрим пример пространственной системы. Определим перемещение точки $\mathcal{A}$ в направлении k для пространственного стержня (рис. 5.23, *а*). Жесткость для элементов при изгибе в одной и другой плоскости равна EJ. Жесткость на кручение равна $GJ_к$.

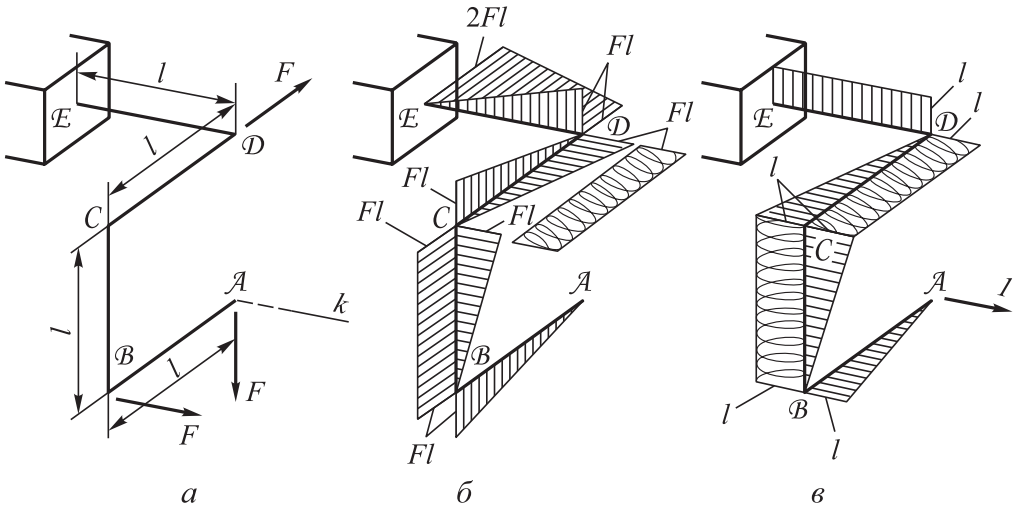


Рис. 5.23

Основными перемещениями в системе являются перемещения, связанные с изгибом и кручением стержней. Строим эпюры изгибающих и крутящих моментов от заданных сил и от единичной силы (рис. 5.23, *б* и *в*). Перемножаем эпюры изгибающих моментов, причем только эпюры, лежащие в одной плоскости. Это следует из выражения (5.8), где под интегралами перемножают только моменты $M_{xF}M_{x1}$ и $M_{yF}M_{y1}$, но не $M_{xF}M_{y1}$ и $M_{yF}M_{x1}$.

Приведем результат перемножения эпюр изгибающих моментов, соответствующих участкам $\mathcal{AB}$, $\mathcal{BC}$, $\mathcal{CD}$ и $\mathcal{DE}$:

$$0;\quad \frac{Fl^2}{2}\frac{2}{3}l;\quad -\frac{Fl^2}{2}\frac{l}{3};\quad \frac{Fl^2}{2}l.$$

Так как жесткость на изгиб в обеих плоскостях для всех участков одна и та же, все эти величины следует сложить и разделить на EJ. Тогда получим

$$\frac{2}{3}\frac{Fl^3}{EJ}.$$

Эпюры крутящих моментов перемножаются только на участке CD. Моменты имеют общий знак. Поэтому получаем

$$\frac{Fl^2}{GJ_к}l.$$

Искомое перемещение

$$\delta_A = Fl^3\left(\frac{2}{3EJ}+\frac{1}{GJ_к}\right).$$

Для стержня круглого сечения

$$GJ_к = \frac{E}{2(1+\mu)}2J \approx 0,77EJ$$

и

$$\delta_A \approx 2\frac{Fl^3}{EJ}.$$

5.5. Определение перемещений и напряжений в витых пружинах

Витые пружины принадлежат к числу наиболее распространенных упругих элементов машиностроения. Их применяют в самых различных конструкциях в качестве аккумуляторов упругой энергии амортизирующих, возвратно-подающих и многих других механических устройств.

Вопросы расчета и проектирования витых пружин относятся к курсам деталей машин и приборов. Однако в силу установившихся традиций основные расчетные формулы выводят обычно в курсе сопротивления материалов, поскольку примеры расчета пружин дают наглядную иллюстрацию методов определения перемещений.

Витую пружину можно рассматривать как пространственно-изогнутый стержень, осевая линия которого в простейшем случае представляет собой винтовую линию. Геометрическая форма осевой линии определяется диаметром витка D, числом витков n и углом подъема α (см. развертку на рис. 5.24). Подъем витка можно характеризовать также шагом пружины s:

Для всех встречающихся на практике пружин шаг s много меньше πD, и угол α, следовательно, можно считать малым. Обычно $\alpha < 5°$. Свойства пружин зависят также от формы поперечного сечения витка. Как правило, пружины навивают из круглой проволоки. Обозначим диаметр сечения проволоки через d (рис. 5.24).

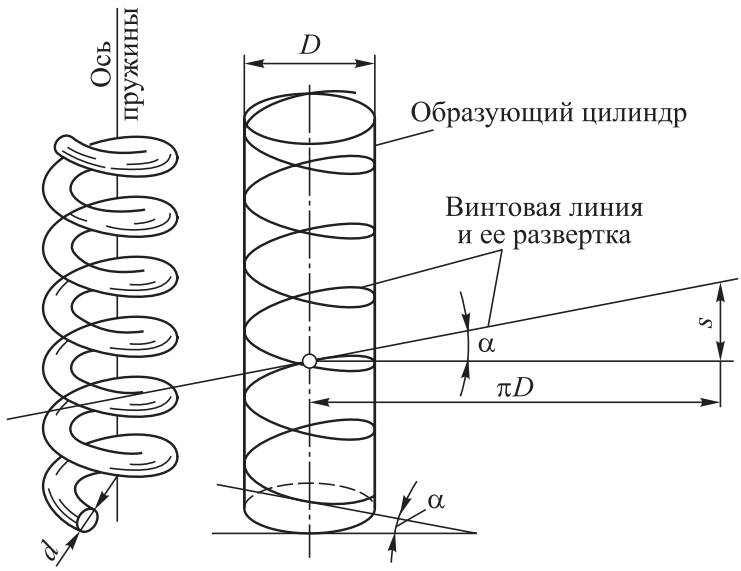


Рис. 5.24

В зависимости от вида воспринимаемых рабочих нагрузок витые пружины подразделяют на *пружины растяжения* (рис. 5.25, *а*), *пружины сжатия* (рис. 5.25, *б*) и *пружины кручения* (рис. 5.25, *в*). В первых двух случаях пружина нагружается силами, равнодей-

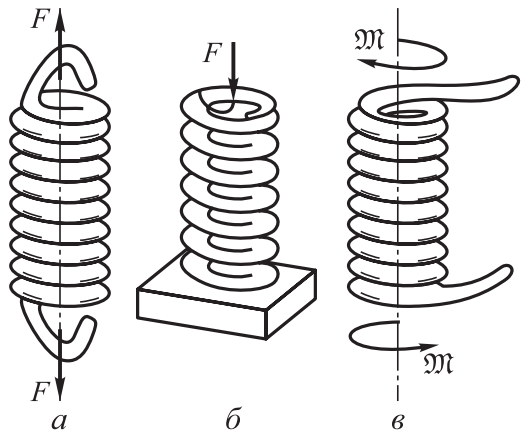


Рис. 5.25

ствующая которых направлена вдоль ее оси. Пружина кручения нагружена двумя моментами в плоскости, перпендикулярной оси пружины.

Конструктивной особенностью пружин перечисленных типов является отделка концов. Концевые витки пружины растяжения и кручения отгибают с таким расчетом, чтобы осуществлять ее крепление к смежным деталям. У пружины сжатия крайние витки поджимают и сошлифовывают с торцов, чем обеспечивается создание опорных плоскостей. При определении перемещений и напряжений указанные особенности пружин обычно не учитываются и концевые витки из рассмотрения исключаются.

Определим зависимость изменения высоты пружин растяжения и сжатия (осадки λ) от осевой силы F. В любом поперечном сечении витка пружины растяжения возникает результирующая внутренняя сила F (рис. 5.26, *а*) и момент $M = FD/2$. Полная сила в сечении параллельна оси пружины, а плоскость момента M совпадает с плоскостью пары сил F. Нормальное поперечное сечение витка повернуто по отношению к этой плоскости на угол α. Раскладывая момент и силу на составляющие относительно осей, связанных с сечением (рис. 5.26, *б*), находим

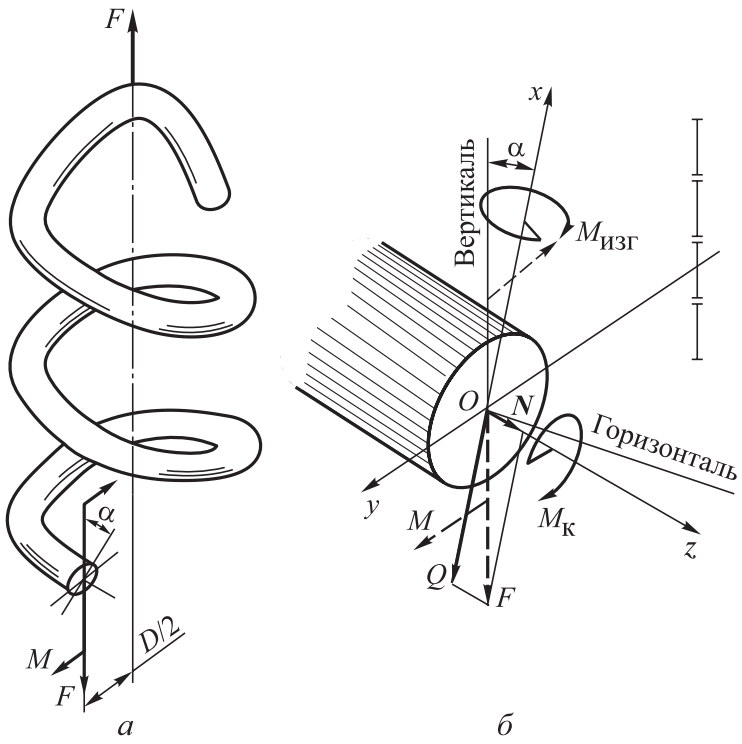


Рис. 5.26

$$M_{\text{к}} = F\frac{D}{2}\cos\alpha; \quad M_{\text{изг}} = F\frac{D}{2}\sin\alpha; \qquad (5.11)$$
$$Q = F\cos\alpha; \quad N = F\sin\alpha.$$

Для того чтобы определить осевое перемещение λ, прикладываем к концам пружины единичные силы и находим возникающие при этом внутренние силовые факторы. Последние, очевидно, определяются выражениями (5.11), уменьшенными в F раз:

$$M_{\text{к}1} = \frac{D}{2}\cos\alpha; \quad M_{\text{изг}\,1} = \frac{D}{2}\sin\alpha; \quad Q_1 = \cos\alpha; \quad N_1 = \sin\alpha.$$

Для определения перемещений в цилиндрической пружине необходимо составить четыре интеграла Мора из шести (см. формулу (5.8)). Однако перемещения, обусловленные нормальной и поперечной силами, как и для всякого стержня, малы, а вследствие малости угла α малым будет и осевое перемещение, связанное с изгибом витков. Поэтому

$$\lambda = \int_l \frac{M_{\text{к}} M_{\text{к}1}\, dz}{GJ_{\text{к}}},$$

где $GJ_{\text{к}}$ — жесткость витка на кручение. Полагая $\cos\alpha \approx 1$, получим $\lambda = \dfrac{FD^2}{4GJ_{\text{к}}}l$, где l — полная длина рабочей части витков, $l \approx \pi Dn$. Таким образом,

$$\lambda = \frac{F\pi D^3 n}{4GJ_{\text{к}}}. \qquad (5.12)$$

При определении n для пружины растяжения отогнутая часть витков на ее концах во внимание не принимается. Для пружины сжатия из полного числа витков следует исключить примерно по 3/4 витка с каждого торца, поскольку эти витки поджаты при навивке к соседним и свободно деформироваться не могут. Таким образом, предполагается, что 1,5 витка в работе не участвует.

Если пружина навита из круглой проволоки, то $J_{\text{к}} = J_p = \pi d^4/32$, и тогда формула (5.12) принимает вид

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}. \qquad (5.13)$$

Поскольку витки пружин растяжения и сжатия работают в основном на кручение, имеем

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к} = \frac{FD}{2W_к}.$$

В случае кругового поперечного сечения

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_p} = \frac{8FD}{\pi d^3}.$$

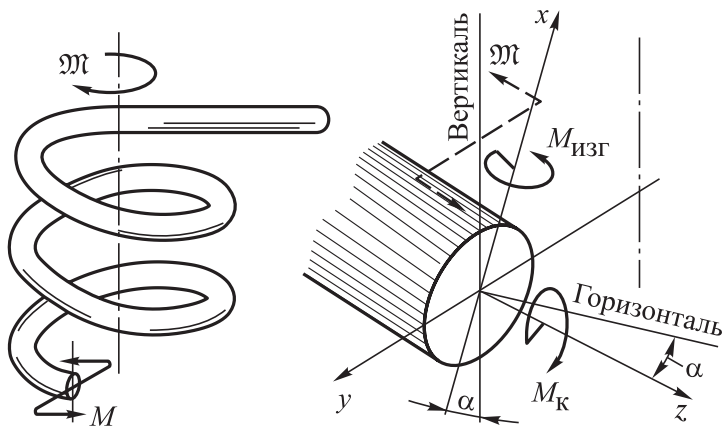
Переходя к пружинам кручения, заметим, что при их расчете наибольший интерес представляет определение углового перемещения одного конца относительно другого.

В поперечных сечениях витка пружины кручения возникает полный момент $M = \mathfrak{M}$ (рис. 5.27). Раскладывая его по осям, находим $M_{изг} = \mathfrak{M}\cos\alpha$; $M_к = \mathfrak{M}\sin\alpha$. После приложения к концам пружины единичных моментов получим

$$M_{изг\,1} = \cos\alpha; \qquad M_{к1} = \sin\alpha.$$

Вследствие малости угла α пренебрегаем перемещением, связанным с кручением витков, а $\cos\alpha$ полагаем равным единице. Тогда

$$\varphi = \int_l \frac{M_{изг} M_{изг\,1}\, dz}{EJ_x} = \frac{\mathfrak{M}l}{EJ_x},$$



а *б*

Рис. 5.27

или

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}\pi Dn}{EJ_x}.$$

Наибольшее напряжение изгиба

$$\sigma_{\max} = \frac{\mathfrak{M}}{W_x}.$$

Задачи, возникающие при расчете витых пружин, далеко не исчерпываются изложенным. В случае когда диаметр проволоки d соизмерим с диаметром витка D, возникает необходимость введения поправок на большую кривизну. В некоторых случаях бывает необходимо определить так называемые вторичные перемещения, например изменения диаметра или числа витков пружины растяжения. В ряде случаев представляет интерес создание пружин с нелинейной зависимостью осадки λ от силы F. Это достигается тем, что часть витков в результате осадки пружины последовательно выключается из работы. Встречаются задачи, связанные с расчетом нецилиндрических пружин, и многие другие. Все они, однако, выходят за рамки курса сопротивления материалов и здесь не рассматриваются.

5.6. Теорема взаимности работ

Теорема взаимности работ, подобно теореме Кастилиано, относится к числу общих теорем сопротивления материалов. Она прямо вытекает из принципа независимости действия сил и применима ко всем системам, для которых соблюдается этот принцип.

Рассмотрим упругое тело, к которому приложены сила F_1 в точке $\mathcal{A}$ и сила F_2 в точке $\mathcal{B}$ (рис. 5.28). Полагая, что к системе может быть применен принцип независимости действия сил, определим работу, которую совершат силы F_1 и F_2 при прямом и обратном порядке приложения.

Прикладываем сначала в точке $\mathcal{A}$ силу F_1. Эта сила совершит работу $\frac{1}{2}F_1\delta_{\mathcal{A}1}$, где $\delta_{\mathcal{A}1}$ — перемещение точки $\mathcal{A}$ по направлению силы F_1, вызванное этой силой. Далее, в точке $\mathcal{B}$ прикладываем силу F_2. Эта сила

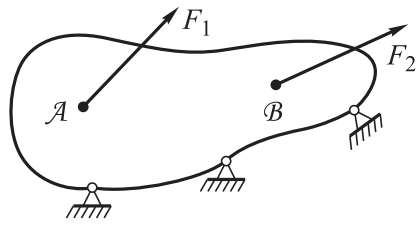


Рис. 5.28

совершит работу, которая будет иметь аналогичное выражение $\frac{1}{2}F_2\delta_{\mathcal{B}2}$. Одновременно совершит работу и сила F_1, поскольку при приложении силы F_2 произойдет и перемещение точки $\mathcal{A}$. Работа силы F_1 будет $F_1\delta_{\mathcal{A}2}$, где $\delta_{\mathcal{A}2}$ — перемещение точки $\mathcal{A}$ по направлению силы F_1 под действием силы F_2, приложенной в точке $\mathcal{B}$.

В итоге получим сумму работ при прямом порядке приложения сил:

$$\frac{1}{2}F_1\delta_{\mathcal{A}1} + \frac{1}{2}F_2\delta_{\mathcal{B}2} + F_1\delta_{\mathcal{A}2}.$$

Теперь приложим сначала силу F_2, а затем F_1. Тогда, очевидно, выражение работы будет следующим:

$$\frac{1}{2}F_2\delta_{\mathcal{B}2} + \frac{1}{2}F_1\delta_{\mathcal{A}1} + F_2\delta_{\mathcal{B}1}.$$

Приравнивая работы, находим

$$F_1\delta_{\mathcal{A}2} = F_2\delta_{\mathcal{B}1}. \qquad (5.14)$$

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом: *работа первой силы на перемещении точки ее приложения под действием второй силы равна работе второй силы на перемещении точки ее приложения под действием первой силы*. В этом и заключается *теорема взаимности работ*.

Эта теорема приобретает бо̀льшую общность, если учесть, что здесь, как и при выводе теоремы Кастилиано, под F_1 и F_2 можно понимать не просто силы, а обобщенные силы, а под $\delta_{\mathcal{A}2}$ и $\delta_{\mathcal{B}1}$ — обобщенные перемещения.

Иногда в теорему взаимности работ вкладывают более узкое содержание, трактуя ее как *теорему взаимности перемещений*. Если $F_1 = F_2$, выражение (5.14) принимает вид

$$\delta_{\mathcal{A}2} = \delta_{\mathcal{B}1}. \qquad (5.15)$$

Перемещение точки $\mathcal{A}$ под действием силы, приложенной в точке $\mathcal{B}$, равно перемещению точки $\mathcal{B}$ под действием такой же силы, приложенной в точке $\mathcal{A}$.

Сказанное может быть проиллюстрировано на примере балки, нагруженной силой F поочередно в точках $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (рис. 5.29). Согласно теореме взаимности перемещений, отмеченные на рисунке отрезки $\delta_{\mathcal{A}2}$ и $\delta_{\mathcal{B}1}$ равны.

Теоремы взаимности работ и перемещений оказываются весьма полезными, так как позволяют в ряде случаев сильно упро-

стить решение многих задач сопротивления материалов. Это мы увидим, в частности, в следующей главе, где будут рассмотрены общие вопросы раскрытия статической неопределимости систем.

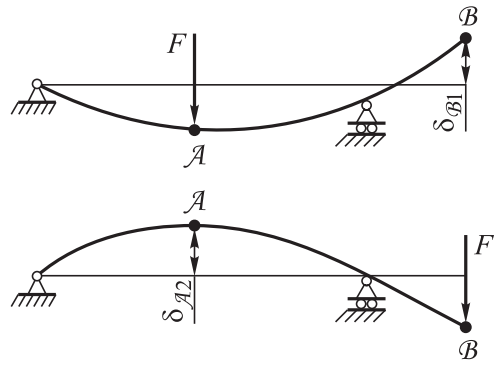


Рис. 5.29

В некоторых случаях теорема взаимности работ дает возможность весьма просто решать в общем виде такие задачи, которые другими методами могут быть решены только с большим трудом.

Пример 5.11. Определить изменение объема упругого тела произвольной формы, нагруженного двумя равными, противоположно направленными силами F (рис. 5.30). Расстояния между точками приложения сил равно H. Упругие константы материала заданы.

Понятно, что найти решение задачи в столь общей постановке представляется весьма затруднительным. Однако на помощь приходит теорема взаимности работ. Одновременно с заданной нагрузкой будем рассматривать случай нагружения тела равномерно распределенным давлением p, действующим по поверхности. Тогда имеем две обобщенные силы: систему двух сил F, с одной стороны, и давление p, с другой.

Согласно теореме взаимности работ, можно сказать, что

$$F\Delta H_p = p\Delta V_F, \tag{5.16}$$

где ΔH_p — взаимное смещение точек приложения сил под действием давления p, а ΔV_F — искомое изменение объема тела под действием сил F.

При нагружении тела равномерно распределенным давлением в любой площадке тела возникает напряжение σ, равное давлению p. Для элементарного объема, показанного на рис. 5.31, относительное сжатие в любом направлении, согласно закону Гука, будет следующим:

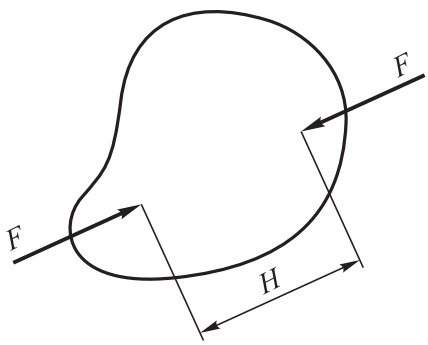


Рис. 5.30

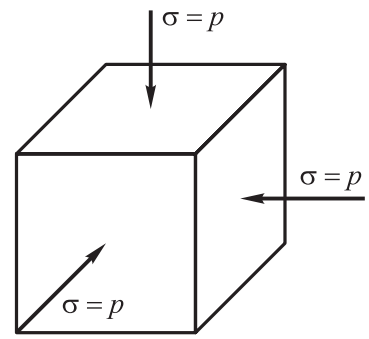


Рис. 5.31

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \mu\frac{\sigma}{E} - \mu\frac{\sigma}{E} = \frac{p}{E}(1-2\mu).$$

Точки приложения сил F (см. рис. 5.30) сблизятся под действием давления p на

$$\Delta H_p = \frac{p}{E}(1-2\mu)H.$$

Тогда, подставляя ΔH_p в выражение (5.16), находим

$$\Delta V_F = \frac{FH}{E}(1-2\mu).$$

Пример 5.12. Замкнутая нерастяжимая рама, имеющая форму круга, нагружена в своей плоскости произвольной системой сил (рис. 5.32). Показать, что площадь, ограниченная рамой, при ее изгибе не меняется.

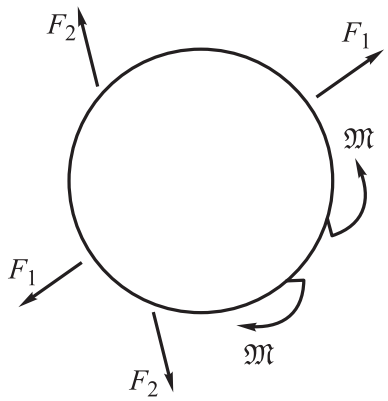


Рис. 5.32

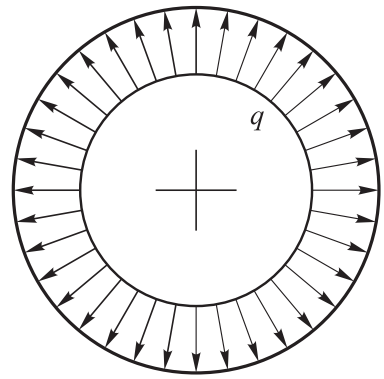


Рис. 5.33

Изменение площади рассматриваем как обобщенное перемещение. Соответствующая этому перемещению обобщенная сила представляет собой распределенную нагрузку с постоянной интенсивностью q (рис. 5.33). Поэтому наряду с заданным случаем нагружения рассмотрим нагружение той же рамы равномерно распределенной нагрузкой q. Тогда, согласно теореме взаимности работ, имеем

$$q\Delta A_F^* = \sum F_i\delta_{iq}, \qquad (5.17)$$

где ΔA_F^* — искомое изменение площади под действием произвольной системы сил; $\sum F_i\delta_{iq}$ — сумма работ этих сил на перемещениях, вызванных распределенными силами q.

Под действием сил q перемещения в кольце возникать не будут, поскольку кольцо нерастяжимое, и поэтому $\delta_{iq} = 0$. Следовательно, правая часть уравнения (5.17) обращается в нуль, и $\Delta A_F^* = 0$, что и требовалось доказать.

Понятно, что полученный результат является правильным только для малых перемещений, пока к системе может быть применен принцип независимости действия сил.

Глава 6

РАСКРЫТИЕ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

6.1. Связи, накладываемые на систему. Степень статической неопределимости

Выше (гл. 1, 2) были частично затронуты вопросы, связанные с понятием статической неопределимости. Для решения большинства встречающихся на практике задач описанные приемы оказываются, однако, далеко не достаточными. Поэтому необходимо остановиться на более общих методах раскрытия статической неопределимости стержневых систем.

Под *стержневой системой* в широком смысле слова понимается всякая конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму стержня. Если элементы конструкции работают в основном на растяжение или сжатие, то стержневая система называется *фермой* (рис. 6.1). Ферма состоит из прямых стержней, образующих треугольники. Для фермы характерно приложение внешних сил в узлах.

Если элементы стержневой системы работают в основном на изгиб или кручение, то система называется *рамой* (рис. 6.2).

Особую, наиболее простую для исследования группу стержневых систем составляют *плоские* системы. У плоской рамы или фермы оси всех составляющих элементов расположены в одной плоскости, которая одновременно является главной плоскостью сечений. В этой же плоскости действуют все внешние силы, включая и реакции опор (рис. 6.2, *а*).

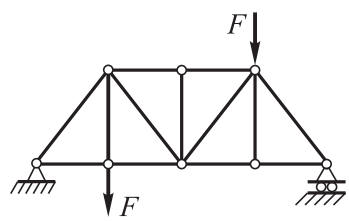


Рис. 6.1

Наряду с плоскими имеются так называемые *плоскопространственные системы*. Для такого рода систем оси составляющих элементов в недеформированном состоя-

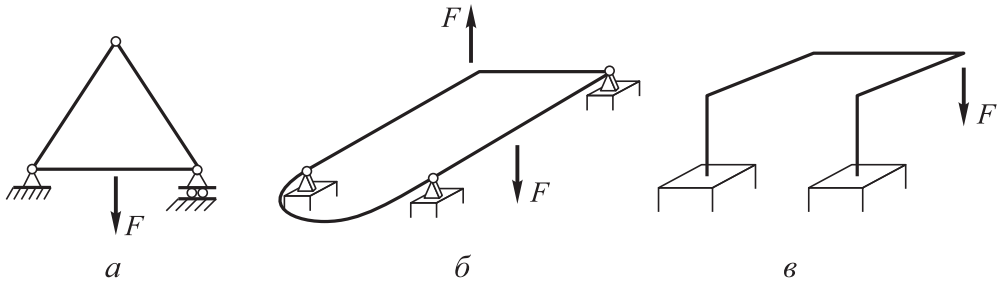


Рис. 6.2

нии располагаются, как и для плоских систем, в одной плоскости. Внешние же силовые факторы действуют в плоскостях, перпендикулярных этой плоскости (рис. 6.2, *б*). Стержневые системы, не относящиеся к двум указанным классам, называются *пространственными* (рис. 6.2, *в*).

Рамы и фермы принято разделять на статически определимые и статически неопределимые. Под *статически определимой* понимается такая система, для которой все реакции опор могут быть определены при помощи уравнений равновесия, а затем при найденных опорных реакциях методом сечений могут быть найдены также и внутренние силовые факторы в любом поперечном сечении. Под *статически неопределимой* системой имеется в виду такая, для которой определение внешних реакций и всех внутренних силовых факторов не может быть произведено при помощи метода сечений и уравнений равновесия.

Разность между числом неизвестных (реакций опор и внутренних силовых факторов) и числом независимых уравнений статики, которые могут быть составлены для рассматриваемой системы, носит название *степени*, или *числа*, *статической неопределимости*. В зависимости от этого числа системы разделяют на один, два, три, ..., *n* раз статически неопределимые. Иногда говорят, что степень статической неопределимости равна числу дополнительных связей, наложенных на систему. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Положение жесткого тела в пространстве определяется шестью независимыми координатами, иначе говоря, жесткий стержень обладает шестью степенями свободы. На него могут быть наложены связи, т. е. ограничения, обусловливающие его определенное положение в пространстве. Наиболее простыми связями являются такие, при которых полностью исключается то или иное обобщенное перемещение для некоторых сечений. Наложение одной связи снимает одну степень свободы. Следовательно, если

на свободный жесткий стержень наложено шесть связей, то положение его в пространстве будет, за некоторыми исключениями, определено полностью, и система из механизма, обладающего шестью степенями свободы, превращается в кинематически неизменяемую систему. То число связей, при котором достигается кинематическая неизменяемость, носит название *необходимого числа связей*. Всякую связь, наложенную сверх необходимых, называют *дополнительной*. Число дополнительных связей равно степени статической неопределимости системы.

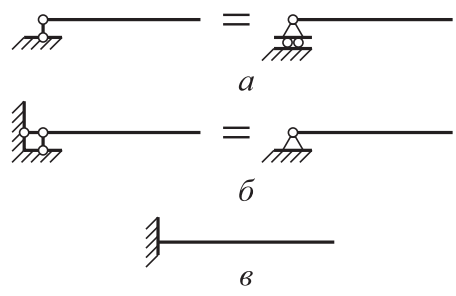


Рис. 6.3

Связи в рамах и стержневых системах делят обычно на связи внешние и связи внутренние, или взаимные. Под внешними связями понимаются условия, накладываемые на абсолютные перемещения некоторых точек системы. Если, например, на левый конец бруса (рис. 6.3, *а*) наложено условие, запрещающее вертикальное перемещение, говорят, что в этой точке имеется одна внешняя связь. Условно ее изображают в виде двух шарниров или катка. Если запрещено как вертикальное, так и горизонтальное смещение, говорят, что наложены две внешние связи (рис. 6.3, *б*). Заделка в плоской системе дает три внешние связи. Пространственная заделка соответствует шести внешним связям (рис. 6.3, *в*). Внешние связи часто, как уже упоминалось, делят на необходимые и дополнительные. Например, на рис. 6.4 показана плоская рама, имеющая в случае *а* три, а в случае *б* — пять внешних связей. Для того чтобы определить положение рамы в плоскости как жесткого целого, необходимо наложение трех связей. Следовательно, в случае *а* рама имеет необходимые внешние связи, а в случае *б*, кроме того, две дополнительные внешние связи.

Под *внутренними*, или *взаимными*, связями понимаются ограничения, накладываемые на взаимные смещения элементов рамы. Здесь также можно говорить как о необходимых, так и о дополнительных связях. Например, плоская рама, показанная

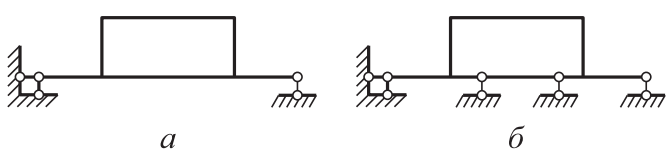


Рис. 6.4

на рис. 6.5, *а*, имеет необходимое количество как внешних, так и внутренних связей между элементами. Это — кинематически неизменяемая система. Если будут заданы внешние силы, мы сможем при помощи уравнений статики найти как реакции опор, так и внутренние силовые факторы в любом поперечном сечении рамы. В той же раме, показанной на рис. 6.5, *б*, кроме внешних наложены две дополнительные внутренние связи, запрещающие взаимное вертикальное и горизонтальное смещения точек A и B. Система в данном случае дважды статически неопределима (иногда добавляют: внутренним образом).

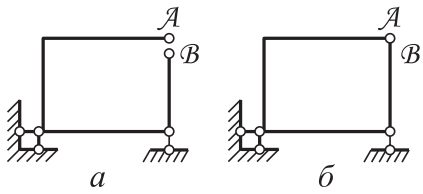


Рис. 6.5

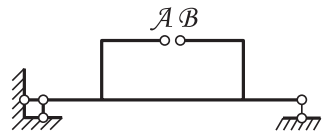


Рис. 6.6

В раме, показанной на рис. 6.4, *а* и *б*, также имеются внутренние дополнительные связи. Контур рамы полностью замкнут. Разрезая его в любом сечении (рис. 6.6), мы, не нарушая кинематической неизменяемости, получаем возможность при заданных силах найти внутренние силовые факторы в каждом сечении рамы. Следовательно, разрезая замкнутую раму, мы снимаем дополнительные связи, т. е. позволяем торцам A и B поворачиваться и смещаться в двух направлениях одно относительно другого. Можно сказать, что замкнутый плоский контур имеет три дополнительные взаимные связи, т. е. трижды статически неопределим. Таким образом, рама, показанная на рис. 6.4, *а*, трижды статически неопределима, а рама, представленная на рис. 6.4, *б*, пять раз статически неопределима (три раза внутренним образом и два раза — внешним).

Рассмотрим теперь несколько примеров определения степени статической неопределимости стержневых и рамных систем. На рис. 6.7, *а* — *и* показано несколько рам. Последовательно рассмотрим их.

Рис. 6.7, *а*. Рама имеет четыре дополнительные внешние связи и три внутренние связи, т. е. семь раз статически неопределима.

Рис. 6.7, *б*. Полагаем сначала, что шарнир A отсутствует. Тогда имеются две внешние и три внутренние дополнительные связи. Система без шарнира A была бы пять раз статически неопределимой.

Шарнир A принадлежит одновременно трем стержням. Его можно рассматривать как два совпавших шарнира (рис. 6.8). Так

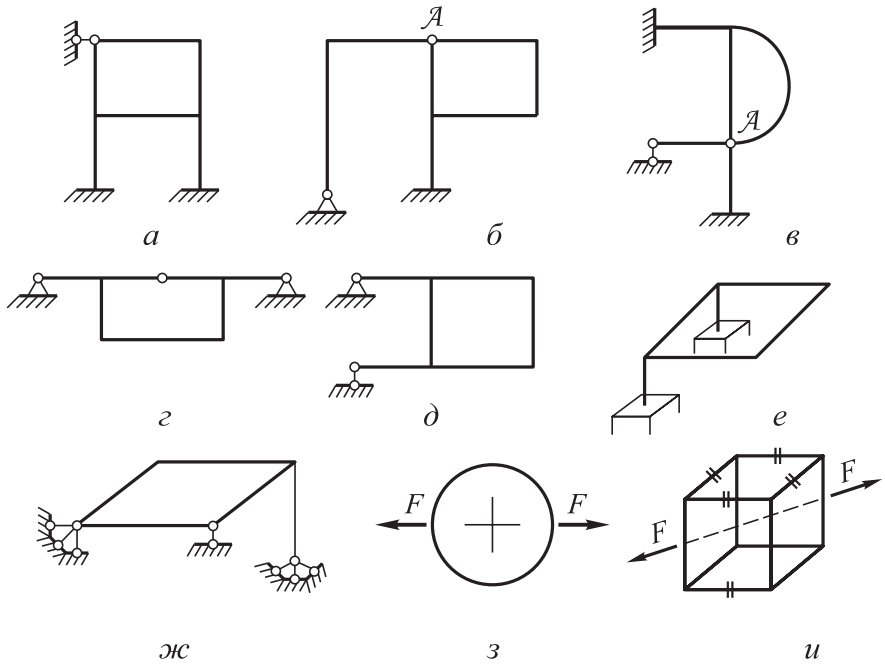


Рис. 6.7

как каждый шарнир снимает одну связь, т. е. разрешает поворот одного сечения относительно другого, то можно сказать, что шарнир *А* снимает две связи. Система становится, таким образом, вместо пяти — три раза статически неопределимой.

Обобщая сказанное, можно сделать вывод, что шарнир снимает число связей, на единицу меньшее числа сходящихся в нем стержней. В данном случае в шарнире *А* сходятся три стержня, и шарнир снимает две связи.

Рис. 6.7, *в*. Если бы шарнир *А* отсутствовал, система была бы статически неопределимой четыре раза внешним образом и три раза внутренним образом, т. е. всего семь раз. Шарнир *А* снимает число связей, на единицу меньшее числа сходящихся в нем стержней, т. е. три связи. Рама четыре раза статически неопределима.

Рис. 6.7, *г*. Рама три раза статически неопределима.

Рис. 6.7, *д*. Внешние связи не удовлетворяют условиям кинематической неизменяемости. Это — механизм, точнее говоря, мгновенный механизм. Система имеет возможность поворачиваться относительно верхней опоры как жесткое целое. Понятно, что угол поворота будет небольшим. Нижняя связь заклинится и будет достигнуто какое-то положение равновесия, но новое положение связей будет зависеть

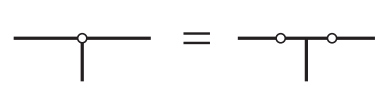


Рис. 6.8

от жесткости системы. К раме неприменимы основные принципы сопротивления материалов: принцип неизменности начальных размеров и принцип независимости действия сил.

Рис. 6.7, *е*. Рама — пространственная. Имеется шесть дополнительных внешних связей (лишняя заделка) и шесть дополнительных взаимных связей (замкнутый контур). Система 12 раз статически неопределима.

Рис. 6.7, *ж*. Система семь раз статически неопределима (один раз внешним образом и шесть раз — внутренним).

Рис. 6.7, *з*. Здесь для плоской рамы не показаны внешние связи, но дана система внешних сил, удовлетворяющая условиям равновесия. В таком случае условились считать, что дополнительных внешних связей нет и положение рамы в пространстве определено, поэтому рассматривают только внутренние связи. Система три раза статически неопределима.

Рис. 6.7, *и*. Здесь также рассматривают только внутренние связи, поскольку система внешних сил удовлетворяет условиям равновесия. Нужно подсчитать, сколько сечений необходимо сделать в раме, чтобы, с одной стороны, она не «рассыпалась», а с другой — чтобы в ней не осталось ни одного замкнутого контура. Таких сечений следует сделать пять. Система 30 раз статически неопределима.

6.2. Выбор основной системы. Метод сил

Наиболее широко применяемым в машиностроении общим методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является *метод сил*. Он заключается в том, что заданную статически неопределимую систему освобождают от дополнительных связей как внешних, так и взаимных, а их действие заменяют силами и моментами. Значения этих сил и моментов подбирают так, чтобы перемещения соответствовали тем ограничениям, которые накладывают на систему отброшенные связи. Таким образом, при указанном способе раскрытия статической неопределимости неизвестными оказываются силы. Отсюда и название «метод сил». Такой прием не является единственно возможным. В строительной механике широко применяют и другие методы, например метод перемещений, в котором за неизвестные принимают не силовые факторы, а перемещения в элементах стержневой системы.

Итак, раскрытие статической неопределимости любой рамы методом сил начинается с отбрасывания дополнительных связей.

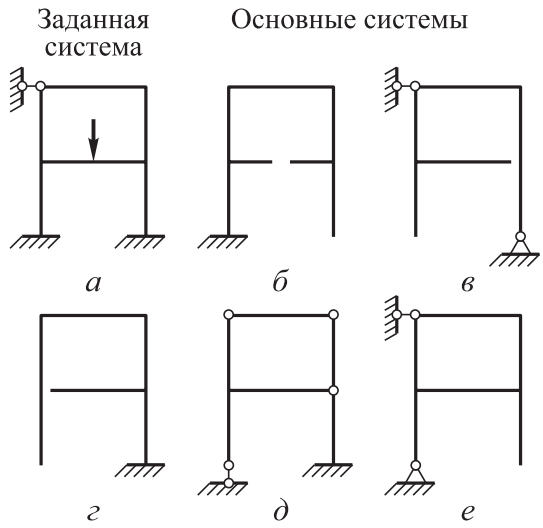


Рис. 6.9

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой. Она носит название основной системы. Для каждой статически неопределимой стержневой системы можно подобрать, как правило, сколько угодно основных систем. Например, для рамы, показанной на рис. 6.9, *а*, можно предложить основные системы *б*—*е*, которые получены путем отбрасывания семи дополнительных связей в различных комбинациях. Вместе с тем нужно помнить, что не всякая система с семью отброшенными связями может быть принята как основная. На рис. 6.10 показано три примера для той же рамы, в которой также отброшено семь связей, однако сделано это неправильно, так как оставшиеся связи не обеспечивают кинематической неизменяемости системы, с одной стороны, и статической определимости во всех узлах — с другой.

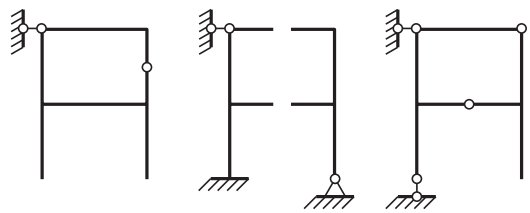


Рис. 6.10

После того как дополнительные связи отброшены и система превращена в статически определимую, необходимо, как уже говорилось, ввести вместо связей неизвестные силовые факторы. В тех

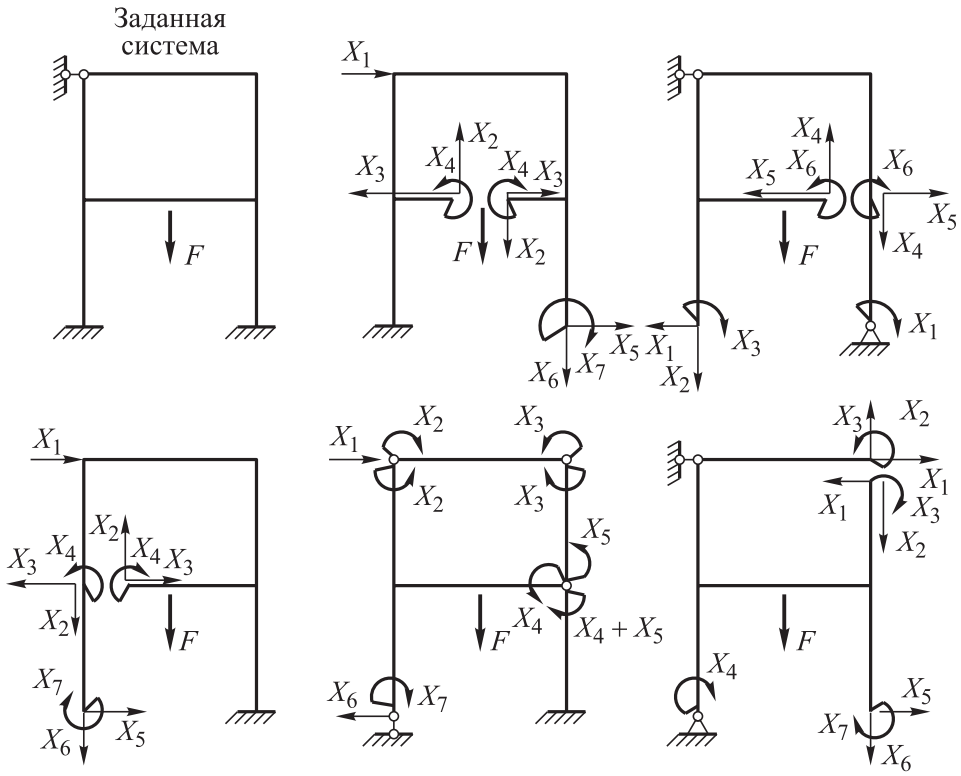


Рис. 6.11

сечениях, где запрещены линейные перемещения, вводят силы. Там, где запрещены угловые смещения, вводят моменты. Как в том, так и в другом случае неизвестные силовые факторы будем обозначать X_i, где i — номер неизвестного. Наибольшее значение i равно степени статической неопределимости системы. Заметим, что для внутренних связей силы X_i являются взаимными. Если в каком-либо сечении рама разрезана, то равны и противоположные силы, и моменты прикладывают как к правой, так и к левой частям системы.

На рис. 6.11 показано пять возможных способов приложения неизвестных сил, соответствующих различным основным системам. Принцип приложения неизвестных силовых факторов становится понятным без дальнейших пояснений. Теперь перейдем к составлению уравнения для определения неизвестных.

6.3. Канонические уравнения метода сил

Обратимся к конкретному примеру. Рассмотрим систему, представленную на рис. 6.12. Тем, что рассматривается конкретная семь раз статически неопределимая система, общность рассуждений не будет нарушена.

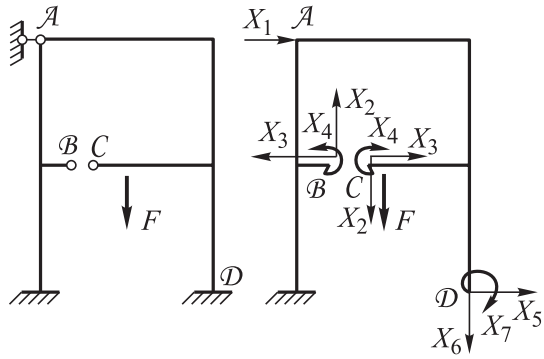


Рис. 6.12

Перейдем теперь к составлению уравнений для определения неизвестных силовых факторов. Условимся через Δ_{ik} обозначать взаимное смещение точек системы. Первый индекс при Δ соответствует направлению перемещения, а второй — силе, вызвавшей это перемещение.

В рассматриваемой раме в точке A отброшена опора. Следовательно, горизонтальное перемещение здесь равно нулю и можно записать

$$\Delta_{1[X_1, X_2, \ldots, F]} = 0.$$

Индекс 1 означает, что речь идет о перемещении по направлению силы X_1, а индекс X_1, X_2, ..., F показывает, что перемещение определяется действием всех сил, как заданных, так и неизвестных.

Аналогично можно записать:

$$\Delta_{2[X_1, X_2, \ldots, F]} = 0; \quad \Delta_{3[X_1, X_2, \ldots, F]} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

Так как под величиной Δ_{ik} понимается взаимное смещение точек, то Δ_2 обозначает вертикальное смещение точки B относительно C, Δ_3 — горизонтальное взаимное смещение тех же точек, Δ_4 — взаимное угловое смещение сечений B и C, Δ_5, Δ_6 и Δ_7 соответствуют горизонтальному, вертикальному и угловому перемещениям точки D соответственно.

В точках A и D смещения Δ_{ik} являются абсолютными. Но абсолютные смещения можно рассматривать как смещения, взаимные с неподвижными отброшенными опорами. Поэтому принятые обозначения приемлемы для всех сечений системы.

Пользуясь принципом независимости действия сил, раскроем выражения для перемещений $\Delta_{i[X_1, X_2, \ldots, F]}$:

$$\Delta_{1[X_1,X_2,\ldots,F]} = \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1X_3} + \Delta_{1X_4} + \Delta_{1X_5} + \Delta_{1X_6} + \Delta_{1X_7} + \Delta_{1F} = 0;$$
$$\Delta_{2[X_1,X_2,\ldots,F]} = \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2X_3} + \Delta_{2X_4} + \Delta_{2X_5} + \Delta_{2X_6} + \Delta_{2X_7} + \Delta_{2F} = 0.$$

Аналогичным образом запишем и остальные пять уравнений: каждое из слагаемых Δ_{iX_k}, входящих в уравнение, обозначает перемещение в направлении силы, указанной в первом индексе, и под действием силы, стоящей во втором индексе. Поскольку каждое перемещение пропорционально соответствующей силе, Δ_{iX_k} можно записать в следующем виде:

$$\Delta_{iX_k} = \Delta_{ik} X_k. \qquad (6.1)$$

Что касается перемещений Δ_{1F}, Δ_{2F} и т. д., то под F в индексе будем понимать не просто внешнюю силу F, а вообще систему внешних сил, которая может быть произвольной. Поэтому величины Δ_{1F}, Δ_{2F}, ... в уравнениях оставим неизменными. Уравнения примут вид

$$\begin{gathered}
\Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 + \Delta_{13}X_3 + \Delta_{14}X_4 + \Delta_{15}X_5 + \Delta_{16}X_6 + \Delta_{17}X_7 + \Delta_{1F} = 0;\\
\Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 + \Delta_{23}X_3 + \Delta_{24}X_4 + \Delta_{25}X_5 + \Delta_{26}X_6 + \Delta_{27}X_7 + \Delta_{2F} = 0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_{71}X_1 + \Delta_{72}X_2 + \Delta_{73}X_3 + \Delta_{74}X_4 + \Delta_{75}X_5 + \Delta_{76}X_6 + \Delta_{77}X_7 + \Delta_{7F} = 0.
\end{gathered} \qquad (6.2)$$

Эти уравнения носят название *канонических уравнений метода сил*. Число их равно степени статической неопределимости системы. Как увидим далее, в случаях, когда имеется возможность сразу указать значения некоторых неизвестных, число совместно решаемых уравнений снижается. Остается теперь выяснить, что представляют собой коэффициенты Δ_{ik} и как следует их определять. Для этого обратимся к выражению (6.1). Если $X_k = 1$, то

$$\Delta_{iX_k} = \Delta_{ik}.$$

Следовательно, коэффициент Δ_{ik} есть перемещение по направлению i-го силового фактора под действием единичного фактора, заменяющего k-й фактор. Например, коэффициент Δ_{31} уравнения (6.2) представляет собой взаимное горизонтальное смещение точек B и C, которое возникло бы в раме, если бы к ней вместо всех сил была приложена только единичная сила в точке A (рис. 6.13). Если, например, вместо сил X_2 приложить единичные силы, а все прочие силы снять (рис. 6.14), то угол поворота в сечении D под действием этих сил будет Δ_{72}, горизонтальное перемещение в точке A будет Δ_{12} и т. д.

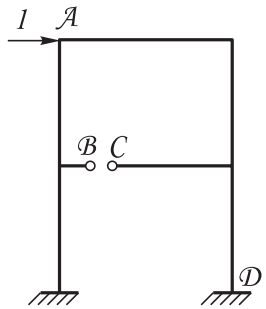


Рис. 6.13

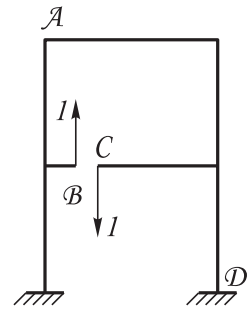


Рис. 6.14

Весьма существенно отметить, что в проделанном выводе совершенно не обусловливается то, каким образом возникают перемещения Δ_{ik}. Хотя мы и рассматриваем раму, работающую на изгиб, все сказанное с равным успехом может быть отнесено вообще к любой системе, работающей на кручение, растяжение и изгиб или на то, другое и третье совместно.

Обратимся к интегралам Мора (см. 5.3). Для того чтобы определить Δ_{ik}, следует вместо внешних сил рассматривать единичную силу, заменяющую k-й фактор. Поэтому внутренние моменты и силы $M_{\text{к}F}$, M_{xF}, M_{yF}, N_F, Q_{xF} и Q_{yF} в выражении (5.8) заменим на $M_{\text{к}k}$, M_{xk}, M_{yk}, N_k, Q_{xk} и Q_{yk}, понимая под ними внутренние моменты и силы от единичного k-го фактора. В итоге получим

$$\Delta_{ik} = \int_l \frac{M_{\text{к}k} M_{\text{к}i}\, dz}{GJ_{\text{к}}} + \int_l \frac{M_{xk} M_{xi}\, dz}{EJ_x} + \int_l \frac{M_{yk} M_{yi}\, dz}{EJ_y} + \\ + \int_l \frac{N_k N_i\, dz}{EA} + \int_l \frac{k_x Q_{xk} Q_{xi}\, dz}{GA} + \int_l \frac{k_y Q_{yk} Q_{yi}\, dz}{GA}, \qquad (6.3)$$

где $M_{\text{к}i}$, M_{xi}, ... — внутренние моменты и силы, возникающие под действием i-го единичного фактора. Таким образом, коэффициенты Δ_{ik} можно получить как результат перемножения i-го и k-го внутренних единичных силовых факторов. Индексы i и k непосредственно указывают, какие факторы должны быть перемножены под знаком интегралов Мора. Если рама состоит из прямых участков и можно пользоваться правилом Верещагина, то Δ_{ik} представляет собой результат перемножения i-х единичных эпюр на k-е единичные эпюры.

Очевидно, что $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$. Это следует, с одной стороны, непосредственно из выражений (6.3), а с другой — из теоремы взаимности перемещений (см. 5.6), поскольку перемещения Δ_{ik}

и Δ_{ki} возникают под действием одной и той же силы, равной единице.

Величины Δ_{iF}, входящие в канонические уравнения, представляют собой перемещения в направлениях 1, 2, ..., возникающие под действием заданных внешних сил в основной системе. Они определяются перемножением эпюры заданных сил на соответствующие единичные эпюры.

Еще раз напомним, что в подавляющем большинстве случаев перемещения, связанные с изгибом и кручением элементов рамы, значительно превышают перемещения растяжения и сдвига. Поэтому в выражении (6.3) последними тремя интегралами, как правило, можно пренебречь (см. 5.1).

Пример 6.1. Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюру изгибающих моментов для рамы, показанной на рис. 6.15.

Рама три раза статически неопределима. Выбираем основную систему, отбрасывая левую заделку. Действие заделки заменяем двумя силами X_1, X_2 и моментом X_3 (рис. 6.16).

Канонические уравнения (6.2) принимают для рассматриваемой системы такой вид:

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 + \Delta_{13}X_3 = -\Delta_{1F},$$

$$\Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 + \Delta_{23}X_3 = -\Delta_{2F},$$

$$\Delta_{31}X_1 + \Delta_{32}X_2 + \Delta_{33}X_3 = -\Delta_{3F}.$$

Основные перемещения в рассматриваемой раме определяются изгибом. Поэтому, пренебрегая сдвигом и сжатием стержней, строим эпюры изгибающих моментов от заданной силы F и от трех единичных силовых факторов (см. рис. 6.16).

Определяем коэффициенты уравнений, считая, что жесткость на изгиб всех участков рамы постоянна и равна EJ. Величину Δ_{11} определяем перемножением первой единичной эпюры самой на себя. Для каждого участка берем, следовательно, площадь эпюры и умножаем на ординату этой же эпюры, проходящую через ее центр тяжести:

$$\Delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{l^2}{2}\cdot\frac{2}{3}l + 2l^2\cdot l\right) = \frac{7l^3}{3EJ}.$$

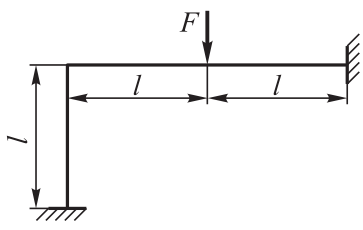


Рис. 6.15

Заметим, что перемещения Δ_{ik} при $i = k$ всегда положительны, поскольку площади эпюры и ординаты имеют общий знак.

Определяем, далее, и остальные коэффициенты уравнений, перемножая соответствующие эпюры:

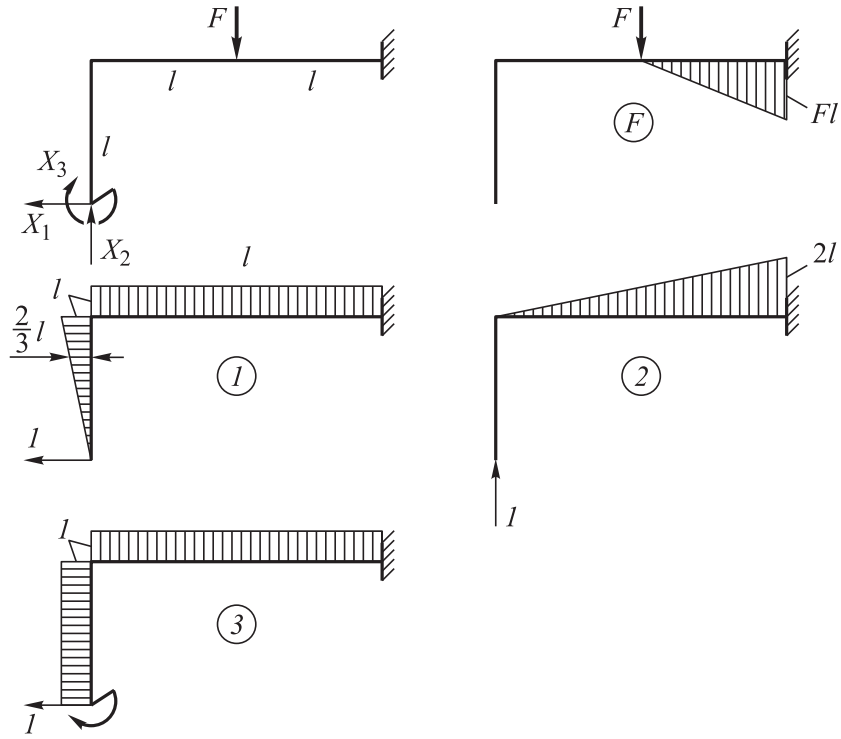


Рис. 6.16

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = \frac{2l^3}{EJ}; \quad \Delta_{13} = \Delta_{31} = \frac{5l^2}{2EJ}; \quad \Delta_{22} = \frac{8l^3}{3EJ};$$

$$\Delta_{23} = \Delta_{32} = \frac{2l^2}{EJ}; \quad \Delta_{33} = \frac{3l}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{Fl^3}{2EJ}; \quad \Delta_{2F} = -\frac{5Fl^3}{6EJ}; \quad \Delta_{3F} = -\frac{Fl^2}{2EJ}.$$

Подставляем найденные коэффициенты в канонические уравнения. После сокращений получаем

$$\frac{7}{3}lX_1 + 2lX_2 + \frac{5}{2}X_3 = \frac{Fl}{2}; \quad 2lX_1 + \frac{8}{3}lX_2 + 2X_3 = \frac{5Fl}{6};$$

$$\frac{5}{2}lX_1 + 2lX_2 + 3X_3 = \frac{Fl}{2}.$$

Решая эти уравнения, находим $X_1 = -F/4$, $X_2 = 7F/16$, $X_3 = Fl/12$.

Раскрытие статической неопределимости на этом заканчивается.

Эпюра изгибающих моментов может быть получена наложением на эпюру моментов заданных сил трех единичных эпюр, увеличенных соответственно в X_1, X_2 и X_3 раза. Суммарная эпюра изгибающих мо-

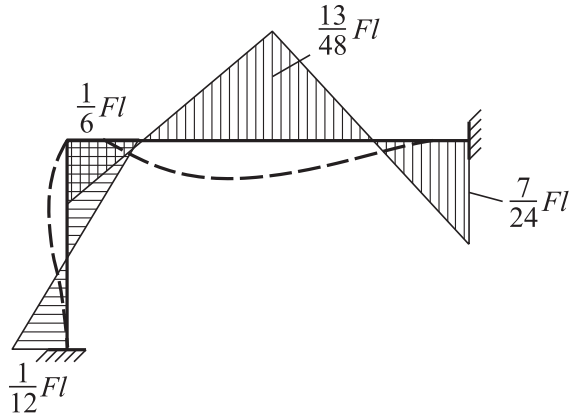


Рис. 6.17

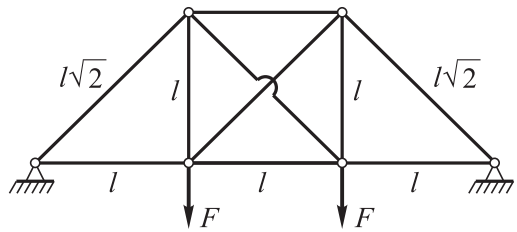
ментов представлена на рис. 6.17. Там же показана форма изогнутой оси рамы.

Пример 6.2. Определить усилия в стержнях статически неопределимой фермы (рис. 6.18, *а*). Жесткости *EF* всех стержней одинаковы. Длины стержней равны *l* или $l\sqrt{2}$ в соответствии с рисунком.

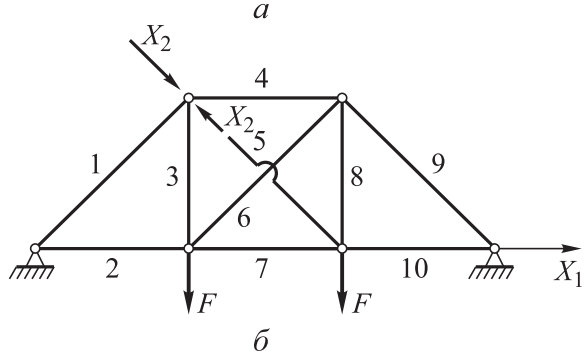
Ферма два раза статически неопределима: один раз внешним и один раз внутренним образом. Выбираем основную систему, заменяя правую шарнирную опору катком и разрезая стержень *5* (рис. 6.18, *б*). Канонические уравнения имеют вид

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 = -\Delta_{1F};$$

$$\Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 = -\Delta_{2F}.$$



а



б

Рис. 6.18

Определяем коэффициенты этих уравнений. Стержни работают на растяжение и сжатие, поэтому перемещения Δ_{ik} будут определяться нормальными силами, возникающими в стержнях. Так как по длине каждого стержня нормальная сила не меняется, то построение эпюр становится излишним, и мы просто составим табл. 6.1 для усилий, возникающих в стержнях от сил F и от первой и второй единичных сил. Определение сил проводим из условий равновесия узлов. Далее, учитывая, что

$$\Delta_{ik} = \int_0^{l_n} \frac{N_i N_k \, dz}{EA} = \frac{N_i N_k l_n}{EA},$$

где l_n — длина стержня с номером n, вычисляем значения для произведений $N_i N_k l_n$ и результаты снова сводим в табл. 6.1. Затем, суммируя по столбцам таблицы, находим

$$\Delta_{11} = \frac{1}{EA}\sum_{n=1}^{10} N_1^2 l_n = \frac{3l}{EA}; \quad \Delta_{12} = \Delta_{21} = \frac{1}{EA}\sum_{n=1}^{10} N_1 N_2 l_n = -\frac{\sqrt{2}l}{2EA};$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{EA}\sum_{n=1}^{10} N_2^2 l_n = \frac{(2+2\sqrt{2})l}{EA};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EA}\sum_{n=1}^{10} N_F N_1 l_n = \frac{3Fl}{EA}; \quad \Delta_{2F} = \frac{1}{EA}\sum_{n=1}^{10} N_F N_2 l_n = -\frac{\sqrt{2}Fl}{EA}.$$

Канонические уравнения принимают вид

$$3X_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}X_2 = -3F;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}X_1 + 2(1+\sqrt{2})X_2 = \sqrt{2}F,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{10+12\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}F, \quad X_2 = \frac{3\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}F.$$

Теперь, чтобы найти усилия N в каждом из стержней, надо к силе N_F добавить силы N_1 и N_2, увеличенные соответственно в X_1 и X_2 раз. Результаты этой операции приведены в последнем столбце табл. 6.1.

Пример 6.3. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы (рис. 6.19, *а*). Точки A и B рамы связаны между собой податливым стержнем с жесткостью на растяжение E_0A_0.

Система один раз статически неопределима. Разрезая стержень AB в верхней точке, получаем основную систему (рис. 6.19, *б*). Строим, далее, эпюры моментов от заданной силы F и от единичной силы (рис. 6.19, *в* и *г*). Кроме того, на участке AB, где необходимо учесть

Таблица 6.1. **Результаты вычисления усилий в стержнях статически неопределимой фермы**

n	l_n	N_F	N_1	N_2	$N_1^2 l_n$	$N_2^2 l_n$	$N_1 N_2 l_n$	$N_F N_1 l_n$	$N_F N_2 l_n$	N
1	$l\sqrt{2}$	$-F\sqrt{2}$	0	0	0	0	0	0	0	$-F\sqrt{2}$
2	l	F	1	0	l	0	0	Fl	0	$F\dfrac{1}{11+12\sqrt{2}}$
3	l	F	0	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}l$	0	0	$-F\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$	$F\dfrac{8+12\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
4	l	$-F$	0	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}l$	0	0	$F\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$	$-F\dfrac{14+12\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
5	$l\sqrt{2}$	0	0	1	0	$l\sqrt{2}$	0	0	0	$F\dfrac{3\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
6	$l\sqrt{2}$	0	0	1	0	$l\sqrt{2}$	0	0	0	$F\dfrac{3\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
7	l	F	1	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	l	$\dfrac{1}{2}l$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$	Fl	$-F\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$	$-F\dfrac{2}{11+12\sqrt{2}}$
8	l	F	0	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}l$	0	0	$-F\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$	$F\dfrac{8+12\sqrt{2}}{11+12\sqrt{2}}$
9	$l\sqrt{2}$	$-F\sqrt{2}$	0	0	0	0	0	0	0	$-F\sqrt{2}$
10	l	F	1	0	l	0	0	Fl	0	$F\dfrac{1}{11+12\sqrt{2}}$

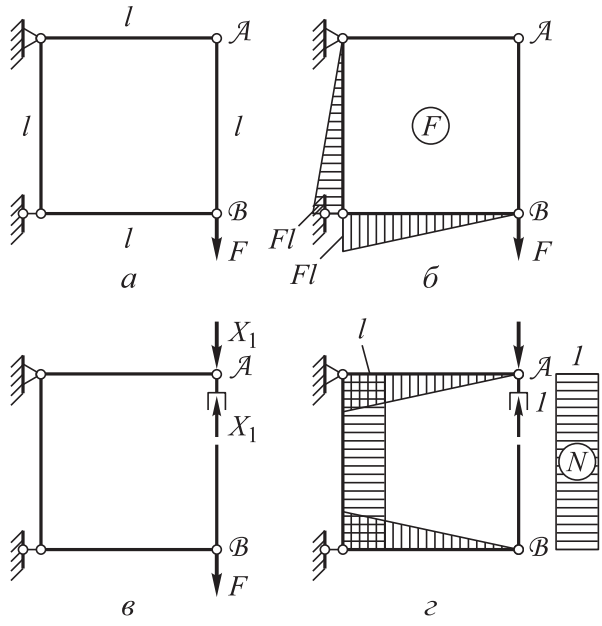


Рис. 6.19

растяжение, строим эпюру нормальной силы N. Вычисляем коэффициенты канонического уравнения

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

проводя перемножение не только эпюр изгибающих моментов, но и растягивающей силы:

$$\Delta_{11} = \frac{5l^3}{3EJ} + \frac{l}{E_0A_0}; \quad \Delta_{1F} = -\frac{5Fl^3}{6EJ}.$$

Определяем X_1:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\Delta_{11}} = \frac{F}{2}\frac{1}{1+\dfrac{3EJ}{5E_0A_0l^2}}.$$

Как видим, усилие в стержне зависит от отношения жесткости рамы на изгиб к жесткости стержня AB на растяжение. Если жесткость стержня AB очень велика, то $X_1 = F/2$, и стержень воспринимает половину силы F. Если стержень AB очень податлив, то $X_1 \to 0$, и вся сила F воспринимается рамой.

На рис. 6.20 представлена эпюра изгибающих моментов в раме и форма ее изогнутой оси.

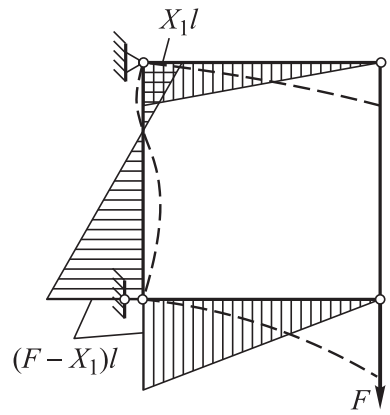


Рис. 6.20

6.4. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости

Положим, имеется некоторая симметричная рама (рис. 6.21, *а*). Ее правую часть можно рассматривать как зеркальное отображение левой части относительно плоскости симметрии. При расчете таких рам оказывается возможным упростить решение задачи и снизить число искомых силовых факторов.

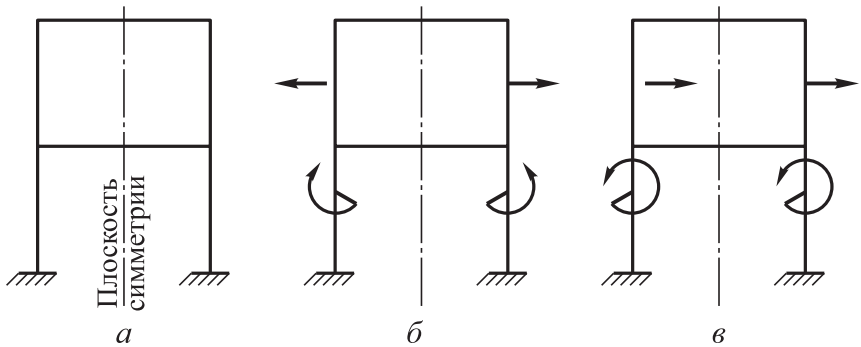


Рис. 6.21

Рассмотрим случаи нагружения рамы симметричной и кососимметричной нагрузками. Под симметричной нагрузкой будем понимать такую, при которой все внешние силы, приложенные к правой части рамы, являются зеркальным отображением сил, приложенных к ее левой части (рис. 6.21, *б*). Под кососимметричной, или антисимметричной, нагрузкой будем понимать такую, при которой силы, приложенные к правой половине рамы, также являются зеркальным отображением сил, приложенных к ее левой половине, но противоположны им по знаку (рис. 6.21, *в*).

Аналогично классифицируем и внутренние силовые факторы. Рассмотрим для этого некоторое произвольное сечение рамы, в котором возникает шесть силовых факторов. В правой и левой плоскостях произведенного сечения (рис. 6.22) силы и моменты равны. Посмотрим, какие из шести силовых факторов образуют зеркальное отображение относительно плоскости сечения. Такими оказываются три: два изгибающих момента и нормальная сила. Будем их называть *симметричными внутренними* факторами. Крутящий момент и обе поперечные силы в принятой терминологии должны быть названы *кососимметричными* факторами. Каждый из них противоположен по знаку зеркальному отображению взаимного фактора. Нетрудно теперь доказать следующие положения.

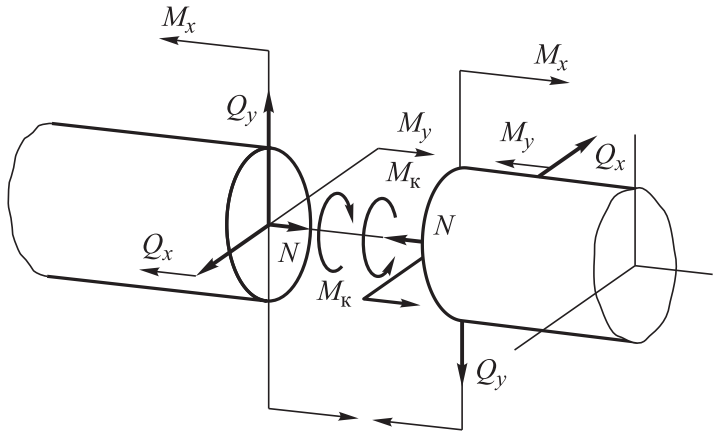


Рис. 6.22

У симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные силовые факторы, а при кососимметричной внешней нагрузке — симметричные силовые факторы.

Обратимся к симметричной раме, например к показанной на рис. 6.21, и выберем основную систему, разрезая раму по плоскости симметрии (рис. 6.23). Обозначим через X_1 и X_2 кососимметричные, а через X_3, X_4, X_5, X_6 — симметричные силовые факторы и выпишем систему канонических уравнений. В данном случае их будет шесть:

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 + \Delta_{13}X_3 + \Delta_{14}X_4 + \Delta_{15}X_5 + \Delta_{16}X_6 = -\Delta_{1F};$$

$$\Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 + \Delta_{23}X_3 + \Delta_{24}X_4 + \Delta_{25}X_5 + \Delta_{26}X_6 = -\Delta_{2F};$$

$$\Delta_{31}X_1 + \Delta_{32}X_2 + \Delta_{33}X_3 + \Delta_{34}X_4 + \Delta_{35}X_5 + \Delta_{36}X_6 = -\Delta_{3F};$$

$$\Delta_{41}X_1 + \Delta_{42}X_2 + \Delta_{43}X_3 + \Delta_{44}X_4 + \Delta_{45}X_5 + \Delta_{46}X_6 = -\Delta_{4F};$$

$$\Delta_{51}X_1 + \Delta_{52}X_2 + \Delta_{53}X_3 + \Delta_{54}X_4 + \Delta_{55}X_5 + \Delta_{56}X_6 = -\Delta_{5F};$$

$$\Delta_{61}X_1 + \Delta_{62}X_2 + \Delta_{63}X_3 + \Delta_{64}X_4 + \Delta_{65}X_5 + \Delta_{66}X_6 = -\Delta_{6F}.$$

Заметим теперь, что в этих уравнениях многие из коэффициентов обращаются в нуль. Это будут все коэффициенты, у которых один индекс принадлежит симметричному, а другой — кососимметричному фактору. Например, обращается в нуль коэффициент Δ_{13}. Индекс 1 принадлежит кососимметричному фактору (X_1 и X_2 — кососимметричные факторы), а индекс 3 — симметричному

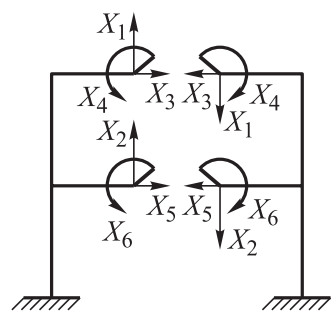
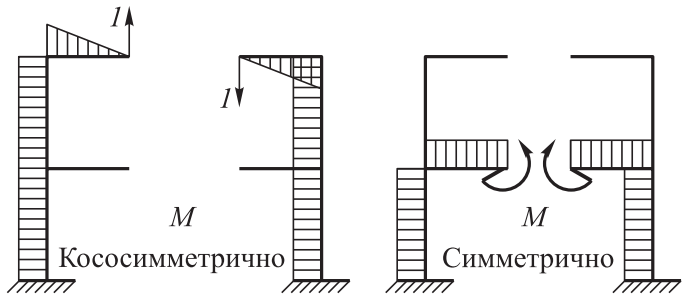


Рис. 6.23

фактору (X_3, X_4, X_5 и X_6 — симметричные факторы). Обращаются также в нуль Δ_{14}, Δ_{15}, Δ_{16}, Δ_{23}, Δ_{24} и т. д.

Происходит это потому, что в симметричной раме не возникает взаимных кососимметричных перемещений под действием симметричных нагрузок. Точно так же не возникает симметричных перемещений под действием кососимметричных факторов. Сказанное становится еще более очевидным, если учесть, что в рассматриваемой системе эпюра изгибающих моментов от кососимметричных факторов будет кососимметричной (рис. 6.24, *а*), а от симметричных факторов — симметричной (рис. 6.24, *б*). При



а *б*

Рис. 6.24

перемножении таких эпюр, естественно, получим нуль, в то время как перемножение кососимметричной эпюры на кососимметричную и симметричной на симметричную дает результат, отличный от нуля.

Итак, вычеркивая из системы уравнений коэффициенты, обращающиеся в нуль, получаем

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 = -\Delta_{1F};$$

$$\Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 = -\Delta_{2F};$$

$$\Delta_{33}X_3 + \Delta_{34}X_4 + \Delta_{35}X_5 + \Delta_{36}X_6 = -\Delta_{3F};$$

$$\Delta_{43}X_3 + \Delta_{44}X_4 + \Delta_{45}X_5 + \Delta_{46}X_6 = -\Delta_{4F};$$

$$\Delta_{53}X_3 + \Delta_{54}X_4 + \Delta_{55}X_5 + \Delta_{56}X_6 = -\Delta_{5F};$$

$$\Delta_{63}X_3 + \Delta_{64}X_4 + \Delta_{65}X_5 + \Delta_{66}X_6 = -\Delta_{6F}.$$

Как видим, система уравнений распалась на две независимые.

Теперь положим, что внешняя нагрузка является симметричной. Из высказанных выше соображений следует, что $\Delta_{1F} = \Delta_{2F} = 0$. Первая система уравнений становится однородной. Тогда $X_1 = 0$, $X_2 = 0$.

Следовательно, при симметричной нагрузке кососимметричные силовые факторы в плоскости симметрии обращаются в нуль. При кососимметричной нагрузке $\Delta_{3F} = \Delta_{4F} = \Delta_{5F} = \Delta_{6F} = 0$. Тогда $X_3 = 0$, $X_4 = 0$, $X_5 = 0$, $X_6 = 0$. В этом случае в плоскости симметрии обращаются в нуль симметричные силовые факторы. Все сказанное, понятно, сохраняет силу не только для плоских, но и для пространственных рам при любой степени статической неопределимости.

Если нагрузка, приложенная к симметричной раме, не обладает ни прямой, ни косой симметрией, всегда имеется возможность разложить ее на кососимметричную и симметричную, как это показано, например, на рис. 6.25. При этом задача распадается на две: отдельно рассматривают симметричные рамы с кососимметричной и с симметричной нагрузкой. Внутренние силовые факторы в раме определяют в дальнейшем наложением полученных решений.

В случае если рама геометрически кососимметрична (рис. 6.26), можно также путем сопоставления эпюр для двух половин рамы получить упрощения в системе канонических уравнений. Нетрудно, например, таким способом установить, что для рамы, показанной на рис. 6.26, при выбранной основной системе $\Delta_{13} = 0$, $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{1F} = 0$, $\Delta_{2F} = 0$. Тогда уравнения принимают вид

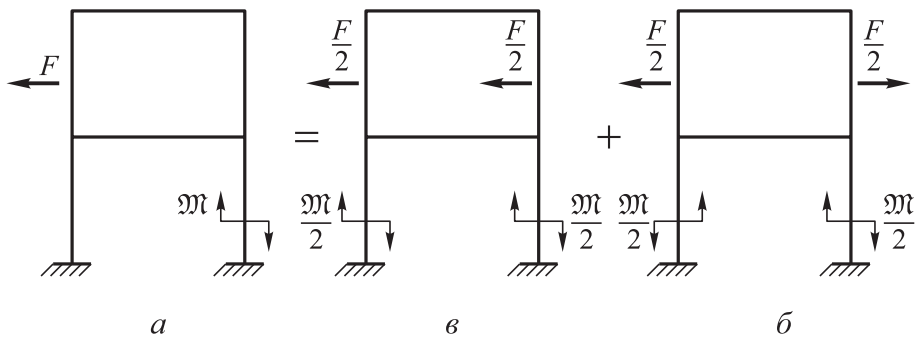


Рис. 6.25

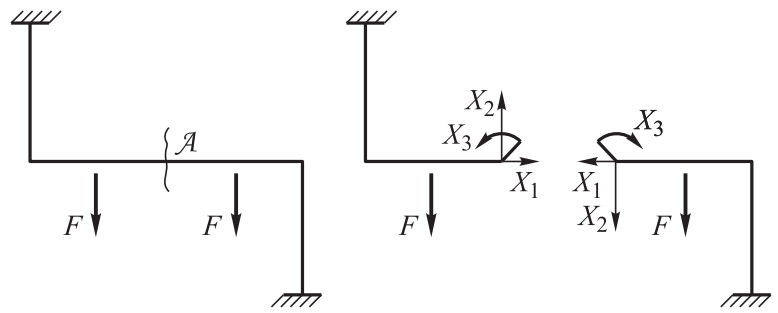


Рис. 6.26

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 = 0; \qquad \Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 = 0; \qquad \Delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

Следовательно, в сечении A возникает только изгибающий момент, а нормальная и поперечная силы обращаются в нуль.

Пример 6.4. Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюру изгибающих моментов для рамы, показанной на рис. 6.27, *а*.

Рама симметричная и нагружена кососимметрично расположенными силами. Разрезаем ее по оси симметрии и в произведенном сечении прикладываем силы X_1 (рис. 6.27, *б*). Строим эпюры моментов (рис. 6.27, *в*, *г*). Симметричные силовые факторы равны здесь нулю.

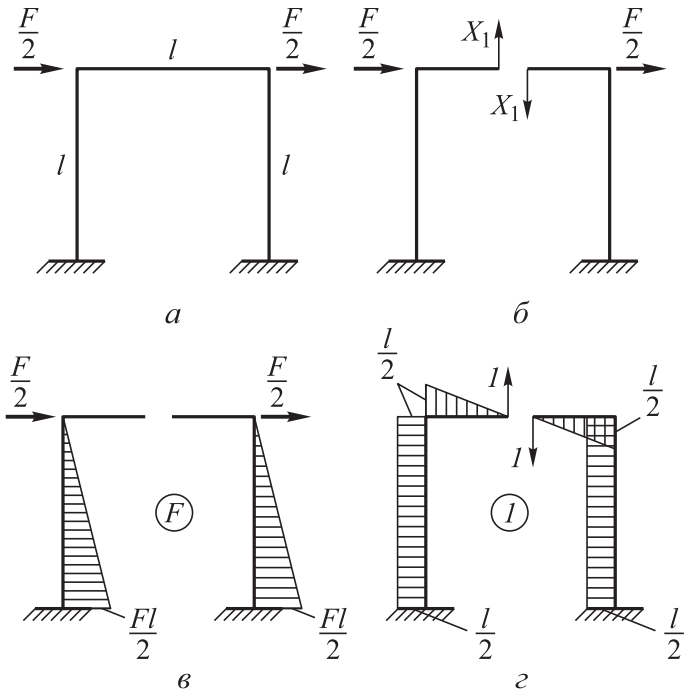


Рис. 6.27

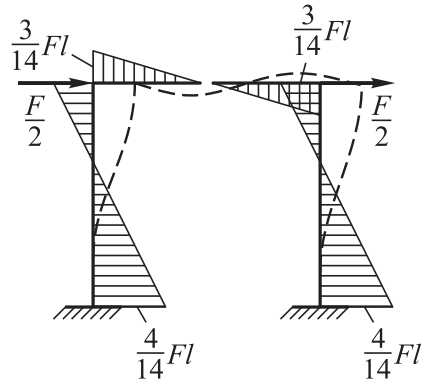


Рис. 6.28

Взамен трех уравнений получаем одно: $\Delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$, где $\Delta_{11} = \dfrac{7l^3}{12EJ}$, $\Delta_{1F} = -\dfrac{Fl^3}{4EJ}$, откуда $X_1 = \dfrac{3}{7}F$. Эпюра изгибающих моментов и форма изогнутой оси рамы представлены на рис. 6.28.

Пример 6.5. Определить наибольший изгибающий момент в кольцевой раме, нагруженной двумя силами F (рис. 6.29).

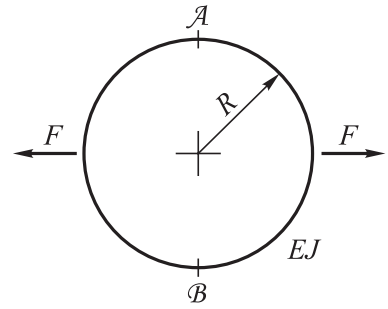


Рис. 6.29

Рама три раза статически неопределима, но условия симметрии позволяют сократить число неизвестных до одного. Разрежем раму по вертикальному диаметру $АВ$ (рис. 6.30, *а*), т. е. по оси симметрии. В сечениях $А$ и $В$ поперечные силы равны нулю. Рама одновременно симметрична относительно линии действия сил. Поэтому $N_А = N_В = \frac{F}{2}$, $M_А = M_В$. Обозначим момент через X_1.

В итоге получаем эквивалентную систему*, представленную на рис. 6.30, *б*.

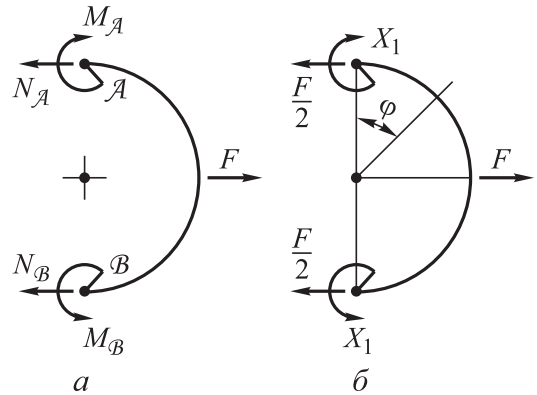


Рис. 6.30

В сечении с угловой координатой φ момент от заданных сил F будет $M_F = \frac{FR}{2}(1-\cos\varphi)$. Момент единичного силового фактора равен $M_1 = -1$.

Определяем коэффициенты канонического уравнения

$$\Delta_{11} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_1^2 R\,d\varphi}{EJ} = \frac{\pi R}{2EJ}; \quad \Delta_{1F} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_F M_1 R\,d\varphi}{EJ} = -\frac{FR^2}{2EJ}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

* Эквивалентной называется основная система, дополненная внешней нагрузкой и силовыми факторами, приложенными по направлению отброшенных связей. (*Примеч. ред.*)

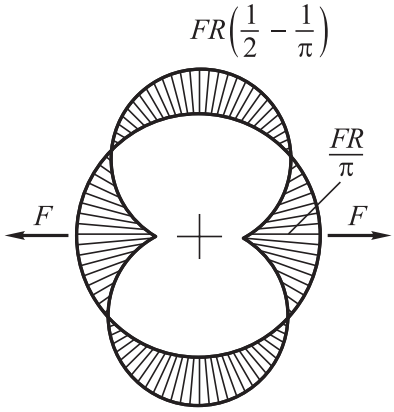


Рис. 6.31

Тогда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\Delta_{11}} = FR\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right).$$

Изгибающий момент в произвольном сечении равен алгебраической сумме момента M_F от заданных сил и момента M_1, увеличенного в X_1 раз. В итоге

$$M = M_F - X_1 = FR\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\cos\varphi\right).$$

Согласно этому выражению, на рассматриваемой четверти окружности может быть построена эпюра изгибающего момента, которую затем по условиям симметрии можно распространить и на другие участки окружности (рис. 6.31). Наибольший изгибающий момент возникает в точках приложения сил F и равен FR/π.

Пример 6.6. Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюру моментов для рамы, показанной на рис. 6.32, *а*.

Рама геометрически кососимметрична. Разрезаем ее в центре симметрии и прикладываем в сечении три неизвестных силовых фактора (рис. 6.32, *б*). Строим все четыре эпюры моментов (одну — от заданных сил и три — от единичных силовых факторов). Сопоставляя эти эпюры (рис. 6.33), убеждаемся, что $\Delta_{2F} = \Delta_{3F} = \Delta_{12} = \Delta_{13} = 0$. Следовательно, система трех канонических уравнений принимает вид

$$\Delta_{11}X_1 = -\Delta_{1F}; \qquad \Delta_{22}X_2 + \Delta_{23}X_3 = 0; \qquad \Delta_{32}X_2 + \Delta_{33}X_3 = 0,$$

откуда $X_2 = X_3 = 0$.

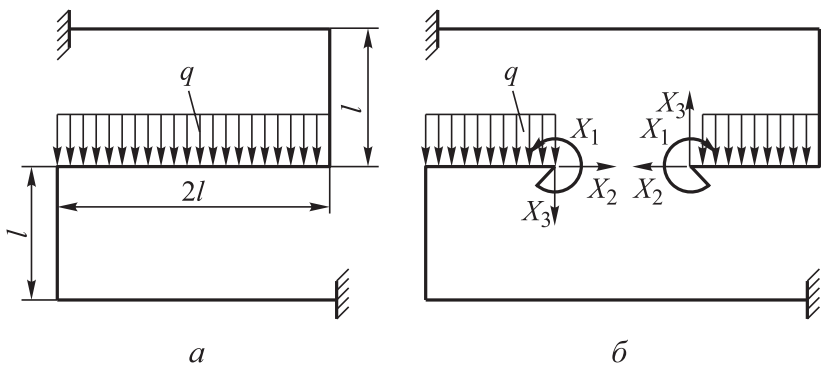


Рис. 6.32

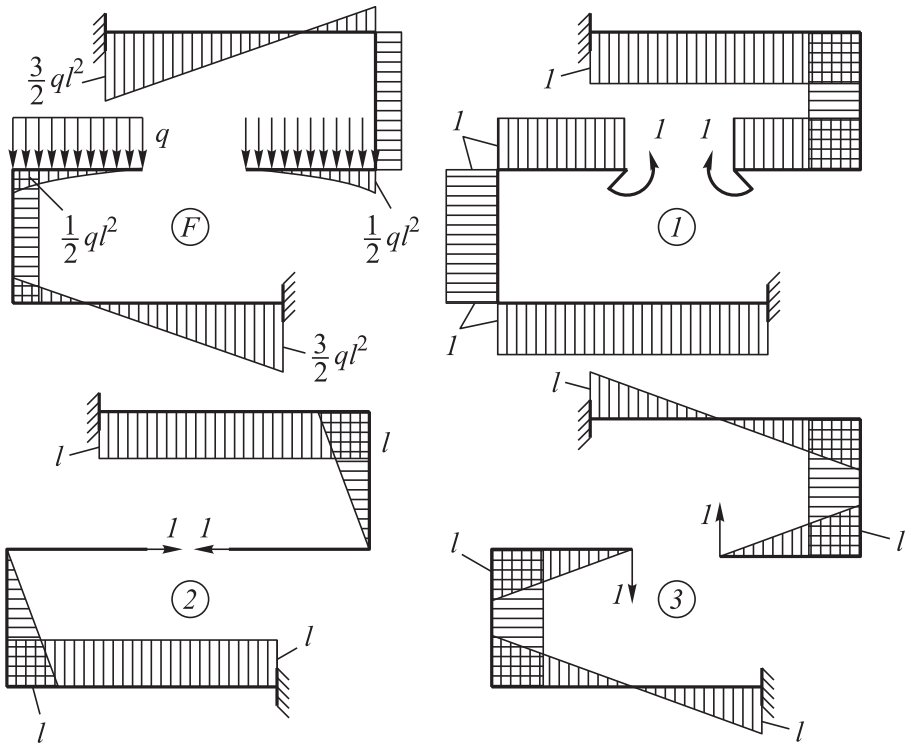


Рис. 6.33

Далее, перемножая эпюры, находим

$$\Delta_{11} = \frac{8l}{EJ}; \quad \Delta_{1F} = \frac{2ql^3}{3EJ};$$

$$X_1 = -ql^2/12.$$

Суммарная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 6.34.

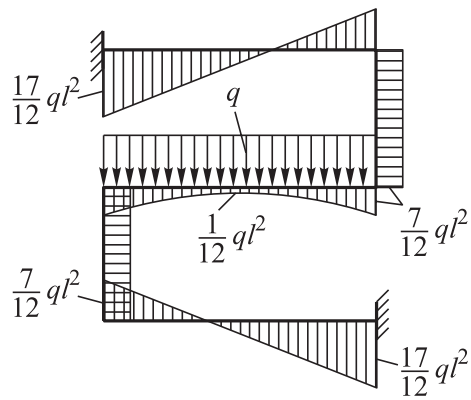


Рис. 6.34

Рассмотрим еще один пример, не относящийся к свойствам симметрии, но наглядно иллюстрирующий значение правильно выбранной основной системы при раскрытии статической неопределимости.

Пример 6.7. Раскрыть статическую неопределимость стержня постоянного сечения, расположенного на десяти равноотстоящих одна от другой опорах (рис. 6.35, *а*).

В данном случае (и не только в данном, но и вообще для многопролетного стержня) удобно образовать основную систему, врезая

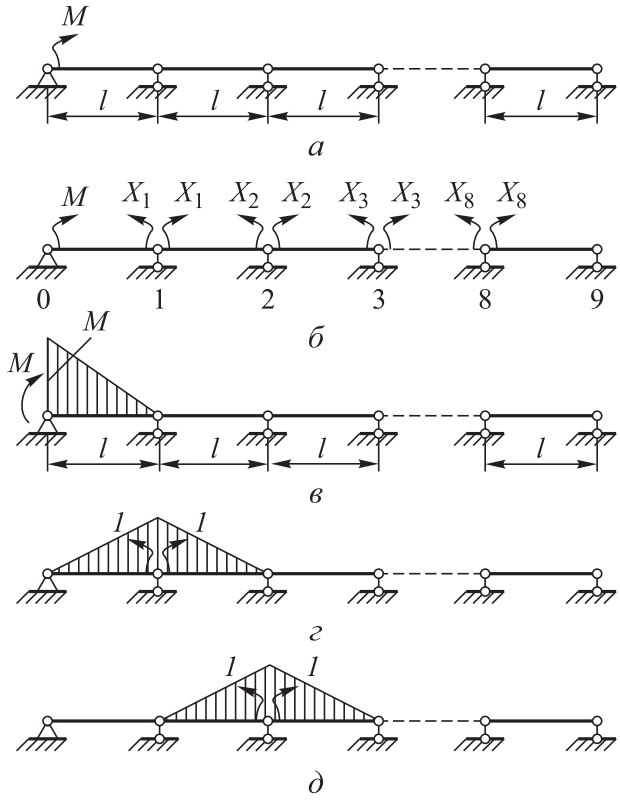


Рис. 6.35

на опорах шарниры и вводя в качестве неизвестных так называемые опорные моменты (рис. 6.35, *б*). Таких моментов будет восемь.

Построим эпюры от заданного и от единичных моментов (рис. 6.35, *в* — *д*). Эпюры от единичных моментов представляют собой треугольники, расположенные лишь на смежных с опорой пролетах, а эпюра от внешних сил изображается треугольником на первом пролете.

Составим систему из восьми уравнений. В первом уравнении отличными от нуля будут следующие коэффициенты:

$$\Delta_{11} = \frac{2l}{3EJ}; \quad \Delta_{12} = \frac{l}{6EJ}; \quad \Delta_{1F} = \frac{Ml}{6EJ}.$$

Во втором уравнении также обратятся в нуль все коэффициенты, кроме трех:

$$\Delta_{21} = \frac{l}{6EJ}; \quad \Delta_{22} = \frac{2l}{3EJ}; \quad \Delta_{23} = \frac{l}{6EJ}$$

и т. д. В итоге после сокращений система уравнений примет вид

$$
\begin{aligned}
4X_1 + X_2 + \ 0 \ldots \quad &= -M;\\
X_1 + \ 4X_2 + X_3 + \ 0 + \ldots \quad &= 0;\\
0 + \ X_2 + \ 4X_3 + X_4 + \ 0 + \ldots \quad &= 0;\\
0 + \ X_3 + \ 4X_4 + X_5 + 0 + \ldots \quad &= 0;\\
\ldots\ldots\ldots

Определим корни этого уравнения: $a_1 = -2 + \sqrt{3}$, $a_2 = -2 - \sqrt{3}$.

Теперь построим более общее выражение:

$$X_i = Aa_1^i + B_2^i.$$

Опять удовлетворены все промежуточные уравнения. Но теперь мы располагаем двумя константами A и B, которые можно подобрать так, чтобы были удовлетворены первое и последнее уравнения.

Подставляя в первое уравнение X_1 и X_2, получим

$$A + B = M.$$

Пусть крайняя правая опора имеет индекс n. Перепишем последнее уравнение нашей системы в виде

$$X_{n-2} + 4X_{n-1} + X_n - X_n = 0,$$

откуда

$$Aa_1^n + Ba_2^n = 0.$$

Решая совместно оба уравнения, получим

$$A = M\frac{a_2^n}{a_2^n - a_1^n}; \quad B = -M\frac{a_1^n}{a_2^n - a_1^n}.$$

Таким образом,

$$X_i = M\frac{a_2^n a_1^i - a_1^n a^i}{a_2^n - a_1^n}.^2$$

Но так как $a_1 a_2 = 1$, то

$$X_i = M\frac{a_2^{n-i} - a_1^{n-i}}{a_2^n - a_1^n}.$$

Решение получено для любого числа опор. В данном случае мы имеем 10 опор и $n = 9$. Подставляя значения a_1 и a_2, легко обнаружить, что изгибающие моменты на опорах с увеличением индекса i, т. е. при счете слева направо, имеют чередующиеся знаки и быстро убывают по абсолютной величине. Момент X_1 примерно в четыре раза меньше момента M. На предпоследней опоре он оказывается равным $M/40545$. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 6.36.

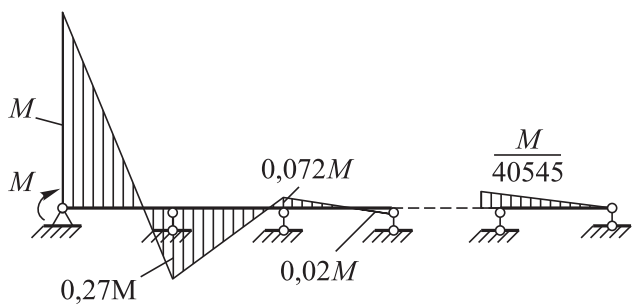


Рис. 6.36

6.5. Плоскопространственные и пространственные системы

Рассмотрим основные особенности плоскопространственных систем. Как уже указывалось выше, плоскопространственными называются системы, плоские в геометрическом отношении, но нагруженные силовыми факторами, перпендикулярными плоскости рамы. Примеры плоскопространственных систем представлены на рис. 6.37.

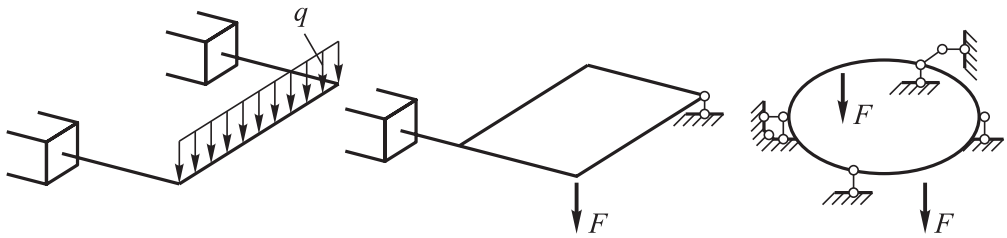


Рис. 6.37

Особенностью этих систем является то, что во всех поперечных сечениях внутренние силовые факторы, лежащие в плоскости рамы, равны нулю. Доказывается это так же, как и при рассмотрении свойств с учетом прямой и косой симметрии.

Положим, имеется некоторая плоскопространственная рама (рис. 6.38). Разрезаем эту раму в произвольном сечении, превращая ее в статически определимую. Обозначим через X_1, X_2, X_3 силовые факторы, плоскость действия которых перпендикулярна плоскости рамы. Это — изгибающий и крутящий моменты и вертикальная поперечная сила. Остальные три силовых фактора в сечении обо-

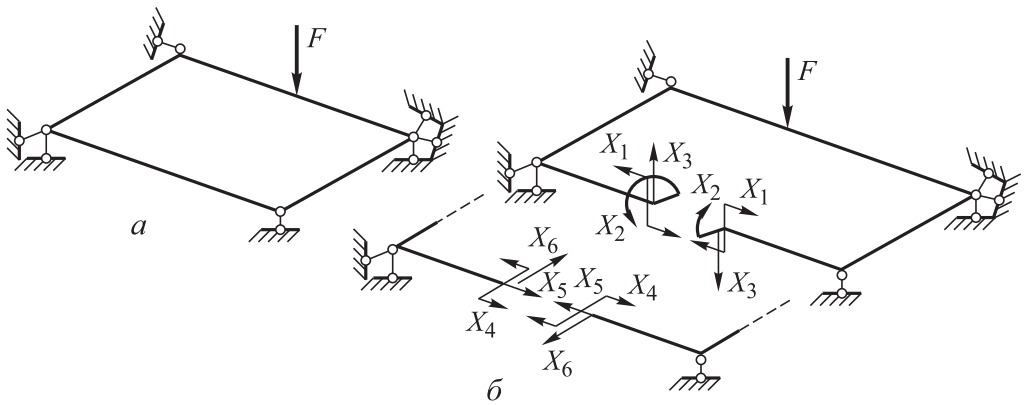


Рис. 6.38

значим через X_4, X_5, X_6. На рис. 6.38 эти силовые факторы, возникающие в плоскости рамы, вынесены для ясности в сторону.

Система канонических уравнений

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 + \Delta_{13}X_3 + \Delta_{14}X_4 + \Delta_{15}X_5 + \Delta_{16}X_6 = -\Delta_{1F};$$

$$\Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 + \Delta_{23}X_3 + \Delta_{24}X_4 + \Delta_{25}X_5 + \Delta_{26}X_6 = -\Delta_{2F};$$

$$\Delta_{31}X_1 + \Delta_{32}X_2 + \Delta_{33}X_3 + \Delta_{34}X_4 + \Delta_{35}X_5 + \Delta_{36}X_6 = -\Delta_{3F};$$

$$\Delta_{41}X_1 + \Delta_{42}X_2 + \Delta_{43}X_3 + \Delta_{44}X_4 + \Delta_{45}X_5 + \Delta_{46}X_6 = -\Delta_{4F};$$

$$\Delta_{51}X_1 + \Delta_{52}X_2 + \Delta_{53}X_3 + \Delta_{54}X_4 + \Delta_{55}X_5 + \Delta_{56}X_6 = -\Delta_{5F};$$

$$\Delta_{61}X_1 + \Delta_{62}X_2 + \Delta_{63}X_3 + \Delta_{64}X_4 + \Delta_{65}X_5 + \Delta_{66}X_6 = -\Delta_{6F}$$

распадается здесь на две независимые системы, поскольку при перемножении эпюр от первых трех факторов на эпюры от трех последних получим всегда нуль:

$$\Delta_{14} = \Delta_{15} = \Delta_{16} = \Delta_{24} = \ldots = 0.$$

При этом, естественно, предполагаем, что одна из главных осей сечения расположена в плоскости рамы.

Таким образом, получаем

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 + \Delta_{13}X_3 = -\Delta_{1F};$$

$$\Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 + \Delta_{23}X_3 = -\Delta_{2F};$$

$$\Delta_{31}X_1 + \Delta_{32}X_2 + \Delta_{33}X_3 = -\Delta_{3F};$$

$$\Delta_{44}X_4 + \Delta_{45}X_5 + \Delta_{46}X_6 = -\Delta_{4F};$$

$$\Delta_{54}X_4 + \Delta_{55}X_5 + \Delta_{56}X_6 = -\Delta_{5F};$$

$$\Delta_{64}X_4 + \Delta_{65}X_5 + \Delta_{66}X_6 = -\Delta_{6F}.$$

Если внешние силы действуют в плоскости рамы, т. е. если рама является плоской в обычном понимании, то обращаются в нуль Δ_{1F}, Δ_{2F} и Δ_{3F}, и внутренние силовые факторы X_1, X_2, X_3 равны нулю. Это значит, что для плоской рамы возникают только внутренние факторы, действующие в ее плоскости.

Если же внешняя нагрузка перпендикулярна плоскости рамы, то равны нулю Δ_{4F}, Δ_{5F} и Δ_{6F}. Тогда равны нулю и X_4, X_5, X_6. В заданной для расчета раме, как видим, сохраняются внутренние силовые факторы, плоскости действия которых перпендикулярны к плоскости рамы.

При смешанной нагрузке (рис. 6.39), действующей на плоскую раму, всегда имеется возможность разложить силы по плоскостям

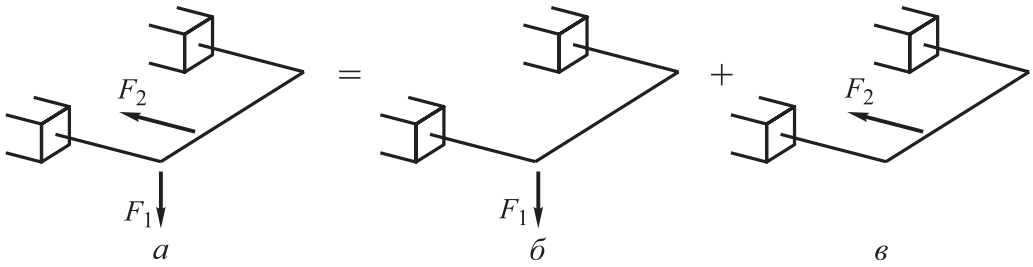


Рис. 6.39

и рассмотреть отдельно плоскую и плоскопространственную системы. Внутренние силовые факторы определяют в дальнейшем как результат наложения полученных решений.

Перейдем к пространственным статически неопределимым системам. Исследование таких систем не содержит в себе принципиальных трудностей. Понятно, что для пространственных систем задача раскрытия статической неопределимости выглядит, как правило, более громоздкой, чем для плоских систем. Однако канонические уравнения метода сил остаются теми же, и их коэффициенты определяют при помощи тех же приемов.

Особого внимания при раскрытии статической неопределимости пространственных рам требует проверка основной системы на кинематическую неизменяемость. Случается, что пространственная система представляет собой механизм, но обнаруживается это только при внимательном рассмотрении. Например, системы с пространственными шарнирами, показанные на рис. 6.40, являются кинематически изменяемыми Для каждой из них наложенные связи не препятствуют вращению системы относительно осей, отмеченных на рис. 6.40 штриховыми линиями.

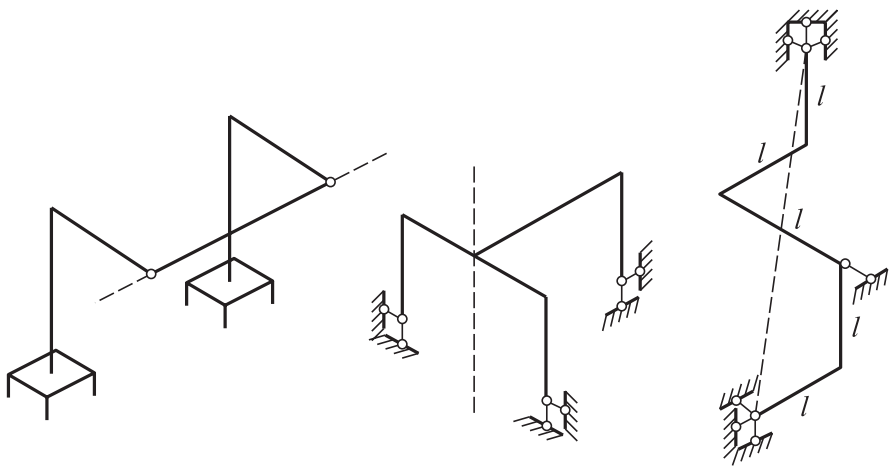


Рис. 6.40

Проверку пространственной системы на кинематическую неизменяемость проводят обычно при помощи проб, т. е. путем последовательных попыток мысленно сместить раму или некоторые ее элементы относительно неподвижных осей.

В связи со сказанным следует в заключение отметить, что требование кинематической неизменяемости, которое подчеркивалось выше, вообще говоря, не всегда является обязательным. В некоторых случаях кинематическая изменяемость основной системы может быть допущена, но этот вопрос решают обязательно в связи с особенностями приложенных к системе сил. Так, в примере 6.5 кольцевая рама была рассечена двумя сечениями (см. рис. 6.30). Части рамы получили при этом возможность свободно перемещаться одна относительно другой. Однако полученная кинематическая изменяемость не оказалась существенной, поскольку и система заданных, и система единичных сил были уравновешены независимо одна от другой.

Пример 6.8. Раскрыть статическую неопределимость рамы, показанной на рис. 6.41, *а*. Жесткость составляющих стержней на изгиб равна EJ, а на кручение $GJ_к$.

Рама является плоскопространственной. Поэтому в любом ее поперечном сечении силовые факторы, лежащие в плоскости рамы,

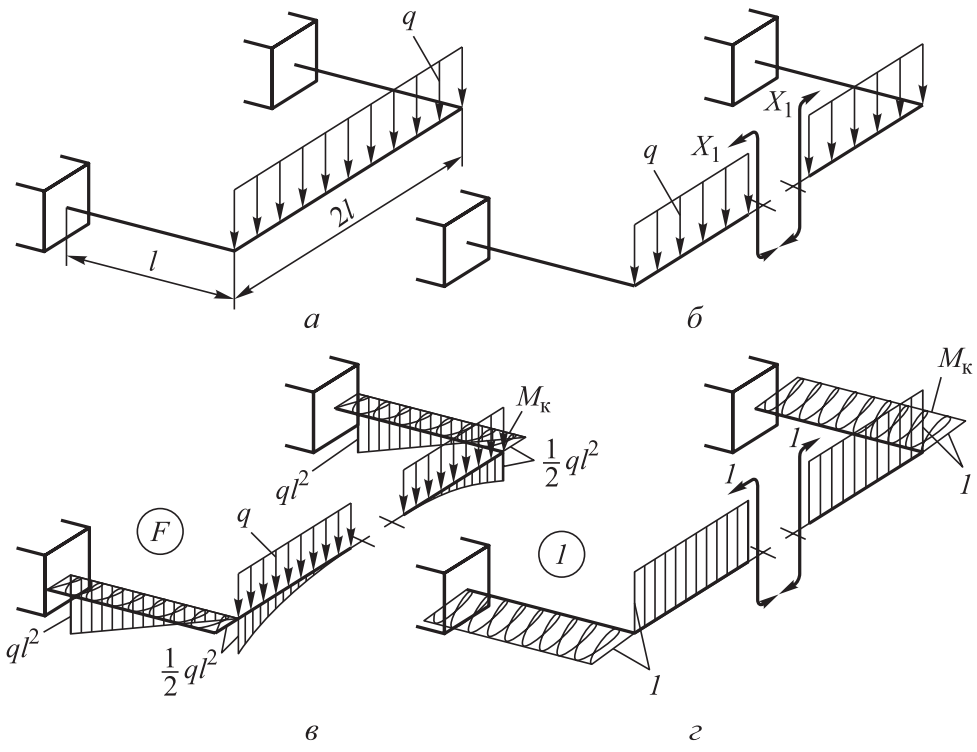


Рис. 6.41

равны нулю. Кроме того, рама симметрична. Следовательно, в поперечном сечении в плоскости симметрии обращаются в нуль кососимметричные факторы — крутящий момент и вертикальная поперечная сила. Отличным от нуля остается только изгибающий момент в вертикальной плоскости. Разрезаем раму по плоскости симметрии и прикладываем момент X_1 (рис. 6.41, *б*). Строим эпюру моментов от заданных сил и единичного момента (рис. 6.41, *в* и *г*) и находим коэффициенты канонического уравнения

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Получаем

$$\Delta_{11} = \frac{2l}{EJ} + \frac{2l}{GJ_к}; \quad \Delta_{1F} = -\frac{ql^3}{3EJ} - \frac{ql^3}{GJ_к}.$$

Тогда

$$X_1 = \frac{ql^2}{6}\frac{1+3EJ/(GJ_к)}{1+EJ/(GJ_к)}.$$

Если рама состоит из стержней, имеющих круглое поперечное сечение, то

$$\frac{EJ}{GJ_к} = 1+\mu \approx 1{,}3; \quad X_1 = 0{,}355ql^2.$$

Суммарная эпюра изгибающих моментов дана на рис. 6.42.

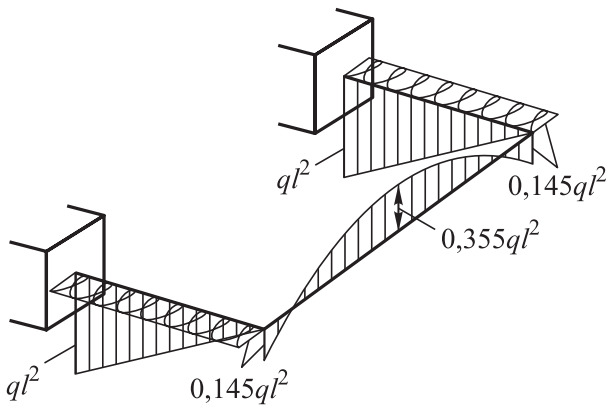


Рис. 6.42

Пример 6.9. Раскрыть статическую неопределимость пространственной рамы, показанной на рис. 6.43, *а*. Жесткости на изгиб EJ и на кручение $GJ_к$ для всех элементов рамы одинаковы.

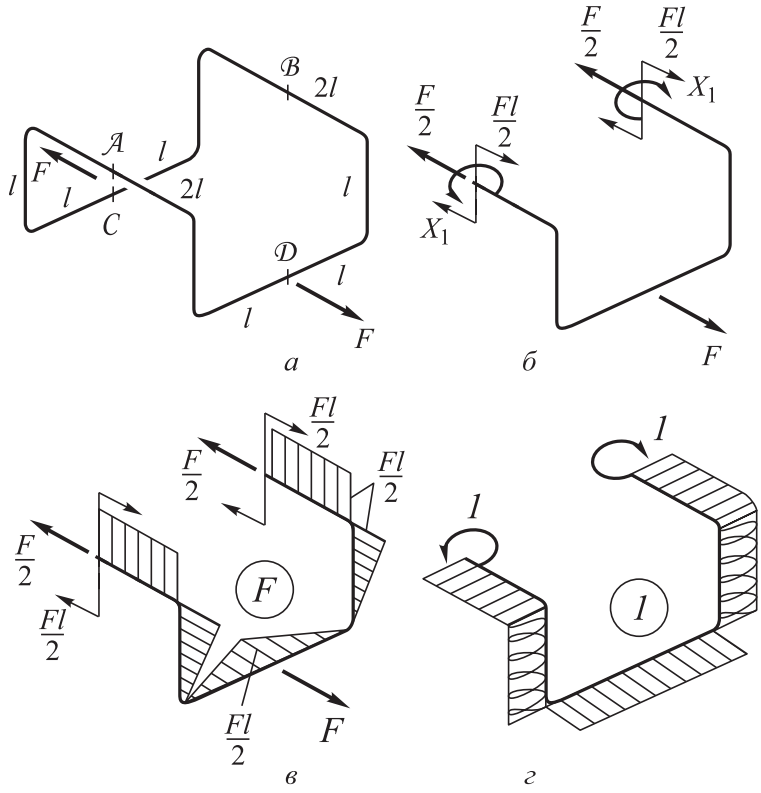


Рис. 6.43

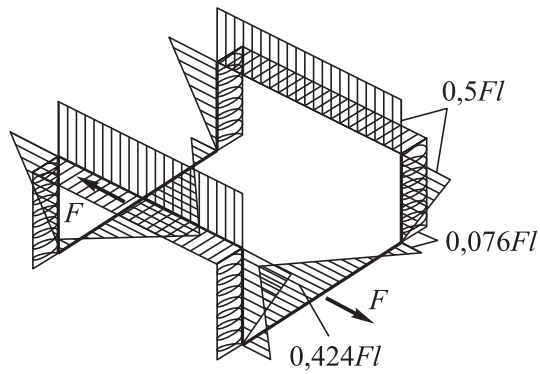


Рис. 6.44

Рама симметрична относительно вертикальных плоскостей AB и CD. Разрезая раму по первой плоскости симметрии, получаем в сечениях только симметричные силовые факторы (рис. 6.43, *б*). Из условий равновесия сразу видно, что нормальная сила в этих сечениях равна $F/2$, а один из моментов равен $Fl/2$. Остается только один неизвестный момент X_1, возникающий в горизонтальной плоскости.

Для половины рамы строим эпюры моментов от заданных сил и от единичного момента (рис. 6.43, *в* и *г*). Перемножая эпюры, находим

$$\Delta_{11} = \frac{4l}{EJ} + \frac{2l}{GJ_к}; \quad \Delta_{1F} = -\frac{Fl^2}{2EJ}.$$

Тогда

$$X_1 = \frac{Fl}{4}\frac{1}{2 + EJ/GJ_к}.$$

Для круглого сечения $EJ/GJ_к \approx 1{,}3$; $X_1 \approx 0{,}076Fl$. Суммарная эпюра моментов дана на рис. 6.44.

6.6. Определение перемещений в статически неопределимых системах

Мы уже знаем, что в любой системе перемещение определяется как результат перемножения эпюры моментов от внешних сил на эпюру моментов от единичной силы, приложенной в точке, перемещение которой надо найти. В статически неопределимых системах, очевидно, для построения эпюры моментов от внешних сил нужно раскрыть статическую неопределимость и построить суммарную эпюру так, как это уже многократно делалось в рассмотренных выше примерах. Когда к такой системе приложена единичная сила, снова возникает вопрос о раскрытии статической неопределимости. Таким образом, получается, что для определения перемещения в статически неопределимых системах нужно дважды раскрывать статическую неопределимость.

Возникающие трудности, однако, легко устраняются. Положим, дана некоторая статически неопределимая система и требуется определить перемещение, например, точки A (рис. 6.45, *а*).

Рассмотрим некоторую основную систему и приложим к ней заданные силы и неизвестные силовые факторы X_1, X_2, X_3

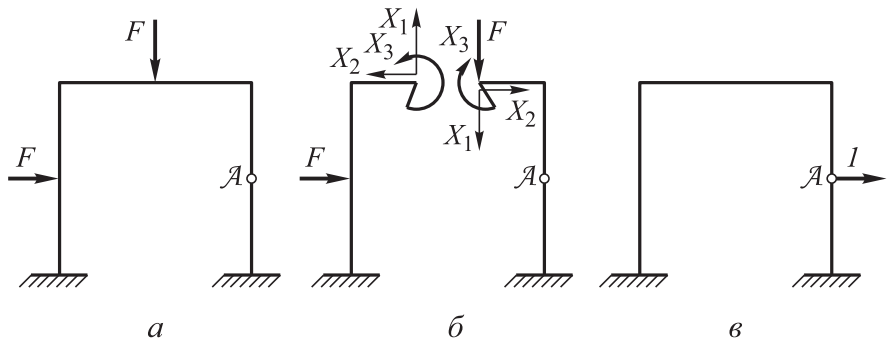


Рис. 6.45

(рис. 6.45, *б*). После того как статическая неопределимость раскрыта и неизвестные найдены, рама, показанная на рис. 6.45, *б*, ничем не отличается от заданной. В частности, и перемещения всех ее точек будут точно такими же, как и у заданной. Поэтому можно рассматривать силы X_1, X_2, X_3 как заданные. Эпюра моментов от сил F, X_1, X_2 и X_3 представляет собой эпюру моментов в статически неопределимой раме. Следовательно, сначала необходимо раскрыть статическую неопределимость и построить суммарную эпюру моментов. Вид этой эпюры, понятно, не зависит от выбора основной системы. Далее, освобождаем систему от внешних сил, в том числе и от сил X_1, X_2 и X_3, и прикладываем единичную силу к статически определимой раме (рис. 6.45, *в*).

Полученную единичную эпюру перемножаем с суммарной эпюрой внешних заданных сил. На практике удобнее умножить единичную эпюру отдельно на эпюры от заданных сил и от силовых факторов X_1, X_2, X_3, а затем полученные результаты алгебраически сложить. Таким образом определяется искомое перемещение. Вторично раскрывать статическую неопределимость, как видим, не нужно.

Пример 6.10. Определить горизонтальное перемещение точки $\mathcal{A}$ в раме, показанной на рис. 6.46, *а*. Эпюра изгибающих моментов для

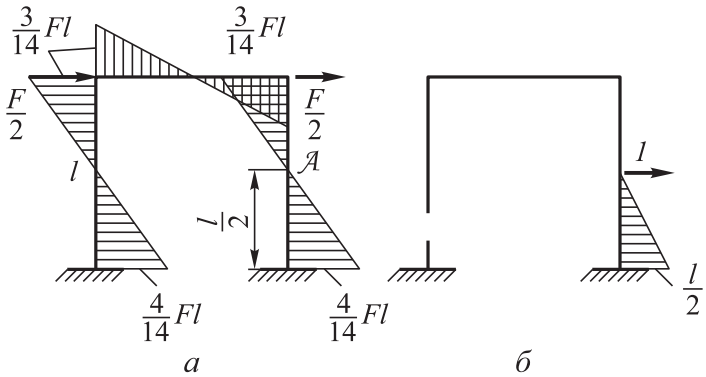
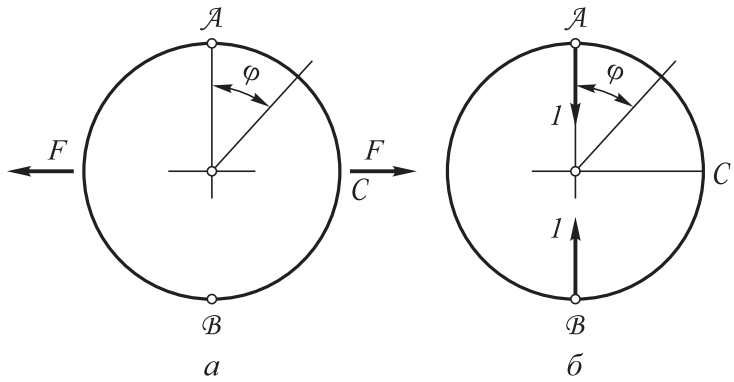


Рис. 6.46

этой рамы уже была построена ранее (см. пример 6.4). Поэтому, считая, что первая часть задачи решена, разрезаем раму в любой точке и к полученной основной системе прикладываем в точке $\mathcal{A}$ единичную силу (рис. 6.46, *б*). Перемножая эпюры, находим $\Delta_{\mathcal{A}} = \frac{17}{672}\frac{Fl^3}{EJ}$.

Пример 6.11. Определить, насколько уменьшится диаметр $\mathcal{AB}$ кольцевой рамы (рис. 6.47, *а*) при нагружении ее силами F. Статическая неопределимость этой рамы также уже была раскрыта ранее (см.



а *б*

Рис. 6.47

пример 6.5). Изгибающий момент для четверти рамы AC оказался в следующей зависимости от угла φ:

$$M = FR\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\cos\varphi\right).$$

Разрезаем раму в произвольном сечении, а в точках A и B прикладываем противоположно направленные единичные силы (рис. 6.47, *б*). В сечении с текущим координатным углом φ имеем $M_1 = R\sin\varphi$. Тогда

$$\Delta_{AB} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{MM_1 R\,d\varphi}{EJ} = \frac{FR^3}{EJ}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right).$$

6.7. О методе перемещений

Метод перемещений отличается от метода сил тем, что при раскрытии статической неопределимости в качестве неизвестных принимают не силы, а перемещения.

Метод перемещений заслуживает столь же уважительного к себе отношения, что и рассмотренный выше метод сил. Нельзя сказать, который из них лучше. Они в основном равноценны. Преимущества одного перед другим определяются особенностями статически неопределимой системы и в какой-то мере привычками и традициями.

Особенно просто методом перемещений можно раскрыть статическую неопределимость систем с малым числом узлов. Рассмотрим пример, очень простой для метода перемещений и вместе с тем сложный для метода сил.

На рис. 6.48 показана система, состоящая из n стержней, связанных в единый шарнирный узел в точке A. Система $n - 2$ раза статически неопределима, и определение усилий в стержнях мето-

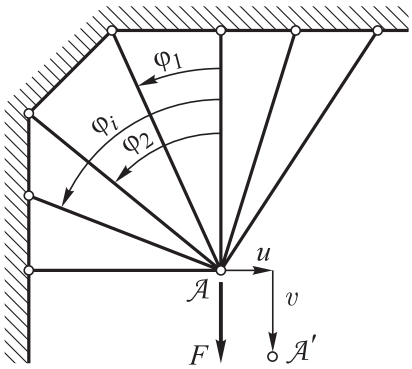


Рис. 6.48

дом сил не сулит ничего радостного, особенно, если стержней много и к тому же они имеют различные длины и различные жесткости при растяжении. Метод перемещений позволяет решать такие задачи неожиданно просто.

Обозначим горизонтальное и вертикальное перемещения узла A через u и v соответственно (см. рис. 6.48). Удлинение i-го стержня определяется суммой проекций u и v на ось стержня, т. е.

$$\Delta_i = u \sin\varphi_i + v \cos\varphi_i.$$

Выражение для растягивающей силы имеет вид

$$N_i = \frac{EA_i}{l_i}(u\sin\varphi_i + v\cos\varphi_i). \qquad (6.4)$$

Напишем два уравнения равновесия для отсеченного узла A:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i \cos\varphi = F; \quad \sum_{i=1}^{n} N \sin\varphi_i = 0.$$

Исключая силы N_i и переходя к перемещениям, получаем два уравнения для вычисления u и v:

$$u\sum_{i=1}^{n}\frac{EA_i}{l_i}\sin\varphi_i\cos\varphi_i + v\sum_{i=1}^{n}\frac{EA_i}{l_i}\cos^2\varphi_i = F;$$

$$u\sum_{i=1}^{n}\frac{EA_i}{l_i}\sin^2\varphi_i + v\sum_{i=1}^{n}\frac{EA_i}{l_i}\sin\varphi_i\cos\varphi_i = 0.$$

После того как перемещения найдены, не представляет труда с помощью выражения (6.4) определить усилие в любом стержне.

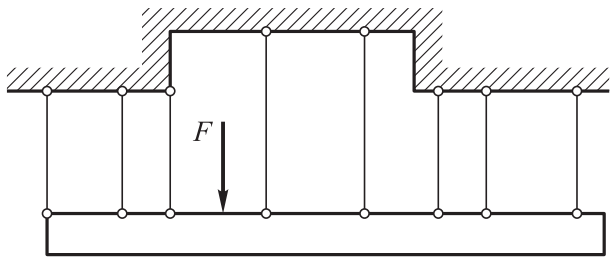


Рис. 6.49

Методом перемещений столь же просто можно раскрыть статическую неопределимость системы, показанной на рис. 6.49, при любом числе поддерживающих стержней. Решение очевидно. Надо ввести вертикальное и угловое перемещения жесткого стержня, выразить через них удлинения и силы, а затем написать в перемещениях два уравнения равновесия.

В то же время, если вернуться к примеру стержневой системы, рассмотренной ранее (см. пример 6.2), то обнаружится, что решение методом сил оказывается более предпочтительным.

При большом числе узлов и конструктивных элементов методы равноценны и как один, так и другой могут быть положены в основу создания машинных алгоритмов так называемого метода конечных элементов для анализа сложных систем стержневого и оболочечного типов.

Глава 7

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ

7.1. Напряженное состояние в точке

Уже на примерах растяжения и сдвига мы имели возможность убедиться в том, что напряжения в площадке, проходящей через заданную точку напряженного тела, зависят от ее ориентации. С поворотом площадки меняются в определенной зависимости и напряжения. Совокупность напряжений, возникающих во множестве площадок, проходящих через рассматриваемую точку, называется *напряженным состоянием* в точке. Напряженное состояние поддается анализу не только в частных случаях растяжения и сдвига, но и в общем случае нагружения тела. В настоящей главе этот вопрос и будет рассмотрен. Заметим, что исследование законов изменения напряжений в точке не является чисто отвлеченным. Оно необходимо для последующего решения более сложных задач и в первую очередь для расчетов на прочность в общих случаях нагружения.

Положим, имеется некоторое тело (не обязательно упругое), нагруженное произвольной системой сил (рис. 7.1). При переходе от точки к точке напряженное состояние меняется достаточно медленно и всегда имеется возможность выбрать в окрестности произвольно взятой точки A (см. рис. 7.1) такую достаточно малую область, для которой напряженное состояние можно было бы рассматривать как однородное. Понятно, что такой подход возможен только в пределах принятой ранее гипотезы сплошной среды, допускающей переход к предельно малым объемам.

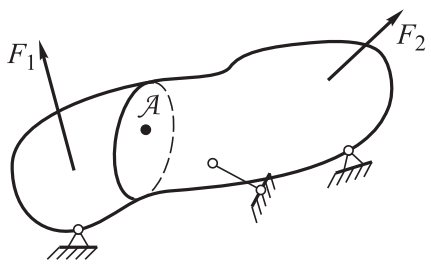


Рис. 7.1

Чтобы охарактеризовать напряженное состояние в точке A, представим себе, что через нее проведены три секущие площадки и установлены возникающие в них напряжения. Затем в окрестности исследуемой точки шестью сечениями выделим элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 7.2). Если размеры параллелепипеда уменьшать, он будет стягиваться в эту точку. В пределе все грани параллелепипеда пройдут через точку A, и напряжения в соответствующих секущих плоскостях можно рассматривать как напряжения в исследуемой точке.

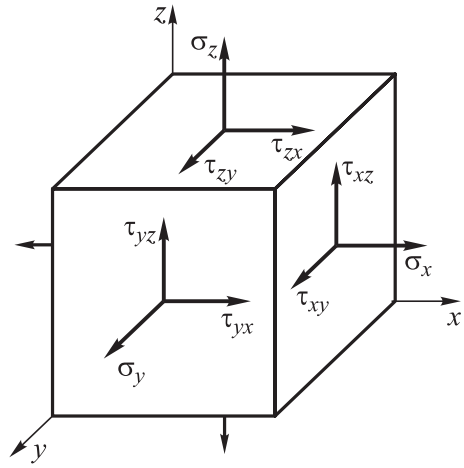


Рис. 7.2

Полное напряжение, возникающее на секущей площадке, может быть разложено на три составляющие: одну по нормали к площадке и две в плоскости сечения. Нормальное напряжение будем обозначать по-прежнему буквой σ с индексом, соответствующим осям x, y и z (см. рис. 7.2). Касательное напряжение обозначим буквой τ с двумя индексами: первый соответствует оси, перпендикулярной к площадке, а второй — оси, вдоль которой направлен вектор τ. Ориентация самих осей является произвольной.

Нормальные растягивающие напряжения σ будем считать положительными, сжимающие — отрицательными. Что касается знака напряжений τ, то здесь обусловливать его не будем, поскольку в пределах рассматриваемых ниже задач знак τ роли не играет.

Напряжения, возникающие на трех гранях элемента (на трех взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через точку), показаны на рис. 7.2. На невидимых гранях элемента возникают соответственно такие же напряжения, но противоположно направленные.

Система сил, приложенных к элементу, должна удовлетворять условиям равновесия. Поскольку на противоположных гранях возникают противоположные по направлению силы, то первые три условия равновесия удовлетворяются тождественно, и суммы проекций всех сил на оси x, y и z равны нулю независимо от значений возникающих напряжений. Остается проверить, обращаются ли в нуль суммы моментов всех сил относительно осей x, y и z. При составлении уравнений равновесия легко обнаружить, что момент

каждой силы уравновешивается моментом противоположной силы, расположенной на невидимой грани. Исключение составляют касательные силы. Например, для оси x условие равенства нулю суммы моментов соблюдается в том случае, если момент силы $\tau_{yz}\,dxdz$ равен моменту силы $\tau_{zy}\,dxdy$, т. е.

$$\tau_{yz}\,dxdz \cdot dy = \tau_{zy}\,dxdy \cdot dz.$$

Аналогично могут быть написаны еще два уравнения равновесия. Тогда получаем

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}; \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \tag{7.1}$$

Таким образом, *на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра*. Это и есть закон парности касательных напряжений, сформулированный в общем виде (см. также 1.5). Он справедлив для всех точек нагруженного тела независимо от вида приложенных нагрузок и свойств материала. Следствием из условия парности касательных напряжений является то, что на гранях выделенного элемента (см. рис. 7.2) имеем не девять, а только шесть независимых компонент напряжений, поскольку касательные напряжения попарно равны.

Анализ напряженного состояния в точке начинают всегда с определения напряжений на гранях выделенного в окрестности точки элемента. Через точку проводят три взаимно перпендикулярные плоскости, ориентацию которых выбирают произвольно, но так, чтобы напряжения в площадках могли бы быть определены наиболее простым путем.

Пример 7.1. Выявить напряженное состояние в точках $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ растянутого и одновременно закрученного стержня (рис. 7.3, *а*).

В окрестности заданных точек секущими плоскостями выделяем элементарный объем. Ориентацию плоскостей выбираем таким образом, чтобы напряжения можно было определить наиболее простым способом. В данном случае естественной является ориентация плоскостей вдоль и поперек оси стержня. Вынесем выделенные элементы за пределы нагруженного тела и представим их в увеличенном масштабе с сохранением ориентации плоскостей (рис. 7.3, *б* и *в*).

В результате действия силы F в поперечных сечениях стержня возникает нормальное напряжение $\sigma = F/a^2$. Векторы соответствующих напряжений покажем на гранях элементов. В результате действия момента $\mathfrak{M}$ в поперечных и продольных сечениях возникают касательные напряжения. В точке $\mathcal{A}$ напряжение $\tau_{\max} = \mathfrak{M}/(0{,}208a^3)$, в точке $\mathcal{B}$ напряжение $\tau = 0$. Векторы $\tau_{\max}$ также покажем на гранях элемента. В итоге имеем:

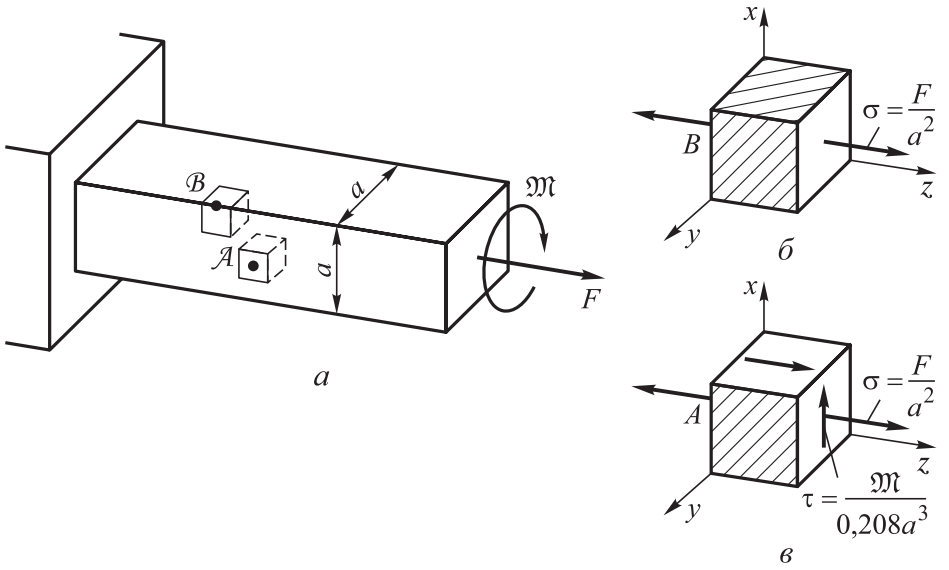


Рис. 7.3

в точке $\mathcal{A}$ $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\sigma_z = F/a^2$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = \mathfrak{M}/0{,}208a^3$, $\tau_{xy} = 0$; в точке $\mathcal{B}$ $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\sigma_z = F/a^2$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$.

7.2. Определение напряжений в произвольно ориентированной площадке

Если дано шесть компонент напряженного состояния: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yx}, τ_{zx} и τ_{xy} в трех взаимно перпендикулярных площадках, то можно определить напряжения в любой площадке, проходящей через данную точку.

В напряженном теле (см. рис. 7.1) выделим в окрестности точки $\mathcal{A}$ элементарный объем, но уже не в виде параллелепипеда, как было сделано ранее, а в виде четырехгранника (рис. 7.4). Три грани выделенного элемента лежат в координатных плоскостях системы $\mathcal{A}xyz$. Четвертая грань образована произвольной секущей плоскостью. Ее ориентацию в пространстве будем определять направляющими косинусами l, m, n нормали ν к секущей плоскости.

Элементарный четырехгранник обладает теми же свойствами, что и рассмотренный выше параллелепипед. При уменьшении размеров он стягивается в точку $\mathcal{A}$, и в пределе все его грани проходят через эту точку. Поэтому напряжения на гранях элемента рассматриваем как напряжения в исследуемой точке на соответствующим образом ориентированных площадках.

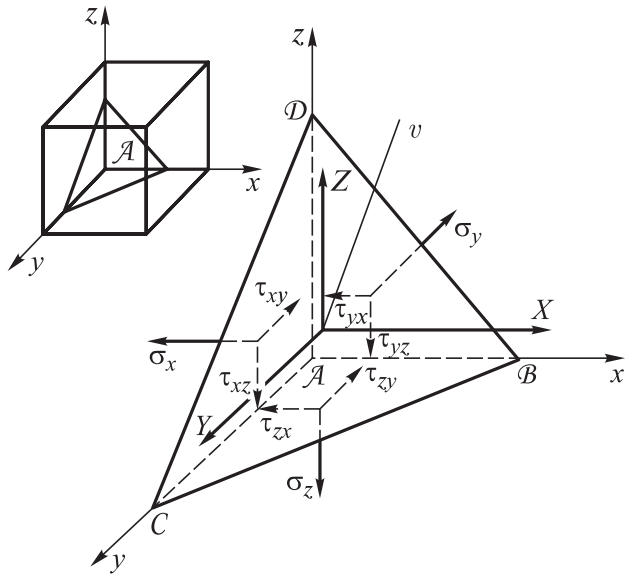


Рис. 7.4

На рис. 7.4 штрихами показаны составляющие напряжений на невидимых гранях. Вектор полного напряжения на площадке BCD спроецируем на оси x, y и z. Обозначим эти проекции через X, Y и Z соответственно. Если эти три величины найдены, то по ним, очевидно, могут быть найдены нормальная и касательные составляющие на произвольной площадке.

Площадь треугольника BCD обозначим через A, площади треугольников ACD, ABD и ABC — соответственно через A_x, A_y, A_z. Очевидно,

$$A_x = Al; \qquad A_y = Am; \qquad A_z = An, \tag{7.2}$$

где l, m и n — направляющие косинусы нормали v.

Проецируя все силы, действующие на элемент, последовательно на оси x, y и z, получим

$$XA = \sigma_x A_x + \tau_{yx} A_y + \tau_{zx} A_z;$$
$$YA = \tau_{xy} A_x + \sigma_y A_y + \tau_{zy} A_z;$$
$$ZA = \tau_{xz} A_x + \tau_{yz} A_y + \sigma_z A_z,$$

или в соответствии с соотношениями (7.2)

$$X = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n;$$
$$Y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \tag{7.3}$$
$$Z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.$$

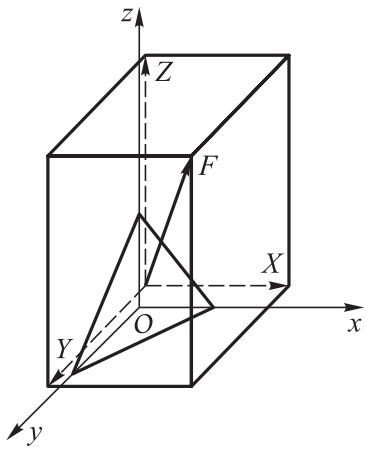


Рис. 7.5

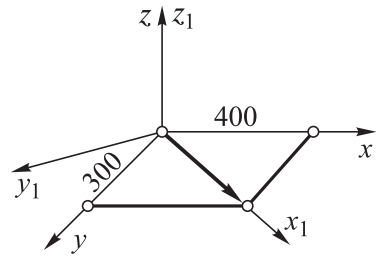


Рис. 7.6

Таким образом, действительно для любой площадки, определяемой направляющими косинусами l, m и n, проекции X, Y и Z можно выразить через шесть исходных компонент σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx} и τ_{xy}. Иными словами, *напряженное состояние в точке определяется шестью компонентами*.

При помощи формул (7.3) легко определить вектор полного напряжения на любой площадке, проходящей через рассматриваемую точку (рис. 7.5).

Напряженное состояние в точке представляет собой понятие, более сложное, чем те, которыми мы оперировали до сих пор.

Нам известно понятие числа и понятие вектора как величины, определяемой тремя числами. Напряженное состояние определяется уже не тремя, а шестью числами и представляет собой *тензор*. Тензору в отличие от вектора не может быть дано простое геометрическое толкование, и его обычно задают матрицей (таблицей), написанной, например, в виде

$$\begin{bmatrix} 500 & 200 & 100 \\ 200 & -50 & 43 \\ 100 & 43 & 720 \end{bmatrix},$$

где каждое число представляет собой значение σ_x, τ_{yx} и т. д. в соответствии с расположением коэффициентов в трех уравнениях (7.3), т. е. $\sigma_x = 500$, $\tau_{xy} = 200$ и т. д.

Если взамен исходной системы $Axyz$ выбрать новую систему, компоненты тензора изменятся, т. е. значения σ_x, σ_y, ... будут иными, однако сам тензор напряженного состояния останется тем же. Сказанное можно пояснить на примере вектора, показанного на рис. 7.6.

Вектор может быть определен матрицей, членами которой являются координаты конца вектора:

$$\begin{bmatrix}400 & 300 & 0\end{bmatrix}.$$

Если перейти к системе осей $x_1y_1z_1$ (см. рис. 7.6), то для того же вектора получим

$$\begin{bmatrix}500 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Компоненты вектора, как видим, изменились, но сам вектор остался неизменным.

Остановимся более подробно на некоторых свойствах напряженного состояния в связи с преобразованием системы координат.

7.3. Главные оси и главные напряжения

Выразим через X, Y и Z нормальное напряжение σ_v в наклонной площадке. Очевидно, $\sigma_v = Xl + Ym + Zn$, или, согласно (7.3),

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl + 2\tau_{xy}lm. \qquad (7.4)$$

Рассмотрим множество секущих площадок, проходящих через исследуемую точку. По нормали к каждой площадке отложим отрезок $r = f(\sigma_v)$ (рис. 7.7). Координаты конца этого вектора будут:

$$x = rl, \qquad y = rm, \qquad z = rn.$$

Исключая из выражения σ_v направляющие косинусы l, m и n, получим геометрическое место точек концов вектора:

$$\sigma_v r^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz}yz + 2\tau_{zx}zx + 2\tau_{xy}xy.$$

Теперь решим, в какой зависимости от σ_v откладывать абсолютную величину отрезка r. Обычно такой вопрос решают из условий наглядности геометрического образа. В данном же случае, не стремясь к наглядности, а исключительно в целях простоты полученного выражения примем формально, что

$$r^2 = \frac{k}{|\sigma_v|},$$

где k — произвольная постоянная, отражающая масштаб построения. Тогда

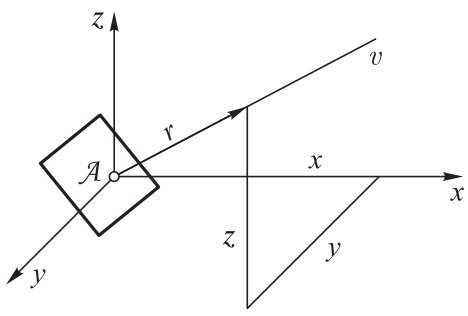


Рис. 7.7

$$k = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx + 2\tau_{xy} xy.$$

Полученное соотношение мало что говорит о законах изменения напряжений в точке, зато оно дает уравнение центральной поверхности второго порядка. Из курса аналитической геометрии известно, что путем поворота системы координат это уравнение может быть преобразовано таким образом, что в нем исчезнут попарные произведения координат, или, иначе говоря, обратятся в нуль коэффициенты при членах попарных произведений. В данном случае это означает, что *в каждой точке напряженного тела существует такая система осей x, y, z, в которой касательные напряжения* τ_{yz}, τ_{zx} и τ_{xy} *равны нулю*. Такие оси называются *главными осями*. Соответствующие им взаимно перпендикулярные площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на них — *главными напряжениями*. В порядке возрастания эти напряжения обозначают через σ_3, σ_2 и σ_1.

Если в окрестности исследуемой точки элементарный объем выделен главными площадками, то система сил, возникающих на гранях элемента, упрощается (рис. 7.8). Существенно упрощаются также выражения (7.3), они принимают вид

$$X = \sigma_1 l; \qquad Y = \sigma_2 m; \qquad Z = \sigma_3 n.$$

Так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, то

$$\frac{X^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

Этому соотношению можно дать не только простое, но на этот раз и наглядное толкование. Величины X, Y, Z можно рассматривать как координаты конца вектора полного напряжения p, возникающего на произвольно ориентированной площадке. *Геометрическое место концов вектора полного напряжения образует эллипсоид, полуосями которого являются главные напряжения* σ_1, σ_2 *и* σ_3 (рис. 7.9). Полученный эллипсоид носит название *эллипсоида напряжений*.

Из этого геометрического образа вытекает следствие, что наибольшее из трех главных напряжений является одновременно наибольшим из возможных полных напряжений на множестве площадок, проходящих через исследуемую точку. Наименьшее же из главных напряжений будет наименьшим среди множества возможных полных напряжений.

В случае равенства двух главных напряжений эллипсоид принимает форму тела вращения. Тогда каждая плоскость, про-

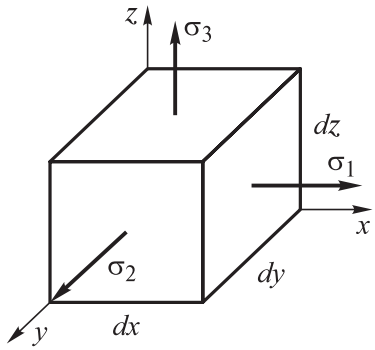


Рис. 7.8

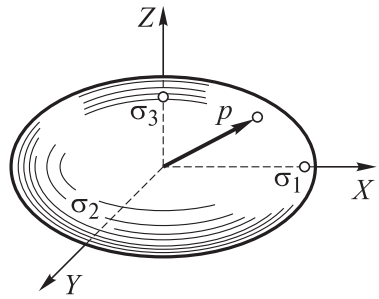


Рис. 7.9

проходящая через ось вращения, становится главной. В случае когда равны не два, а все три главных напряжения, эллипсоид принимает форму сферы и в исследуемой точке все плоскости являются главными.

Перейдем теперь к определению величины главных напряжений по заданным шести компонентам напряженного состояния в произвольной системе $Axyz$. Возвращаясь к рис. 7.5 и соотношениям (7.3), положим, что наклонная площадка является главной. Тогда полное напряжение на этой площадке (оно же главное) будет направлено по нормали v. Обозначим его через S:

$$X = Sl, \qquad Y = Sm, \qquad Z = Sn.$$

Соотношения (7.3) теперь примут вид

$$Sl = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n;$$
$$Sm = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n;$$
$$Sn = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n,$$

или

$$\begin{aligned} (\sigma_x - S)l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0; \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - S)m + \tau_{zy} n &= 0; \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - S)n &= 0. \end{aligned} \qquad (7.5)$$

Их можно рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных l, m и n, определяющих ориентацию главной площадки в исходной системе координат. Полученная система является однородной. Вместе с тем она должна давать для l, m и n ненулевое решение, так как направляющие косинусы не могут быть все одновременно равны нулю, поскольку

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{7.6}$$

Для того чтобы система однородных уравнений (7.5) имела решение, отличное от нулевого, необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - S & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - S & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - S \end{vmatrix} = 0. \tag{7.7}$$

Достигается это надлежащим выбором величины S. Если условие (7.7) выполнено, одно из трех уравнений (7.5) представляет собой линейную комбинацию двух других, которые совместно с условием (7.6) образуют новую систему, достаточную для нахождения l, m и n, определяющих положение главных площадок. Эту часть задачи мы оставим, однако, без рассмотрения и перейдем к определению главных напряжений S из уравнения (7.7).

Раскрыв определитель и расположив его члены по степеням S, получим следующее кубическое уравнение:

$$S^3 - S^2 J_1 + S J_2 - J_3 = 0, \tag{7.8}$$

в котором

$$\begin{gathered} J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ J_2 = \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2; \\ J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{7.9}$$

Можно показать, что все три корня уравнения (7.8) являются вещественными. Они дают три значения главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3.

Понятно, что главные напряжения, т. е. корни уравнения (7.8), определяются характером напряженного состояния и не зависят от того, какая система осей была принята в качестве исходной. Следовательно, при повороте системы осей xyz коэффициенты J_1, J_2 и J_3 уравнения (7.8) должны оставаться неизменными. Они называются *инвариантами напряженного состояния*.

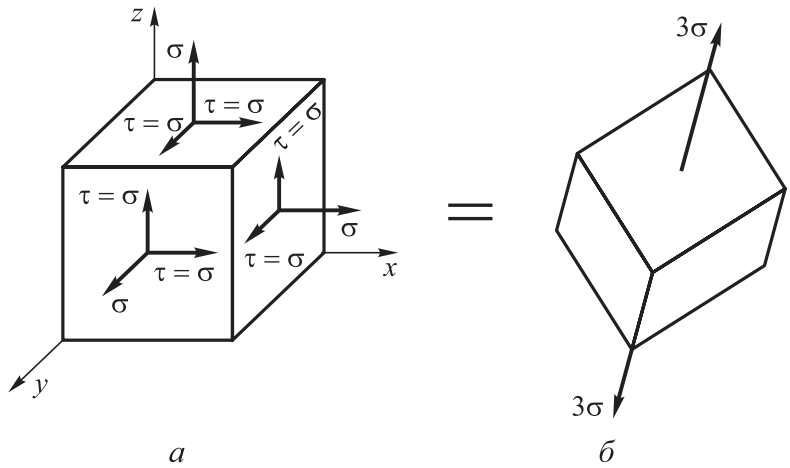
В некоторых случаях инварианты могут принимать нулевые значения. Например, если $J_3 = 0$, то один из корней уравнения (7.8) также равен нулю. В этом случае говорят, что напряженное состояние является *двухосным*, или *плоским*. В частности, уже знакомое

нам напряженное состояние чистого сдвига представляет собой двухосное напряженное состояние, для которого $\sigma_1 = -\sigma_3$ и $\sigma_2 = 0$.

Если одновременно равны нулю второй и третий инварианты, т. е. $J_2 = J_3 = 0$, то уравнение (7.8) имеет два нулевых корня и только одно из главных напряжений отлично от нуля. Напряженное состояние в этом случае называется *одноосным*. С ним мы уже встречались при изучении вопросов растяжения, сжатия и чистого изгиба.

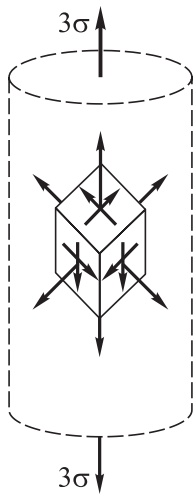
Рассмотрим примеры определения главных напряжений.

Пример 7.2. Определить главные напряжения в случае, если все компоненты напряженного состояния равны между собой (рис. 7.10, *а*).



а *б*

Рис. 7.10



Согласно выражениям (7.8) и (7.9), имеем: $J_1 = 3\sigma$, $J_2 = J_3 = 0$; $\sigma_1 = 3\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Следовательно, заданное напряженное состояние представляет собой одноосное растяжение.

Полученному результату можно дать простое объяснение, если учесть, что элемент может быть выделен из растянутого стержня любым образом. Очевидно, если три секущие площадки равнонаклонены к оси растянутого стержня, в гранях элемента как раз и возникают равные составляющие напряженного состояния (рис. 7.11).

Поскольку при изменении ориентации секущих площадок напряженное состояние не меняется, полученное решение может быть представлено в виде символического равенства (см. рис. 7.10).

Рис. 7.11

Пример 7.3. Определить главные напряжения в случае напряженного состояния (рис. 7.12, *а*)

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно выражениям (7.9), получаем $J_1 = 0$, $J_2 = -3\tau^2$, $J_3 = 2\tau^3$. Тогда $S^3 - 3\tau^2 S - 2\tau^3 = 0$. Подбором определяем один из корней. Это будет $S = -\tau$. Разделив левую часть уравнения на $S + \tau$, сводим уравнение к квадратному и определяем остальные два корня.

В итоге получаем $\sigma_1 = 2\tau$; $\sigma_2 = \sigma_3 - \tau$. Следовательно, напряженное состояние является трехосным (рис. 7.12, *б*).

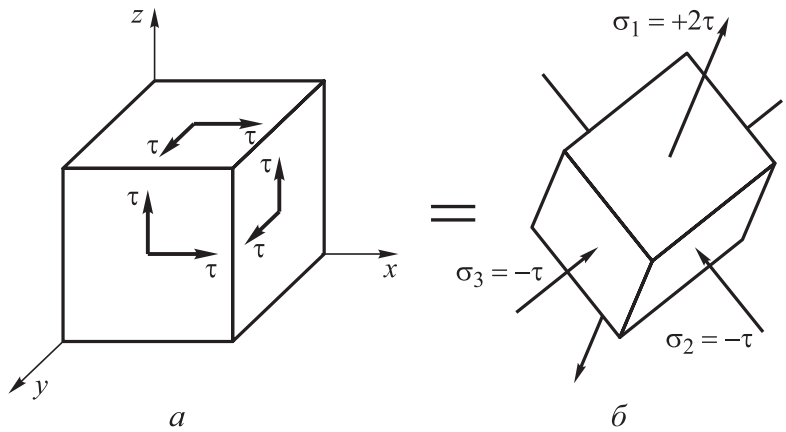


Рис. 7.12

Итак, исследуя напряженное состояние, мы обнаружили существование трех взаимно перпендикулярных площадок, обладающих тем замечательным свойством, что касательные напряжения в них равны нулю, и назвали эти площадки главными. Но существуют и другие площадки, также обладающие важными и интересными особенностями, знакомство с которыми понадобится нам в дальнейшем.

Положим, что оси x, y и z — главные и $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$ (рис. 7.13). Тогда выражения (7.3) примут вид

$$X = \sigma_1 l; \qquad Y = \sigma_2 m; \qquad Z = \sigma_3 n.$$

Найдем касательное напряжение τ_v в этой площадке:

$$\tau_v^2 = p^2 - \sigma_v^2, \tag{7.10}$$

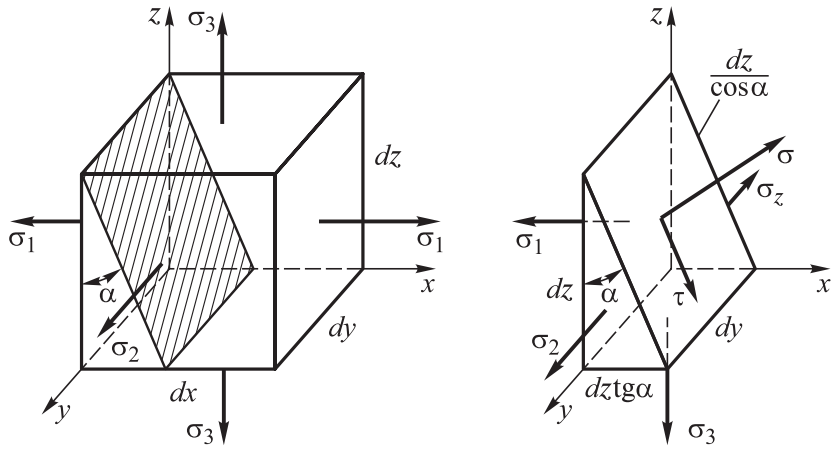


Рис. 7.13

где p — полное, а σ_v — нормальное напряжения в той же площадке. Очевидно, что

$$p^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2;$$
$$\sigma_v = Xl + Ym + Zn = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2.$$

Подставляя p^2 и σ_v в выражение (7.10) и учитывая, что $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, получим

$$\tau_v^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 l^2 n^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2. \qquad (7.11)$$

Как видим, τ_v^2— величина существенно положительная и на главных площадках, как и положено, обращается в нуль. Действительно, если нормаль v совпадает с одной из главных осей, то один из направляющих косинусов принимает значение, равное единице, а два других равны нулю, и тогда $\tau_v^2 = 0$.

Для дальнейшего нам потребуются выражения для напряжений в так называемых октаэдрических площадках, т. е. в площадках, равнонаклоненных к главным. Для таких площадок $l^2 = m^2 = n^2 = 1/3$, и тогда мы получим

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}; \qquad (7.12)$$

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \qquad (7.13)$$

Таким образом, нормальное октаэдрическое напряжение равно среднему арифметическому трех главных напряжений.

Особый интерес представляют площадки, в которых возникают наибольшие касательные напряжения. Положение этих площадок можно определить, отыскивая экстремум выражения (7.11) при условии, что $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Но этих выкладок мы делать не будем, ибо о результате можно догадаться сразу. Заметим, что

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3)$$

и, поскольку квадрат суммы не меньше суммы квадратов,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2.$$

Значит, при равенстве $l^2 = m^2 = n^2$ второе слагаемое в выражении (7.11) будет не меньше суммы двух остальных. Если мы хотим, чтобы величина τ_v^2 достигла наибольшего значения, то, подбирая l^2, m^2 и n^2, мы должны, очевидно, максимально увеличить произведение $l^2 n^2$ за счет m^2. Но это будет достигнуто при $m^2 = 0$, и тогда произведение величин l^2 и n^2 при условии, что их сумма равна единице, будет наибольшим, если $l^2 = n^2 = 1/2$. Таким образом,

$$\left|\tau_{\max}\right| = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \qquad (7.14)$$

Так как $m = 0$, а $l = n = \sqrt{2}/2$, то максимальное касательное напряжение возникает в площадках, равнонаклоненных к главным площадкам, на которых действуют максимальное и минимальное из главных напряжений.

7.4. Круговая диаграмма напряженного состояния

Как мы увидим в дальнейшем, определение главных напряжений является необходимым промежуточным этапом при ведении расчетов на прочность в сложном напряженном состоянии. Поэтому вычислять значения главных напряжений приходится довольно часто.

Однако это не значит, что всегда необходимо решать кубическое уравнение (7.8). Дело в том, что в абсолютном большинстве встречающихся на практике случаев положение одной из главных площадок в исследуемой точке может быть указано заранее. Тог-

да две другие главные площадки можно определить в семействе площадок, перпендикулярных первой, что значительно упрощает задачу.

Рассмотрим условия равновесия треугольной призмы, показанной на рис. 7.13. Эта призма образована путем сечения элементарного параллелепипеда наклонной площадкой, которая, независимо от угла наклона α, остается параллельной одной из главных осей. В данном случае такой осью является главная ось *y*.

Проецируя все силы, действующие на отсеченную призму, на оси, параллельные векторам σ и τ (рис. 7.13, *б*), получим

$$\sigma dy\frac{dz}{\cos\alpha}=\sigma_1 dydz\cos\alpha+\sigma_3 dydz\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha;$$

$$\tau dy\frac{dz}{\cos\alpha}=\sigma_1 dydz\sin\alpha-\sigma_3 dydz\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha,$$

или

$$\sigma=\sigma_1\cos^2\alpha+\sigma_3\sin^2\alpha;\quad \tau=(\sigma_1-\sigma_3)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Эти выражения можно переписать в виде

$$\sigma=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\alpha;\quad \tau=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\alpha. \qquad (7.15)$$

Таким образом определяют напряжения в семействе площадок, параллельных одной из главных осей. Выражениям (7.15) можно дать простое геометрическое толкование. Перенесем полусумму главных напряжений $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$ в левую часть первого уравнения. Далее, возводя в квадрат левые и правые части уравнений, исключаем угол α. Получим

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2.$$

В системе координат σ, τ это есть уравнение окружности, центр которой находится на оси σ на расстоянии $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ от начала координат. Радиус окружности равен полуразности главных напряжений. Иначе говоря, окружность построена на отрезке $\sigma_1-\sigma_3$ как

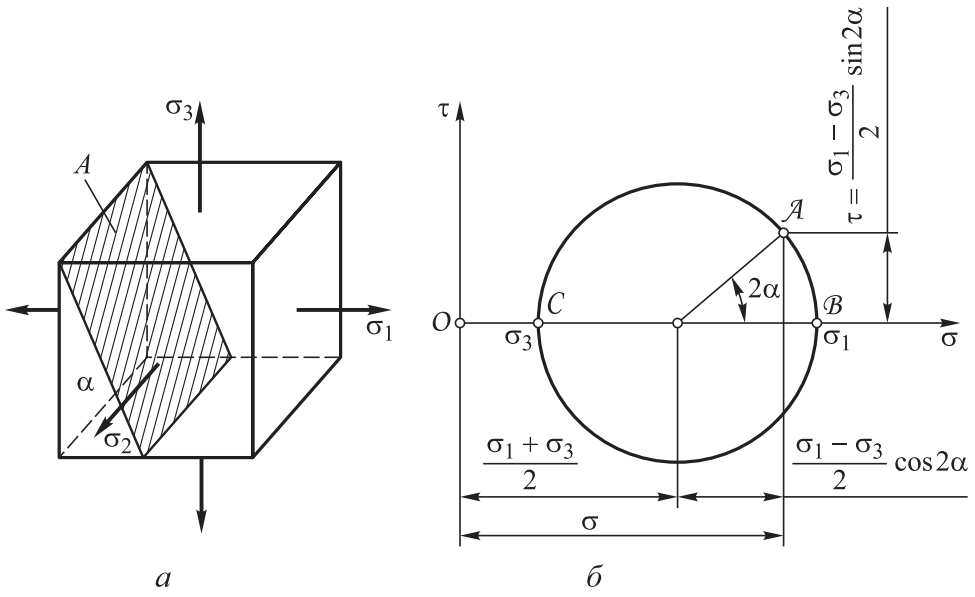


Рис. 7.14

на диаметре (рис. 7.14). Полученный круг называется *кругом Мора*, или *круговой диаграммой напряженного состояния*. Что касается уравнений (7.15), то их можно рассматривать как уравнение окружности, написанное в параметрическом виде. Роль параметра играет угол α, устанавливающий соответствие между точкой окружности и секущей площадкой. Каждой секущей площадке соответствует определенная точка на круге Мора. В частности, если угол $\alpha = 0$, секущая площадка совпадает с главной площадкой наибольшего напряжения σ_1 (точка B на рис. 7.14, *б*). Если $\alpha = 90^\circ$, секущая площадка совпадает с другой главной площадкой из того же семейства (точка C на окружности).

Показанная на рис. 7.14, *б* окружность построена для семейства площадок, параллельных вектору σ_2. Аналогичным образом можно построить круги Мора и для семейств площадок, параллельных векторам σ_1 и σ_3. В этих случаях круги строят соответственно на отрезках $\sigma_2 - \sigma_3$ и $\sigma_1 - \sigma_2$ как на диаметрах. Таким образом может быть построено три круга Мора. Поскольку знак τ не оговаривают, обычно ограничиваются построением только верхней половины круга (рис. 7.15).

Каждой точке любой окружности соответствует определенная секущая площадка в соответствующем семействе. Понятно, однако, что точки, расположенные на трех кругах, не исчерпывают *всего* множества секущих площадок. Площадки, не параллельные ни одной из главных осей, не вписываются в рассматриваемую схему.

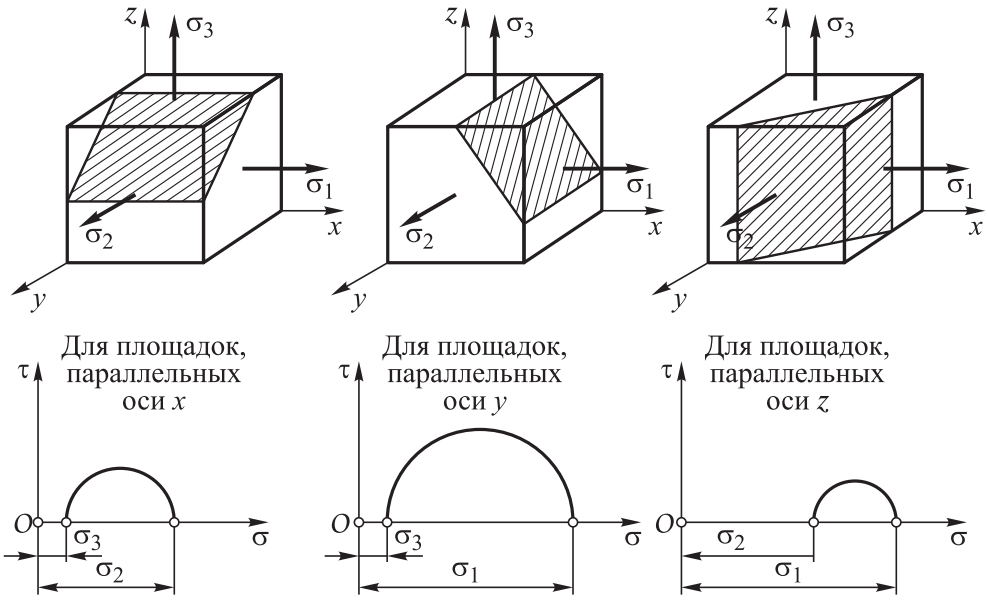


Рис. 7.15

Можно показать, что секущим площадкам соответствуют на плоскости σ, τ точки, лежащие внутри заштрихованного криволинейного треугольника $\mathcal{BCD}$, образованного тремя совмещенными кругами Мора (рис. 7.16). Имеются также и методы определения напряжений в соответствующих площадках.

Поскольку ни одна из точек не выходит за пределы заштрихованного криволинейного треугольника, наибольшее касательное напряжение равно радиусу наибольшего круга:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

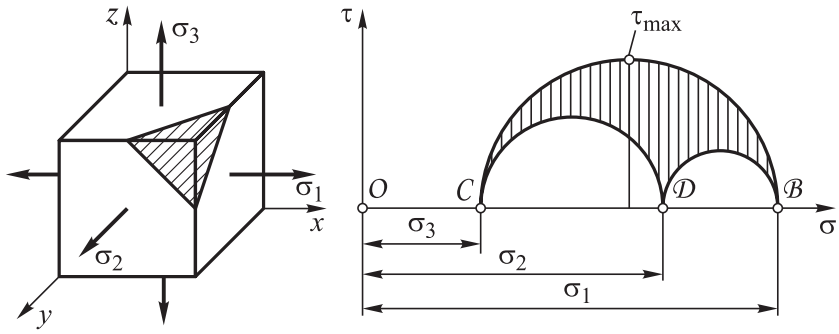
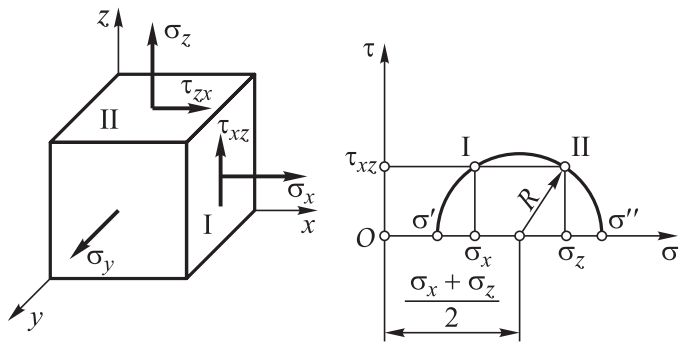


Рис. 7.16

Это напряжение возникает в площадке, равнонаклоненной к главным площадкам, на которых действуют максимальное и минимальное из главных напряжений, что уже было установлено ранее (см. выражение (7.14)).

Круговая диаграмма может быть построена не только, когда заданы главные напряжения. Достаточно знать напряжения в двух любых площадках из рассматриваемого семейства площадок, параллельных главной оси. Положим, например, задано напряженное состояние, показанное на рис. 7.17, *а*. Ось *y* яв-



а *б*

Рис. 7.17

ляется главной. Среди семейства ей параллельных площадок есть две, в которых напряжения известны. Это площадки I и II. Следовательно, на круговой диаграмме могут быть найдены две соответствующие им точки. Эти точки должны располагаться на противоположных концах одного диаметра, так как угол между площадками равен 90°, а на круговой диаграмме он удваивается. Однако, поскольку знак напряжений τ не оговаривали, ординаты обеих точек откладываем вверх. На форме круговой диаграммы это не скажется (рис. 7.17, *б*).

Из круговой диаграммы легко определить главные напряжения:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - R; \quad \sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + R,$$

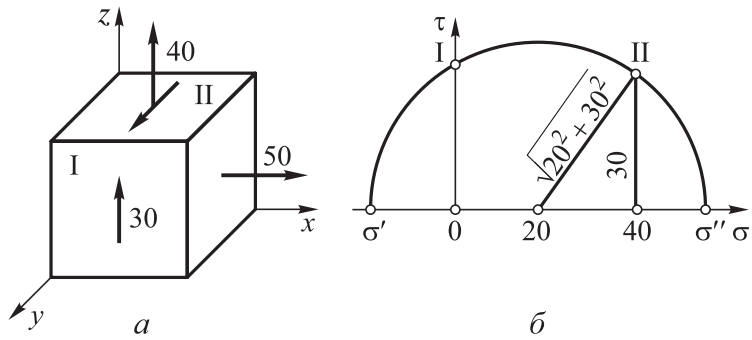
где R — радиус круга, $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$.

Таким образом,

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2};$$
$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}. \qquad (7.16)$$

После того как напряжения σ' и σ'' найдены, их сопоставляют с σ_y, и все главные напряжения переименовывают в σ_1, σ_2 и σ_3 в порядке убывания.

Пример 7.4. Определить главные напряжения для напряженного состояния, показанного на рис. 7.18. Напряжения заданы в условных единицах.



а *б*

Рис. 7.18

В предложенном примере одна из главных площадок и одно из главных напряжений заданы. Следовательно, не прибегая к решению кубического уравнения (7.8), можно остальные главные напряжения определить из круга Мора для семейства площадок, параллельных оси *x* (см. рис. 7.18).

Наносим на диаграмму точки, соответствующие площадкам I и II, и строим круговую диаграмму:

$$\sigma' = 20 - \sqrt{20^2 + 30^2} = -16;$$
$$\sigma'' = 20 + \sqrt{20^2 + 30^2} = 56.$$

Следовательно, $\sigma_1 = 56$, $\sigma_2 = 50$, $\sigma_3 = -16$.

При определении главных напряжений можно было бы пользоваться также формулами (7.16). При этом необходимо особое внимание обращать на то, чтобы не ошибаться в индексации напряжений по осям. Рассмотрим еще один пример.

Пример 7.5. Определить главные напряжения в случае напряженного состояния, показанного на рис. 7.19. Напряжения даны в условных единицах.

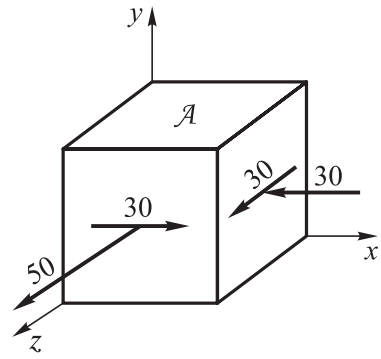


Рис. 7.19

Напряженное состояние — плоское. Площадка A является главной. Две другие находятся в семействе площадок, перпендикулярных первой. С тем чтобы воспользоваться непосредственно формулами (7.16), направим ось y перпендикулярно главной площадке (см. рис. 7.19). Тогда $\sigma_x = -30$, $\sigma_z = = 50$, $\tau = = 30$. По формулам (7.16) находим $\sigma' = = -40$, $\sigma'' = 60$. Переименовывая напряжения в порядке убывания, получаем $\sigma_1 = 60$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -40$.

7.5. Обзор различных типов напряженных состояний

При исследовании вопросов прочности при сложном напряженном состоянии существенное значение имеет вид напряженного состояния. Большинство материалов по-разному разрушается в зависимости от того, являются ли напряжения растягивающими или сжимающими. Как показывает опыт, все материалы без исключения способны воспринимать весьма большие напряжения в условиях всестороннего сжатия, в то время как при одноосном растяжении разрушение наступает при сравнительно низких напряжениях. Имеются напряженные состояния, при которых разрушение происходит хрупко, без образования пластических деформаций, а есть такие, при которых тот же материал способен пластически деформироваться.

В связи со сказанным очевидна необходимость более подробно остановиться на типовых признаках напряженных состояний и

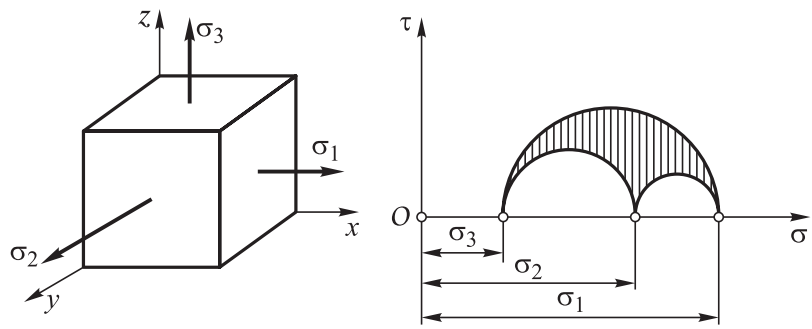


Рис. 7.20

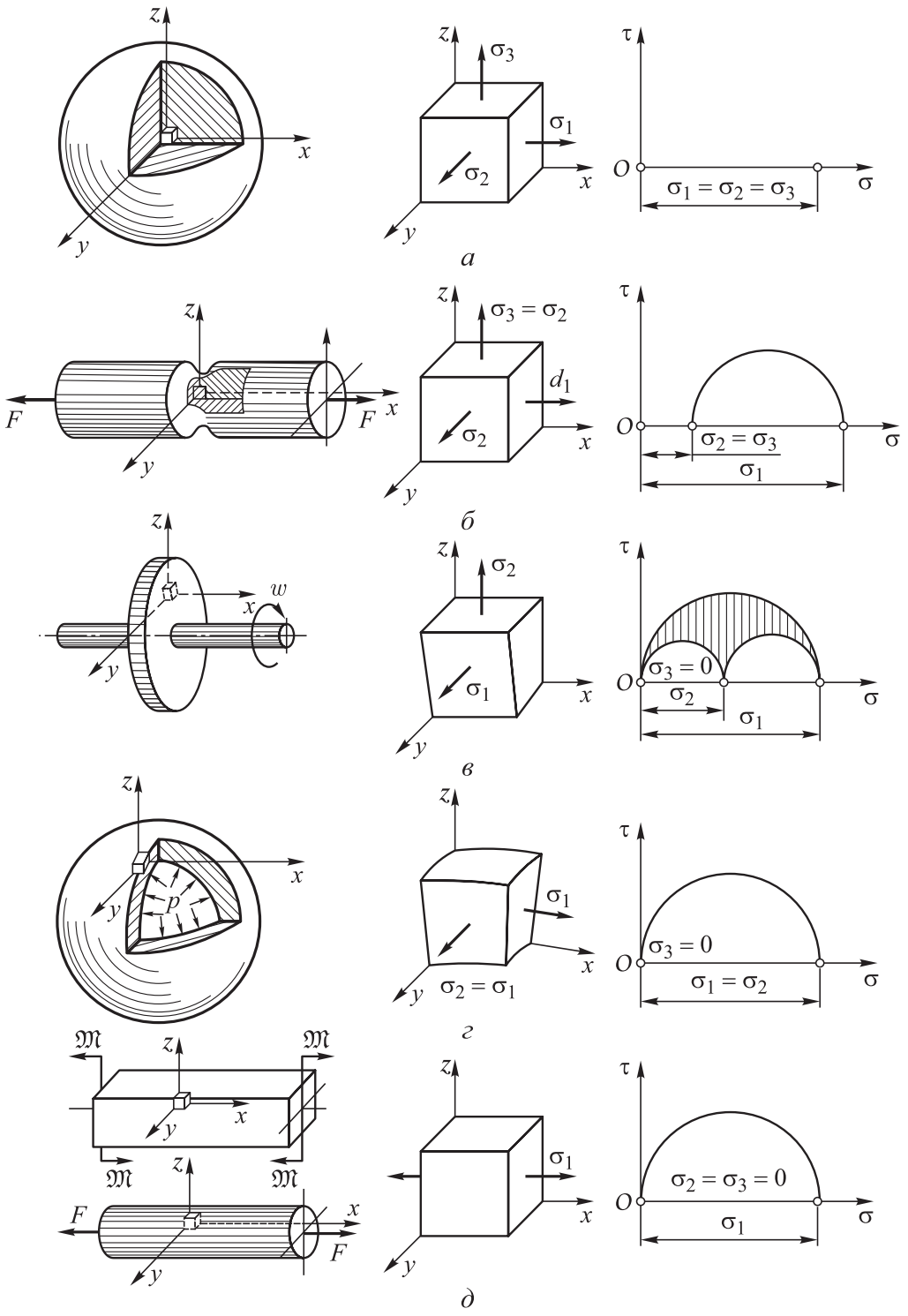


Рис. 7.21

проследить, в каких условиях возникает то или иное состояние. На основе такого обзора в дальнейшем проще будет ориентироваться в вопросах прочности и легче дать оценку степени опасности напряженного состояния для материала. Выше было произведено деление напряженных состояний на трехосное, двухосное и одноосное. При решении вопросов прочности, однако, такая классификация не является достаточной и принято делить напряженные состояния на три класса в зависимости от знака главных напряжений.

К первому классу относят *трехосные растяжения*, т. е. такие напряженные состояния, в которых ни одно из главных напряжений не является сжимающим. Круговые диаграммы для этого класса напряженных состояний располагаются в правой части плоскости $\sigma O\tau$ (рис. 7.20). В частном случае все три главных растягивающих напряжения могут быть равными; такое напряженное состояние называется *чистым трехосным растяжением*. Оно возникает, например, в центральной части сплошного шара, быстро нагреваемого извне (рис. 7.21, *а*). Расширение внешних нагретых слоев приводит к тому, что внутренняя ненагретая область шара оказывается под воздействием всестороннего «растягивающего давления». Круговые диаграммы при чистом трехосном растяжении вырождаются в точку (см. рис. 7.21, *а*). Трехосное растяжение, при котором два главных напряжения равны, но отличны от третьего, возникает в точках, лежащих на оси растянутого образца, имеющего кольцевую выточку (рис. 7.21, *б*). Весьма часто встречается напряженное состояние, в котором $\sigma_3 = 0$, т. е. двухосное растяжение, также относящееся к рассматриваемому классу. Двухосное растяжение, при котором $\sigma_1 \neq \sigma_2$, возникает, например, в быстровращающихся тонких дисках постоянной толщины (рис. 7.21, *в*). Равное двухосное растяжение ($\sigma_1 = \sigma_2$) возникает в точках, расположенных у внешней поверхности сферического сосуда, нагруженного внутренним давлением (рис. 7.21, *г*). К рассматриваемому классу напряженных состояний относится, наконец, и простое одноосное растяжение,

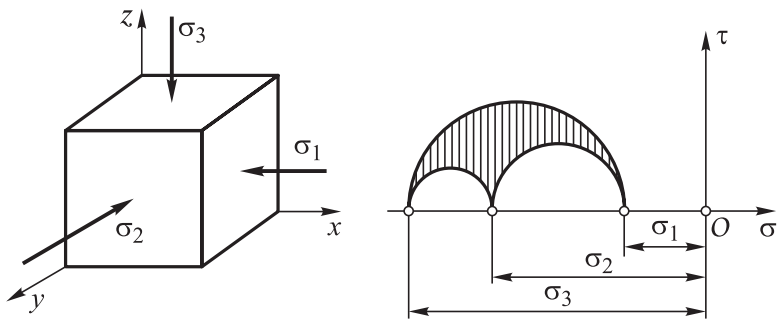


Рис. 7.22

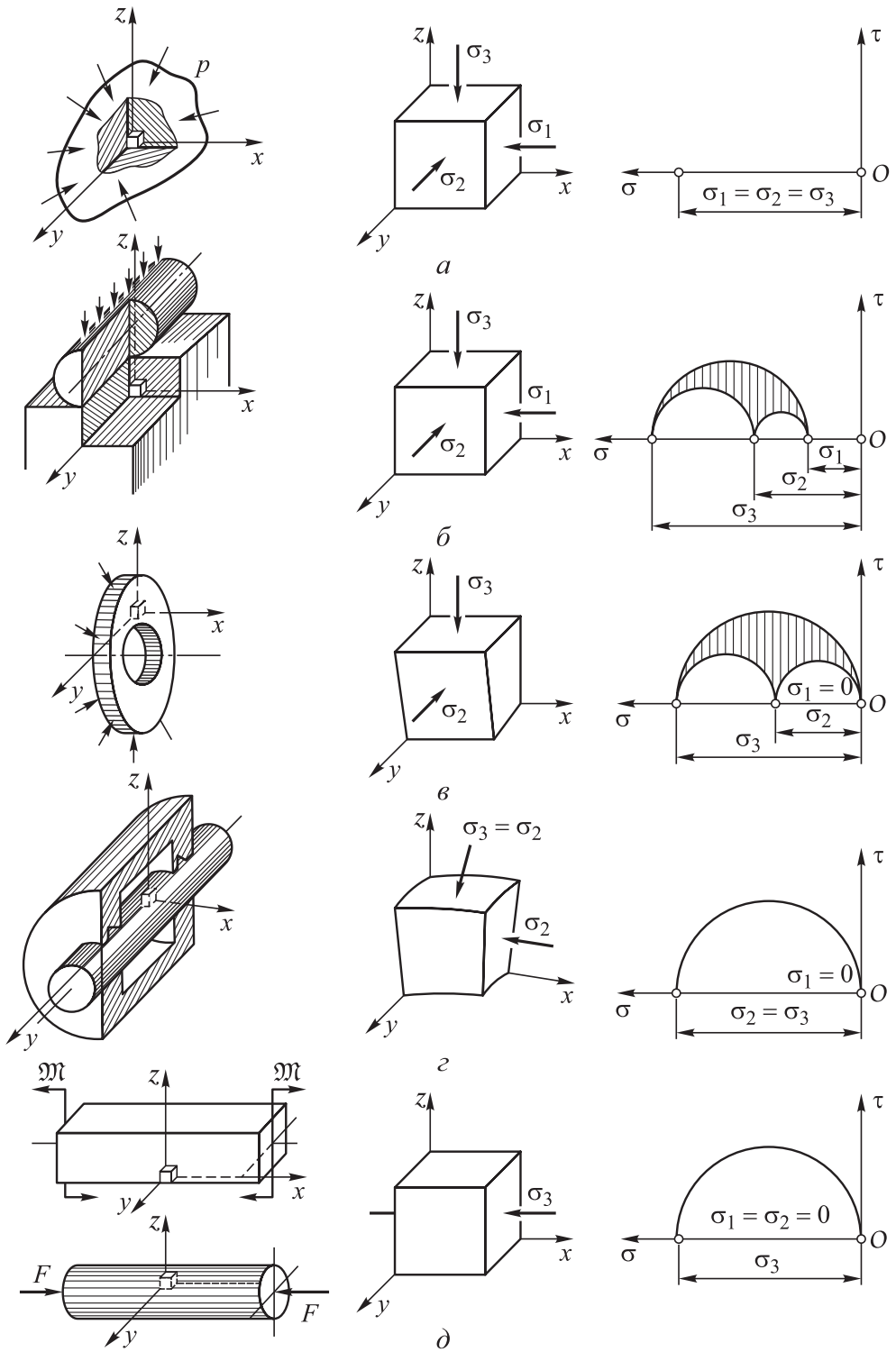


Рис. 7.23

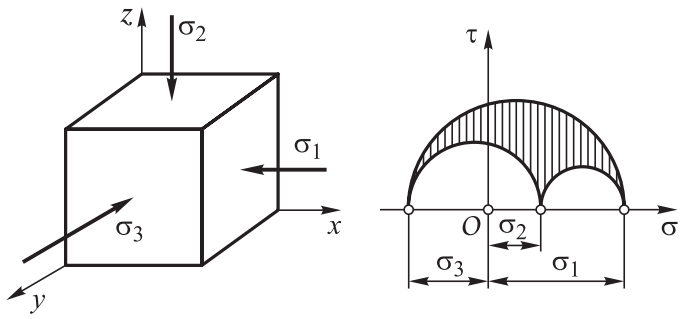


Рис. 7.24

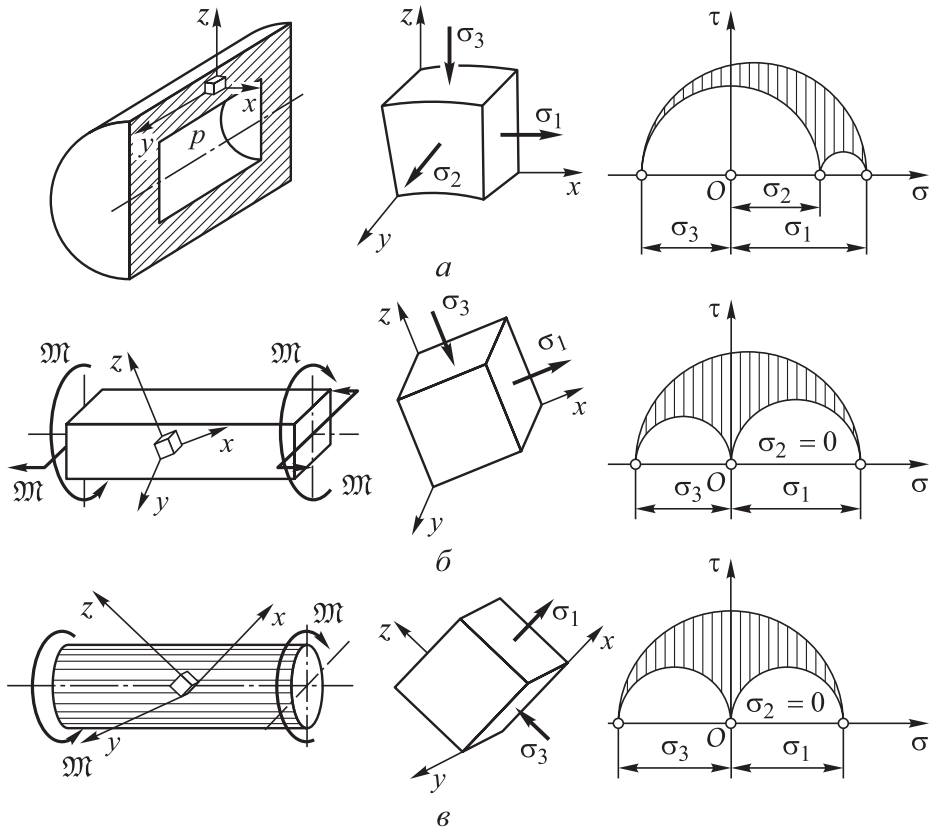


Рис. 7.25

возникающее в однородном стержне при его растяжении или чистом изгибе (рис. 7.21, *д*).

Второй распространенный класс составляют такие напряженные состояния, в которых ни одно из главных напряжений не является растягивающим. Это — так называемые *трехосные сжатия*. Для напряженных состояний этого класса круговые диаграммы располагаются в левой части плоскости $\sigma O \tau$ (рис. 7.22).

Чистое трехосное сжатие возникает в любом теле, независимо от его формы, при всестороннем гидростатическом давлении (рис. 7.23, *а*). Неравномерное трехосное сжатие характерно для точек, расположенных в окрестности контактирующих тел, таких как, например, ролики и обоймы подшипников, втулки и валы (рис. 7.23, *б*). Пример возникновения двухосного сжатия показан на рис. 7.23, *в*. Двухосное равное сжатие ($\sigma_2 = \sigma_3$) возникает при нагружении давлением вала, имеющего свободные торцы (рис. 7.23, *г*). Одноосное сжатие также относится к рассматриваемому классу напряженных состояний и возникает, в частности, при чистом изгибе и сжатии однородного стержня (рис. 7.23, *д*).

К третьему классу относятся так называемые *смешанные напряженные состояния*, в которых наибольшее и наименьшее из главных напряжений имеют разные знаки. Напряжение σ_2 может быть как положительным, так и отрицательным. Круговые диаграммы напряженных состояний этого класса располагаются в средней части плоскости $\sigma O\tau$ (рис. 7.24). Смешанное трехосное напряженное состояние возникает, например, при нагружении толстостенного цилиндра внутренним давлением (рис. 7.25, *а*). Для изгибаемого и одновременно закручиваемого стержня характерно возникновение двухосного смешанного напряженного состояния (рис. 7.25, *б*). Чистый сдвиг также представляет собой смешанное двухосное напряженное состояние (рис. 7.25, *в*).

7.6. Деформированное состояние

Изменение формы тела связано с перемещениями его точек. Расстояние между положением некоторой точки A до и после изменения формы тела (рис. 7.26) называется ее *полным перемещением*. Составляющие вектора полного перемещения по осям x, y и z обозначаются соответственно через u, v и w.

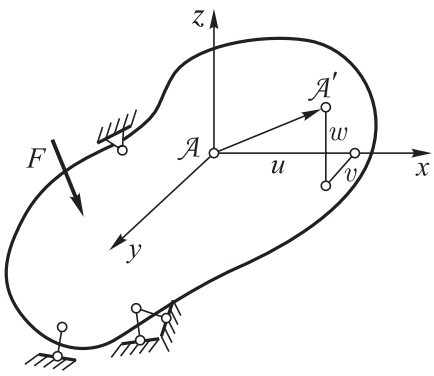
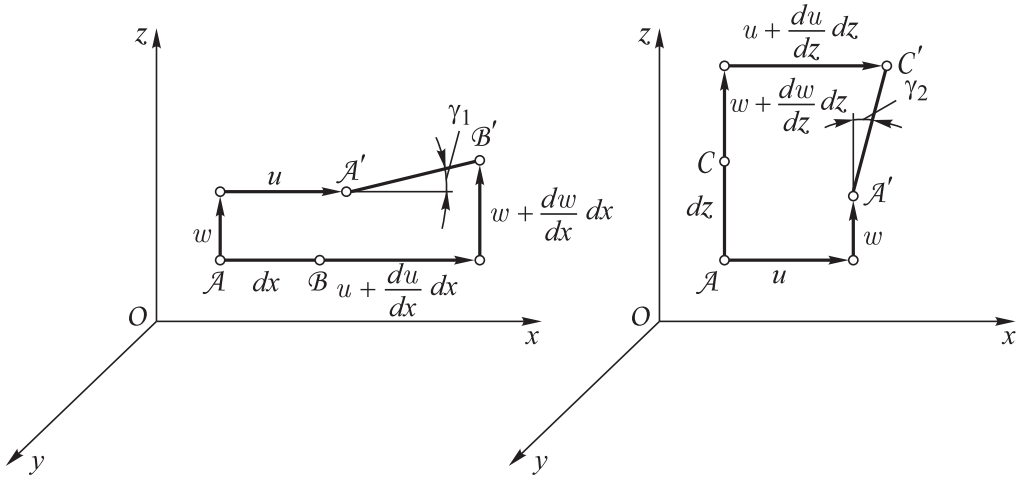


Рис. 7.26

Рассмотрим элементарный отрезок AB, направление которого совпадает с направлением оси x (рис. 7.27, *а*). Расстояние между точками A и B обозначим через dx. Составляющие вектора перемещения в точке B отличаются от составляющих в точке A на величины,



а *б*

Рис. 7.27

соответствующие изменению координаты x. Так, если точка $\mathcal{A}$ перемещается вдоль оси z на w, то точка $\mathcal{B}$ перемещается на $w+\dfrac{\partial w}{\partial x}dx$ и т. д.

Приращение длины отрезка $\mathcal{AB}$ составляет $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx$. Следовательно, относительное удлинение в точке $\mathcal{A}$ по оси x будет $\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Аналогично $\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

Угол поворота отрезка $\mathcal{AB}$ в плоскости xOz равен отношению разности перемещений точек $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ вдоль оси z к длине отрезка dx, т. е. $\gamma_1=\dfrac{\partial w}{\partial x}$. Угол поворота отрезка $\mathcal{AC}$ в плоскости xOz (рис. 7.27, *б*) равен $\gamma_2=\dfrac{\partial u}{\partial z}$. Сумма углов γ_1 и γ_2 представляет собой изменение прямого угла $\mathcal{BAC}$, т. е. угол сдвига в плоскости xOz $\gamma_{zx}=\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$. Аналогично могут быть написаны выражения для углов сдвига в двух других координатных плоскостях.

В итоге имеем следующую связь между перемещениями и деформациями в точке:

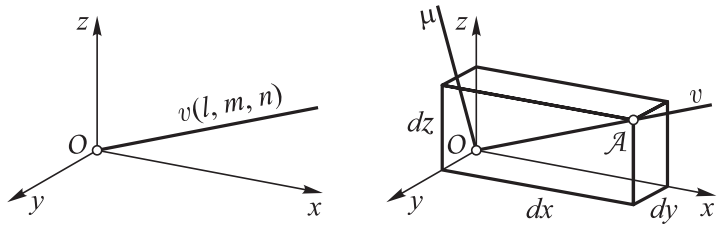
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

Совокупность деформаций, возникающих по различным осям и в различных плоскостях, проходящих через данную точку, носит название *деформированного состояния в точке*, а ε_x, ε_y, ε_z, γ_{yz}, γ_{zx} и γ_{xy} называются *компонентами деформированного состояния*.

Возникает естественный вопрос, достаточно ли этих шести компонент, чтобы определить деформированное состояние, т. е. можно ли по этим шести компонентам найти удлинение по любой оси и углы сдвига в любых плоскостях, проходящих через данную точку.

На этот вопрос можно ответить утвердительно. Рассмотрим некоторую ось ν, проходящую через заданную точку (рис. 7.28, *а*). Направляющие косинусы прямой ν будут l, m, n. Выделим на этой прямой малый отрезок $OA = dL$ и построим на нем, как на диагонали, параллелепипед со сторонами dx, dy, dz (рис. 7.28, *б*).



а *б*

Рис. 7.28

Если параллелепипед получает удлинение ε_x, точка A смещается вдоль оси x на $\varepsilon_x dx$, а диагональ OA получает абсолютное удлинение $\Delta dL = \varepsilon_x l dx$. Относительное удлинение диагонали получим, разделив это произведение на $dL = dx/l$. В итоге обнаруживаем, что удлинение ε_x вносит в удлинение ε_ν слагаемое $\varepsilon_x l^2$. Аналогичные слагаемые дают удлинения ε_y и ε_z. Теперь положим, что нижняя грань параллелепипеда $dx\,dy$ остается на месте, а верхняя вследствие сдвига в плоскости xOz получает вдоль оси x перемещение $\gamma_{zx} dz$. Это удлиняет диагональ dL на $\gamma_{zx} dz \cdot l$; делим это произведение на $dL = dz/n$ и видим, что сдвиг γ_{zx} приводит к увеличению ε_ν на $\gamma_{zx} nl$. Остальные слагаемые можно написать по аналогии. Суммируя их, получаем

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl + \gamma_{xy} lm. \qquad (7.17)$$

Несколько сложнее определить угол сдвига в плоскости, определяемой двумя взаимно перпендикулярными прямыми ν и μ (см. рис. 7.28, *б*). Для этого надо найти перемещение точки A по направлению μ и разделить его на dL. Это дает угол поворота отрезка dL в плоскости $\nu O\mu$. Затем все то же самое проделываем для отрезка, расположенного по оси μ. Сумма найденных углов дает искомый угол сдвига в плоскости $\nu O\mu$. Но этих выкладок мы уже делать не будем. Главное ясно. Деформированное состояние в точке определяется шестью компонентами.

Теперь вернемся к выражению (7.17) и сравним его с найденным ранее для напряжения σ_ν выражением (7.4). Эти соотношения имеют общую структуру, и все, что было получено ранее из выражения (7.4), можно получить и из (7.17). Достаточно только во всех формулах заменить σ_x, σ_y, σ_z на ε_x, ε_y, ε_z, а $2\tau_{yz}$, $2\tau_{zx}$, $2\tau_{xy}$ — на γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy}.

Таким образом, анализ деформированного состояния показывает, что оно обладает свойствами, совершенно аналогичными свойствам напряженного состояния. Среди множества осей, которые могут быть проведены через исследуемую точку, существуют три взаимно перпендикулярные оси, в системе которых угловые деформации отсутствуют. Эти оси называются *главными осями деформированного состояния*, а линейные деформации в этой системе — *главными деформациями*.

Главные деформации определяются из кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 + J_2\varepsilon - J_3 = 0,$$

коэффициентами которого являются *инварианты* деформированного состояния:

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z;$$

$$J_2 = \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2; \qquad (7.18)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Из сопоставления этих выражений с соотношениями (7.8) и (7.9) видно, что аналогом нормального напряжения здесь является линейная деформация, а аналогом касательного напряжения — по-

ловина угла сдвига в соответствующей плоскости. Продолжая эту аналогию, можно, подобно кругам Мора в напряжениях, построить круги Мора в деформациях.

Анализ деформированного состояния основан на чисто геометрических соотношениях, и поэтому все сказанное остается справедливым для любого однородного тела независимо от механических свойств материала.

Наряду с линейной и угловой деформациями в сопротивлении материалов приходится рассматривать иногда *объемную деформацию*, т. е. относительное изменение объема в точке. Линейные размеры элементарного параллелепипеда dx, dy и dz в результате деформации меняются и становятся равными $dx(1 + \varepsilon_x)$, $dy(1 + \varepsilon_y)$ и $dz(1 + \varepsilon_z)$. Абсолютное приращение объема определяется, очевидно, разностью

$$\Delta V = dx\,dy\,dz\,(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - dx\,dy\,dz.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая произведениями линейных деформаций как величинами, малыми по сравнению с их первыми степенями, получаем

$$\Delta V = dx\,dy\,dz(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Относительное изменение объема обозначается буквой e и равно сумме линейных деформаций по трем осям:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \qquad (7.19)$$

С поворотом осей относительное изменение объема e в точке, очевидно, не меняется. Это — один из инвариантов деформированного состояния (см. формулу (7.18)).

7.7. Обобщенный закон Гука и потенциальная энергия деформации в общем случае напряженного состояния

До сих пор напряженное и деформированное состояния рассматривали независимо одно от другого и не связывали со свойствами материала. Однако между компонентами напряженного состояния, с одной стороны, и деформированного — с другой, существует определенная зависимость. В пределах малых деформаций эта зависимость является линейной и носит название *обобщенного*

закона Гука. Наиболее простую форму обобщенный закон Гука принимает для изотропного тела. В этом случае коэффициенты пропорциональности между компонентами напряженного и деформированного состояний не зависят от ориентации осей в точке.

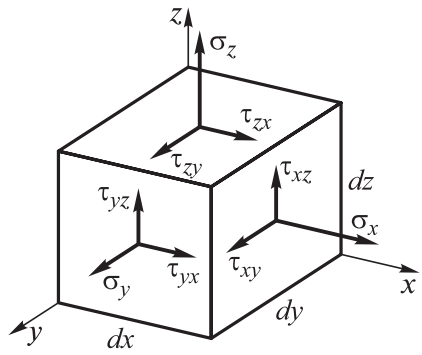


Рис. 7.29

Для того чтобы составить аналитическое выражение обобщенного закона Гука, воспользуемся принципом независимости действия сил и рассмотрим раздельно силы, возникающие на гранях элементарного параллелепипеда (рис. 7.29).

В любой из координатных плоскостей, например yOz, угловая деформация определяется только соответствующим касательным напряжением $\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$. Две другие пары касательных напряжений, а также нормальные напряжения не будут влиять на γ_{yz}, что является следствием свойств изотропного материала.

Сказанному можно дать следующее объяснение. Допустим, что на гранях элемента возникают только касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (рис. 7.30, *а*). Спрашивается, может ли при этом появиться угловая деформация γ_{yz} в плоскости, перпендикулярной плоскости действия касательных напряжений τ_{xy}?

Если эта деформация возникает, то указать ее знак для изотропного материала невозможно, поскольку «предпочтительность» того или иного направления для τ_{xy} не обнаруживается, а в свойствах материала она отсутствует. Положим, например, что сдвиг проис-

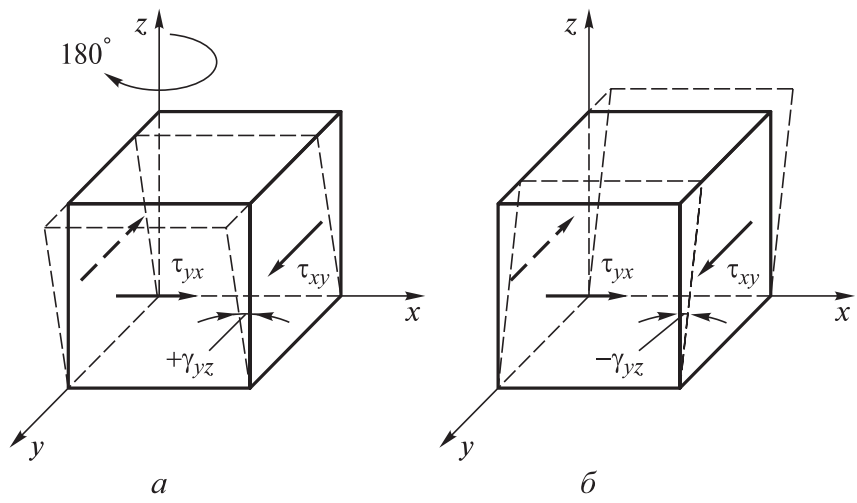


Рис. 7.30

ходит в направлении, указанном на рис. 7.30, *а*. Тогда, поворачивая элемент на 180° относительно оси z, получаем точно ту же систему сил τ_{xy} и противоположный знак γ_{zy} (рис. 7.30, *б*). Ясно, что указанное противоречие устраняется только в том случае, если $\gamma_{yz} = 0$. Следовательно, принимая принцип независимости действия сил, можно сказать, что угловая деформация γ_{yz} от τ_{xy} не зависит. Аналогичным образом доказывается, что она не зависит от всех прочих компонент напряженного состояния, кроме τ_{yz}. Для анизотропного материала приведенные соображения не имеют силы. В итоге для трех угловых деформаций получаем

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \tag{7.20}$$

Из этих выражений видно, что для изотропного тела *главные оси напряженного и деформированного состояний* совпадают, поскольку одновременно с касательными напряжениями обращаются в нуль и угловые деформации.

Подобно тому как угловые деформации не зависят от нормальных напряжений, линейные деформации не зависят от касательных напряжений. Это может быть довольно просто показано при помощи приведенных выше рассуждений. Кроме того, это следует также и из теоремы взаимности работ (см. 5.6). Если нормальные напряжения не вызывают сдвига, на котором касательные силы могли бы совершить работу, то касательные напряжения не вызывают линейных смещений, на которых могли бы совершить работу нормальные силы.

Относительное удлинение в направлении оси x, обусловленное напряжением σ_x, равно σ_x/E. Напряжениям σ_y и σ_z соответствуют удлинения по оси x обратного знака, равные $-\nu\sigma_y/E$ и $-\nu\sigma_z/E$, где ν — коэффициент Пуассона. Следовательно,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}.$$

Такие же выражения получаем по аналогии и для ε_y и ε_z. В итоге

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)];\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)];\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Сложив левые и правые части этих равенств, получим выражение объемной деформации (7.19) в виде

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \qquad (7.22)$$

Полученные соотношения (7.20) — (7.22) являются аналитическим выражением обобщенного закона Гука для изотропного тела.

Выражение объемной деформации (7.22) позволяет установить предельное значение коэффициента Пуассона для любого изотропного материала. Оно справедливо для любого напряженного состояния и применимо, в частности, при $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$. В этом случае

$$e = 3\frac{1-2\nu}{E}\, p.$$

При положительном p изменение объема e должно быть также положительным, а при отрицательном p — отрицательным. Это возможно только в том случае, если $\nu \le 1/2$. Следовательно, значение коэффициента Пуассона для изотропного материала не может превышать 0,5.

Полученный вывод, несмотря на то, что он вытекает из частного случая напряженного состояния, является общим, поскольку ν является характеристикой *материала* и в пределах упругих деформаций от напряженного состояния не зависит.

Перейдем к определению потенциальной энергии деформации в общем случае напряженного состояния. Очевидно, потенциальная энергия, накопленная в элементарном объеме, определяется суммой работ сил, распределенных по поверхности этого объема. Нормальная сила $\sigma_x dy\, dz$ (см. рис. 7.29) на перемещении $\varepsilon_x dx$ совершает работу, равную

$$\frac{1}{2}\sigma_x dydz \cdot \varepsilon_x dx,$$

где ε_x — относительное удлинение вдоль оси x, вызванное всеми действующими силами.

Аналогичные выражения работ дают и остальные нормальные составляющие. Касательная сила $\tau_{yz} dy\, dx$ на перемещении $\gamma_{yz} dz$ совершает работу

$$\frac{1}{2}\tau_{yz} dydx \cdot \gamma_{yz} dz$$

(см. также 2.1). Выражения для остальных слагаемых внутренней энергии получаем простой перестановкой индексов. В итоге имеем

$$dU = \frac{1}{2} dxdydz(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy}).$$

Если энергию отнести, как это обычно делают, к единице объема и, кроме того, по формулам (7.20) и (7.21) выразить деформации через напряжения, то окончательно получим

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)] + \frac{1}{2G}(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2), \quad (7.23)$$

или в главных напряжениях

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)]. \quad (7.24)$$

Для того чтобы найти потенциальную энергию во всем объеме деформированного тела, выражение для U_0 следует умножить на элементарный объем и проинтегрировать по объему тела:

$$U = \int_V U_0 dV.$$

Выведем выражения для так называемых *энергии изменения формы и энергии изменения объема*. Эти выражения потребуются в дальнейшем при изучении вопросов, связанных с пластическими деформациями и предельными напряженными состояниями.

Деление внутренней потенциальной энергии на две указанные составляющие является условным; в его основе лежит следующий принцип.

Каждое из главных напряжений представляют в виде суммы двух величин:

$$\sigma_1 = p + \sigma_1', \quad \sigma_2 = p + \sigma_2', \quad \sigma_3 = p + \sigma_3', \quad (7.25)$$

в результате чего напряженное состояние разбивается на два. Первое из них представляет собой всестороннее растяжение, а второе является дополнительным к нему до заданного напряженного состояния (рис. 7.31). Напряжения p подбирают с таким расчетом, чтобы изменение объема в дополнительном напряженном состоянии отсутствовало, т. е.

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0.$$

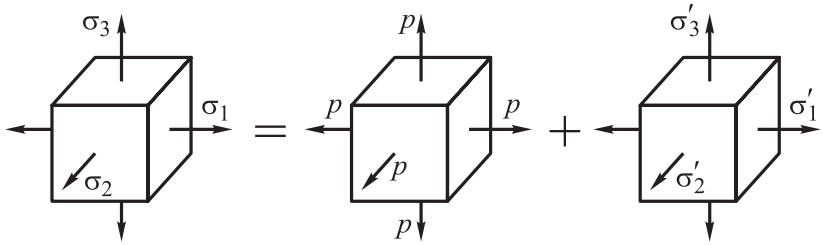


Рис. 7.31

Складывая выражения (7.25), получают

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \tag{7.26}$$

При указанном условии система сил первого напряженного состояния (p) не производит работы на перемещениях, вызванных силами второго состояния. Точно так же и силы второго напряженного состояния не производят работы на перемещениях первого.

Взаимные работы отсутствуют, поэтому внутреннюю энергию разбивают на две части, соответствующие двум напряженным состояниям:

$$U_0 = U_{0\text{об}} + U_{0\text{ф}},$$

где $U_{0\text{об}}$ — энергия изменения объема, а $U_{0\text{ф}}$ — энергия изменения формы, или *энергия формоизменения*.

Подставляя в выражение (7.24) вместо всех главных напряжений величину p из (7.26), получают для первого состояния

$$U_{0\text{об}} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \tag{7.27}$$

Энергию формоизменения можно найти, вычитая $U_{0\text{об}}$ из U_0. После несложных преобразований имеем

$$U_{0\text{ф}} = \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2),$$

или

$$U_{0\text{ф}} = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 \quad \sigma_2)^2 + (\sigma_2 \quad \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \tag{7.28}$$

Если это выражение написать для произвольных осей, то в соответствии с (7.23)

$$U_{0\text{ф}} = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \\ + \frac{1}{2G}(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2). \qquad (7.29)$$

В частном случае всестороннего равномерного сжатия или растяжения, т. е. при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$,

$$U_{0\text{об}} = \frac{3}{2}\frac{1-2\nu}{E}\sigma^2; \quad U_{0\text{ф}} = 0.$$

При чистом сдвиге, т. е. если $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma$, составляющие потенциальной энергии имеют вид

$$U_{0\text{об}} = 0; \quad U_{0\text{ф}} = \frac{1+\nu}{E}\sigma^2.$$

Сравнивая выражение (7.27) с (7.12), а (7.28) с (7.11), легко заметить любопытную особенность: энергия изменения объема и энергия формоизменения соответственно пропорциональны квадратам нормального и касательного октаэдрических напряжений.

7.8. Анизотропия

Все сказанное по поводу обобщенного закона Гука и вытекающих из него следствий относилось к изотропным средам. Теперь остановимся на упругих свойствах анизотропных материалов.

До недавнего времени в практических задачах инженерной механики эти вопросы на передний край не выдвигались. Это не значит, что анизотропные материалы не находили применения. С ними давно приходится иметь дело. Вспомним хотя бы резинокордную конструкцию автомобильных и авиационных шин, где резиновая оболочка армирована стальными или нейлоновыми нитями, образующими косоугольную сетку. Можно вспомнить и фанерные анизотропные панели, применявшиеся в прошлом для оклейки несущих плоскостей самолетов. Можно привести и другие примеры, где анизотропия фигурирует как важный фактор расчетной схемы. И все же, несмотря на несомненную важность и даже заслуженность подобных прикладных задач, следует признать, что все они узконаправленны и по своей общности существенно

уступают тому богатству структурных схем, которое раскрывается перед нами в связи с применением композитных материалов. Сейчас немыслимо представить авиационную и ракетно-космическую технику без применения композитов. Композитные материалы уже охватили многие отрасли промышленности, в том числе производство предметов домашнего обихода.

Композитные материалы могут иметь различную структуру. Но во всех случаях, по самому определению, композит состоит по крайней мере из двух компонентов — наполнителя и связующего. Последнее обычно называют матрицей. Если наполнитель представляет собой уложенную в определенном порядке систему нитей или нитевидных кристаллов, композитный материал приобретает резко выраженные свойства анизотропии, и модули упругости в различных направлениях могут различаться в несколько крат.

Не касаясь пока вопросов прочности, постараемся представить армированную структуру композита как сплошную и однородную среду с соответствующими упругими константами, позволяющими построить закон Гука в традиционной форме линейных зависимостей между компонентами напряженного и деформированного состояний. И обобщение в этом случае достаточно очевидно: каждая компонента деформированного состояния зависит от каждой из компонент напряженного состояния. В итоге получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z + S_{14}\tau_{yz} + S_{15}\tau_{zx} + S_{16}\tau_{xy};\\
\varepsilon_y &= S_{21}\sigma_x + S_{22}\sigma_y + S_{23}\sigma_z + S_{24}\tau_{yz} + S_{25}\tau_{zx} + S_{26}\tau_{xy};\\
\varepsilon_z &= S_{31}\sigma_x + S_{32}\sigma_y + S_{33}\sigma_z + S_{34}\tau_{yz} + S_{35}\tau_{zx} + S_{36}\tau_{xy};\\
\gamma_{yz} &= S_{41}\sigma_x + S_{42}\sigma_y + S_{43}\sigma_z + S_{44}\tau_{yz} + S_{45}\tau_{zx} + S_{46}\tau_{xy};\\
\gamma_{zx} &= S_{51}\sigma_x + S_{52}\sigma_y + S_{53}\sigma_z + S_{54}\tau_{yz} + S_{55}\tau_{zx} + S_{56}\tau_{xy};\\
\gamma_{xy} &= S_{61}\sigma_x + S_{62}\sigma_y + S_{63}\sigma_z + S_{64}\tau_{yz} + S_{65}\tau_{zx} + S_{66}\tau_{xy},
\end{aligned} \tag{7.30}$$

где S_{ik} — коэффициенты податливости, которые определяются свойствами материала, но не являются его константами, поскольку зависят еще и от ориентации выбранной системы осей x, y, z.

Как напряженное и деформированное состояния являются тензорами, так и система коэффициентов податливости образует тензор, но более высокого порядка (ранга). Исследовать его свойства мы не будем, но отметим только, что этот тензор симметричный, т. е. $S_{ik} = S_{ki}$. Это вытекает из теоремы взаимности работ (см. 5.6). Работа, например, силы $\sigma_y\,dy\,dz$ на перемещении $S_{12}\sigma_y dx$, вызванном силой $\sigma_y\,dx\,dz$, равна работе силы $\sigma_y dx\,dz$ на перемещении $S_{21}\sigma_x dy$:

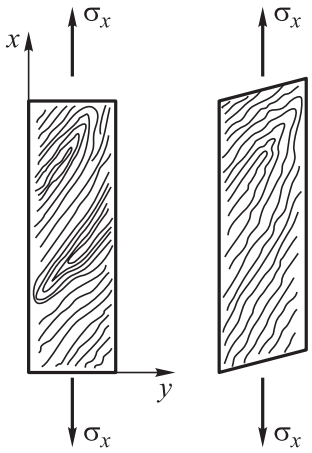


Рис. 7.32

$$\sigma_x dy\,dz \cdot S_{12}\sigma_y dx = \sigma_y dx\,dz \cdot S_{21}\sigma_x dy,$$

откуда следует, что $S_{12} = S_{21}$.

Если оси x, y, z являются главными осями напряженного состояния, то $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$. При этом угловые деформации γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} в нуль не обращаются. Следовательно, в анизотропной среде главные оси напряженного и деформированного состояний, вообще говоря, не совпадают. Это иллюстрирует простой пример, показанный на рис. 7.32. Деревянный образец вырезан под углом к направлению волокон. При растяжении вдоль оси x образец получит не только удлинение, но и перекос. В данном случае касательные напряжения τ_{xy} равны нулю и, следовательно, оси x и y — главные оси напряженного состояния. Деформация же γ_{xy} в нуль не обращается. Следовательно, для деформированного состояния оси x и y — не главные. Если бы образец был вырезан вдоль волокон, то при его растяжении по оси x никаких перекосов не возникало бы, и главные оси напряженного и деформированного состояний совпадали бы. А это означает, что некоторые из коэффициентов податливости при таком выборе осей обращаются в нуль. Значит, при определении коэффициентов податливости в целях простоты следует сообразовываться с осями анизотропии среды.

Наиболее простой вид матрица податливости (S_{ik}) приобретает, естественно, в случае полной изотропии (см. (7.20) и (7.21)):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}.$$

Несколько сложнее выглядит матрица податливости в случае *монотропии*, или, как ее часто называют, *трансверсальной изотропии*, которая свойственна композитам с однонаправленной укладкой нитевидного наполнителя (рис. 7.33).

Обратимся к первому выражению (7.21) и, сохраняя обозначения для модуля и коэффициента Пуассона, снабдим их соответствующими индексами. Пусть по оси x модуль будет E_1, а по равноправным осям y и z – E_2. Тогда

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma - \frac{\nu_{31}}{E_2}\sigma_y .$$

Обозначение коэффициента Пуассона снабжено двумя индексами. Первый соответствует оси, по которой приложено напряжение, а второй — той оси, по которой происходит сужение. Для монотропной среды, естественно, $\nu_{21} = \nu_{31}$. Написав аналогичные выражения и для остальных компонент деформированного состояния, получаем матрицу податливости монотропного материала в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}.$$

Здесь по свойству симметрии $\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$, а кроме того, поскольку в плоскости yOz среда изотропна, для нее сохраняется хорошо известное соотношение $G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{32})}$. Таким образом упругие

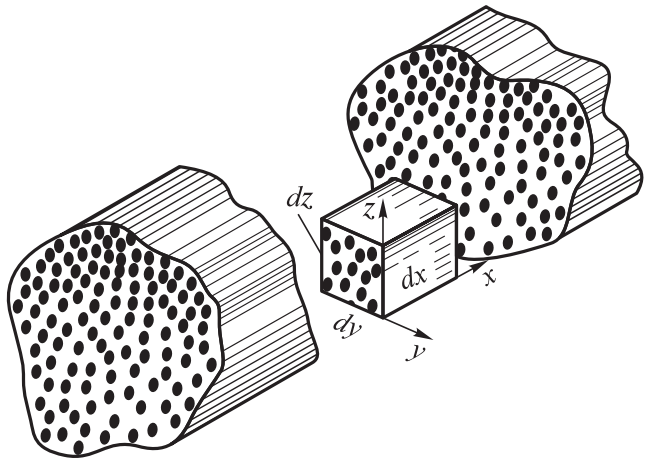


Рис. 7.33

свойства монотропной среды определяются пятью независимыми константами.

И, наконец, еще один вид анизотропии, характерный для композитов — *ортотропия*, обладающая симметрией относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей (рис. 7.34). Здесь в отличие от монотропии оси y и z неравноправны. В частности, ортотропной является древесина. Упругие свойства ортотропной среды описываются девятью независимыми постоянными:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix},$$

где, конечно, по свойству симметрии

$$\frac{\nu_{21}}{E_2}=\frac{\nu_{12}}{E_1},\quad \frac{\nu_{31}}{E_3}=\frac{\nu_{13}}{E_1},\quad \frac{\nu_{32}}{E_3}=\frac{\nu_{23}}{E_2}.$$

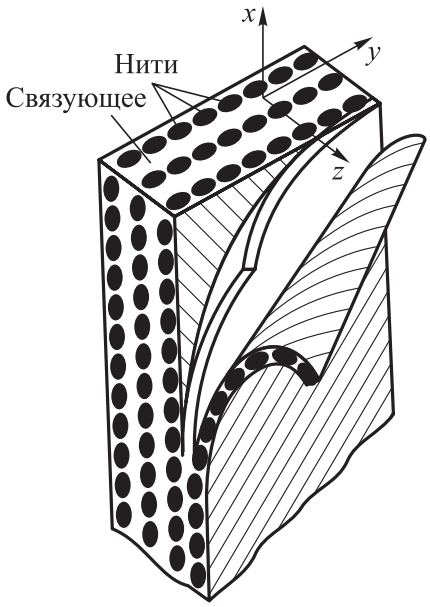


Рис. 7.34

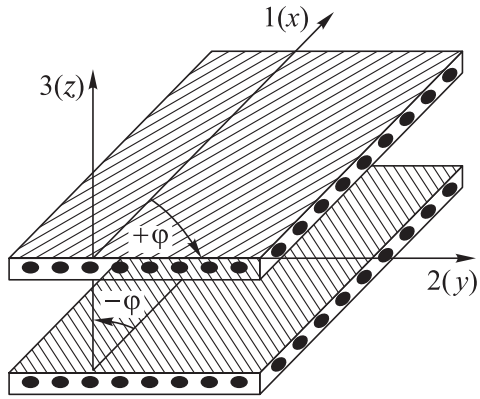


Рис. 7.35

Упругие постоянные E_1, E_2, ... для композита можно определять не только путем испытания образцов. Если известны модули нитей и связующего, можно с достаточной точностью рассчитать упругие постоянные создаваемого композита. В частности, особенно просто определить модуль упругости E_1 для монотропного композита (рис. 7.35). Достаточно очевидно, что в случае длинных нитей

$$E_1 = E_н V_н + E_с V_с,$$

где $E_н$ и $E_с$ — модули упругости нитей и связующего; $V_н$ и $V_с$ — соответственно их объемные доли в композите. Если наполнитель состоит из коротких нитевидных кристаллов, формула дает завышенные значения E_1. Возникает также погрешность вследствие различия коэффициентов Пуассона для нитей и матрицы, но она незначительна. Формулы для определения других упругих констант композита существенно сложнее только что приведенной, но не настолько, чтобы это серьезно затрудняло вычисления.

В практике расчетов и упругих констант, и предела прочности композита широко используют понятие *монослоя* — как основного составляющего элемента слоистых структур. Монослой — это скорее двойной слой (см. рис. 7.35), содержащий два семейства нитей, направленных соответственно под углами $+\varphi$, $-\varphi$ или 0°, 90° к оси x.

Если $\varphi = 0°$, получается однонаправленный монослой. Значения модулей упругости и пределов прочности такого монослоя даны

Таблица 7.1

Механические свойства однонаправленных композитов с эпоксидной матрицей

Характеристика	Стеклопластик ($V_{нап} = 0{,}65$)	Углепластик ($V_{нап} = 0{,}7$)	Органопластик ($V_{нап} = 0{,}54$)	Боропластик ($V_{нап} = 0{,}5$)
E_1, ГПа	52,1	181,4	84,3	201,3
E_2, ГПа	14,0	10,3	4,8	21,7
G_{12}, ГПа	6,3	6,9	2,9	5,4
ν_{12}	0,056	0,016	0,018	0,018
ν_{21}	0,21	0,28	0,32	0,17
E_1/E_2	3,7	17,6	17,6	9,3
E_1/G_{12}	8,3	26,3	29,1	37,3
$П_1^+$, МПа	1108	1494	1186	1373
$П_2^+$, МПа	7,5	40,0	10,9	55,8
$П_1^-$, МПа	530	1702	289	1599
$П_2^-$, МПа	78,0	246,1	64,8	123,4
$П_{12}$, МПа	22,4	67,6	27,6	63,0
$П_1^+/П_2^+$	148,0	37,3	108,8	24,6
$П_1^+/П_{12}$	49,5	22,1	43,0	21,8
$П_1^-/П_2^-$	6,8	6,9	4,5	13,0

Примечание. $V_{нап}$ — объемная доля наполнителя. Через $П^+$, $П^-$ и $П_{12}$ для наглядности обозначены соответственно пределы прочности на растяжение, на сжатие и на сдвиг.

Таблица 7.2

Механические свойства ортогонально армированных и перекрестно армированных композитов

Характеристика	Стеклопластик		Углепластик		Боропластик
	0°/90°	±45°	0°/90°	±45°	0°/90°
E_1, ГПа	22,6	17,0	68,8	8,2	84,3
E_2, ГПа	22,6	17,0	70,2	7,6	83,4
ν_{12}	0,150	—	0,034	0,890	0,050
ν_{21}	0,150	—	0,035	0,870	0,050

Окончание табл. 7.2

Характеристика	Стеклопластик		Углепластик		Бороплластик
	0°/90°	±45°	0°/90°	±45°	0°/90°
G_{12}, ГПа	9,4	12,5	3,1	20,0	4,4
Π_1^+, МПа	407	530	291	69	422
Π_2^+, МПа	407	—	284	64	—
Π_1^-, МПа	255	320	204	67	907
Π_2^-, МПа	255	—	208	98	—

в табл. 7.1. Приведенные данные заметно изменяются в зависимости от рецептуры связующего и от методов изготовления композита.

В табл. 7.2 даны значения модулей упругости и пределов прочности перекрестно армированных композитов.

Глава 8

КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ

8.1. Основные положения

Материал конструкции в зависимости от условий нагружения может находиться в различных механических состояниях. При небольших внешних силах возникают только упругие деформации, или, как говорят, материал находится в *упругом состоянии*. При больших силах обнаруживаются заметные остаточные деформации и материал находится в *пластическом состоянии*. При дальнейшем увеличении нагрузки происходит образование местных трещин и наступает *состояние разрушения*.

Такая последовательность смены механических состояний типична для пластичных материалов и с достаточной очевидностью вытекает из испытаний образцов на растяжение и сжатие. Возникают вопросы: способны ли эти испытания в полной мере характеризовать механические свойства материала и что будет, если испытания проводить в условиях не одноосного, а, скажем, трехосного напряженного состояния?

Наблюдения показывают, что это — вопрос далеко не праздный. Действительно, мы уже знаем, что чугун — типичный хрупкий материал — под действием большого всестороннего давления приобретает пластические свойства, и разрыв образца происходит с образованием шейки. Но ведь наложение всестороннего давления p означает переход от одноосного напряженного состояния

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

к трехосному

$$\sigma_1 = \sigma - p, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = -p,$$

и, следовательно, уже этот пример показывает нам, что в различных напряженных состояниях свойства материалов проявляются по-разному.

Образец с выточкой (см. рис. 1.46), изготовленный из пластичного материала, обнаруживает при растяжении хрупкие свойства. Конечно, это можно объяснить, как это уже делалось ранее, тем, что образование пластических деформаций сдвига в ослабленном сечении стеснено более жесткими участками, расположенными вне выточки. Но ту же самую мысль можно выразить и другими словами. Напряженное состояние в зоне выточки является неодноосным, и главные напряжения σ_2 и σ_3 в центральной части этой зоны будут положительными. Поэтому материал частично утрачивает способность пластически деформироваться.

Таким образом, механическое состояние материала в точке зависит в первую очередь от напряженного состояния в этой точке, хотя и не определяется им полностью. Например, при наличии температурного воздействия на механическом состоянии материала заметно сказывается фактор времени. При малом времени нагружения состояние материала можно рассматривать как упругое, а при большом — как пластическое. Но, пожалуй, более важным является то, что само понятие механического состояния в точке не свободно от противоречий с принятым ранее предположением о непрерывности среды. Это обнаруживается в первую очередь при изучении вопросов разрушения, поскольку процесс образования трещин в металлах тесно связан с их молекулярной и кристаллической структурой, а само разрушение определяется не только напряженным состоянием, но в ряде случаев характеризуется также и историей нагружения, т. е. зависит от того, в какой последовательности прикладываются силы. В качестве примера достаточно указать на разрушение при периодически изменяющихся нагрузках. Многократное нагружение и разгрузка могут привести к разрушению, хотя возникающие напряжения остаются существенно меньшими предела текучести.

Теоретическое обобщение этих вопросов относится к числу наиболее острых и злободневных проблем современной механики сплошной среды, и его обсуждение выходит далеко за рамки задач сопротивления материалов. Но, не углубляясь в тонкости вопроса, можно сказать одно: напряженное состояние в точке является главной причиной изменения механического состояния материала, и задача заключается в том, чтобы установить меру напряженного состояния, по достижении которой происходит переход от упругого состояния к пластическому, и условий, при которых начинается разрушение, т. е. выработать *критерий пластичности и критерий разрушения*.

Между тем и другим необходимо делать четкое разграничение. Физические процессы, протекающие в этих переходных состояни-

ях, хотя и взаимосвязаны, но существенно различны, и поэтому нет оснований в какой бы то ни было степени эти критерии отождествлять.

Более разработанным, определенным и более простым (если вообще понятие простоты применимо к этим вопросам) является критерий пластичности. С него мы и начнем, а о критерии разрушения поговорим несколько позже.

Проводя испытания на растяжение, мы фиксируем свое внимание на зависимости между напряжениями и деформациями и замечаем, что по достижении предела текучести в образце возникают ощутимые остаточные деформации. Таким образом, условием перехода из упругого состояния в пластическое является равенство $\sigma = \sigma_{т.р}$. При сжатии получим $\sigma = \sigma_{т.с}$. Аналогичным образом можно поступить и в случае чистого сдвига. Испытывая на кручение тонкостенную трубку, нетрудно выявить напряжения в характерных точках диаграммы сдвига и, назначив допускаемую пластическую деформацию, установить условие перехода в пластическое состояние.

Если следовать по указанному пути, то в каждом напряженном состоянии (σ_1, σ_2, σ_3) нужно было бы для каждого материала иметь соответствующие диаграммы испытания с числовыми характеристиками переходной точки. Понятно, однако, что такой подход к решению вопроса является совершенно неприемлемым прежде всего вследствие неисчерпаемости возможных типов напряженных состояний, а затем — в связи с чисто техническими затруднениями, возникающими при постановке испытаний материалов.

Техника эксперимента располагает в настоящее время возможностями ведения испытаний лишь для некоторых типов напряженных состояний (см. 14.2). Такие испытания требуют в ряде случаев применения довольно сложной аппаратуры и могут быть осуществлены только в сравнительно немногих исследовательских, но не производственных лабораториях. Из сказанного вытекает, что критерий пластичности (как и критерий разрушения), обладая универсальностью по отношению к различным напряженным состояниям, должен в то же время базироваться на ограниченном числе испытаний.

Практическое значение критерия пластичности также достаточно очевидно. Мы уже знаем, как, например, рассчитывают стержень на изгиб. Если нам заданы допускаемые касательные напряжения, то мы сумеем рассчитать стержень и на кручение. Но если он одновременно изгибается и закручивается, то о его прочности пока ничего сказать нельзя, так как мы не знаем, при каком соотношении между нормальными изгибными напряжениями и

касательными напряжениями кручения возникают остаточные деформации. Ответ на этот и подобные ему вопросы должен дать критерий пластичности.

Известны два подхода к формулировке критерия пластичности. Первый связан с принятием правдоподобных, обоснованных последующими экспериментами гипотез. Основные из них будут рассмотрены в 8.2.

Вторым, более многообещающим, является феноменологический подход, который основан на выборе наиболее простого и полного описания совокупности экспериментальных данных при минимальных упрощающих предположениях. Этот подход будет рассмотрен в 8.3.

Прежде чем перейти к рассмотрению существующих теорий, введем некоторые понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем и которые широко используются на практике.

Обобщим понятие коэффициента запаса. Положим, задано напряженное состояние в точке. Если увеличивать пропорционально все компоненты этого напряженного состояния, т. е. изменять его подобным образом, то рано или поздно состояние материала изменится: либо возникнут пластические деформации, либо начнется разрушение. Условимся под коэффициентом запаса в данном напряженном состоянии понимать число, показывающее, во сколько раз следует увеличить все компоненты напряженного состояния, чтобы изменилось механическое состояние материала. Из данного определения как частный случай вытекает уже знакомое нам определение коэффициента запаса при простом растяжении.

Если в двух напряженных состояниях коэффициенты запаса равны, то такие напряженные состояния называются *равноопасными*.

Для заданного материала напряженные состояния можно сравнивать не по коэффициенту запаса, а по числовой характеристике какого-либо одного напряженного состояния, выбираемого в качестве эталона. За такой эталон (эквивалент) удобнее всего принять напряжение обычного растяжения. Введем понятие эквивалентного напряжения $\sigma_{экв}$ (рис. 8.1). *Эквивалентное напряжение* — это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его состояние было равноопасно с заданным напряженным состоянием.

Широко используемое в практике понятие эквивалентного напряжения содержит в своей основе замаскированное предположение, что для количественной оценки перехода материала из одного состояния в другое достаточно задать только одно число. В действительности это не всегда так. Сравнивая два равноопасных

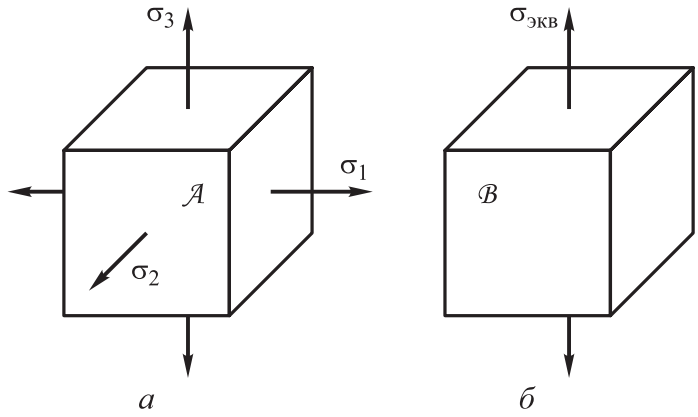


Рис. 8.1

напряженных состояния (см. рис. 8.1, *а*, *б*), мы не учитываем свойств материала, проявляющихся в разных напряженных состояниях по-разному. Может случиться, что в напряженном состоянии, представленном на рис. 8.1, *а*, при пропорциональном увеличении всех составляющих напряжений произойдет хрупкое разрушение, а в состоянии, показанном на рис. 8.1, *б*, при увеличении $\sigma_{экв}$ начнется процесс образования пластических деформаций. Тогда напряженные состояния оказываются несопоставимыми.

Таким образом, понятие $\sigma_{экв}$ следует рассматривать как не всегда безупречное, но в то же время весьма удобное средство для ведения практических расчетов.

Вводя понятие эквивалентного напряжения, мы сводим расчет на прочность в сложном напряженном состоянии к расчету на обычное растяжение. Действительно, коэффициент запаса при растяжении (см. рис. 8.1, *б*) определяется, как обычно, следующим образом:

$$n = \frac{\sigma_{т.р}}{\sigma_{экв}}.$$

Такую же величину коэффициент запаса имеет и для случая сложного напряженного состояния, представленного на рис. 8.1, *а*. Весь вопрос заключается только в том, как выразить $\sigma_{экв}$ через σ_1, σ_2 и σ_3. Для этого рассмотрим некоторые уже сложившиеся и зарекомендовавшие себя гипотезы пластичности, или гипотезы появления пластических деформаций.

8.2. Гипотезы появления пластических деформаций

Итак, основной вопрос при формулировке критерия пластичности заключается в том, какая из компонент напряженного состояния (или какая их комбинация) в общем случае определяет переход материала к пластическому состоянию.

Из множества предлагавшихся в свое время гипотез пластичности лишь две сохранили к настоящему времени свое значение.

Первая гипотеза связана с именами Треска и Сен-Венана. Она основана на достаточно очевидной предпосылке: пластическая деформация в металлах возникает в результате необратимых сдвигов в кристаллической решетке. Понятно, что переход к пластическому состоянию не происходит внезапно. Сначала пластическая деформация возникает в отдельных, неблагоприятно ориентированных зернах. Возрастание нагрузки вовлекает в пластическую деформацию новые микрообласти, и, когда пластической деформацией охватывается подавляющее множество зерен, мы можем говорить о том, что произошел переход к пластическому состоянию. Естественно предположить, что мерой этого перехода является наибольшее касательное напряжение в объеме, охватывающем достаточно большое число произвольно ориентированных зерен, т. е. то самое касательное напряжение, которое мы определяли на основе предпосылки сплошной изотропной среды.

Максимальное касательное напряжение возникает на площадках, равнонаклоненных к площадкам наибольшего и наименьшего главных напряжений, и равно полуразности этих напряжений (см. выражение (7.14)):

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Таким образом, если $\tau_{\max}$ достигло некоторого предельного значения, свойственного данному материалу, то *независимо от вида напряженного состояния* происходит переход к пластическому состоянию материала.

Экспериментальная проверка этой гипотезы показала, что для пластичных материалов она приводит, в общем, к удовлетворительным результатам. Переход от упругого состояния к пластическому действительно с достаточной точностью определяется разностью между наибольшим и наименьшим из главных напряжений и слабо зависит от промежуточного главного напряжения σ_2. Наложение

всестороннего давления на любое напряженное состояние не меняет τ_{max} и, следовательно, не оказывает влияния на возникновение пластических деформации. В частности, при всестороннем гидростатическом давлении τ_{max} обращается в нуль. Это означает, что в таких условиях в материале пластические деформации не возникают вовсе. Все опыты, проводившиеся при доступных для техники давлениях, подтверждают это. Сказанное нисколько не противоречит описанному ранее поведению чугуна в условиях высокого давления. Наложение всестороннего давления влияет не на условия *пластичности*, а на условия *разрушения*. Граница разрушения отодвигается, и материал приобретает способность пластически деформироваться без разрушения. И это характерно вообще для всех конструкционных материалов. Если представить себе существование цивилизации на самых больших глубинах океана, то для этих воображаемых разумных существ понятия хрупкости и пластичности материалов были бы отличны от наших.

Придерживаясь сформулированного критерия пластичности, мы можем принять, что два напряженных состояния равноопасны в том случае, если имеет место равенство наибольших касательных напряжений. Для напряженных состояний, показанных на рис. 8.1, *а*, *б*, имеем

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_{экв},$$

откуда

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3. \qquad (8.1)$$

Это и есть то расчетное напряжение, которое по критерию максимальных касательных напряжений должно быть сопоставлено с пределом текучести при растяжении.

Казалось бы, что простота расчетных зависимостей, физическая наглядность критерия и, наконец, соответствие с экспериментом должны были бы обеспечить гипотезе максимальных касательных напряжений полную монополию если не в теоретическом аспекте, то по крайней мере при решении практических задач. Этого, однако, не произошло, и в своеобразном естественном отборе, который происходил среди многих гипотез, предлагавшихся в конце прошлого и начале настоящего века, выжила и заняла место наравне с теорией Треска — Сен-Венана также и гипотеза Хубера — Мизеса. Она была сформулирована Хубером в 1904 г. в виде исправленного варианта критерия Бельтрами, согласно которому

переход к пластическому состоянию связан с уровнем накопленной в единице объема потенциальной энергии деформации. Но принять в качестве критерия пластичности всю энергию деформации нельзя. Это противоречило бы экспериментально установленному факту, что при всестороннем давлении пластические деформации не возникают, в то время как потенциальная энергия неограниченно возрастает. В связи с этим Хубером было предложено исключить из рассмотрения энергию объема, а в качестве критерия перехода из упругого состояния в пластическое принять энергию формоизменения (7.28):

$$U_{0\text{ф}} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right].$$

Для простого растяжения это выражение приобретает вид

$$U_{0\text{ф}} = \frac{1+\nu}{6E}2\sigma_{\text{экв}}^2.$$

Из условия равноопасности определяем $\sigma_{\text{экв}}$. Для этого приравниваем два последних выражения и получаем

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}\,. \qquad (8.2)$$

Но энергия формоизменения, как мы уже знаем, пропорциональна квадрату октаэдрического касательного напряжения (см. 7.7). Поэтому то же самое выражение (8.2) для $\sigma_{\text{экв}}$ можно получить, если в качестве критерия пластичности принять не энергию формоизменения, а касательное напряжение в октаэдрических площадках. Действительно,

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2].$$

Для простого растяжения

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{2}{9}\sigma_{\text{экв}}^2.$$

Приравнивая выражения для $\tau_{\text{окт}}^2$, приходим к уравнению (8.2).

Почему же гипотеза Хубера — Мизеса, приводящая к более сложному для $\sigma_{\text{экв}}$ выражению (8.2), чем теория максимальных касательных напряжений, оказалась конкурентоспособной?

Оказывается, дело не только в том, что, по мнению многих авторитетов, она для основных конструкционных металлов более точно отражает условия перехода в пластическое состояние. В процентном отношении разница между выражениями (8.1) и (8.2) не столь уж и заметна. Она достигает максимума при чистом сдвиге, когда $\sigma_3 = -\sigma_1$, а $\sigma_2 = 0$, и составляет примерно 13 %. Более важным является другое обстоятельство. Когда конструкцию рассчитывают на прочность, мы, обращаясь к теории максимальных касательных напряжений, т. е. к выражению (8.1), должны обязательно продумать, которым из трех главных напряжений присвоить индексы 1, 2 и 3. Иногда это бывает не очень удобно, особенно если конструкция находится под воздействием системы сил, меняющихся по различным законам в зависимости от условий работы. Тогда сложность перебора различных случаев в соотношении нагрузок сводит на нет те преимущества, которые дает нам простота выражения (8.1). Если же обратиться к теории Хубера — Мизеса, то обнаруживается, что перестановка местами индексов 1, 2 и 3 в выражении (8.2) не сказывается на $\sigma_{экв}$, и это освобождает нас от необходимости думать о том, какое из главных напряжений является наибольшим, а какое — наименьшим.

Любопытно, что именно это обстоятельство заставило Мизеса, не знакомого с работой Хубера, в 1913 г. в целях упрощения предпринять поиск аналитического выражения, близкого к тому, что дает теория максимальных касательных напряжений, но не зависящего от перестановки индексов, что в дальнейшем позволило с большим успехом использовать это выражение при построении основ теории пластичности (см. гл. 11).

Итак, мы рассмотрели два основных критерия пластичности, базирующихся на правдоподобных гипотезах и согласующихся с опытом. Но к рассматриваемому вопросу можно подойти и с несколько иных позиций — с позиций упрощенной систематизации экспериментальных данных. Этот подход впервые был сформулирован Мором и в настоящее время носит название *теории Мора*.

8.3. Теория Мора и ее применение

Допустим, что мы располагаем испытательной машиной, на которой образцу можно задавать любые напряженные состояния с пропорциональным изменением всех компонент.

Выберем некоторое напряженное состояние и будем одновременно увеличивать все компоненты. Рано или поздно это напряжен-

ное состояние станет предельным. Образец либо разрушится, либо в нем появятся пластические деформации. Вычертим для предельного состояния на плоскости $\sigma O\tau$ наибольший из трех кругов Мора (круг *1*, рис. 8.2). Будем в дальнейшем считать, что предельное состояние не зависит от σ_2. Далее, на образце того же материала проводим испытание при другом напряженном состоянии. Снова путем пропорционального увеличения компонент добиваемся того, что напряженное состояние станет предельным. На диаграмме (см. рис. 8.2) вычерчиваем соответствующий круг (круг *2*).

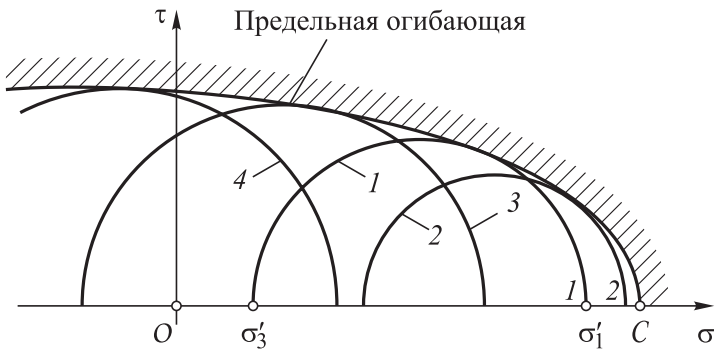


Рис. 8.2

Поступая таким образом и дальше, получим семейство кругов Мора для предельных напряженных состояний. Вычерчиваем их общую огибающую. Примем, что эта *огибающая является единственной* независимо от промежуточных главных напряжений σ_2. Это положение является основным допущением в излагаемой теории.

Форма огибающей предельных кругов Мора зависит от свойств материала и является его механической характеристикой, такой же, как, например, диаграмма растяжения. Если огибающая предельных кругов для материала дана, можно при любом заданном напряженном состоянии определить коэффициент запаса. Для этого надо по заданным напряжениям вычертить наибольший из трех кругов Мора, а затем, хотя бы графически, установить, во сколько раз следует увеличить σ_1 и σ_3, чтобы увеличенный круг касался предельной огибающей.

В изложенном подходе к вопросам предельных состояний не содержится, как видим, критериальных гипотез, и теория Мора основана в первую очередь на логической систематизации результатов необходимых экспериментов.

Теперь нужно решить вопрос о том, как построить огибающую предельных кругов при ограниченном числе испытаний. Наи-

более простыми являются испытания на растяжение и сжатие. Следовательно, два предельных круга получить просто (рис. 8.3). Можно получить еще один предельный круг путем испытания тонкостенной трубки на кручение. При этом материал будет находиться в состоянии чистого сдвига и центр соответствующего

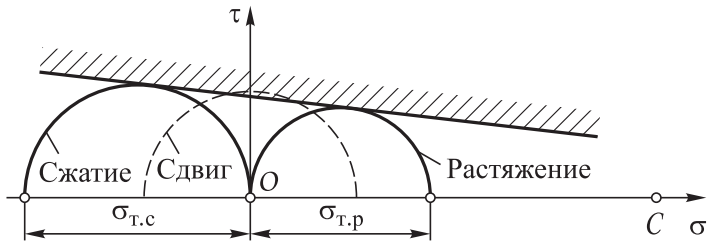


Рис. 8.3

круга расположится в начале координат (рис. 8.4). Однако этот круг для определения формы огибающей мало что дает, поскольку расположен вблизи двух первых кругов.

Для определения огибающей чрезвычайно важно знать поло-

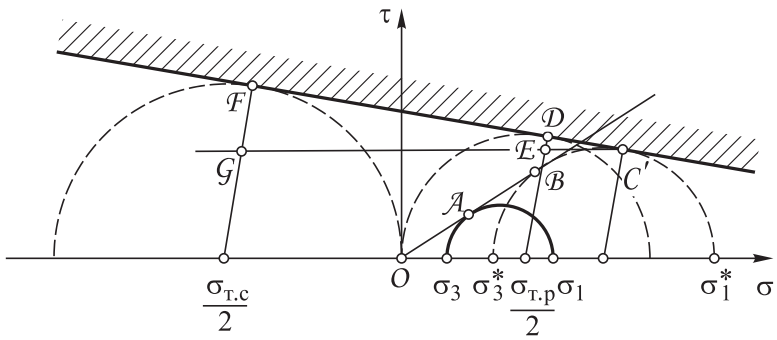


Рис. 8.4

жение точки C (см. рис. 8.2 и 8.3). Нормальное напряжение в этой точке представляет собой напряжение отрыва при всестороннем растяжении. До сих пор, однако, не существует метода для проведения соответствующего испытания. Вообще не удается осуществить испытание в условиях напряженного состояния, когда все три главных напряжения являются растягивающими (об этом подробнее см. в 14.2). Поэтому пока нет возможности построить для материала предельный круг, расположенный правее предельного круга растяжения.

В силу указанных обстоятельств наиболее простым и естественным является решение аппроксимировать предельную огибающую касательной к кругам растяжения и сжатия (см. рис. 8.3). Понятно,

что это не исключает возможности в дальнейшем, когда будут найдены новые методы испытания, уточнить форму огибающей и тем самым более полно отразить особенности поведения материала в условиях, близких к всестороннему растяжению.

Выведем выражение для $\sigma_{экв}$, полагая, что огибающая является прямой. На рис. 8.4 эта огибающая проведена по касательной к предельным кругам растяжения и сжатия (точки D и F).

Построим круг Мора для некоторого напряженного состояния, заданного наибольшим и наименьшим главными напряжениями σ_1 и σ_3 (см. рис. 8.4). Если все компоненты этого напряженного состояния увеличить в n раз (где n — коэффициент запаса), то круг станет предельным. Напряжения σ_1 и σ_3 примут значения σ_1^* и σ_3^*:

$$\sigma_1^* = n\sigma_1, \qquad \sigma_3^* = n\sigma_3. \tag{8.3}$$

Этот увеличенный (предельный) круг Мора касается предельной огибающей в точке C'. Кроме того, согласно условию пропорционального увеличения компонент, он будет касаться продолжения луча OA в точке B. Из точки C' проводим горизонтальную прямую $C'EG$ и составляем пропорпорцию: $\dfrac{DE}{C'E} = \dfrac{FG}{C'G}$. Но отрезки DE и FG представляют собой разности радиусов рассматриваемых кругов. Поэтому

$$DE = \frac{\sigma_{т.р}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2}; \quad FG = \frac{\sigma_{т.с}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2}.$$

Далее,

$$C'E = \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} - \frac{\sigma_{т.р}}{2}; \quad C'G = \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} + \frac{\sigma_{т.с}}{2}.$$

В результате преобразования пропорции получаем

$$\sigma_{т.р} = \sigma_1^* - \frac{\sigma_{т.р}}{\sigma_{т.с}}\sigma_3^*,$$

или, если учесть выражения (8.3),

$$n = \frac{\sigma_{т.р}}{\sigma_1 - \dfrac{\sigma_{т.р}}{\sigma_{т.с}}\sigma_3}.$$

Для эквивалентного растяжения

$$n = \sigma_{т.р}/\sigma_{экв}.$$

По условию эквивалентности коэффициенты запаса n в этих напряженных состояниях равны. Поэтому

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\sigma_3, \tag{8.4}$$

где k — отношение предела текучести при растяжении к пределу текучести при сжатии,

$$k = \sigma_{т.р}/\sigma_{т.с}. \tag{8.5}$$

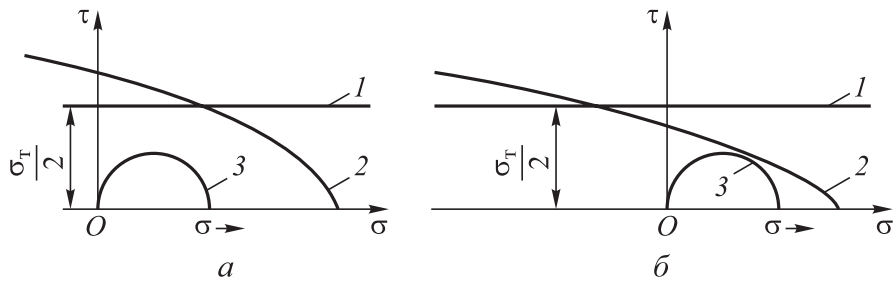
В частном случае, если материал имеет при растяжении и сжатии одинаковые пределы текучести, $k = 1$. Тогда формула (8.4) переходит в полученную ранее формулу (8.1).

В настоящее время практические расчеты по допускаемым напряжениям в сложном напряженном состоянии ведут, как правило, на основе формулы (8.4). Вместе с тем, если материал обладает одинаковыми механическими характеристиками при растяжении и сжатии, то расчеты можно вести по формулам гипотезы энергии формоизменения. Числовые результаты получаются вполне удовлетворительными.

Основное ограничение, которое накладывается на применение теории Мора, связано с недостаточной точностью определения предельной огибающей в области всестороннего растяжения. Это ограничение, однако, не столь существенно, поскольку напряженные состояния такого рода при решении практических задач встречаются редко. Недостаточно точно известен также вид предельной огибающей в области глубокого всестороннего сжатия. Здесь вследствие принятого упрощения также возможны погрешности. Наилучшие результаты выведенная расчетная формула дает для смешанных напряженных состояний, т. е. при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_3 < 0$. Тогда предельный круг Мора располагается в интервале между предельными кругами растяжения и сжатия.

Подход Мора хорош тем, что позволяет в связи с особенностями напряженного состояния доходчиво разъяснить относительную условность деления материалов на пластичные и хрупкие.

Для одного и того же материала мы всегда можем построить две огибающие предельных кругов Мора. Первая огибающая характеризует переход от упругого состояния материала к пластическому. Поскольку образование пластических деформаций мы принимаем независимым от шарового тензора, эта огибающая представляет собой прямую, параллельную оси σ (рис. 8.5). Вторая огибающая соответствует разрушению образца (кривая *2*).



а *б*

Рис. 8.5

Для материала пластичного (в общепринятом понимании этого термина) прямая *1* в правой части диаграммы (рис. 8.5, *а*) проходит ниже кривой *2*. Это означает, что при обычном испытании образца на растяжение круг Мора *3*, по мере увеличения растягивающего напряжения σ, сначала пересечет прямую *1*. В образце возникнут пластические деформации. Затем круг *3* коснется кривой *2*. Образец разрушится.

Теперь рассмотрим взаимное расположение огибающих для хрупкого материала (рис. 8.5, *б*). Здесь прямая *1* в правой части диаграммы расположена выше кривой *2*. При испытании образца на растяжение круг Мора *3*, не касаясь прямой *1*, соприкасается с кривой *2*. Разрушение происходит без заметных остаточных деформаций, как и положено для хрупких материалов. Предел текучести при этом, естественно, не определяют. Но это еще не значит, что он не существует. Представим себе, что мы испытываем тот же образец на растяжение в условиях высокого гидростатического давления. Тогда круг *3*, как единое целое, сместится в левую часть диаграммы и при увеличении растягивающей силы коснется сначала прямой *1*, но не кривой *2*. Мы получаем и пластические деформации для материала, считающегося хрупким, и находим даже его предел текучести.

Все признаки хрупкого разрушения можно получить и у пластичного материала, если его испытывать в условиях наложенного всестороннего растяжения.

Главное достоинство теории Мора заключается в принципе подхода к рассматриваемому вопросу. К сожалению, на это далеко не всегда обращают внимание, и часто теорию Мора ставят в один ряд с общеизвестными гипотезами, а то обстоятельство, что в частных случаях расчетная формула Мора совпадает с расчетной формулой гипотезы касательных напряжений, усиливает впечатление о равноценности этих подходов. Между тем феноменологический подход Мора, т. е. подход, основанный на логическом описании явления, является наиболее естественным и правильным. При обнаруже-

нии погрешностей или несоответствий этот подход сохраняет за нами возможность внести в теорию дополнительные уточнения. Так, если в дальнейшем удастся провести испытания образцов в области положительных σ_1 и σ_3, можно будет аппроксимировать предельную огибающую Мора уже не прямой, а некоторой кривой. В расчетную формулу в этом случае войдут не только характеристики материала на растяжение и сжатие, но и некоторые новые показатели, найденные в результате дополнительных испытаний.

Особое значение приобретает феноменологический подход в связи с широким применением в технике новых материалов. Такие материалы, как стеклопластики, стеклоткани и вообще материалы, имеющие волокнистую структуру, часто работают в условиях сложного напряженного состояния. При анализе подобных конструкций уже не приходится рассчитывать на апробированные теории. Надо создавать новую теорию, а это не всегда легко. Поэтому более целесообразным является феноменологический подход.

Сказанное о предпочтительности феноменологического подхода к вопросам предельного состояния не зачеркивает практического значения некоторых гипотез. Так, гипотеза максимальных касательных напряжений и гипотеза энергии формоизменения прочно вошли в расчетную практику и обеспечивают большие удобства при решении конкретных задач, а гипотеза энергии формоизменения приобрела особое значение в связи с созданием и развитием теории пластичности (см. 11.2).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие применение теории предельных состояний.

Пример 8.1. Определить, какое из трех показанных на рис. 8.6 напряженных состояний является более опасным. Числовые значения

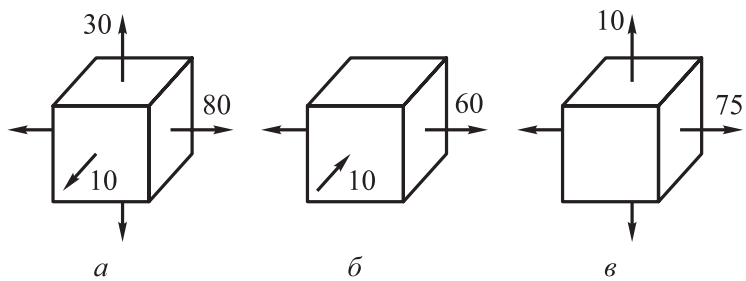


Рис. 8.6

напряжений заданы в МПа. Материал на растяжение и на сжатие работает одинаково ($k = 1$).

Подсчитываем эквивалентное напряжение по формуле (8.4) для случаев *а*, *б* и *в*:

а) $\sigma_{экв} = 80 - 10 = 70$ МПа; *б*) $\sigma_{экв} = 60 - (-10) = 70$ МПа; *в*) $\sigma_{экв} = 75 - 0 = 75$ МПа.

Наиболее опасным является состояние *в*. Состояния *а* и *б* равноопасны.

Пример 8.2. Прибор для исследования морских глубин опускают под воду на глубину H (рис. 8.7). Вес прибора в воде равен P. Плотность воды ρ, а материала троса $\rho_т$. Определить эквивалентные напряжения в верхнем и нижнем сечениях троса, если $k = 1$.

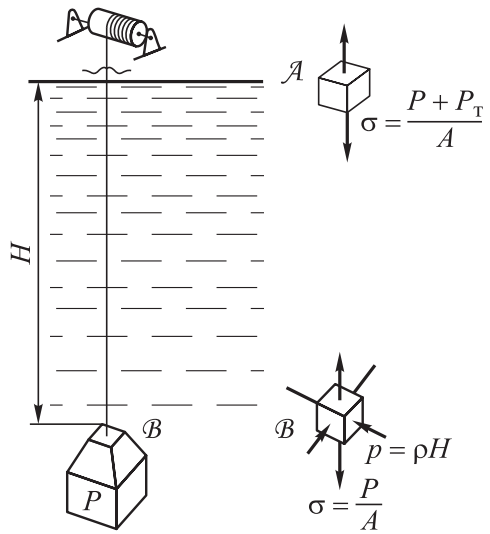


Рис. 8.7

В нижнем сечении имеет место трехосное напряженное состояние. Растягивающее напряжение создается весом прибора, сжимающее — давлением жидкости на глубине H:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\rho H;$$

$$\sigma_{экв} = \frac{F}{A} + \rho H.$$

В верхнем сечении имеет место только осевое растяжение, создаваемое весом прибора P и весом троса в воде $P_т = (\rho_т - \rho)AH$. Таким образом, в верхнем сечении

$$\sigma_{экв} = \frac{P + P_т}{A} = \frac{P}{A} + (\rho_т - \rho)H.$$

Если плотность троса более чем в два раза превышает плотность воды, то наиболее опасным будет верхнее сечение троса. Это сечение необходимо также проверить на прочность в случае, когда прибор висит на тросе в воздухе перед опусканием в воду.

Пример 8.3. Через систему шестерен передается момент $\mathfrak{M}$ (рис. 8.8). В пределах представленного узла этот момент уравновешивается моментом $\mathfrak{M}/i$ на нижней шестерне, где i — передаточное число от первого вала ко второму. Подобрать диаметр первого вала, если дано: $\mathfrak{M} = 2500$ Н · м, $R = 8$ см, $a = 80$ см, $b = 10$ см. Материал на растяжение и сжатие работает одинаково: $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 300$ МПа. Требуется обеспечить двукратный запас прочности ($n = 2$).

Из условия равенства нулю суммы моментов относительно оси вала находим тангенциальную силу на шестерне (рис. 8.8, *б*): $F = \mathfrak{M}/R$. Между шестернями возникает не только тангенциальная, но и радиальная сила F_R. Ее значение зависит от типа зацепления. Обычно

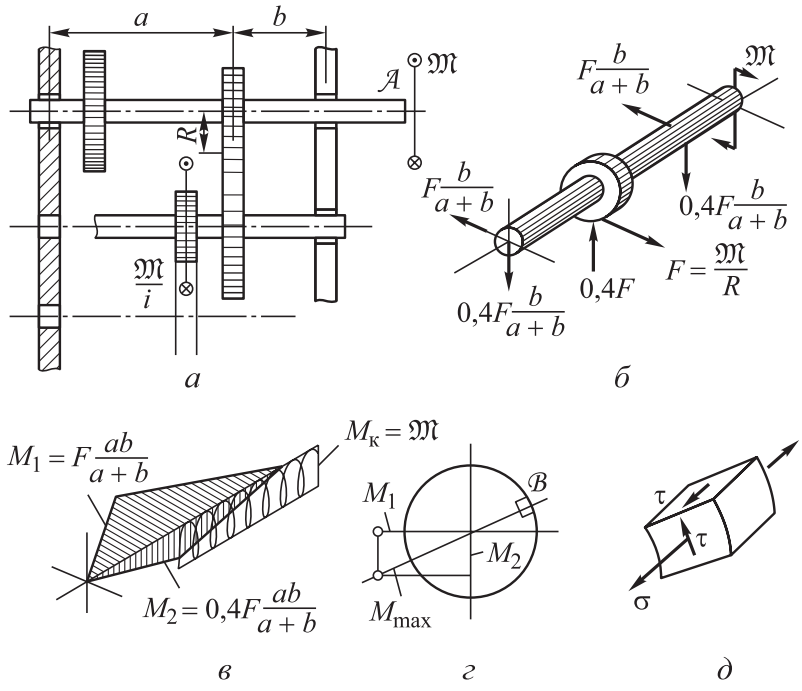


Рис. 8.8

принимают, что $F_R = 0{,}4F$. Определяя реакции опор, строим эпюры изгибающих и крутящих моментов (рис. 8.8, *в*).

Результирующий наибольший изгибающий момент равен, очевидно,

$$M_{\max} = \sqrt{\left(F\frac{ab}{a+b}\right)^2 + \left(0{,}4F\frac{ab}{a+b}\right)^2}; \quad M_{\max} = 1{,}08F\frac{ab}{a+b}.$$

Наиболее опасной будет периферийная точка $\mathcal{B}$ в сечении, лежащая в плоскости момента (рис. 8.8, *г*).

В окрестности точки выделяем элемент, показанный на рис. 8.8, *д*. Напряжение σ определяется изгибающим моментом, а τ — крутящим:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{0{,}1d^3}; \quad \tau = \frac{\mathfrak{M}}{0{,}2d^3}.$$

Для полученного напряженного состояния находим главные напряжения. Поскольку одна из главных площадок известна, пользуемся построением круга Мора (рис. 8.9), откуда получаем

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}; \quad \sigma_2 = 0. \qquad (8.6)$$

Находим, далее, эквивалентное напряжение по формуле (8.4). При $k = 1$ имеем

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

или

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\left(\frac{M}{0{,}1d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{\mathfrak{M}}{0{,}2d^3}\right)^2}.$$

Подставляя сюда значения изгибающего и крутящего моментов, получаем окончательно

$$\sigma_{экв} = \frac{\mathfrak{M}}{0{,}1d^3}\sqrt{\left[\frac{1{,}08ab}{R(a+b)}\right]^2 + 1}.$$

По заданным числовым значениям величин из условия $\sigma_{т.р}/n = \sigma_{экв}$ находим диаметр $d \approx 64$ мм.

Рассмотренное в последнем примере напряженное состояние всегда встречается при расчете вала на совместные кручение и изгиб (или растяжение). Поэтому имеет смысл для плоского напряженного состояния (σ, τ), показанного на рис. 8.9, сразу вы-

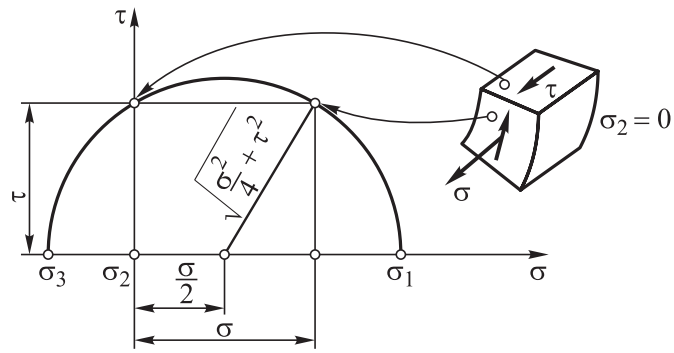


Рис. 8.9

разить $\sigma_{экв}$ через две указанные компоненты с тем, чтобы избежать промежуточного определения главных напряжений.

Формула (8.4) после подстановки σ_1, σ_2 и σ_3 из выражений (8.6) принимает вид

$$\sigma_{экв} = \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad (8.7)$$

При $k = 1$ приходим к тому же самому выражению, которое было получено при решении рассмотренного примера:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad (8.8)$$

Гипотеза энергии формоизменения (см. (8.2)) в этом случае дает

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \qquad (8.9)$$

В практических расчетах этими формулами приходится пользоваться весьма часто, но при этом следует постоянно помнить, что они применимы *только* к указанному напряженному состоянию.

Различие коэффициентов при τ^2 в двух последних выражениях не должно вызывать удивление. Это — следствие различия гипотез. Наибольшее относительное расхождение между числовыми значениями $\sigma_{экв}$, найденными по формулам (8.8) и (8.9), составляет примерно 13 %, что имеет место при $\sigma = 0$.

Пример 8.4. Определить допустимую нагрузку для Г-образного стержня, показанного на рис. 8.10. Материал стержня — ковкий чугун, $\sigma_{в.р}$ = 150 МПа, $\sigma_{в.с}$ = 330 МПа. Сечение — квадратное со стороной a = 3 см; l = 30 см. Задан коэффициент запаса n = 3.

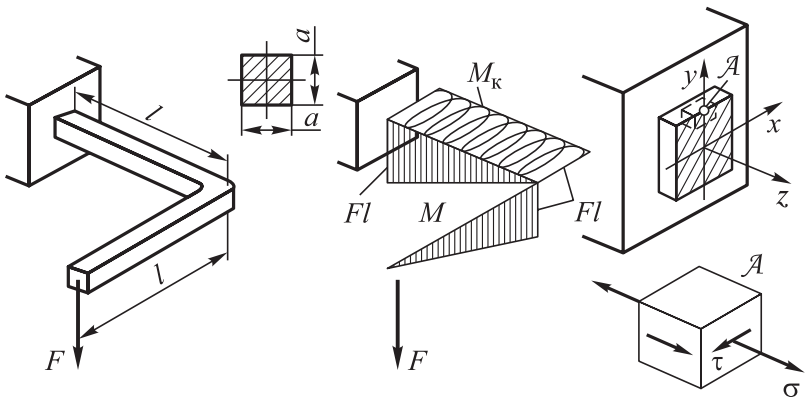


Рис. 8.10

Строим эпюру изгибающих и крутящих моментов. Наиболее опасной является точка A в заделке,

$$\sigma = \frac{6Fl}{a^3}; \quad \tau = \frac{Fl}{0,208\,a^3}.$$

Напряженное состояние соответствует рассмотренному в предыдущем примере. Поэтому можно пользоваться формулой (8.7). Определяем: k = = 150/330 = 0,455. Подставляя числовые значения величин в выражение (8.7), находим $\sigma_{экв} = F \cdot 10,94$. Учитывая трехкратный запас, получим $F \approx 450$ Н.

Пример 8.5. Сравнить эквивалентные напряжения в прямоугольной призме в двух случаях нагружения: призма сжимается свободно (рис. 8.11, *а*), призма сжимается в жестком гнезде, не позволяющем ей расширяться в поперечном направлении (рис. 8.11, *б*).

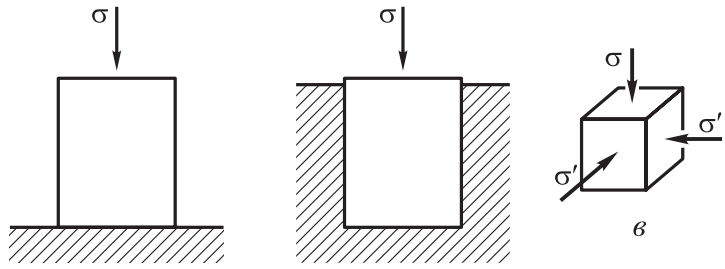


Рис. 8.11

В первом случае $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma$. Следовательно, $\sigma_{экв} = k\sigma$.

Во втором случае необходимо сначала определить поперечные сжимающие напряжения σ' (см. рис. 8.11, *в*).

По условию поперечная деформация ε' равна нулю, и в соответствии с законом Гука

$$\varepsilon' = \frac{1}{E}[\sigma' - v(\sigma + \sigma')] = 0,$$

откуда поперечное сжимающее напряжение

$$\sigma' = \frac{v}{1-v}\sigma.$$

Для полученного напряженного состояния

$$\sigma_1 = -\frac{v}{1-v}\sigma; \quad \sigma_3 = -\sigma; \quad \sigma_{экв} = \left(k - \frac{v}{1-v}\right)\sigma.$$

Величина $\sigma_{экв}$ вследствие ограничения поперечных деформаций, как видим, уменьшается.

Существенно отметить, что для напряженных состояний всестороннего сжатия теория Мора иногда дает отрицательные значения $\sigma_{экв}$. В частности, это имеет место и в рассматриваемом примере в случае $k < \dfrac{v}{1-v}$.

Такому результату формально можно дать следующее толкование. Если при $\sigma_{экв} = 0$ напряженное состояние равноопасно ненапряженному, то при $\sigma_{экв} < 0$ напряженное состояние менее опасно, чем ненапряженное. Несмотря на парадоксальность такого вывода, нет основания его отвергать. Вместе с тем его можно отнести также к погрешностям определения предельной огибающей в области всестороннего сжатия.

В практических расчетах этот вопрос решается тем, что в оценке прочности любой конструкции можно довольствоваться нулевым значением $\sigma_{экв}$, поскольку равноопасность нагруженной и ненагруженной деталей всегда приемлема. Поэтому, если расчет дает $\sigma_{экв} < 0$, считают $\sigma_{экв} = 0$.

8.4. О хрупком разрушении и вязкости

Мы с самого начала строго разграничили два вопроса: возникновение пластических деформаций и начало разрушения. Все, о чем мы до сих пор говорили, относилось в основном к первой, относительно четко и определенно поставленной задаче. Что же касается второго вопроса, то уже сам термин «разрушение» такой четкостью не обладает и является более сложным и менее определенным понятием.

Сначала надо, по-видимому, условиться о разрушении чего идет речь — разрушении конструкции или материала.

Под разрушением конструкции в широком смысле слова следует понимать потерю функциональных свойств, т. е. переход в такое состояние, когда конструкция по тем или иным причинам перестает удовлетворять своему назначению. Это может быть возникновение больших перемещений и необратимое изменение формы, износ или выработка посадочных поверхностей и, наконец, излом или разрыв ответственного узла. Однако образование видимой невооруженным глазом трещины, даже сравнительно большой, не всегда следует рассматривать как разрушение. Словом, понятие разрушения конструкции тесно смыкается с понятием ее надежности. Естественно, что со столь широких позиций обсуждать вопросы разрушения в курсе сопротивления материалов было бы неуместно.

Вопрос становится более определенным и конкретным, когда мы рассматриваем разрушение как свойство *материала*. Но и эта проблема настолько широка, что ее постановка также требует естественных ограничений, поскольку разрушение материала в различных условиях может проявляться в существенно различных формах. Так, в частности, разрушение при циклически изменяющихся напряжениях (усталостное разрушение) целесообразно рассматривать как некоторое самостоятельное явление, хотя оно и является лишь частным проявлением общих свойств материала (к этому вопросу мы вернемся в гл. 11). Большие затруднения обнаруживаются при попытке сопоставить разрушение при различной последовательности приложения сил. Эти вопросы также заслуживают особого рассмотрения.

И еще вопрос. Мы говорим о разрушении детали, о разрушении образца, но так ли уж правомерно говорить о разрушении материала?

Если придерживаться той точки зрения, что за разрушение несет ответственность напряженное состояние в точке, то тогда под разрушением самогò материала следует понимать образование

первых микротрещин в окрестности рассматриваемой точки. Формально, вроде бы ясно. Но верно ли? Ведь предположительно в каждом материале и без того имеется великое множество затаившихся трещин. Они приходят в движение только под действием высоких напряжений, причем не напряжений в точке, не местных напряжений, а тотальных — охватывающих значительные объемы на пути развития трещин.

Как видим, вопросов можно поставить много. Из таких вопросов и возникающих сомнений и создается замысловатый рисунок наших представлений о механизме разрушения.

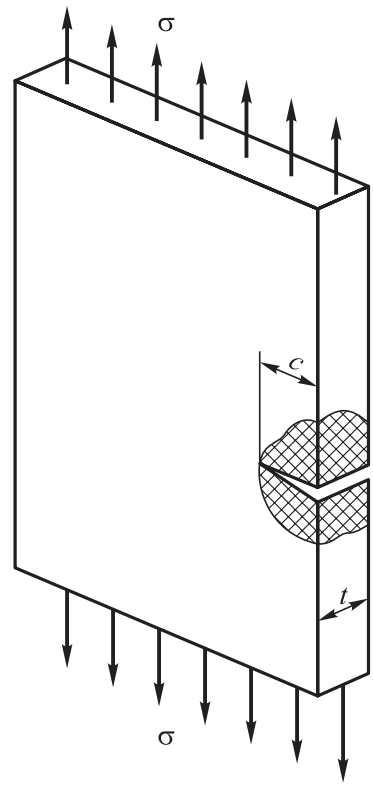


Рис. 8.12

Остановимся на модели Гриффитса. Это — модель разрушения, построенная на энергетической оценке развития трещин. Представим себе, что в краевой области плоского растянутого образца существует сквозная поперечная трещина (рис. 8.12). Длина трещины c много меньше поперечных размеров стержня. Во всем объеме образца напряжения распределены равномерно. Исключение составляет область, непосредственно примыкающая к трещине, — у края трещины возникает местный пик напряжений, а сверху и снизу (в заштрихованной области) напряжения будут уменьшенными. У поверхности трещины они, естественно, равны нулю.

Длине трещины c сообщим малое приращение Δc и проследим за изменением энергии системы. Увеличение длины трещины приведет к увеличению заштрихованной области, т. е. область пониженных напряжений расширится и освободится часть упругой энергии образца. Это уменьшение энергии будет пропорционально произведению Δc на площадь внешней поверхности заштрихованного объема, а та, в свою очередь, пропорциональна c и толщине образца t. Учтем также, что упругая энергия пропорциональна σ^2/E. В итоге уменьшение энергии вследствие небольшого удлинения трещины составит

$$A\frac{\sigma^2}{E}ct\Delta c,$$

где A — некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от формы трещины и ее расположения (у края, в середине, поперек или под углом к поперечному сечению).

Твердые тела, как и жидкие, обладают поверхностным натяжением. Оно у конструкционных материалов раз в 10–20 больше, чем, например, у воды. Но поскольку твердые тела обладают жесткостью, поверхностное натяжение не проявляет себя столь очевидным образом, как в жидкостях, и мы его не замечаем.

Поверхностное натяжение обладает энергией. Чтобы образовать свободную поверхность, надо произвести работу. Пусть γ — работа, пошедшая на образование единицы свободной поверхности материала. Если длина трещины увеличилась на Δc, то свободная поверхность увеличится на $2t\Delta c$. «Лишняя» двойка появляется в связи с тем, что трещина имеет две поверхности — верхнюю и нижнюю. Работа, пошедшая на удлинение трещины, составит $\gamma \cdot 2t\Delta c$.

Общая энергия системы стремится к минимуму. Поэтому легко сообразить, что трещина будет расширяться в случае, если освободившаяся упругая энергия будет больше работы, затраченной на образование свободной поверхности. Таким образом, условие развития трещины принимает вид

$$\frac{A\sigma^2}{E} ct\Delta c > 2\gamma t\Delta c,$$

или

$$c > \frac{2\gamma E}{A\sigma^2}. \tag{8.10}$$

Коэффициент A в ряде случаев может быть вычислен. Для поперечных трещин он изменяется незначительно (в 1,5–2 раза). В частности, в рассматриваемом примере плоского напряженного состояния коэффициент A предположительно равен π.

Выражение (8.10) подкупает своей простотой и очевидностью. Оно ясно показывает, что для каждого материала и определенного уровня напряжений можно указать критический размер трещины. Если размеры трещин меньше критических, разрушения не происходит. Этим и объясняется то обстоятельство, что, несмотря на наличие микротрещин, материал обладает свойством прочности.

Таким образом, модель Гриффитса представляется качественно правдоподобной. Можно было бы пойти и дальше и попытаться дать количественную оценку коэффициента A для различных напряженных состояний и различных форм возникающих трещин. Это неоднократно делали, и результаты числовых подсчетов, проведенных для

хрупких материалов типа стекла, оказались вполне соответствующими реальности. Вместе с тем, однако, оказалось, что механизм разрушения выглядит значительно сложнее, чем в рассмотренной схеме.

В модели Гриффитса трещине сообщали малое возмущение и исследовали ее поведение в дальнейшем. При этом высказывали достаточно разумное предположение, что при своем развитии трещина ведет себя так же, как и в начале возмущения. И, наверное, так и было бы, если бы структура материала была однородной. Но стронувшаяся с места трещина может при своем движении оказаться тут же блокированной соседним кристаллом или вкраплением, и для того чтобы принудить ее к дальнейшему развитию, необходимо существенно поднять уровень напряжений. И, наконец, при выводе соотношения (8.10) было сделано негласное предположение, что освобождающаяся упругая энергия полностью идет на образование свободной поверхности, а роль пластических деформаций несущественна.

Металловеды и инженеры-механики часто по отношению к металлам используют прилагательное «вязкий» — вязкий металл, вязкая сталь. Вязкость — это не просто пластичность, это свойство структуры, ее способность блокировать развитие трещин.

Рассмотрим простой пример. Стекольщик режет стекло, нанося на его поверхность острую риску. Затем по этой риске стекло ломается. Обычно это объясняют хрупкостью материала. И это правильно. Но важно и другое. Структура материала не препятствует свободному развитию трещины.

Теперь возьмем стержень из стеклопластика или, для конкретности, широко применяемое и весьма популярное у рыболовов-спортсменов стеклопластиковое удилище. Оно изготовлено из плотно уложенных в продольном направлении тончайших стеклянных нитей, соединенных эпоксидным связующим. Каждая нить обладает той же хрупкостью, что и обычный стеклянный лист. Эпоксидная матрица также достаточно хрупкая. Композиция пластических свойств не приобретает. Если стеклопластиковый стержень подвергнуть испытанию на растяжение, остаточные деформации при разрыве будут ничтожными. И вот на такой композиционный материал нанесем алмазом поперечную риску. При изгибе удилища ничего похожего на поведение стеклянного листа мы не обнаружим. Развитие трещины блокируется поверхностями раздела между стеклом и матрицей. Композиция, сохранив хрупкость, приобрела вязкость.

В истории развития цивилизации можно найти массу подобных примеров, начиная с применявшегося в незапамятные времена

замеса глины с соломой и волосом для изготовления кирпича и кончая легирующими добавками к сталям. И эти примеры, конечно, не исключение. Сама природа в своей длительной эволюции выработала множество рациональных структур, обладающих свойствами вязкости: древесина, кости и зубы животных, кожа и др.

За количественную меру вязкости удобно принять работу, которая затрачивается на образование трещины. Конечно, эту работу следует отнести к площади, охваченной трещиной. В случае совершенно хрупкого материала эта работа была обозначена нами через 2γ. Заменим обозначение на γ_p, полагая, что в γ_p входят все энергетические затраты — работа на образование свободных поверхностей, а главное — работа на пластическое деформирование материала на фронте развития трещины. Следует заметить, что γ_p для многих материалов может оказаться в тысячи раз больше, чем 2γ.

Преобразуя выражение (8.10) и производя в нем замену 2γ на γ_p и A на π, получим

$$\gamma_p = \pi c \sigma^2 / E = G_c, \tag{8.11}$$

где G_c как раз и есть критерий, характеризующий вязкость материала и выражающий работу на единицу площади (критическая характеристика вязкости). Он указывает нижний предел вязкости, которой должен обладать материал, чтобы при напряжении σ удержать от распространения трещину длиной c, если она краевая, или $2c$, если она расположена в середине растягиваемой полосы.

Вместо G_c бывает удобнее пользоваться показателем вязкости K_c, который определяют из соотношения

$$K_c = \sqrt{G_c E}, \tag{8.12}$$

или

$$K_c = \sigma \sqrt{\pi c}. \tag{8.13}$$

Показатель вязкости или, как еще его называют, *трещиностойкости* определяют экспериментально путем испытания полосы с заранее сделанным острым надрезом. При нагружении замечают напряжение, при котором от края надреза начинает распространяться трещина. Затем по формуле (8.13) определяют показатель K_c, имеющий не совсем обычную единицу измерения МПа $\cdot$ м$^{1/2}$.

Показатель вязкости, хотя и считается объективной энергетической характеристикой свойств материала, тем не менее зависит от условий испытания и определяется с широким разбросом. Поэтому, если обратиться к числовым значениям, следует привести только

некоторые ориентировочные данные. Например, дюраль и мартенситная сталь относятся к вязким материалам: K_c =110 МПа · м$^{1/2}$, для меди и титана K_c = 90 МПа · м$^{1/2}$, а эпоксидная смола имеет низкую вязкость: ~2 МПа · м$^{1/2}$.

Анизотропные композитные материалы соответственно обладают и анизотропией вязкости. Углепластик обнаруживает вязкость вдоль и поперек волокон соответственно 2 и 105 МПа · м$^{1/2}$. Причем поперечная вязкость своим высоким значением целиком обязана созданной структуре композита, поскольку углерод (графит), как самостоятельно взятый материал, имеет примерно столь же низкую вязкость, что и эпоксидная смола.

Показатель вязкости K_c имеет значение не только как сравнительная характеристика различных материалов, но в некоторых случаях может оказаться полезным для оценки меры опасности обнаруженных контролем трещин в уже выполненных или создаваемых металлоемких сооружениях. Эта возможность вытекает из выражения (8.13), которое позволяет при известном показателе K_c и по замеренной длине трещины указать уровень допустимого напряжения.

8.5. О новых материалах

Естественно, что при поиске новых материалов исследователи обращают главное внимание на показатели прочности. Вернемся к 1.8, где был приведен упрощенный расчет предельной, или идеальной, прочности. Это прочность, определяемая силами молекулярного сцепления, свойственного данному материалу, когда все молекулярные связи воспринимают нагрузку в максимальной степени.

Предельная прочность, выраженная в напряжениях, как уже было выяснено, составляет, грубо говоря, одну десятую от модуля упругости (где больше, где меньше, в зависимости от характера химических связей и структурных особенностей материала).

В принципе о существовании предельной прочности материалов физикам было известно очень давно. Но только в 1920 г. инженер Гриффитс сделал попытку — причем успешную — практически приблизиться к предельной прочности. И в качестве модельного материала он избрал стекло.

Надо сказать, что стекло в домашнем обиходе своей необычайной хрупкостью уже настолько себя скомпрометировало, что только усилием воли можно заставить себя смотреть на него как на полезный конструкционный материал даже сейчас, когда мы знаем, как много высокопрочных конструкций создано на базе стекловолокна.

Стекло при испытании на растяжение показывает обычно значение $\sigma_{в.р} \approx 120 \ldots 150$ МПа. Но если вытягивать из него на горелке все более и более тонкие образцы, то обнаруживается характерная зависимость: по мере уменьшения диаметра образца временное сопротивление начинает возрастать; сначала незаметно, а затем, по мере дальнейшего утончения уже не прутка, а нити, все быстрее и быстрее. Так у Гриффитса и получилось. У нитей диаметром 2,5 мкм $\sigma_{в.р}$ уже составило 6000 МПа. Это — если испытать нить сразу после изготовления. Если же повременить, то временное сопротивление снижается до 3500 МПа. Нити, более тонкие чем 2,5 мкм, Гриффитс изготовить не смог. В то время нельзя было бы точно определить и их диаметр. Но, экстраполируя зависимость временного сопротивления в область малых диаметров, Гриффитс пришел к выводу, что, судя по ходу кривой, есть надежда для очень тонких нитей получить $\sigma_{в.р}$ около 11 000 МПа, в то время как расчетная предельная прочность стекла составляет примерно 14 000 МПа.

В основе хрупкого разрушения, как мы уже знаем, лежит соотношение между напряжением и размером трещины (см. (8.13)). В крупных образцах статистически преобладают соответственно и более крупные трещины; в тонких нитях им попросту нет места. Появись там такая трещина, и не существует нити. Даже просто выбирая из множества образцов более тонкую нить, мы тем самым вместе с исключаемыми более крупными образцами исключаем и более крупные трещины, и этой непреднамеренной селекцией обеспечиваем более тонким нитям более высокую прочность.

Хочется добавить, что употребленное выше слово «выбирая» не следует понимать как «перебирая» и, тем более, «перекладывая». Надо иметь в виду, что даже лишь прикасаясь пальцами к заготовленной нити, мы можем резко снизить ее прочность. Невидимая острая пылинка минерального происхождения, застрявшая в кожном покрове, способна нанести ей роковые поверхностные повреждения. С помощью электронного микроскопа уже фотографировали ветвистые царапины такого рода, и возможность их возникновения не подвергается сомнениям.

Есть еще одна причина образования микротрещин в стеклянных нитях. Стекло не имеет кристаллической структуры, но некоторую склонность кристаллизоваться в твердом состоянии все же сохраняет. И порой эта склонность может себя нет-нет да и проявить. Начало же всякой кристаллизации связано с местным изменением объема. Возникает микротрещина, что и проявляется в том, что выдержка нити снижает ее прочность так же, как и неизбежное соприкосновение с соседними нитями или с окружающими предметами.

За последние десятилетия было выполнено много работ в попытках приблизиться к предельной прочности; и не только со стеклом, но и со многими другими материалами, в том числе и с металлами. Вытягивали из расплава нити, выращивали идеальные нитевидные кристаллы, были созданы приборы для испытания на прочность микрообразцов длиной менее миллиметра. Возможность приближения к предельной прочности подтверждалась, волновала и вселяла радужные надежды. Но по мере накопления знаний, как всегда, начинали брать верх реалистические соображения.

Наверное, нам нужна не только прочность, но и надежность, которая находит свое выражение в достаточной вязкости материала, а может, и еще в каких-то пока не названных качествах.

И еще один вопрос. Если предельная прочность для основных конструкционных материалов количественно составляет примерно десятую часть модуля упругости, то это значит, что в эксплуатационных условиях все конструкционные материалы будут иметь деформации, приближающиеся к 10 %. Как видим, повышая максимально прочность, мы весьма заметно теряем в жесткости. Сможет ли, например, легкий и весьма прочный коленчатый вал двигателя нормально работать, если возникающие в нем деформации измеряются несколькими процентами.

Таким образом, для практических целей важна не только предельная прочность. Есть еще ряд механических характеристик, как самостоятельных, так и связанных с прочностью. И их необходимо принимать во внимание.

Сейчас в практику машиностроения внедрено много высококачественных и прочных металлов и металлических сплавов. Но все металлы без исключения обладают одной характерной и вместе с тем неприятной особенностью. С повышением прочности их вязкость, как правило, падает. Оно и понятно. Упрочняя материал путем легирующих добавок или термообработкой, мы в той или иной мере ограничиваем дислокационные перемещения, а они-то как раз и придают материалу вязкость, способствуют рассеянию энергии на фронте трещины. Значит, следует попытаться найти или искусственно создать еще какие-то формы рассеяния энергии, препятствующие распространению трещин.

Находкой нашего века явилось создание микронеоднородных структур — композитов, где развитию трещин поставлен заслон в виде высокопрочных волокон. Матрица прочно связана с нитями, и развивающаяся трещина не может их обойти и не может продвинуться дальше, не разрушив их. Это все равно, что попробовать расколоть полено, предварительно вбив в него поперек хотя бы несколько

гвоздей. Таким образом, обнаруживается путь повышения вязкости при высокой прочности. Но значение композитов не только в этом.

Чрезвычайно важно, что композиты заставили по-новому осмыслить наше отношение ко многим материалам, казавшимся прежде ни к чему не пригодными из-за своей хрупкости. И наглядным примером тому является, прежде всего, то же самое стекло, о котором мы только что говорили. Следом за стеклом пошли в дело и высокопрочные, но чрезвычайно хрупкие минералы, лежащие буквально у нас под ногами. Конечно, с ними необходимо было поработать.

Чтобы представить потенциальные возможности различных веществ, составляющих композиционные структуры, нет необходимости вчитываться в подробнейшие справочные таблицы, где приводится множество механических характеристик. Достаточно выделить главные. А главным в данном случае для каждого вещества является его модуль упругости. От него зависит и жесткость, и предельная прочность. Необходимы еще такие характеристики, как температура плавления и плотность. В то же время нет нужды особо фиксировать свое внимание на реальном пределе прочности. Он изменяется в широких пределах в зависимости от фазового состава и методов технологической обработки.

В табл. 8.1 приведены перечисленные характеристики для трех групп конструкционных материалов. Первые две — металлы и полимеры. Третью группу образуют неорганические и неметаллические вещества, для обобщения часто называемые керамикой. С последней их роднит минеральное происхождение и высокая температура обработки. В последнем столбце таблицы приведена относительная жесткость, т. е. отношение модуля упругости к плотности вещества. Для наглядности удельная жесткость каждого вещества отнесена к удельной жесткости железа.

Относительная жесткость металлов, как видим, изменяется в достаточно узком интервале. Исключение составляет ниобий. Он имеет очень низкую удельную жесткость. В обратную сторону резко выделяется бериллий, и к нему в последнее время приковано серьезное внимание в авиационной и ракетно-космической технике. Есть надежда, что прочность нитей бериллия можно будет поднять переводом в аморфное состояние. И все было бы хорошо, но беда заключается в токсичности бериллия, и это заставляет принимать специальные меры безопасности в цехах по его обработке. Пока неизвестно, что возьмет верх — преимущества или недостатки.

Полимеры делят на две подгруппы: аморфные — эпоксидные смолы и оргстекло, и не столь широко известные кристаллические полимеры. Первые используются в качестве связующего. Кри-

сталлические же полимеры имеют высокую удельную жесткость и прочность, что позволяет создавать на их основе специальное органоволокно.

Таблица 8.1

Вещество	$t_{пл}$, °С	ρ, г/см^3	E, ГПа	$\sigma_{в.р}$, МПа	$\frac{E/\rho}{(E/\rho)_{Fe}}$
Железо	1536	7,87	200	500 — 1500	1,00
Магний	650	1,74	45	200 — 350	1,02
Алюминий	660	2,70	71	300 — 600	1,03
Титан	1665	4,50	100	600 — 1200	0,87
Никель	1455	8,90	200	—	0,88
Молибден	2620	10,2	330	—	1,27
Вольфрам	3400	19,3	410	1200 — 2400	0,84
Бериллий	1287	1,85	240	300 — 600	5,70
Ниобий	2415	8,57	82	500 — 1000	0,38
Полимеры: аморфные	—	~1,50	0,5 — 5	10 — 100	0,02 — 0,1
кристаллические	—	~1,50	100 — 120	2000 — 3000	~2,60
Сапфир Al_2O_3	2046	3,97	400	300*	3,96
Гранат $Al_5Y_3O_{12}$	1950	4,55	330	200 — 20 000**	2,85
MgO	1870	3,65	290	500*; 1000**	3,13
Рутил TiO_2	1870	4,24	290	100*	2,69
SiC	2600	3,20	450	~3000**	5,53
B_4C	2470	2,50	450	~3000**	7,08
Si_3N_4	1800	3,20	47	500 — 1000**	0,58
Бороволокно	2300	2,70	400	~3000**	5,83
Углеволокно	—	1,70 — 2,20	300 — 500	2000 — 3000**	5 — 9

* — поликристаллы;
** — волокна.

И, наконец, третью группу образуют неорганические и неметаллические вещества. Высокая удельная жесткость, жаростойкость, неокисляемость оксидов (им больше некуда окисляться), твердость и дешевизна дают право надеяться на широкое применение этих материалов. Громкие названия «сапфир», «гранат» не должны тревожить наше воображение. Это — очень распространенные в природе минералы, недефицитные и дешевые. Что же касается бороволокна и углеволокна, то они уже давно внедрены в практику.

Теперь естественным будет вопрос, какие же пары (или тройки) перечисленных веществ следует объединять в композиты. Вопрос резонный, а главное, естественно вытекающий из исторически сложившихся представлений о производственном процессе. Но ответить на него непросто.

Композит — это не совсем материал. Это — часть конструкции, выполняющая функции материала и отвечающая на вопрос: «Из чего сделано?» Композит заставляет пересмотреть наше отношение не только к веществам, но и к производственному процессу в целом.

Из названных в табл. 8.1 веществ не представляет особого труда изготовить множество самых разнообразных образцов композитов — прутков, плоских монослоев или трубок. Можно, например, сделать образец молибдена с сапфировыми нитями, хотя молибден и более тугоплавок, чем сапфир. Такие образцы можно испытывать, определять их модули упругости и предел прочности. Существует специальная литература по вопросам испытания композитных образцов, по приближенным и уточненным способам расчетного определения прочности и жесткости композитов по характеристикам составляющих.

Но в том-то и дело, что создать образцы композита и изготовить из композита деталь машины — далеко не одно и то же. Композит нельзя изготовить заранее. Его готовят в процесссе производства детали, и, создавая его, одновременно создается деталь. Поэтому на вопрос, какие же комбинации из упомянутых веществ следует предпочесть, ответ может быть только один: такие, которые позволяют изготовить эту деталь и к тому же могут обеспечить ее высокое качество. Вопрос слишком общий, чтобы можно было дать на него определенный ответ. Все зависит от способа изготовления (если он существует), особенностей детали, условий производства.

Композиты открывают перед инженером окно в новый мир, где нельзя быть только материаловедом или только механиком. Для композитов нужен широкий кругозор механика, материаловеда, физика и технолога.

Глава 9

ТОНКОСТЕННЫЕ И ТОЛСТОСТЕННЫЕ СОСУДЫ

9.1. Основные особенности оболочек

Большинство элементов инженерных сооружений, подлежащих расчету на прочность, может быть сведено к расчетным схемам либо стержня, либо оболочки.

Под стержнем, как уже указывалось ранее, понимается всякое тело, одно из измерений которого (длина) значительно больше двух других. До сих пор в основном рассматривались элементы конструкций, сводящиеся к этой схеме.

Под *оболочкой* понимается тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других. Геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих поверхностей оболочки, носит название *срединной поверхности*. Если срединная поверхность оболочки является плоскостью, то такую оболочку называют *пластиной*. Если срединная поверхность образует часть сферы, конуса или цилиндра, оболочку соответственно называют сферической, конической или цилиндрической. Геометрия оболочки определяется не только формой срединной поверхности. Нужно знать также закон изменения толщины оболочки. Однако все встречающиеся на практике оболочки имеют, как правило, постоянную толщину.

Осесимметричными, или просто *симметричными*, оболочками называются такие, срединная поверхность которых представляет собой поверхность вращения. Будем полагать в дальнейшем, что нагрузка, действующая на такую оболочку, также обладает свойствами осевой симметрии. Для таких оболочек задача расчета значительно упрощается. Получается это потому, что все внутренние силы для такой оболочки по дуге круга не изменяются и зависят только от текущего радиуса или длины дуги, измеренной вдоль образующей тела вращения. Для несимметричных оболочек распределение напряжений определять значительно сложнее.

К схеме осесимметричной оболочки сводится расчет очень многих строительных сооружений (типа куполов), котлов, баков

и прочих сосудов, нагруженных внутренним давлением, деталей машин и приборов. Со схемой пластины приходится иметь дело при расчетах плоских днищ баков, стенок различных резервуаров, плоских перегородок в самолетных конструкциях и многих других.

Понятно, что новая схема требует и новых подходов и воспользоваться теми приемами, которые разрабатывались ранее для стержня, здесь не представляется возможным.

Задача о расчете оболочек вращения наиболее просто решается в том случае, когда можно принять, что напряжения, возникающие в оболочке, постоянны по толщине и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует. Теория оболочек, построенная в этом предположении, называется *безмоментной теорией оболочек*.

Если оболочка не имеет резких переходов и жестких защемлений и, кроме того, не нагружена сосредоточенными силами и моментами, то для ее расчета с успехом можно применять безмоментную теорию. При наличии же перечисленных особенностей в местах крепления оболочки и в местах резких изменений формы возникают повышенные напряжения, обусловленные изгибным эффектом. Решение подобных задач более точными методами с учетом изгибающих моментов показывает, что зона повышенных изгибных напряжений остается в большинстве случаев весьма ограниченной, и поэтому на достаточном удалении от перечисленных особых областей определять напряжения можно по безмоментной теории. Нахождение же напряжений в указанных зонах требует особого исследования. Следует, наконец, отметить, что чем меньше толщина оболочки, тем ближе к истине предполагаемый закон постоянства напряжений по толщине и тем более точные результаты дает безмоментная теория.

Вопросы общей теории оболочек выходят далеко за рамки курса сопротивления материалов и представляют собой в настоящее время самостоятельный раздел механики.

К этим вопросам здесь, естественно, обращаться не будем и остановимся только на простейших аспектах безмоментной теории.

9.2. Определение напряжений в симметричных оболочках по безмоментной теории

Рассмотрим симметричную оболочку толщиной h (рис. 9.1). Обозначим через r_m радиус кривизны дуги меридиана ее срединной поверхности, а через r_t — второй главный радиус, т. е. радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного к дуге меридиана. Этот радиус равен отрезку нормали, заключенному

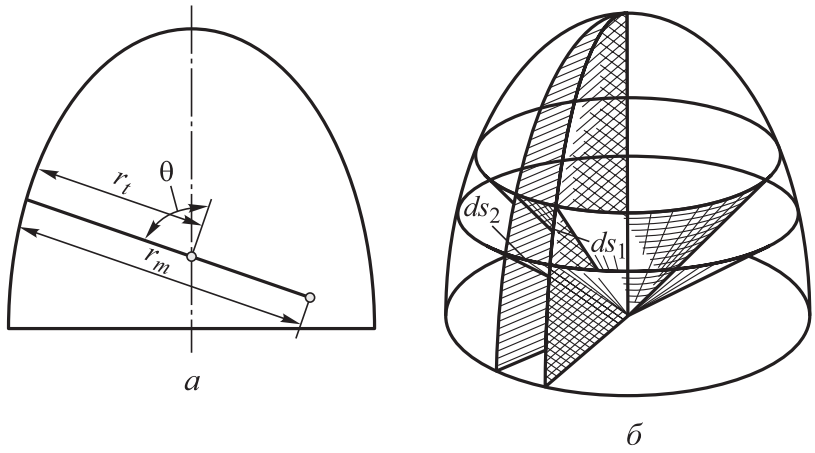


Рис. 9.1

между срединной поверхностью и осью симметрии (рис. 9.1, *а*). Радиусы r_m и r_t являются в общем случае функцией угла θ между нормалью и осью симметрии.

Двумя парами меридиональных и нормальных конических сечений (рис. 9.1, *б*) выделим из оболочки элемент $ds_1 ds_2$, представленный на рис. 9.2. Будем считать, что на гранях элемента возникают

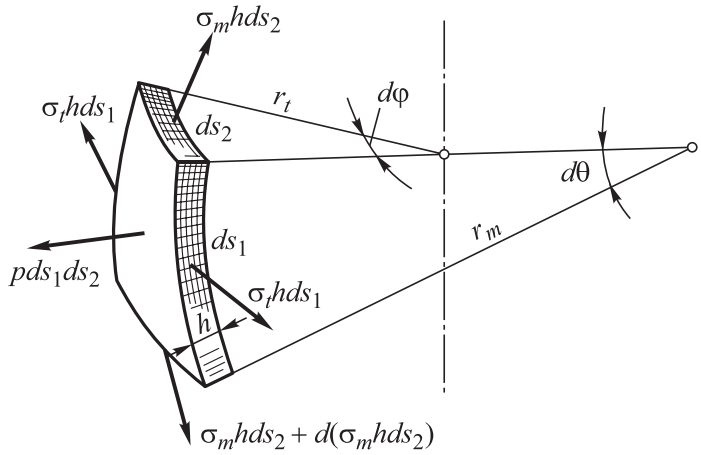


Рис. 9.2

напряжения σ_m и σ_t. Первое будем называть *меридиональным* напряжением. Вектор этого напряжения направлен по дуге меридиана. Второе напряжение σ_t назовем *окружным*. Напряжения σ_m и σ_t, умноженные на соответствующие площади граней элемента, дадут силы $\sigma_m h\, ds_2$ и $\sigma_t h\, ds_1$, показанные на рис. 9.2. К этому же элементу приложена сила нормального давления $p ds_1 ds_2$. Проецируя все силы на нормаль, получим

$$p\,ds_1 ds_2 - \sigma_m h\,ds_2 d\theta - \sigma_t h\,ds_1 d\varphi = 0.$$

Так как

$$d\theta = \frac{ds_1}{r_m}; \quad d\varphi = \frac{ds_2}{r_t},$$

то в итоге имеем

$$\frac{\sigma_m}{r_m} + \frac{\sigma_t}{r_t} = \frac{p}{h}. \tag{9.1}$$

Это соотношение известно под названием *уравнения Лапласа*.

Для элемента, показанного на рис. 9.2, можно составить еще одно уравнение, проецируя все силы на направление оси оболочки. Удобнее это делать, однако, не для элемента, а для части оболочки, отсеченной коническим нормальным сечением (рис. 9.3).

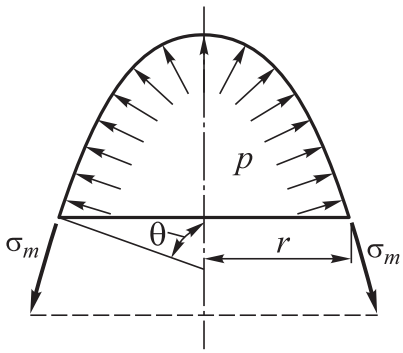


Рис. 9.3

Обозначив через F осевую равнодействующую внешних сил, получим

$$\sigma_m 2\pi r h \sin\theta = F. \tag{9.2}$$

Отсюда легко найти меридиональное напряжение σ_m. Таким образом, согласно безмоментной теории, напряжения σ_m и σ_t в оболочке можно определить из уравнений равновесия.

Третье главное напряжение — напряжение надавливания между слоями оболочки — предполагаем малым, и напряженное состояние оболочки считаем двухосным. Действительно, наибольшее радиальное напряжение по абсолютной величине равно нормальному давлению p, в то время как σ_m и σ_t, согласно уравнению Лапласа, имеют величину порядка pr_m/h и pr_t/h.

Прежде чем перейти к конкретным примерам расчета с использованием безмоментной теории, докажем две следующие теоремы.

Теорема 9.1. Если на какую-либо поверхность действует равномерно распределенное давление, то независимо от формы поверхности проекция равнодействующей сил давления на заданную ось равна произведению давления p на площадь проекции поверхности на плоскость, перпендикулярную к заданной оси.

Положим, задана поверхность A (рис. 9.4), на которую действует равномерно распределенное давление p. Требуется определить про-

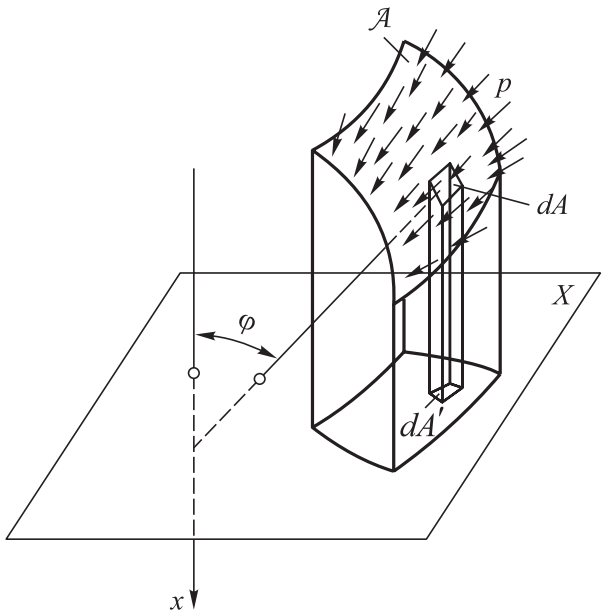


Рис. 9.4

екцию на ось x равнодействующей сил давления. Эта проекция F_x будет, очевидно, равна

$$F_x = \int_A p \cos\varphi \, dA,$$

где φ — угол между нормалью к поверхности и осью x. Площадь проекции элемента dA на плоскость X, перпендикулярную к оси x, равна $dA' = dA \cos\varphi$. Следовательно,

$$F_x = p \int_A dA' = pA'.$$

Таким образом, для того чтобы определить проекцию равнодействующей сил давления на ось x, нужно предварительно спроектировать поверхность на плоскость X, а затем умножить давление на площадь этой проекции, что и требовалось доказать.

Теорема 9.2. Если на какую-либо поверхность действует давление жидкости (рис. 9.5), то вертикальная составляющая сил давления равна весу жидкости в объеме, расположенном над поверхностью.

Вертикальная составляющая сил давления для площадки dA, согласно теореме 9.1, будет равна произведению давления, действующего на эту площадку, на проекцию площадки на уровень жидкости, т. е. $p\,dA'$. Так как $p = \rho x$, где ρ — плотность жидкости,

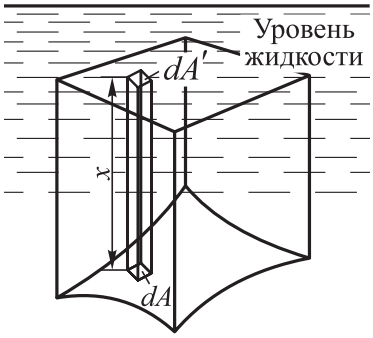


Рис. 9.5

то вертикальная сила, действующая на площадку dA, будет $\rho x\,dA'$.

Но $x\,dA'$ — объем элементарной призмы, расположенной над площадкой dA. Суммарная искомая сила будет, следовательно, равна весу жидкости в объеме, расположенном над поверхностью.

Очевидно, что найденная сила не зависит от формы сосуда, удерживающего жидкость. Так, во всех трех случаях, представленных на рис. 9.6, сила, приходящаяся на дно сосуда, будет одной и той же, равной весу жидкости в объеме вышерасположенного цилиндра $\mathcal{ABCD}$.

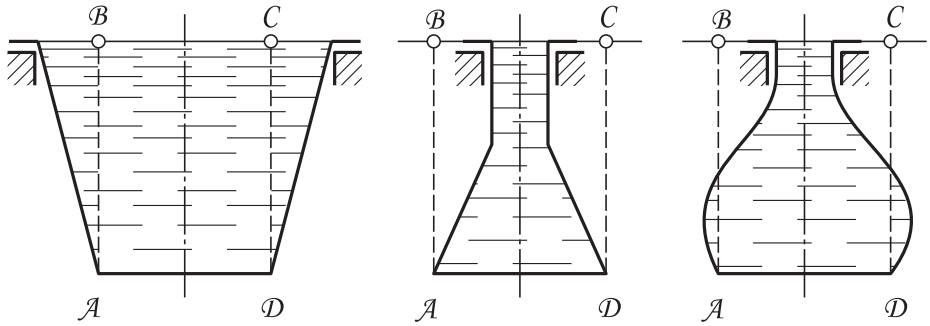


Рис. 9.6

Рассмотрим некоторые примеры определения напряжений в тонкостенных сосудах.

Пример 9.1. Сферическая оболочка радиусом R и толщиной h находится под действием внутреннего давления p (рис. 9.7, *а*). Определить напряжения, возникающие в оболочке.

Для сферической облочки $r_m = r_t = R$. Из условия полной симметрии следует $\sigma_m = \sigma_t$.

Согласно формуле Лапласа (9.1), имеем

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}.$$

Напряженное состояние является двухосным (рис. 9.7, *б*), поэтому

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h}.$$

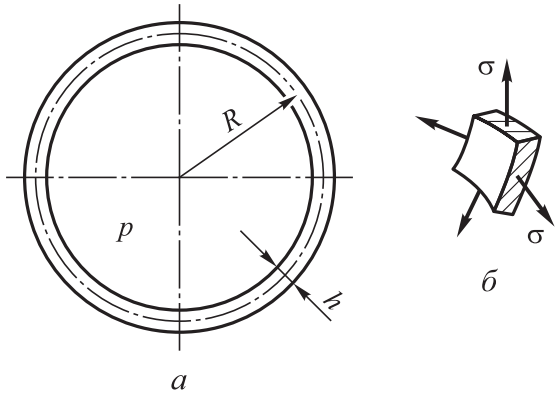


Рис. 9.7

Наименьшее напряжение σ_3 принимаем равным нулю. По теории Мора независимо от величины k

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{pR}{2h}. \qquad (9.3)$$

Пример 9.2. Цилиндрический сосуд (рис. 9.8, *а*) находится под действием внутреннего давления p. Радиус цилиндра R, толщина h. Определить напряжения в области цилиндра, удаленной от днищ.

Отсекаем поперечным сечением часть цилиндра (рис. 9.8, *б*) и составляем для нее уравнение равновесия (9.2):

$$\sigma_m 2\pi Rh = F.$$

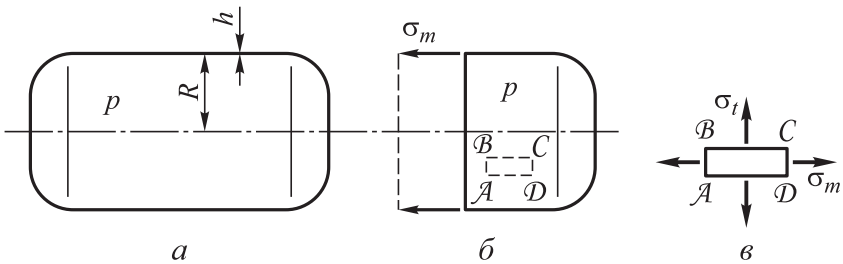


Рис. 9.8

Осевая составляющая сил давления независимо от формы днища, согласно теореме 9.1, будет $F = \pi R^2 p$. Таким образом,

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}.$$

Для цилиндра $r_m = \infty$, $r_t = R$. Поэтому из формулы Лапласа (9.1) находим

$$\sigma_t = \frac{pR}{h},$$

т. е. окружное напряжение оказывается вдвое бо́льшим меридионального.

Элемент $ABCD$, выделенный из цилиндрической оболочки, находится в двухосном напряженном состоянии (рис. 9.8, *в*):

$$\sigma_1 = \sigma_t; \qquad \sigma_2 = \sigma_m; \qquad \sigma_3 = 0.$$

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{pR}{h}. \tag{9.4}$$

Для цилиндра, как видим, эквивалентное напряжение оказывается в два раза бо̀льшим, чем для сферической оболочки того же радиуса и той же толщины.

Пример 9.3. Полусферический сосуд радиусом R и толщиной h (рис. 9.9, *а*) заполнен жидкостью с плотностью ρ. Определить напряжение в сосуде и построить эпюры σ_m, σ_t и $\sigma_{\text{экв}}$.

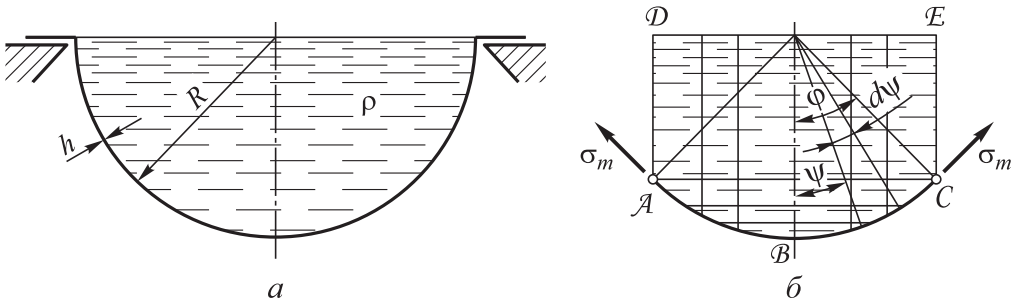


Рис. 9.9

Нормальным коническим сечением с углом 2φ при вершине отсекаем нижнюю часть сферической оболочки (рис. 9.9, *б*) и составляем для нее уравнение равновесия (9.2), где F — равнодействующая сила давления жидкости. Согласно теореме 9.2, сила F равна весу жидкости в объеме, расположенном выше отсеченной части оболочки.

Введем вспомогательный угол ψ и определим объем $ABCED$ (см. рис. 9.9, *б*):

$$V = \int_0^{\varphi} 2\pi R^3 \sin\psi \cos^2\psi \, d\psi,$$

или

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos^3\varphi).$$

Таким образом, находим

$$F = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho (1 - \cos^3\varphi);$$

$$\sigma_m = \frac{\rho R^2}{3h}\frac{1-\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi}. \qquad (9.5)$$

Обращаемся теперь к уравнению Лапласа (9.1):

$$r_m = r_t = R; \qquad p = \rho R\cos\varphi.$$

Подставляя σ_m, находим из этого уравнения

$$\sigma_t = \frac{\rho R^2}{3h}\left[3\cos\varphi - \frac{1-\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi}\right]. \qquad (9.6)$$

Согласно выражениям (9.5) и (9.6), строим эпюры σ_m и σ_t, представленные на рис. 9.10. Как видим, напряжения σ_m и σ_t в нижней

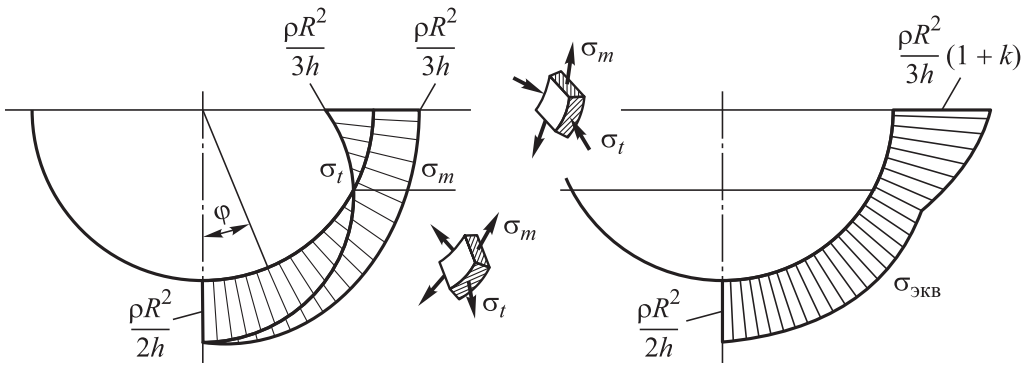


Рис. 9.10

точке сферы равны. В верхней точке σ_t имеет отрицательное значение. Там, где σ_m и σ_t имеют один знак, $\sigma_1 = \sigma_m$, $\sigma_2 = \sigma_t$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_m$. Там, где σ_m и σ_t имеют разные знаки, $\sigma_1 = \sigma_m$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_t$, $\sigma_{экв} = \sigma_m - k\sigma_t$. Эпюра эквивалентного напряжения (см. рис. 9.10) имеет, таким образом, излом в точке, где σ_t меняет знак. Если $k > 1/2$, расчетное напряжение для сосуда

$$\sigma_{экв}^{max} = \frac{\rho R^2}{3h}(1+k),$$

где по-прежнему $k = \sigma_{т.р}/\sigma_{т.с}$.

Наличие в верхней части сосуда напряжений сжатия σ_t является в данном случае вполне закономерным.

Меридиональное напряжение σ_m в зоне закрепления является, очевидно, растягивающим. Так как давление p здесь мало́, то равновесие выделенного элемента (рис. 9.11) возможно только при сжимающем окружном напряжении σ_t. Если бы сосуд был закреплен в нижней части, то это явление не имело бы места, поскольку на верхней кромке σ_m равнялось бы нулю.

Возникновение сжимающих напряжений σ_t при внутреннем давлении свойственно не только сферическому сосуду. Например,

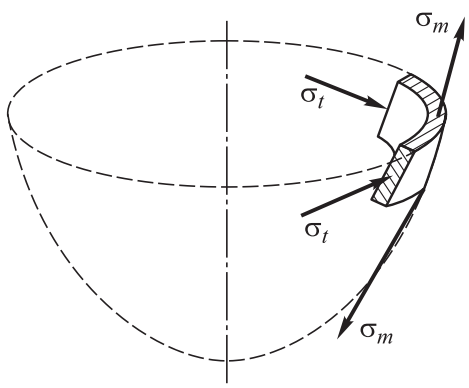


Рис. 9.11

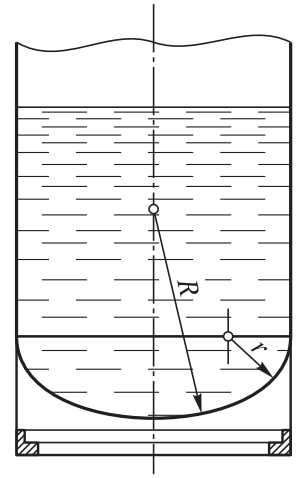
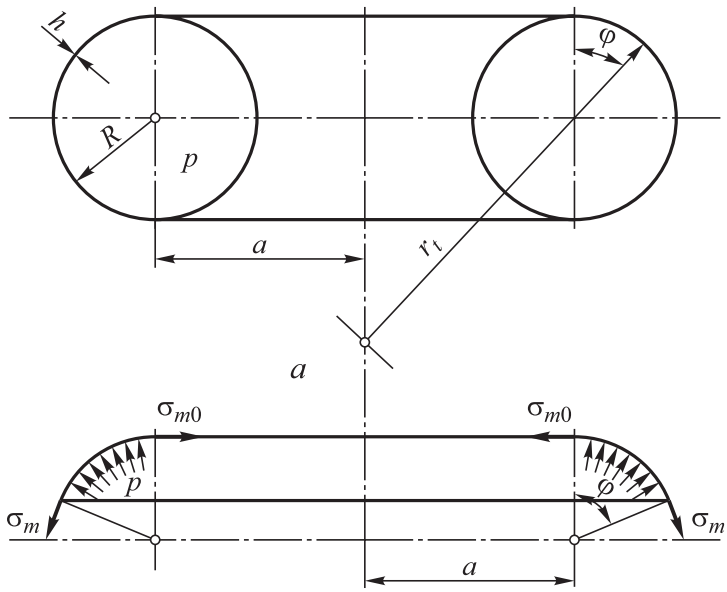


Рис. 9.12

в цилиндрическом баке, заполненном жидкостью (рис. 9.12), в зоне перехода от цилиндрической части к днищу также могут возникать при определенных условиях сжимающие напряжения. Чтобы оболочка не теряла устойчивость, ее необходимо в этом месте укреплять.

Пример 9.4. Определить напряжения в торообразном баллоне, нагруженном внутренним давлением *p*. Размеры баллона даны на рис. 9.13, *а*.



а

б

Рис. 9.13

Выделим сечениями, нормальными к поверхности, часть торообразной оболочки (рис. 9.13, *б*). Составим для нее уравнение равновесия и определим σ_m:

$$\sigma_m 2\pi h(a + R\sin\varphi)\sin\varphi = p\pi[(a + R\sin\varphi)^2 - a^2];$$

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}\frac{2a + R\sin\varphi}{a + R\sin\varphi}.$$

Подставляя в уравнение Лапласа (9.1)

$r_m =$; $R_t = r\frac{a + R\sin\varphi}{\sin\varphi}$ и полученное выражение для σ_m,

находим $\sigma_t = pR/2h$.

Наибольшее напряжение σ_m возникает во внутренних точках торообразной оболочки при $\varphi = -\pi/2$:

$$\sigma_m^{\max} = \frac{pR}{2h}\frac{2a - R}{a - R}.$$

Так как напряжения $\sigma_m^{\max}$ и σ_t имеют общий знак, то

$$\sigma_{экв} = \sigma_m^{\max} = \frac{pR}{2h}\frac{2a - R}{a - R}. \qquad (9.7)$$

В частном случае, при $a = 0$, тор обращается в сферу и выражение (9.7) совпадает с выражением (9.3), полученным для сферы. При $a = \infty$ тор обращается в цилиндр. Тогда выражение (9.7) совпадает с выражением (9.4). При $a = R$ периметр внутреннего круга обращается в нуль и $\sigma_{экв} = \infty$.

9.3. Основные уравнения для толстостенной трубы

Выше были рассмотрены способы определения напряжений в осесимметричных тонкостенных сосудах, находящихся под действием внутреннего давления. Основным условием применимости расчетных формул было требование тонкостенности. Необходимо, чтобы толщина оболочки была существенно меньше других характерных размеров, например радиусов кривизны. Это позволяет считать напряжения равномерно распределенными по толщине и пренебрегать надавливанием между слоями оболочки.

В технике для удержания высокого давления приходится иметь дело с толстостенными сосудами. Обычно это — цилиндр, внешний диаметр которого в несколько раз превышает внутренний.

Задача определения напряжений в таком цилиндре заметно сложнее, чем в тонкостенных сосудах, и одними только уравне-

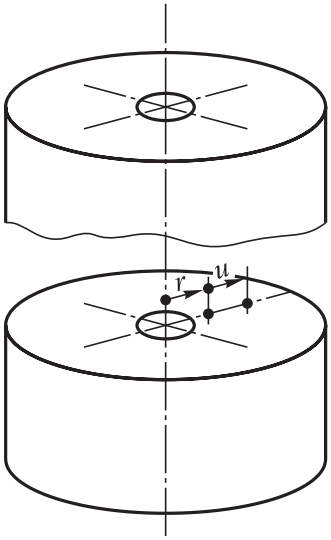


Рис. 9.14

ниями равновесия обойтись не удается. Приходится также рассматривать возникающие в цилиндре перемещения. Эту задачу называют задачей Ламе по имени французского ученого, работавшего в 1820-х годах в Петербургской Академии наук.

Рассмотрим однородное тело цилиндрической формы (рис. 9.14), нагруженное так, что внешняя нагрузка является осесимметричной и вдоль оси цилиндра не меняется. Размеры цилиндра могут быть произвольными, и на соотношение между внутренним и наружным радиусами цилиндра ограничений накладывать не будем. Длину цилиндра пока также будем считать произвольной. В дальнейшем по этому поводу будут сделаны некоторые оговорки. Каждая точка цилиндра при его деформации получит какие-то перемещения. По условиям симметрии эти перемещения, очевидно, будут происходить в радиальных плоскостях. Точка может перемещаться по направлению радиуса и вдоль соответствующей образующей.

Радиальное перемещение произвольно взятой точки обозначим через u. Величина u является функцией текущего радиуса r и не изменяется по длине цилиндра. За положительное направление для r примем направление от оси цилиндра (см. рис. 9.14). Что касается перемещений вдоль оси, то будем считать, что они возникают только как следствие общего удлинения или укорочения цилиндра. Если осевые перемещения существуют, то они распределены так, что поперечные сечения цилиндра остаются плоскими.

Обозначим через ε_r и ε_t относительные удлинения в цилиндре в радиальном и окружном направлениях и выразим их через перемещение u.

Для этого рассмотрим элементарный отрезок $\mathcal{AB} = dr$, выделенный в радиальном направлении (рис. 9.15), до и после нагружения цилиндра. Точка $\mathcal{A}$ получает перемещение u, а точка $\mathcal{B}$ — перемещение $u + du$. Легко установить, что новая длина элемента будет равна $dr + du$, а его относительное удлинение

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \tag{9.8}$$

Рассмотрим, далее, длину окружности, проведенной внутри цилиндра до и после его нагружения (рис. 9.16). Длина окружности

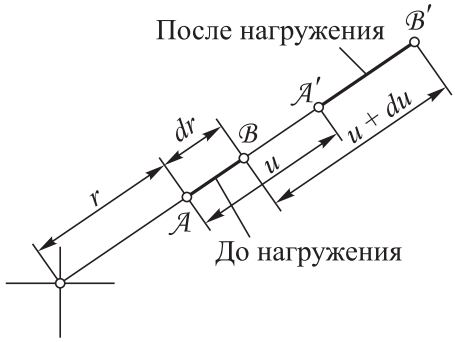


Рис. 9.15

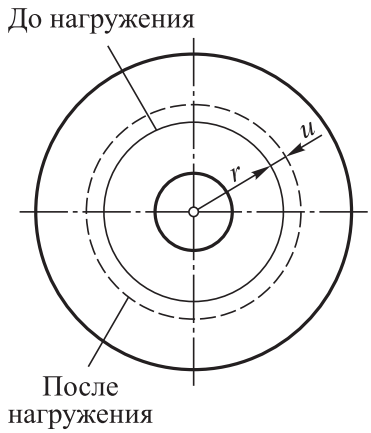


Рис. 9.16

до нагружения цилиндра равна $2\pi r$. После нагружения радиус увеличится на u, и длина окружности будет равна $2\pi(r+u)$. Относительное удлинение ее составит

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r},$$

или

$$\varepsilon_t = u/r. \tag{9.9}$$

Исключая u из равенств (9.8) и (9.9), получаем

$$\frac{d}{dr}(\varepsilon_t r) - \varepsilon_r = 0. \tag{9.10}$$

Обратимся теперь к уравнениям равновесия.

Выделим из цилиндра элемент в форме криволинейного шестигранника (рис. 9.17). Длины сторон этого элемента равны dr, dz и $r\,d\varphi$.

В осевых сечениях цилиндра (плоскость $\mathcal{ABCD}$ элемента) по условиям осевой симметрии касательные напряжения отсутствуют и сохраняются только нормальные напряжения σ_t, называемые *окружными*. В поперечных сечениях цилиндра (поверхность $\mathcal{CDEF}$ элемента) касательные напряжения также предполагают равными нулю.

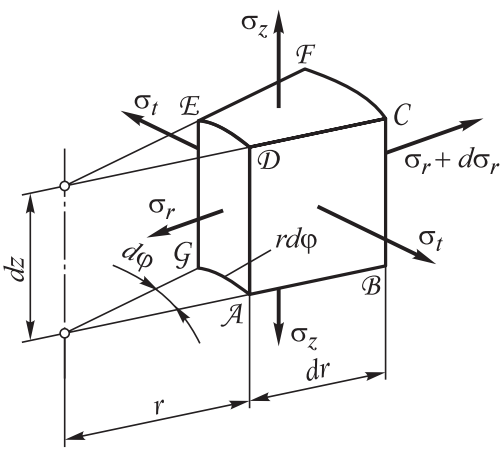


Рис. 9.17

Основанием этому служит условие независимости перемещений u от координаты z. В поперечных сечениях могут существовать нормальные (осевые) напряжения σ_z, которые возникают как следствие нагружения цилиндра силами вдоль оси. Эти напряжения предполагают неизменными как по оси, так и по радиусу цилиндра.

Поскольку площадки $ABCD$ и $CDEF$ являются главными, главной будет также и площадка $ADEG$. Напряжение на этой площадке обозначим через σ_r. Оно называется *радиальным* напряжением. При переходе от радиуса r к радиусу $r + dr$ напряжение σ_r получит приращение $d\sigma_r$.

В рассматриваемой постановке, как видим, задачу определения напряжений и перемещений в теле вращения можно решить в функции только одного независимого переменного — радиуса r.

Проецируя силы, действующие на элемент, на направление радиуса, получаем следующее условие равновесия:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi\, dz - \sigma_r r\, d\varphi\, dz - \sigma_t\, dr dz d\varphi = 0,$$

откуда

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} r - \sigma_t = 0,$$

или

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t = 0. \qquad (9.11)$$

Остальные уравнения равновесия для элемента удовлетворяются тождественно.

Согласно обобщенному закону Гука, напряжения σ_r, σ_t и σ_z связаны с удлинениями ε_r и ε_t следующими соотношениями:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}[\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]. \qquad (9.12)$$

Будем считать, что напряжение σ_z нам известно из условий загружения цилиндра осевыми силами по торцам.

Подставим ε_r и ε_t в выражение (9.10). Тогда в дополнение к уравнению равновесия получим

$$\frac{d}{dr}(\sigma_t r) - \sigma_r = 0. \qquad (9.13)$$

Складывая и вычитая почленно уравнения (9.11) и (9.13), получим два новых уравнения:

$$\frac{d}{dr}[(\sigma_t + \sigma_r)r] - (\sigma_t + \sigma_r) = 0;$$

$$\frac{d}{dr}[(\sigma_t - \sigma_r)r] + (\sigma_t - \sigma_r) = 0.$$

Решая их, находим

$$\sigma_t + \sigma_r = 2A; \quad \sigma_t - \sigma_r = \frac{2B}{r^2},$$

где A и B — произвольные постоянные.

Далее определяем

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_t = A + \frac{B}{r^2}. \tag{9.14}$$

Перемещение u можно найти из выражения (9.9), если ε_t определить предварительно по Закону Гука из (9.12):

$$u = \frac{1}{E}\left[A(1-\nu)r + B(1+\nu)\frac{1}{r} - \nu\sigma_z r\right]. \tag{9.15}$$

9.4. Определение перемещений и напряжений в толстостенном цилиндре

Рассмотрим цилиндр с внутренним радиусом a и внешним b (рис. 9.18). Для общности будем полагать, что цилиндр нагружен одновременно и внутренним давлением p_a и внешним p_b. В дальнейшем, принимая $p_b = 0$ либо $p_a = 0$, можно будет проанализировать отдельно случаи действия только внутреннего и только внешнего давления. При этом надо еще учесть, что если цилиндр имеет днище (рис. 9.19, *а*), то в нем возникает осевая растягивающая сила, равная

$$p_a\pi a^2 - p_b\pi b^2.$$

Осевое напряжение σ_z будет следующим:

$$\sigma_z = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}. \tag{9.16}$$

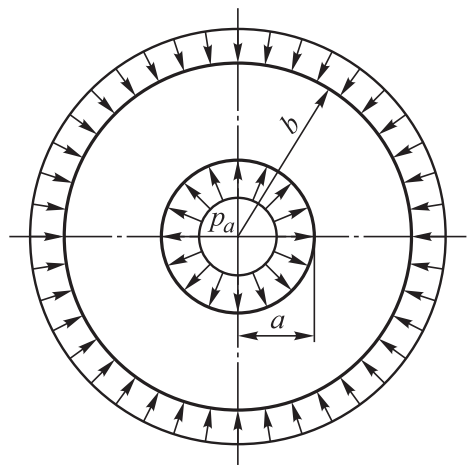


Рис. 9.18

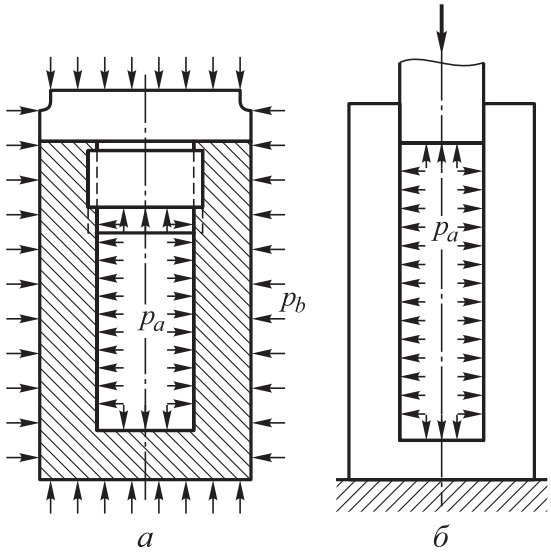


Рис. 9.19

Длину цилиндра при этом предполагают достаточно большой для того, чтобы можно было считать, что напряжение σ_z распределено по поперечному сечению равномерно и что удерживающее влияние днищ на радиальные перемещения цилиндра ничтожно мало.

Кроме указанного, рассмотрим случай, когда $\sigma_z = 0$, как, например, для цилиндра, показанного на рис. 9.19, *б*.

Возвращаясь к формулам (9.14), определяем постоянные A и B из следующих граничных условий: $\sigma_r = -p_a$ при $r = a$; $\sigma_r = -p_b$ при $r = b$, т. е.

$$A - \frac{B}{a^2} = -p_a, \quad A - \frac{B}{b^2} = -p_b,$$

откуда

$$A = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}(p_a - p_b).$$

В итоге вместо (9.14) и (9.15) получаем

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2}\frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}; \; \sigma_t = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2}\frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}; \quad (9.17)$$

$$u = \frac{1-\nu}{E}\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2 b^2}{r}\frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} - \frac{\nu}{E}\sigma_z r. \quad (9.18)$$

Наличие осевого напряжения σ_z сказывается только на радиальном перемещении u. В случае если цилиндр нагружен силами давления в осевом направлении, то, согласно выражениям (9.16) и (9.18), получаем

$$u = \frac{1-2\nu}{E}\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2 b^2}{r}\frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \qquad (9.19)$$

Если осевая сила отсутствует, то

$$u = \frac{1-\nu}{E}\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2 b^2}{r}\frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \qquad (9.20)$$

Теперь рассмотрим два частных случая.

Цилиндр нагружен внутренним давлением. В этом случае $p_a = p$, $p_b = 0$. Формулы (9.17) принимают вид

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right); \quad \sigma_t = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right). \qquad (9.21)$$

На рис. 9.20 показаны эпюры изменения радиального и окружного напряжений по толщине цилиндра при нагружении внутренним давлением. Окружное напряжение, как и следовало ожидать, является растягивающим, а радиальное — сжимающим. У внутренней поверхности σ_t достигает наибольшего значения:

$$\sigma_{t|r=a} = p\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

Радиальное напряжение при этом равно $-p$.

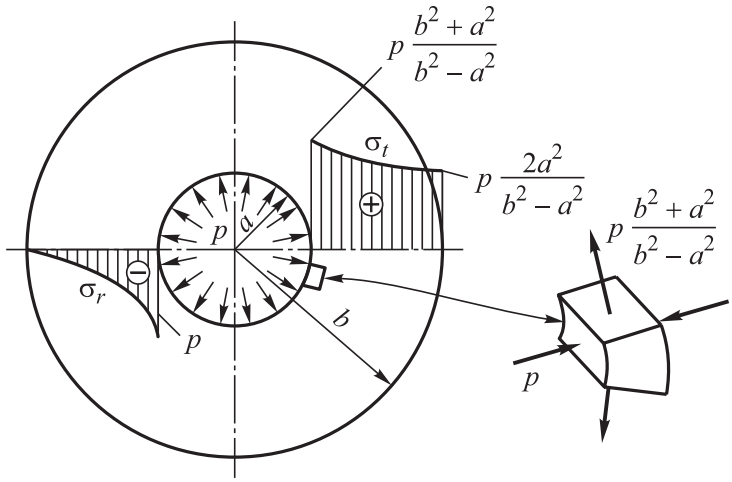


Рис. 9.20

Согласно теории наибольших касательных напряжений (в случае отсутствия осевой силы, т. е. при $\sigma_z = 0$),

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = p\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-p),$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = p\frac{2p^2}{b^2 - a^2}. \qquad (9.22)$$

Проследим, как изменяются напряжения σ_r и σ_t по мере уменьшения толщины цилиндра. Примем $b = a + \delta$, где δ — толщина цилиндра. Тогда

$$\sigma_{t|r=a} = p\frac{(a+\delta)^2 + a^2}{\delta(2a+\delta)}; \quad \sigma_{t|r=b} = p\frac{2a^2}{\delta(2a+\delta)}.$$

При малом значении δ

$$\sigma_{t|r=a} \approx \sigma_{t|r=b} \approx p\frac{a}{\delta}.$$

Радиальное напряжение σ_r у внутренней поверхности равно $-p$, а у внешней — нулю независимо от толщины цилиндра. Таким образом, мы видим, что для цилиндра с малой толщиной стенки окружные напряжения распределены по толщине почти равномерно, а радиальные — малы по сравнению с окружными в той же мере, в какой толщина δ мала по сравнению с радиусом.

Если толщина цилиндра увеличивается, то наибольшие напряжения в нем при неизменном давлении уменьшаются, но не беспредельно. Рассмотрим случай, когда $b \to \infty$, т. е. когда цилиндр имеет бесконечно большую толщину. Тогда выражения (9.21) принимают вид

$$\sigma_r = -p\frac{a^2}{r^2}; \quad \sigma_t = +p\frac{a^2}{r^2}.$$

Это значит, что для цилиндра с бесконечно большой толщиной стенки радиальное напряжение в любой точке равно окружному (рис. 9.21), и при отсутствии осевых напряжений все точки находятся в состоянии чистого сдвига. Далее, напряжения, как видим, находятся в обратно пропорциональной зависимости от квадрата радиуса r. Если принять, например, $r = 4a$, то в точках, расположенных на таком расстоянии от оси, напряжения составляют всего 1/16

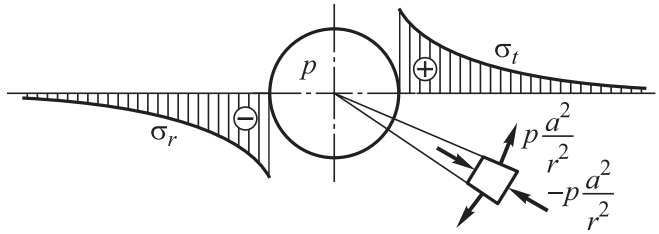


Рис. 9.21

максимальных. Следовательно, когда можно довольствоваться точностью расчетов в пределах 5...6 % (практически бо̀льшая точность и недостижима, хотя бы из-за упругих несовершенств материала), то цилиндр с отношением $b/a > 4$ можно уже рассматривать как имеющий бесконечно большую толщину стенки. Существенно, что при этом мы совершенно не связаны с формой внешнего контура. Если все точки внешнего контура удалены от оси внутреннего отверстия более, чем на $4a$, то форма внешнего контура оказывает влияния на распределение напряжений. Расчет упругих тел, таких, например, как на рис. 9.22, сводится, очевидно, к схеме цилиндра с бесконечно большой толщиной стенки.

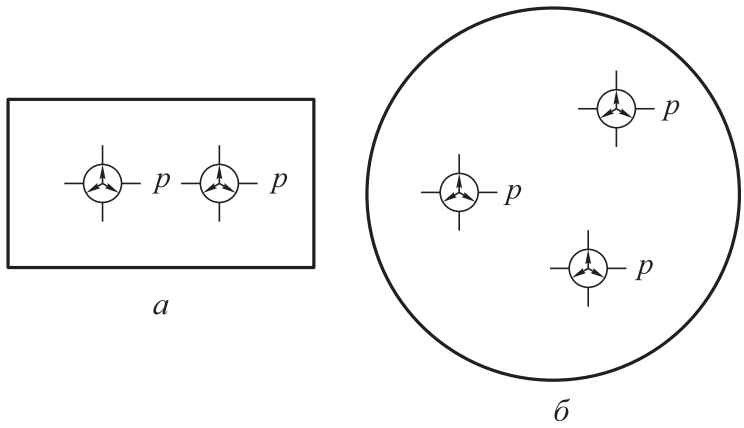


Рис. 9.22

Эквивалентное напряжение, согласно выражению (9.22), при $b \to \infty$ будет равно

$$\sigma_{экв} = 2p.$$

Следовательно, если, например, предел упругости материала равен 600 МПа, то при бесконечно большой толщине цилиндра деформации будут упругими при давлении, не превышающем 300 МПа. О том, какие возможности имеются для обеспечения прочности при более высоких давлениях, мы скажем несколько позже.

Цилиндр нагружен внешним давлением. В этом случае $p_a = 0$, $p_b = p$. Выражения (9.17) принимают вид

$$\sigma_r = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \quad \sigma_t = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Эпюры напряжений по толщине цилиндра для этого случая нагружения представлены на рис. 9.23. Наибольшее эквивалентное напряжение имеет место у внутренней поверхности цилиндра. При отсутствии осевой силы

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \left(-p\frac{2b^2}{b^2 - a^2}\right),$$

или

$$\sigma_{экв} = p\frac{2b^2}{b^2 - a^2}.$$

Это выражение совпадает с тем, которое было получено для случая внутреннего давления.

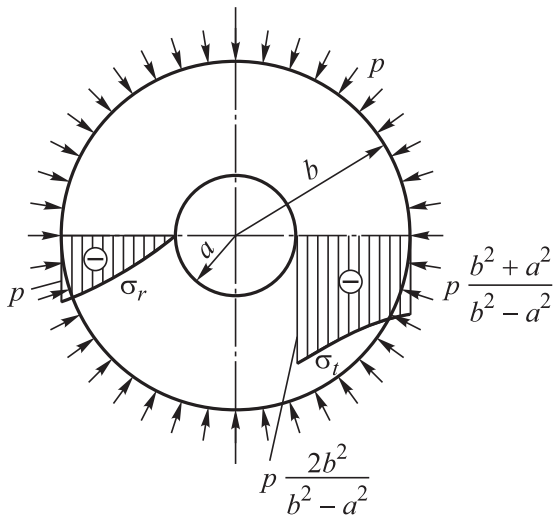


Рис. 9.23

Если внутреннее отверстие отсутствует, т. е. $a = 0$, то напряжения в цилиндре распределены равномерно:

$$\sigma_r = \sigma_t = -p.$$

Пример 9.5. Подобрать размер внешнего диаметра $2b$ цилиндра, предназначенного для удержания внутреннего давления $p = 50$ МПа,

при условии двукратного коэффициента запаса. Предел текучести материала $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 500$ МПа. Внутрений диаметр задан: $2a = 10$ см.

Наиболее опасными являются точки, расположенные у внутренней поверхности цилиндра. Согласно формулам (9.21) и (9.16), получаем

$$\sigma_r = -p; \quad \sigma_t = p\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}; \quad \sigma_z = p\frac{a^2}{b^2 - a^2}.$$

Очевидно, $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_3 = \sigma_r$. Отсюда $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = p\dfrac{2b^2}{b^2 - a^2}$. После подстановки числовых значений находим $2b = 2\sqrt{5/3}\,a = 12{,}9$ см.

9.5. Определение напряжений в составных трубах

Выше мы уже показали, что увеличение толщины не может во всех случаях обеспечить необходимой прочности трубы. В пределе при бесконечно большой толщине $\sigma_{экв} = 2p$.

Если в толстостенном сосуде надо удержать высокое давление, например в 1500 МПа, необходимо, чтобы предел текучести материала был бы по крайней мере в два раза большим, т. е. 3000 МПа. Следовательно, для сосудов высокого давления необходимо искать какие-то новые конструктивные решения. Одним из таких решений является создание составных, соединенных с натягом цилиндров. Этот прием используют как в технике высоких давлений, так и в артиллерийской практике для упрочнения стволов мощных орудий.

Положим, мы имеем два цилиндра (рис. 9.24). Внутренний радиус первого цилиндра обозначим через a, а внешний — через c. У второго цилиндра внутренний радиус на Δ меньше наружного радиуса первого цилиндра, т. е. равен $c - \Delta$. Внешний радиус второго цилиндра равен b. Если большой цилиндр нагреть, то отверстие

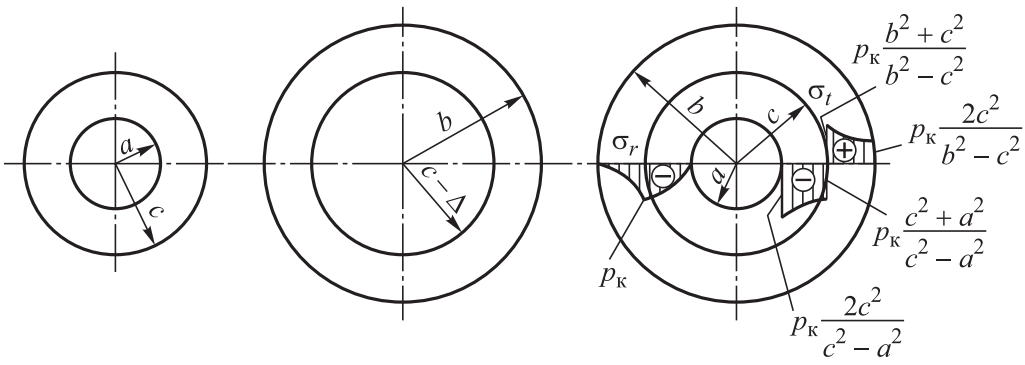


Рис. 9.24

в нем увеличится, и первый цилиндр может быть свободно вставлен во второй. При остывании между цилиндрами возникает контактное давление $p_к$. Определим его.

При посадке внешний радиус внутреннего цилиндра сократится, и точки цилиндра на контактной поверхности получат отрицательное смещение u_1. Внутренний радиус внешнего цилиндра увеличится. Здесь, следовательно, возникает положительное смещение u_2. Размер $u_2 + (-u_1)$ должен быть равен натягу Δ:

$$u_2 - u_1 = \Delta. \tag{9.23}$$

Перемещение u_1 можно определить по формуле (9.20), если положить в ней $p_a = 0$, $p_b = p_к$, а b и r заменить на c. Тогда получим

$$u_1 = -\frac{1-\nu}{E}\frac{c^3}{c^2-a^2}p_к - \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2c}{c^2-a^2}p_к.$$

По той же формуле определяем и u_2. Для этого полагаем $p_b = 0$, $p_a = p_к$, $a = r = c$. Тогда

$$u_2 = \frac{1-\nu}{E}\frac{c^3}{b^2-c^2}p_к + \frac{1+\nu}{E}\frac{b^2c}{b^2-c^2}p_к.$$

Модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν предполагаем для обоих цилиндров одинаковыми.

Согласно выражению (9.23), находим

$$p_к = \frac{E\Delta}{2c^3}\frac{(c^2-a^2)(b^2-c^2)c}{b^2-a^2}. \tag{9.24}$$

Таким образом, в результате посадки внутренний цилиндр оказывается под действием внешнего давления $p_к$, а внешний — под действием точно такого же внутреннего давления. Картина распределения напряжений в сопряженных цилиндрах показана на рис. 9.24.

Если теперь составной цилиндр нагрузить внутренним давлением, то обе его части будут работать как одно целое, и в составном цилиндре возникнут напряжения, определяемые формулой (9.21). Эти напряжения должны быть алгебраически просуммированы с предварительными напряжениями натяга (рис. 9.25). Во внутренних, наиболее напряженных точках рабочие напряжения и напряжения натяга имеют разные знаки. Поэтому суммарное напряжение здесь снижается и составной цилиндр способен выдержать большее давление, нежели обычный. Нужно, однако, помнить, что вследствие натяга увеличиваются напряжения в зоне контакта у внеш-

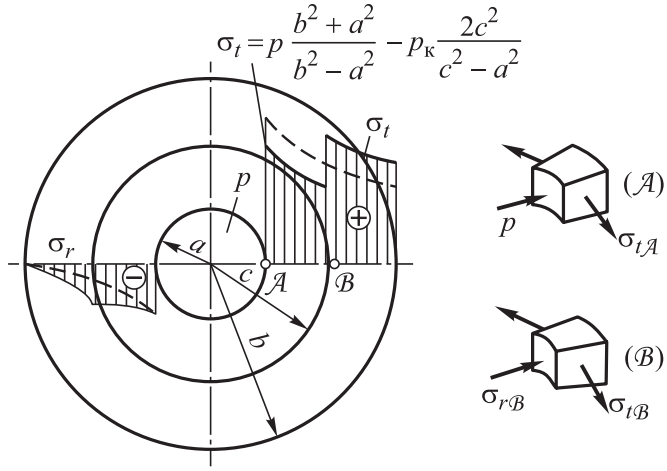


Рис. 9.25

него цилиндра. Поэтому натяг Δ следует подбирать для заданного рабочего давления p таким, чтобы была обеспечена прочность не только внутреннего, но и внешнего цилиндра. Легко составить условие равнопрочности цилиндров (см. рис. 9.25):

$$\sigma_{экв\,\mathcal{A}} = \sigma_{экв\,\mathcal{B}}.$$

Согласно выражению (9.17), получим:
в точке $\mathcal{A}$

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = p\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - p_к\frac{2c^2}{c^2-a^2} - (-p); \qquad (9.25)$$

в точке $\mathcal{B}$

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{c^2}\right) + p_к\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2} - \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right) - (-p_к).$$

Приравняв эти выражения, находим

$$p\frac{b^2}{c^2}\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2} = p_к\left(\frac{b^2}{b^2-c^2} + \frac{c^2}{c^2-a^2}\right). \qquad (9.26)$$

Если подставить сюда $p_к$ из выражения (9.24), то найдем натяг Δ, который обеспечивает условие равнопрочности при заданном рабочем давлении p:

$$\Delta = \frac{2p}{E}\frac{cb^2(c^2-a^2)}{b^2(c^2-a^2)+c^2(b^2-c^2)}. \qquad (9.27)$$

Если, наконец, исключить из выражения (9.25) контактное давление $p_к$ (9.24), то получим

$$\sigma_{экв} = p\frac{2b^2}{b^2 - a^2}\left[1 - \frac{1}{\dfrac{b^2}{b^2 - c^2} + \dfrac{c^2}{c^2 - a^2}}\right].$$

Величина напряжения $\sigma_{экв}$ имеет минимум при $c = \sqrt{ab}$:

$$\sigma_{экв}^{min} = p\frac{b}{b - a}. \qquad (9.28)$$

Полученные соотношения носят название *условий Гадолина* по имени русского ученого, впервые их получившего.

Сопоставляя выражения (9.28) и (9.22), видим, что посадка труб приводит к заметному снижению эквивалентного напряжения. Для сравнения рассмотрим отношение выражений $\sigma_{экв}$, полученных по этим формулам:

$$\frac{\sigma_{экв}^{min}}{\sigma_{экв}} = \frac{b + a}{2b}.$$

Если внутренний радиус цилиндра a мал, то посадка труб по соотношениям Гадолина дает почти двукратное снижение эквивалентного напряжения. Для тонкостенных труб, т. е. при $a \approx b$, посадка труб не дает эффекта.

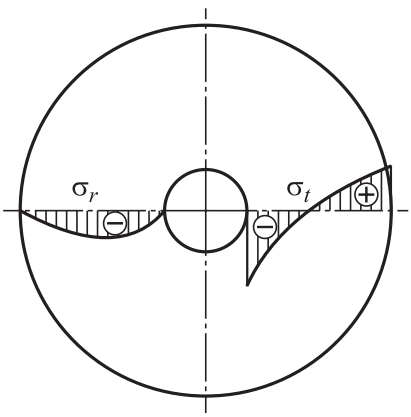


Рис. 9.26

В технике высоких давлений, кроме посадки, применяют так называемое *автофретирование*, которое заключается в предварительной нагрузке цилиндра внутренним давлением, бо̀льшим рабочего, с таким расчетом, чтобы во внутренних слоях цилиндра возникали пластические деформации. После снятия давления во внешних слоях цилиндра сохраняются упругие напряжения растяжения, а во внутренних слоях возникают напряжения сжатия (рис. 9.26).

В дальнейшем при нагрузке цилиндра давлением остаточные напряжения суммируются с рабочими так, что во внутренних слоях имеет место частичная разгрузка. Материал цилиндра не получает пластических деформаций, если только рабочее давление не превышает давления предварительного обжатия.

Пример 9.6. Подобрать величины диаметров $2c$ и $2b$ и натяга Δ для двуслойного орудийного ствола, имеющего внутренний диаметр $2a$ = 100 мм. Максимальное давление в момент выстрела p_{max} = = 200 МПа. Материал — сталь, $E = 200$ ГПа, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 600$ МПа. Запас прочности должен быть не менее чем двукратный.

По формуле (9.28) определяем размер b:

$$\frac{600}{2} = 200\frac{b}{b-a}, \quad b = 3a.$$

Промежуточный радиус c представляет при этом среднее геометрическое между a и b: $c = \sqrt{ab} = a\sqrt{3}$. Численные значения диаметров таковы: $2a$ = 100 мм, $2b$ = 300 мм, $2c$ = 173 мм.

Выражение (9.27) после подстановки $c = \sqrt{ab}$ принимает вид $\Delta = \frac{p}{E}\sqrt{ab}$. Отсюда натяг

$$\Delta = \frac{200}{2\cdot 10^5}\sqrt{50\cdot 150} = 0{,}0865 \text{ мм}.$$

Пример 9.7. Стальной стержень установлен с натягом в стальной плите (рис. 9.27). Какую силу следует приложить к стержню в осевом направлении, чтобы вытянуть его из плиты? Известны натяг Δ = 0,03 мм; диаметр стержня D = 60 мм, толщина плиты h = 100 мм, коэффициент трения между плитой и стержнем f = 0,25.

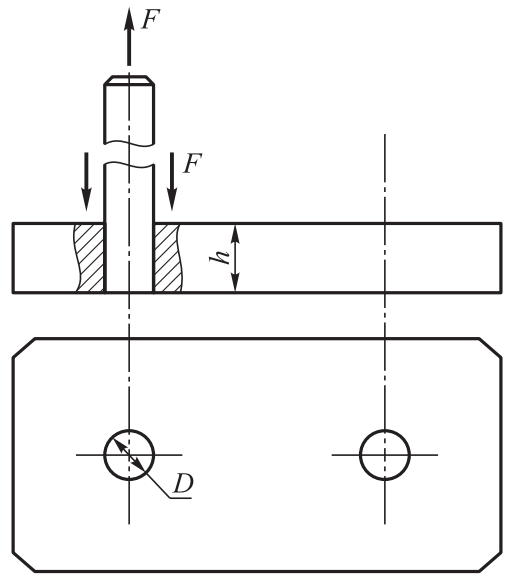


Рис. 9.27

Пренебрегая особенностями, связанными с неравномерным натягом по толщине плиты, примем, что искомая сила представляет собой силу трения

$$F = fp_к\pi Dh.$$

Контактное давление $p_к$ определим по формуле (9.24), если примем $a = 0$, $b = \infty$, $c = D/2$:

$$p_к = E\frac{\Delta}{D} = 200\frac{0{,}03}{60} = 100 \text{ МПа}.$$

Искомая сила $F = 4{,}6 \cdot 10^5$ Н.

Глава 10

ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, РАБОТАЮЩИХ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

10.1. Отличительные особенности расчета и схематизация диаграммы растяжения

Все рассмотренные до сих пор вопросы относились к расчету элементов конструкций в пределах упругих деформаций. Однако многообразие возникающих на практике задач далеко выходит за рамки, очерченные законом Гука, и сплошь и рядом приходится рассматривать вопросы, связанные с пластическими деформациями тел. Сюда относятся в основном задачи исследования некоторых технологических операций, таких, например, как навивка пружин или штамповка различных изделий. С учетом пластических деформаций рассчитывают сильно напряженные элементы конструкций типа оболочек ракетных двигателей и многие другие.

При решении подобного рода задач закон Гука теряет свою силу, и прямая пропорциональность между напряжениями и деформациями заменяется некоторой более сложной зависимостью, определяемой видом диаграммы растяжения. Если в обычных задачах деформации не превышают величины OA (рис. 10.1), то при расчете с допуском пластических деформаций такое ограничение снимается, и величина ε оказывается существенно большей. Вместе с тем она остается по-прежнему пренебрежимо малой по сравнению с единицей. В таком случае говорят, что расчет ведут в пределах малых пластических деформаций. Понятно, что можно

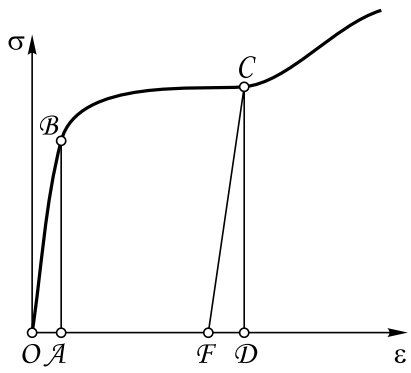


Рис. 10.1

также ставить вопрос и о расчетах при больших пластических деформациях. Такие задачи возникают, например, при анализе кузнечно-прессовых и вытяжных технологических операций. Этих вопросов, однако, мы касаться не будем.

В связи с малостью пластических деформаций к классу задач, рассматриваемых в настоящей главе, полностью применим принцип неизменности начальных размеров, и при составлении уравнений равновесия можно считать, что пластически деформированная система мало отличается от недеформированной.

Что же касается второго основополагающего принципа, т. е. принципа независимости действия сил, то в данном случае он оказывается неприменимым. Это хорошо иллюстрирует пример, представленный на рис. 10.2. Положим, что стержень нагружен

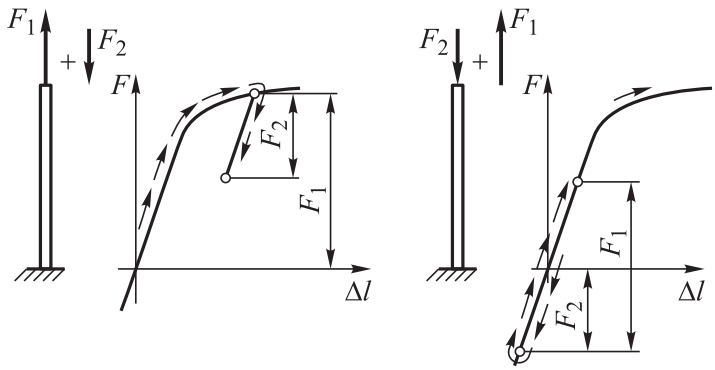


Рис. 10.2

силами F_1 и F_2, первая из которых вызывает пластические деформации. При прямой и обратной последовательности приложения сил удлинения стержня, как видим, оказываются различными.

Зависимости между напряжениями и деформациями при нагрузке и разгрузке не совпадают. В соответствии с этим принято различать активное и пассивное деформирование образца. При активном деформировании, или, как говорят обычно, активной деформации, напряжение возрастает, при пассивной — уменьшается. Таким образом, участок диаграммы OBC (см. рис. 10.1) соответствует активной, а CF — пассивной деформации. Деформацию, измеряемую отрезком OD (см. рис. 10.1), можно рассматривать как сумму чисто пластической, необратимой деформации OF и упругой деформации FD, которая восстанавливается после снятия нагрузки. Таким образом, деформация образца не является ни чисто пластической, ни чисто упругой.

При больших нагрузках в некоторых случаях можно пренебречь упругими деформациями по сравнению с пластическими. Если пластические и упругие деформации являются величинами одного порядка, их называют упругопластическими деформациями. Этот же термин употребляют по отношению к деформации различных тел, в которых имеются области упругих и области пластических деформаций.

В связи с возникновением в работающей конструкции пластических деформаций весьма существенным является вопрос общих принципов ведения расчета. При пластических деформациях нельзя, как правило, пользоваться методом расчета по допускаемым напряжениям. В этом случае о пригодности конструкции судят либо по возникающим перемещениям, либо по предельной, или разрушающей, нагрузке.

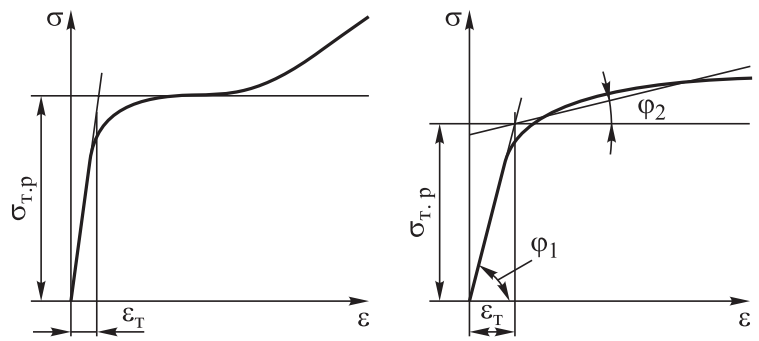
Для того чтобы ввести в расчетные формулы зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$, диаграмму растяжения необходимо схематизировать.

При упругих деформациях на участке OA (см. рис. 10.1) диаграмма растяжения близка к прямой, и можно с весьма большой степенью точности принять, что σ пропорционально ε.

Дальнейшую схематизацию участков диаграммы проводят различными способами в зависимости от вида диаграммы и от предполагаемого метода решения конкретной задачи.

В случае если диаграмма материала имеет площадку текучести, как, например, для низкоуглеродистых сталей, можно приближенно представить диаграмму в виде двух прямых (рис. 10.3, *а*). До предела текучести имеет место обычная линейная зависимость, а дальше, когда напряжение σ становится равным пределу текучести $\sigma_{т.р}$, напряжение не зависит от деформации, т. е. $\sigma = \sigma_{т.р}$.

Понятно, что при достаточно больших удлинениях эта закономерность теряет свою силу точно так же, как теряет свою силу и



а *б*

Рис. 10.3

закон Гука. Диаграмма, показанная на рис. 10.3, *а*, носит название диаграммы идеальной пластичности или диаграммы Прандтля.

Зависимость между σ и ε можно также представить в виде двух прямых и для некоторых диаграмм, где отсутствует площадка текучести (рис. 10.3, *б*). При $\varepsilon < \varepsilon_т$ имеем

$$\sigma = E\varepsilon,$$

при $\varepsilon \geq \varepsilon_т$

$$\sigma - \sigma_{т.р} = D(\varepsilon - \varepsilon_т),$$

где E и D — угловые коэффициенты прямых. Значение D обычно существенно меньше E. Подобные диаграммы свойственны большей частью легированным сталям.

Для некоторых материалов, как, например, для отожженной меди, диаграмма не имеет явно выраженного упругого участка (рис. 10.4). В этом случае кривая может быть представлена степенной зависимостью

$$\varepsilon = A\sigma^n,$$

где A, n — постоянные, которые подбирают так, чтобы принятая зависимость на участке рабочего изменения ε возможно ближе подходила к экспериментально снятой кривой.

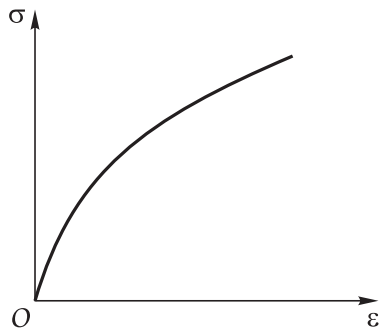


Рис. 10.4

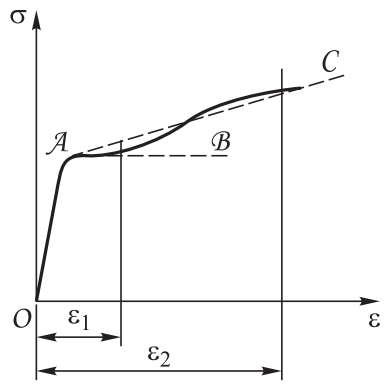


Рис. 10.5

Существенно отметить, что схематизация конкретного участка диаграммы зависит еще и от того, сколь широки пределы изменения деформаций в рассматриваемой задаче. Так, если ожидаемые деформации лежат в пределах $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ (рис. 10.5), диаграмму следует схематизировать прямыми OA и AB. Если же необходимо исследовать поведение системы в пределах бо̀льших деформаций,

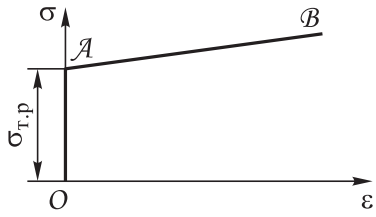


Рис. 10.6

например в пределах $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, диаграмма может быть схематизирована прямыми OA и AC.

В ряде случаев упругой деформацией по сравнению с пластической можно пренебречь. Тогда диаграмму растяжения схематизируют прямыми OA и AB (рис. 10.6). До напряжений, не превышающих предела текучести, тело рассматривают как жесткое, при бо̀льших напряжениях его считают пластическим. Материал, наделенный такими свойствами, называется жесткопластическим.

Так или иначе, но во всех случаях функцию, которой заменяют диаграмму растяжения, подбирают в первую очередь в зависимости от формы кривой. Если в дальнейшем оказывается, что выбранная функция при решении конкретной задачи приводит к громоздким вычислениям, выбирают новую функцию с таким расчетом, чтобы, с одной стороны, она продолжала служить достаточно точным приближением к диаграмме растяжения, а с другой — сложность вычислений не была чрезмерной.

Во многих случаях вместо подобранной аналитической зависимости $\sigma = f(\varepsilon)$ пользуются графическими, графоаналитическими или численными методами решения. С простейшими из этих методов мы ознакомимся ниже.

10.2. Напряжения и перемещения в простейших стержневых системах при наличии пластических деформаций

Рассмотрим несколько задач, на примере которых можно увидеть основные особенности поведения систем при пластических деформациях. Наиболее просто решаются эти вопросы для стержневых систем.

Пример 10.1. Определить абсолютное удлинение, возникающее под действием собственного веса свободно висящей проволоки длиной l из отожженной меди, диаграмма растяжения которой приведена на рис. 10.7. Зависимость удлинения ε от напряжения σ может быть представлена степенной функцией $\varepsilon = A\sigma^n$. Константы A и n заданы.

На расстоянии z от конца проволоки $\sigma = \rho z$, где ρ — плотность меди. Деформация

$$\varepsilon = A\rho^n z^n.$$

Искомое абсолютное удлинение определим путем интегрирования этого выражения по длине проволоки:

$$\Delta l = \int_0^l A\rho^n z^n \, dz = A\rho^n \frac{l^{n+1}}{n+1}.$$

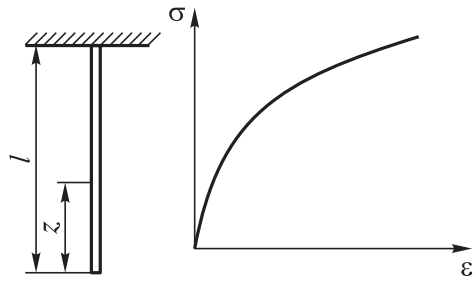


Рис. 10.7

Пример 10.2. Определить усилия в стержнях и перемещение узла $\mathcal{A}$ (рис. 10.8, *а*) в зависимости от силы F. Найти также остаточные напряжения, которые возникают в системе после ее нагружения силой F и последующей разгрузки. Диаграмма растяжения материала обладает участком идеальной пластичности (рис. 10.8, *б*).

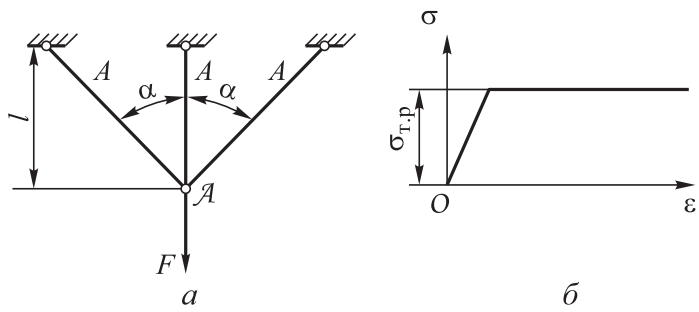


Рис. 10.8

При малых значениях силы F во всех стержнях системы возникают упругие деформации. Усилия в стержнях определяются обычными методами раскрытия статической неопределимости. Поскольку такую задачу мы уже рассматривали ранее (см. пример 1.5), выпишем значения усилий в стержнях без вывода:

$$N_1 = \frac{F\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}; \quad N_2 = \frac{F}{1+2\cos^3\alpha}, \tag{10.1}$$

где N_1 — нормальная сила в крайних стержнях, а N_2 — то же в среднем. Перемещение точки $\mathcal{A}$ равно удлинению среднего стержня, т. е.

$$\delta_{\mathcal{A}} = \frac{N_2 l}{EA} = \frac{Fl}{EA}\frac{1}{1+2\cos^3\alpha}.$$

Эти зависимости сохраняются до тех пор, пока в среднем стержне, в котором нормальная сила больше, чем в крайних, не возникнут пластические деформации. Это произойдет при

$$N_2 = \sigma_{т.р} A, \tag{10.2}$$

или при

$$F = \sigma_{т.р} A(1 + 2\cos^3\alpha).$$

Далее напряжение в среднем стержне остается неизменным, равным $\sigma_{т.р}$. Сила N_2 также не меняется и равна $\sigma_{т.р}A$. Усилия в боковых стержнях определяются в этом случае из условия равновесия узла (рис. 10.9). Система, таким образом, из статически неопределимой превращается в статически определимую:

$$N_1 = \frac{F - \sigma_{т.р} A}{2\cos\alpha}. \qquad (10.3)$$

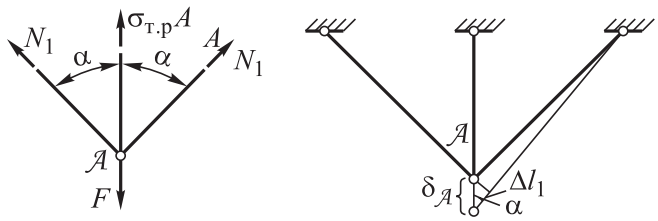


Рис. 10.9

Перемещение точки A (см. рис. 10.9) равно $\Delta l_1/\cos\alpha$, или

$$\delta_A = \frac{N_1 l}{EA\cos^2\alpha} = \frac{(F - \sigma_{т.р} A)l}{2EA\cos^3\alpha}.$$

Далее и в боковых стержнях напряжения становятся равными пределу текучести. Из выражения (10.3) следует, что это произойдет при

$$F = \sigma_{т.р} A(1 + 2\cos\alpha).$$

В этом случае система превращается в механизм, поскольку при дальнейшем возрастании силы F условие равновесия для системы не соблюдается. В каждом из стержней нормальная сила, судя по диаграмме растяжения, не может быть больше, чем $\sigma_{т.р} A$, а вертикальная составляющая трех сил равна $\sigma_{т.р} A(1 + 2\cos\alpha)$ и остается постоянной.

Таким образом, к системе не может быть приложена сила, бòльшая указанной. Эту силу для данной системы следует рассматривать как *предельную*. В некоторых случаях ее именуют также разрушающей нагрузкой. Понятно, что название «разрушающая нагрузка» не отражает полностью существа явления. Если действительная диаграмма растяжения при увеличенных значениях ε имеет участок упрочнения, то возможно, что сила F, бòльшая предельной, окажется в дальнейшем уравновешенной внутренними силами. Однако это произойдет при весьма заметных перемещениях и столь сильных изменениях геометрической формы системы, что последнюю в этих условиях можно рассматривать как разрушившуюся.

На рис. 10.10 показано изменение усилий N_1 и N_2, а также и перемещения $\delta_{\text{Д}}$ в зависимости от силы F.

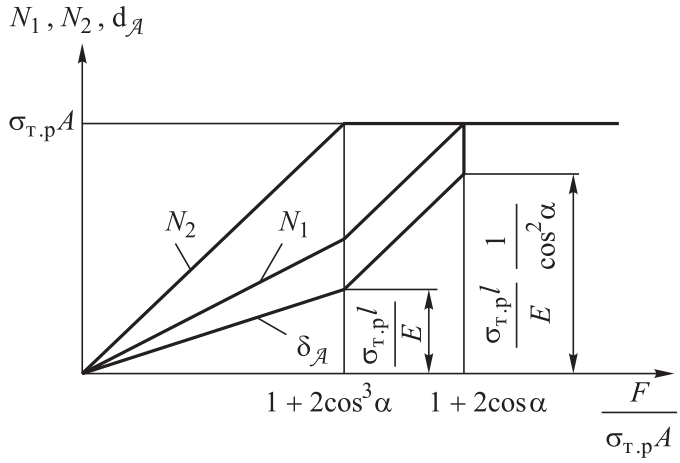


Рис. 10.10

Теперь рассмотрим вопрос об остаточных напряжениях, возникающих в системе после разгрузки. Понятно, что при этом имеется в виду нагружение системы такими силами, при которых в среднем стержне возникают пластические деформации, иначе при чисто упругих деформациях остаточных напряжений не будет. Однако нагрузка при этом должна оставаться меньше предельной.

Процесс разгрузки эквивалентен приложению внешней силы, равной силе нагрузки, но обратной ей по знаку. Следовательно, остаточные напряжения в системе можно рассматривать как алгебраическую сумму напряжений, возникающих в результате последовательного приложения сил нагрузки и противоположных и равных им сил разгрузки.

Вследствие того что принцип независимости действия сил в данном случае неприменим, приложение сил нагрузки и разгрузки должно быть только в прямой последовательности (рис. 10.11). Деформация при разгрузке происходит упруго, и материал следует при этом закону Гука. Поэтому в процессе разгрузки в стержнях будут возникать усилия, определяемые выражениями (10.1). При нагрузке же усилия определя-

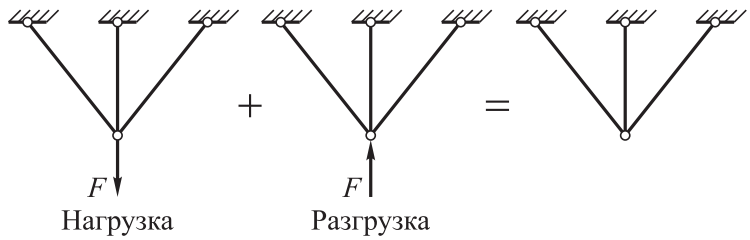


Рис. 10.11

ются выражениями (10.2) и (10.3). Таким образом, остаточные усилия, возникающие в стержнях, будут

$$N_{1\,\text{ост}} = \frac{F^* - \sigma_{\text{т.р}} A}{2\cos\alpha} - \frac{F^* \cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha}; \quad N_{2\,\text{ост}} = \sigma_{\text{т.р}} A - \frac{F^*}{1 + 2\cos^3\alpha}.$$

В этих выражениях под F^* понимается сила, до которой происходило нагружение. Ее значение находится в пределах, ограниченных нагрузкой, соответствующей началу образования пластических деформаций, с одной стороны, и значением предельной нагрузки — с другой:

$$\sigma_{\text{т.р}} A(1 + 2\cos^3\alpha) \le F^* \le \sigma_{\text{т.р}} A(1 + 2\cos\alpha).$$

Остаточные напряжения являются самоуравновешенными, т. е. узел стержней (рис. 10.12) при отсутствии внешних сил должен находиться в равновесии:

$$2N_{1\,\text{ост}}\cos\alpha + N_{2\,\text{ост}} = 0.$$

Подставляя сюда значения $N_{1\,\text{ост}}$ и $N_{2\,\text{ост}}$ легко убедиться, что полученные выражения для сил удовлетворяют этому условию.

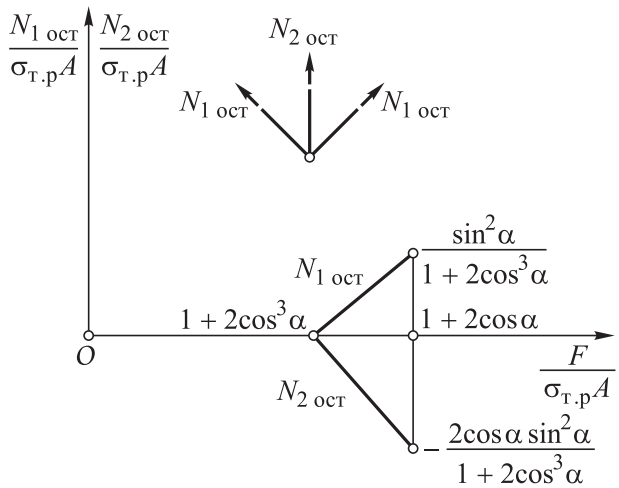


Рис. 10.12

На рис. 10.12 показан график изменения остаточных сил в зависимости от нагружающей силы F. В среднем стержне сила $N_{2\,\text{ост}}$ является сжимающей. В боковых стержнях остаточные силы — растягивающие.

При повторном нагружении система деформируется упруго до тех пор, пока сила вторичного нагружения не станет равной силе первоначального нагружения. Если систему нагружать дальше, в стержнях возникнут пластические деформации, изменяющиеся по установленным выше законам первоначального нагружения.

Пример 10.3. Проанализировать работу ступенчатого стержня (рис. 10.13, *а*) при нагружении его силой F. Диаграмма растяжения

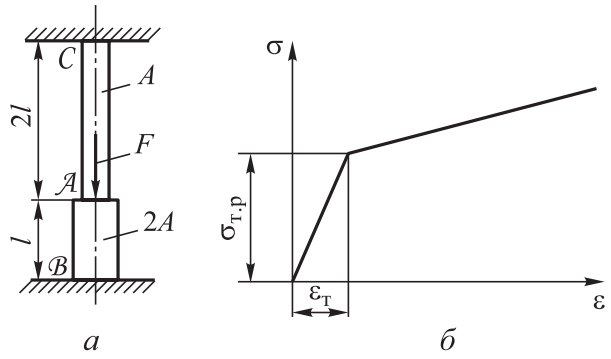


Рис. 10.13

схематизируется двумя прямыми (рис. 10.13, *б*), уравнения которых следующие:

$$\sigma = E\varepsilon \text{ при } \sigma \le \sigma_т; \qquad \sigma - \sigma_т = D(\varepsilon - \varepsilon_т) \text{ при } \sigma \ge \sigma_т. \tag{10.4}$$

Диаграмма сжатия предполагается совпадающей с диаграммой растяжения ($\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = \sigma_т$).

На первом этапе нагружения, когда материал следует закону Гука, усилия в нижнем и верхнем участках легко определить обычными приемами раскрытия статической неопределимости. Так как

$$N_{AB} = N_{AC} = F, \tag{10.5}$$

а удлинения на участках AB и AC одинаковы:

$$\frac{N_{AC}\,2l}{EA} = \frac{N_{AB}\,l}{2EA}, \tag{10.6}$$

то $N_{AC} = \frac{1}{5}F,\ N_{AB} = \frac{4}{5}F.$

Перемещение сечения A будет следующим:

$$\delta_A = \frac{N_{AC}\,2l}{EA} = \frac{2Fl}{5EA}.$$

Эти соотношения будут справедливы до тех пор, пока напряжение на нижнем участке не достигнет значения $\sigma_т$ при $F = \frac{5}{2}\sigma_т A.$

На втором этапе нагружения нижний участок деформируется пластически, а верхний — упруго. Уравнение (10.5) остается неизменным, а уравнение (10.6) с учетом выражения (10.4) принимает вид

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_т}{D} + \varepsilon_т. \tag{10.7}$$

Тогда взамен уравнения (10.6) получим

$$\frac{N_{AC}\,2l}{EA} = l\left[\frac{1}{D}\left(\frac{N_{AB}}{2A} - \sigma_т\right) + \varepsilon_т\right].$$

Решая это уравнение совместно с (10.5), находим

$$N_{AC} = \frac{F - 2\sigma_т A(1 - D/E)}{1 + 4D/E}; \quad N_{AD} = \frac{4FD/E + 2\sigma_т A(1 - D/E)}{1 + 4D/E}. \qquad (10.8)$$

Перемещение сечения A

$$\delta_A = \frac{N_{AC}\,2l}{EA} = \frac{2l}{EA}\,\frac{F - 2\sigma_т A(1 - D/E)}{1 + 4\,D/E}.$$

Из первого выражения (10.8) определяем силу, при которой напряжение в верхнем участке достигнет предела текучести,

$$F = \sigma_т A(3 + 2D/E).$$

На третьем этапе нагружения имеем $2l\varepsilon_{AC} = l\varepsilon_{AB}$, или, согласно выражению (10.7),

$$2\left[\frac{1}{D}\left(\frac{N_{AC}}{A} - \sigma_т\right) + \varepsilon_т\right] = \frac{1}{D}\left(\frac{N_{AB}}{2A} - \sigma_т\right) + \varepsilon_т.$$

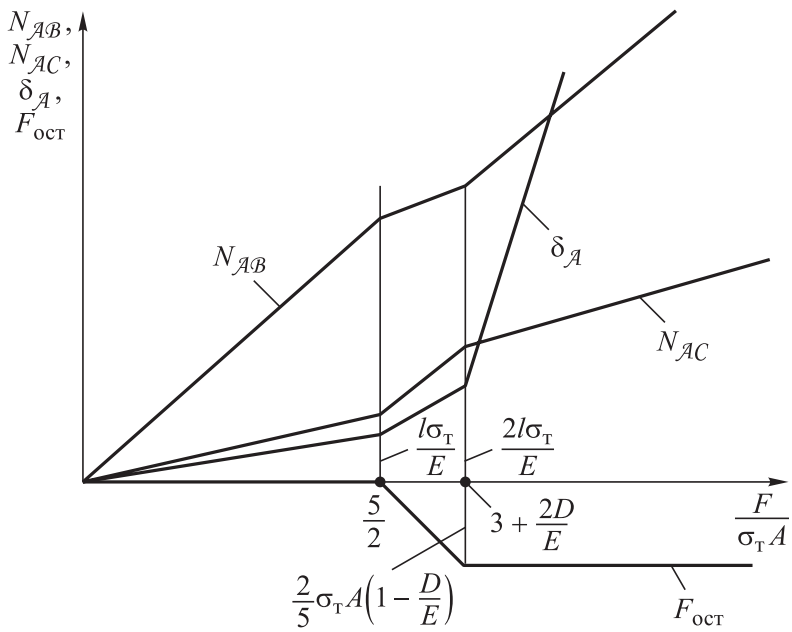


Рис. 10.14

Решаем это уравнение совместно с уравнением (10.5), получаем

$$N_{AC} = \frac{1}{5}F + \frac{2}{5}\sigma_т A\left(1 - \frac{D}{E}\right);$$
$$N_{AB} = \frac{4}{5}F - \frac{2}{5}\sigma_т A\left(1 - \frac{D}{E}\right). \qquad (10.9)$$

Перемещение точки A на третьем этапе нагружения будет

$$\delta_A = 2l\varepsilon_{AC} = \frac{2l}{5D}\left[\frac{F}{A} - 3\sigma_т\left(1 - \frac{D}{E}\right)\right].$$

Зависимость усилий N_{AB} и N_{AC} и перемещения δ_A от силы F представлена на рис. 10.14. На этом же графике показано и остаточное усилие $F_{ост}$ в стержне, получающееся после разгрузки. Оно будет одинаковым для обоих участков и определяется путем вычитания из усилия N_{AC} (см. формулы (10.8) или (10.9)) усилия «упругой» разгрузки, равного $F/5$.

10.3. Упругопластический изгиб стержня

Рассмотрим случай чистого изгиба прямого стержня при наличии пластических деформаций. Для простоты будем считать, что поперечное сечение обладает двумя осями симметрии (рис. 10.15) и что диаграммы растяжения и сжатия материала одинаковы. При этих условиях, очевидно, нейтральная линия совпадает с осью симметрии x (см. рис. 10.15). Аналитически связь между напряжением σ и деформацией ε задавать не будем и примем, что диаграмма растяжения дана графически (рис. 10.16).

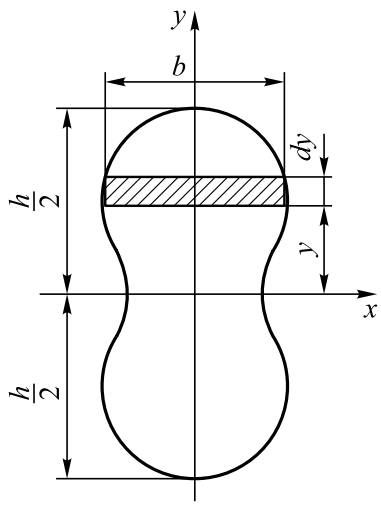


Рис. 10.15

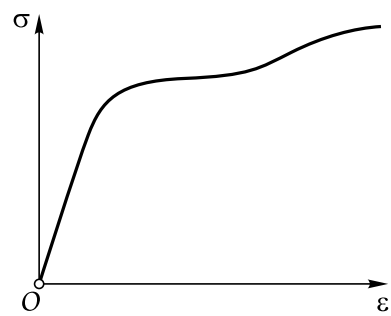


Рис. 10.16

Положим, что для стержня, как обычно, справедлива гипотеза плоских сечений, тогда получим

$$\varepsilon = \frac{y}{r}, \tag{10.10}$$

где y — расстояние от нейтральной линии; $1/r$ — кривизна стержня. Изгибающий момент в сечении стержня будет

$$M = \int_A \sigma y b \, dy. \tag{10.11}$$

Теперь оказывается возможным графоаналитически определить зависимость кривизны стержня $1/r$ от момента M, а затем при заданном моменте найти и напряжения, возникающие в стержне. Проще всего сделать это следующим образом. Задаемся кривизной $1/r$ и по формуле (10.10) находим максимальное удлинение

$$\varepsilon_{\max} = \frac{h}{2r}.$$

Рядом с чертежом поперечного сечения изображаем диаграмму растяжения (рис. 10.17) и отмечаем на ней точку $\mathcal{A}$, соответствующую найденному значению $\varepsilon_{\max}$. Это удлинение имеет место в слоях, наиболее удаленных от нейтральной линии. Поэтому против верхней точки сечения отмечаем отрезок $O'\mathcal{A}'$, а затем и точку O''. Так как удлинения распределены по высоте по линейному закону,

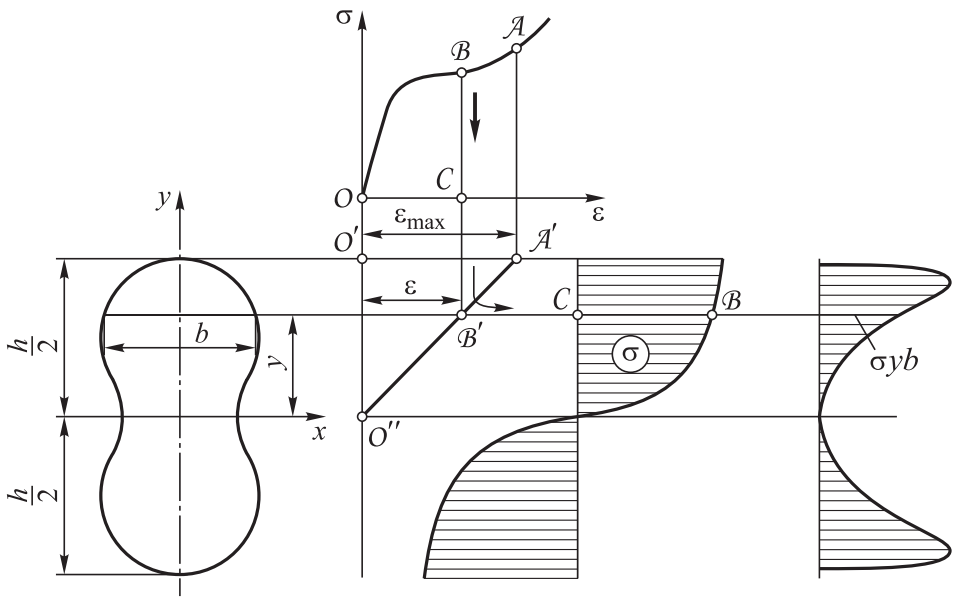


Рис. 10.17

точки O'' и A' соединяем прямой. Она представляет собой эпюру деформаций в сечении.

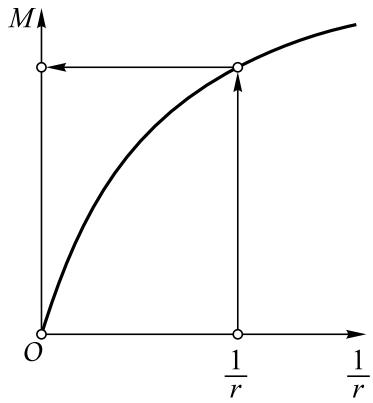


Рис. 10.18

Далее строим эпюру напряжений. Для некоторого значения y по удлинению ε (точка B') находим напряжение σ (точка B). Откладывая длину отрезка BC на эпюре, получаем справа график распределения напряжений по высоте. Затем строим график σyb по высоте. Площадь полученной кривой дает, согласно выражению (10.11), изгибающий момент M. Таким образом, в результате проведенных операций находим одну точку зависимости $1/r$ от момента M. Если задаться новым значением кривизны, можно, повторяя все указанные операции, найти новое значение момента и тем самым определить следующую точку искомой зависимости $1/r$ от M.

Когда искомая кривая построена (рис. 10.18), по заданному моменту определим кривизну стержня. Далее строим эпюру напряжений при кривизне $1/r$, соответствующей заданному моменту M.

Имея описанные построения, можно легко определить также и остаточные напряжения, сохраняющиеся в стержне после разгрузки. Это возможно путем уже описанного ранее способа суммирования воображаемых напряжений разгрузки и напряжений, возникающих при нагружении. В рассматриваемом случае напряжения разгрузки изменяются в сечении по линейному закону $\sigma = My/J_x$. Накладывая эту линейную эпюру на эпюру рабочих напряжений (рис. 10.19), находим эпюру остаточных напряжений. Важно отметить, что полученные напряжения являются самоурав-

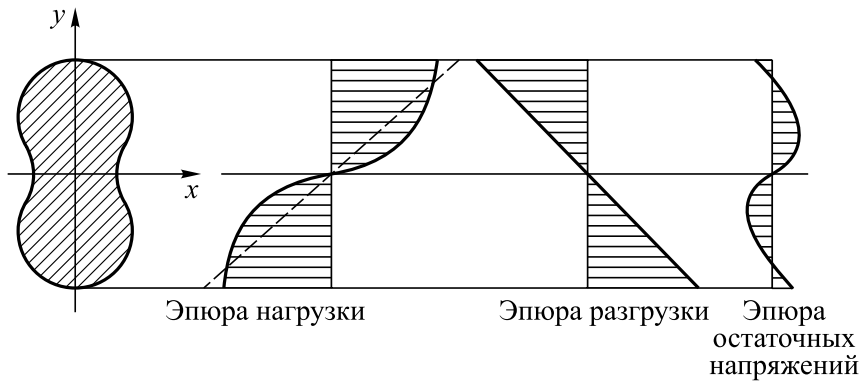


Рис. 10.19

новешенными. В сечении не возникает ни нормальной силы, ни изгибающего момента.

Описанная выше последовательность определения напряжений в изогнутом стержне выглядит значительно проще в случае, когда ширина сечения b остается постоянной, т. е. в случае стержня прямоугольного сечения, и особенно просто, когда диаграмма растяжения к тому же обладает участком идеальной пластичности.

Рассмотрим этот частный случай. Имеем прямоугольное сечение со сторонами b и h и диаграмму растяжения, показанную на рис. 10.20. Легко установить, что поперечное сечение стержня делится на две зоны: упругую и пластическую.

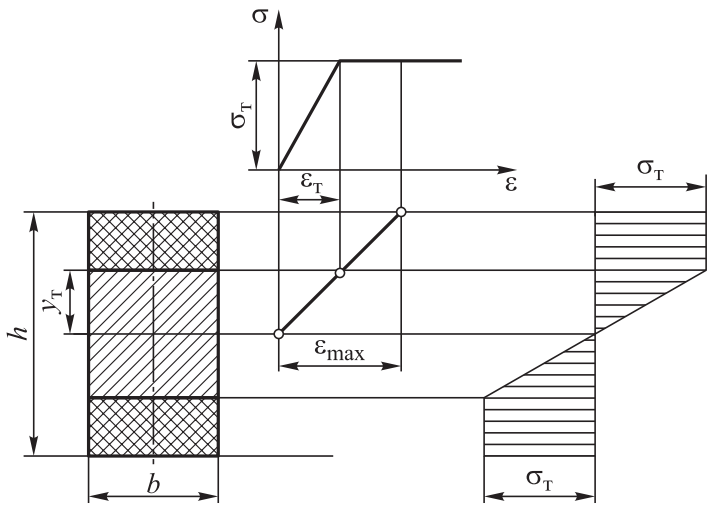


Рис. 10.20

Величину $y_т$, определяющую границу этих зон, находим из выражения (10.10):

$$y_т = \varepsilon_т r. \tag{10.12}$$

По мере увеличения момента и, соответственно, кривизны $y_т$ уменьшается. Упругая зона сокращается.

Изгибающий момент в сечении по-прежнему определяется выражением (10.11), которое в данном случае принимает вид

$$M = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y dy.$$

Разбивая интеграл на два, получаем

$$M = 2b\int_0^{y_т} \sigma y\,dy + 2b\sigma_т \int_{y_т}^{h/2} y\,dy.$$

Так как на упругом участке $\sigma = E\dfrac{y}{r}$, после интегрирования находим

$$M = \frac{2}{3}b\frac{E}{r}y_т^3 + b\sigma_т\left(\frac{h^2}{4} - y_т^2\right).$$

Отсюда, имея в виду, что на основании выражения (10.12)

$$y_т = \varepsilon_1 r = \frac{\sigma_т r}{E},$$

получаем

$$M = \frac{bh^2}{4}\sigma_т - \frac{1}{3}b\sigma_т^3\frac{r^2}{E^2}, \tag{10.13}$$

откуда

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\frac{b\sigma_т^3}{E^2}}{\frac{1}{4}bh^2\sigma_т - M}}. \tag{10.14}$$

Кривизна стержня с увеличением момента M возрастает и обращается в бесконечность при

$$M = \frac{1}{4}bh^2\sigma_т. \tag{10.15}$$

В этом случае $r = 0$ и $y_т$ обращается в нуль. Следовательно, все сечение охватывается пластической деформацией, и эпюра напряжений в поперечном сечении стержня имеет вид двух прямоугольников (рис. 10.21). Несущая способность стержня при этом исчерпывается, и бòльшая нагрузка им воспринята быть не может. Понятно, что в действительности кривизна стержня не может обратиться в бесконечность, и указанный случай следует рассматривать как предельный.

Применимость формулы (10.14) ограничена величиной момента M не только сверху, но и снизу. При малых значениях момента, когда пластическая зона отсутствует, кривизна определяется по формулам,

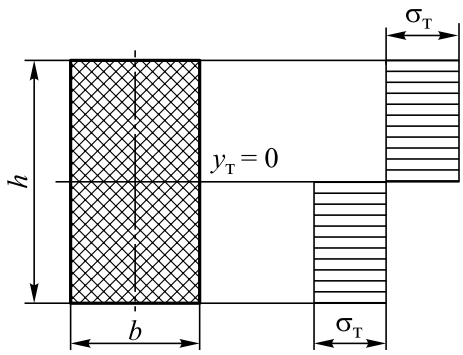


Рис. 10.21

выведенным в предположении линейной зависимости между σ и ε:

$$\frac{1}{r}=\frac{M}{EJ}=\frac{12M}{Eh^3b}. \qquad (10.16)$$

Это соотношение будет правильным до тех пор, пока

$$\sigma=\frac{M}{W}=\frac{6M}{bh^2}\le\sigma_т,$$

т. е.

$$M\le\frac{1}{6}bh^2\sigma_т.$$

Формулой (10.14) можно пользоваться при

$$\frac{1}{6}bh^2\sigma_т\le M\le\frac{1}{4}bh^2\sigma_т.$$

На рис. 10.22 изображена зависимость кривизны $1/r$ от момента M.

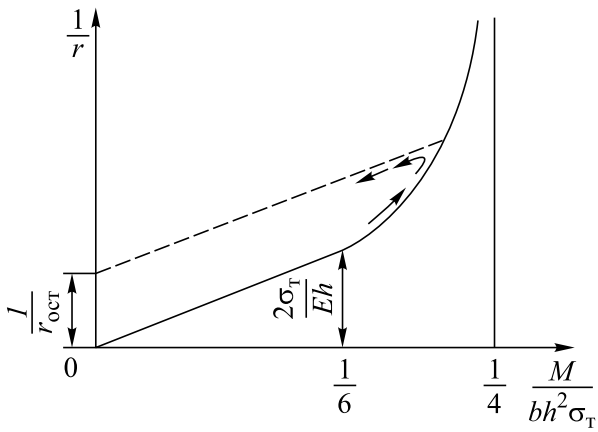


Рис. 10.22

Из выражений (10.14) и (10.16) можно найти остаточную кривизну, которую сохраняет брус после разгрузки:

$$\frac{1}{r_{ост}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\frac{b\sigma_т^3}{E^2}}{\frac{1}{4}bh^2\sigma_т-M}}-\frac{12M}{Eh^3b}, \qquad (10.17)$$

где под M понимается величина момента при нагрузке.

Остаточная кривизна может быть найдена и по графику, как это показано на рис. 10.22.

Эпюра остаточных напряжений представляет собой ломаную линию (рис. 10.23). Она получается в результате вычитания линейной эпюры разгрузки из эпюры нагружения. Наибольшие остаточные напряжения будут следующими:

$$\sigma'_{\text{ост}} = \sigma_{\text{т}} - \frac{6M}{bh^2};$$

$$\sigma''_{\text{ост}} = \sigma_{\text{т}} - \frac{12\,My_{\text{т}}}{bh^3}.$$

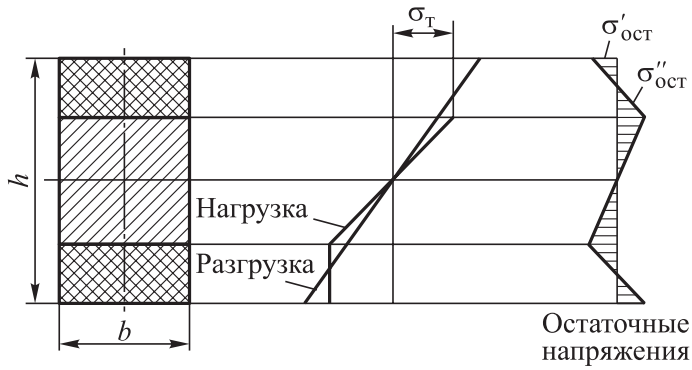


Рис. 10.23

Пример 10.4. Витая пружина получается путем холодной навивки проволоки на цилиндрическую оправку (рис. 10.24). Для случая прямоугольного сечения проволоки подобрать диаметр оправки $D_{\text{опр}}$ с таким расчетом, чтобы после навивки пружина имела заданный средний диаметр витка $D_{\text{пр}} = 25$ мм. Высота сечения проволоки $h = 2{,}5$ мм; $\sigma_{\text{т}} = 500$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Полагая, что угол подъема витка мал, будем рассматривать виток пружины как плоский. По условию остаточная кривизна витка

$$\frac{1}{r_{\text{ост}}} = \frac{2}{D_{\text{пр}}} = \frac{2}{25}\ \text{мм}^{-1}.$$

Обращаемся к выражению (10.17). В нем нам неизвестен момент M. Найдем его. Для этого перепишем уравнение (10.17) в виде

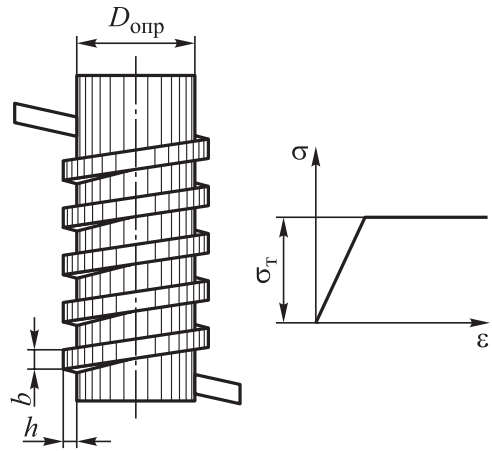


Рис. 10.24

$$\left(\frac{1}{r_{ост}}+12\frac{M}{bh^2\sigma_т}\frac{\sigma_т}{Eh}\right)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{M}{bh^2\sigma_т}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sigma_т}{Eh}\right)^2,$$

или

$$\left(\frac{2}{25}+\frac{M}{bh^2\sigma_т}12\cdot10^{-3}\right)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{M}{bh^2\sigma_т}\right)=\frac{1}{3}\cdot10^{-6}.$$

Величина $M/(bh^2\sigma_т)$ лежит в пределах от 1/6 до 1/4. Подбором определяем

$$\frac{1}{4}-\frac{M}{bh^2\sigma_т}=0{,}485\cdot10^{-4}.$$

По формуле (10.14) находим радиус кривизны проволоки в нагруженном состоянии:

$$r=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}-\frac{M}{bh^2\sigma_т}}{\frac{1}{3}\frac{\sigma_т^2}{E^2h^2}}}=12{,}05\text{ мм}.$$

Вычитая из этого значения половину толщины проволоки, находим размеры оправки: $r_{опр}=12{,}05-1{,}25=10{,}8$ мм, $D_{опр}=21{,}6$ мм.

Пример 10.5. Часовую пружину изготовляют путем навивки стальной ленты на цилиндрический сердечник (рис. 10.25, *а*). Освобожденная лента принимает в дальнейшем форму спирали (рис. 10.25, *б*). Определить уравнение этой спирали, если свойства материала характеризуются диаграммой идеальной пластичности.

При навивке лента изогнута по спирали Архимеда:

$$r_п=\frac{d}{2}+\frac{h}{2\pi}\varphi,$$

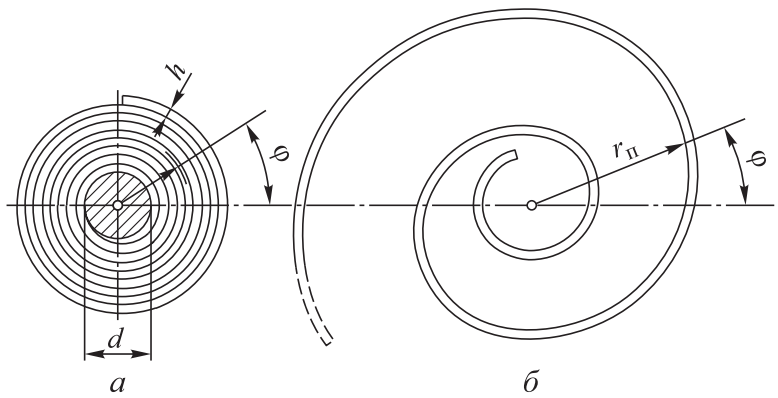


Рис. 10.25

где $r_п$ и φ — полярные координаты; d — диаметр сердечника; h — толщина ленты (см. рис 10.25, *а*).

Так как толщина ленты h невелика и спираль, следовательно, имеет небольшой шаг, можно считать, что полярный радиус равен радиусу кривизны: $r_п \approx r$. Тогда из уравнения (10.13) получаем величину изгибающего момента при навивке:

$$M = \frac{1}{4}bh^2\sigma_т - \frac{1}{3}b\frac{\sigma_т^3}{E^2}\left(\frac{d}{2}+\frac{h}{2\pi}\varphi\right)^2.$$

Подставляя далее M в уравнение (10.17), находим

$$\frac{1}{r_{ост}} = \frac{1}{r_п} = \frac{1}{\frac{d}{2}+\frac{h}{2\pi}\varphi} - 3\frac{\sigma_т}{Eh} + 4\left(\frac{\sigma_т}{Eh}\right)^3\left(\frac{d}{2}+\frac{h}{2\pi}\varphi\right)^2.$$

Это выражение и представляет собой искомое уравнение спирали.

С увеличением угла φ остаточная кривизна уменьшается. При некотором φ она может оказаться равной нулю. Это значит, что в этом сечении и на остальном внешнем участке ленты пластические деформации при навивке не образуются, и лента остается прямой.

10.4. Кручение стержня круглого поперечного сечения при наличии пластических деформаций

Для исследования деформации стержня в условиях упругопластического кручения необходимо располагать диаграммой сдвига материала, т. е. зависимостью угла сдвига γ от напряжения τ (рис. 10.26). Будем считать, что такая диаграмма у нас имеется. Она может быть получена путем испытания на кручение тонкостенных трубок. В дальнейшем мы покажем, что эта диаграмма может быть определена путем перестройки обычной диаграммы растяжения $\sigma = f(\varepsilon)$.

Принимая, как и при обычном кручении, гипотезу плоских сечений, получим

$$\gamma = r\theta \qquad (10.18)$$

(см. формулу (2.5)). Крутящий момент в сечении

$$M_к = 2\pi\int_0^R \tau r^2 dr.$$

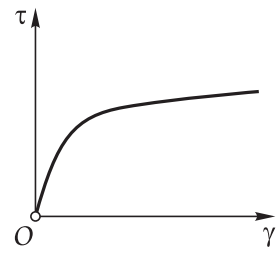


Рис. 10.26

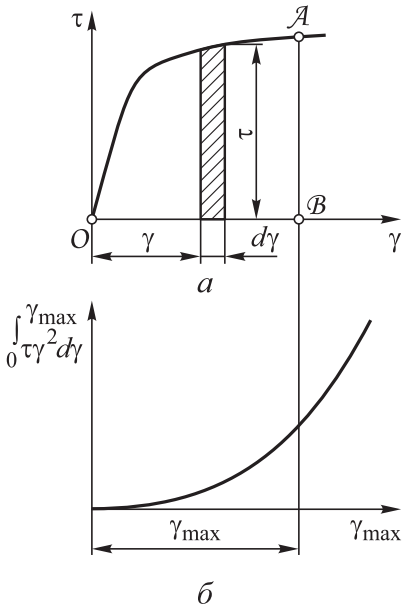


Рис. 10.27

Введем в это выражение взамен радиуса r угол сдвига γ согласно (10.18). Тогда

$$M_к = \frac{2\pi}{\theta^3} \int_0^{\gamma_{max}} \tau\gamma^2 d\gamma, \qquad (10.19)$$

где

$$\gamma_{max} = R\theta. \qquad (10.20)$$

Интеграл в выражении (10.19) представляет собой не что иное, как момент инерции криволинейного треугольника OAB (рис. 10.27, *а*) относительно оси τ. Для заданной диаграммы он может быть заранее определен как функция γ_{max} (рис. 10.27, *б*).

Теперь легко по точкам построить зависимость удельного угла закручивания θ от момента $M_к$.

Задаваясь значением θ, определяем, согласно выражению (10.20), γ_{max}, а затем с помощью графика значение интеграла $\int_0^{\gamma_{max}} \tau\gamma^2 d\gamma$. Затем по формуле (10.19) находим $M_к$. Таким образом определяется одна точка зависимости θ от $M_к$. Повторяя эту операцию несколько раз, получаем полную кривую $\theta = f(M_к)$. При малых значениях момента, когда кривую

$$\int_0^{\gamma_{max}} \tau\gamma^2 d\gamma = f(\gamma_{max})$$

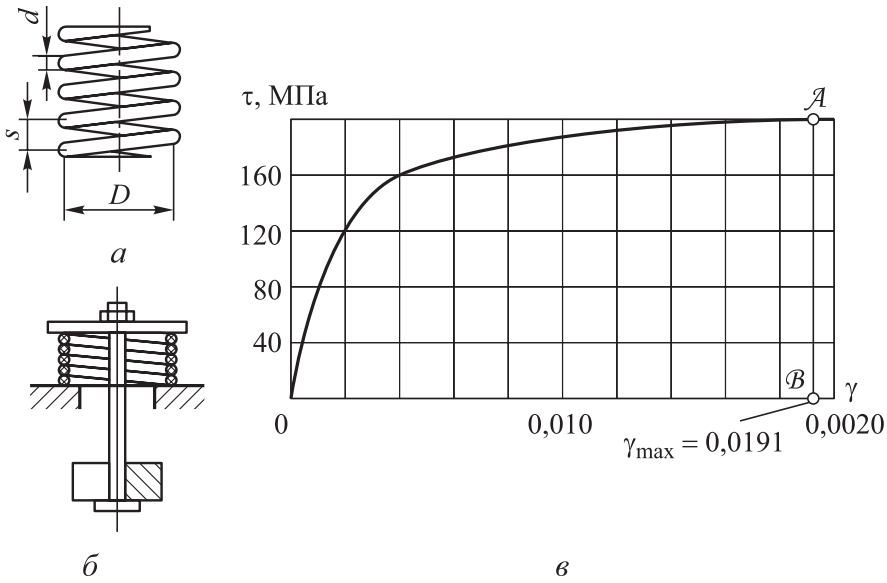
нельзя построить точно, следует воспользоваться обычной линейной зависимостью в пределах закона Гука:

$$\theta = \frac{M_к}{GJ_p}. \qquad (10.21)$$

Все последующие операции по определению закона распределения напряжений в поперечном сечении стержня, а также по нахождению остаточных напряжений и остаточных углов совершенно аналогичны тем, которые были рассмотрены в предыдущем пара-

графе для изгиба стержня. Поэтому здесь эти операции повторять не будем, а проиллюстрируем их на конкретном примере.

Пример 10.6. Витая цилиндрическая пружина (рис. 10.28, *а*) сжимается до полной посадки витков (рис. 10.28, *б*). Требуется определить шаг пружины после разгрузки, если до нагрузки он был равен $s = 10$ мм. Размеры пружины следующие: $D = 20$ мм, $d = 4$ мм. Модуль сдвига $G = 0{,}77 \cdot 10^5$ МПа. Диаграмма сдвига материала задана кривой, показанной на рис. 10.28, *в*.



а *б* *в*

Рис. 10.28

Осадка пружины на один виток $\lambda_1 = s - d$. Но $\lambda_1 = \dfrac{D}{2}\theta l$, где l — длина витка, равная πD. Таким образом,

$$s - d = \frac{\pi}{2} D^2 \theta. \qquad (10.22)$$

Отсюда определяем удельный угол закручивания θ, который возникает в проволоке при посадке витков: $\theta = 0{,}00955$ мм$^{-1}$.

Находим, далее, $\gamma_{max} = \dfrac{d}{2}\theta = 0{,}0191$. Откладываем величину γ_{max} на диаграмме сдвига (см. рис. 10.28, *в*) и путем разбиения на площадки определяем момент инерции треугольника OAB относительно оси τ. В результате подсчетов получаем

$$\int_0^{\gamma_{max}} \tau \gamma^2 d\gamma = 0{,}455 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}.$$

По формуле (10.19) находим крутящий момент

$$M_{\text{к}} = \frac{2\pi \cdot 0{,}455 \cdot 10^{-3}}{0{,}00955^3} = 3280 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

По формуле (10.21) определяем угол закручивания при упругих деформациях:

$$\theta = \frac{328}{7700\pi \cdot 4^4/32} = 0{,}00170 \text{ мм}^{-1}.$$

Теперь, согласно выражению (10.22), находим упругую «отдачу» пружины после разгрузки:

$$s_{\text{ост}} - d = \frac{\pi}{2} 20^2 \cdot 0{,}00170 = 1{,}07 \text{ мм}.$$

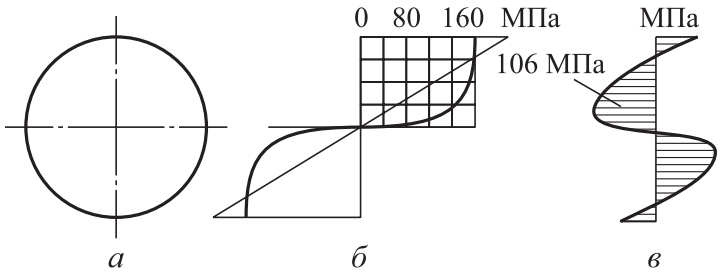


Рис. 10.29

Искомый шаг пружины $s_{\text{ост}} = 1{,}07 + 4 = 5{,}07$ мм.

Для полноты картины определим закон распределения остаточных напряжений в поперечном сечении пружины (рис. 10.29, *а*). Для этого построим сначала эпюру напряжений при нагрузке. Согласно выражению (10.18), угол сдвига на расстоянии r от центра круга $\gamma = 0{,}00955\, r$. Задаваясь несколькими значениями r, по точкам определяем напряжение τ и строим эпюру, показанную на рис. 10.29, *б*. Из нее вычитаем напряжения, определенные по формуле упругой разгрузки, $\tau = \dfrac{M_{\text{к}} r}{J_p} = 13{,}0\, r$.

Разность между напряжениями нагрузки и разгрузки дает величину остаточных напряжений (рис. 10.29, *в*).

10.5. Основы расчета по предельным нагрузкам

При расчетах конструкций на прочность наиболее широко распространенным является метод расчета по напряжениям. Однако, как уже говорилось, этот метод не является единственным. В ряде случаев более предпочтительно ведение расчета по разрушающим или предельным нагрузкам, от которых рабочие нагрузки составляют некоторую часть.

Отношение предельной нагрузки к рабочей называется коэффициентом запаса по предельным нагрузкам. Его назначают, как правило, в зависимости от особенностей проектируемой конструкции.

На примере рассмотренных в настоящей главе задач мы уже имели возможность познакомиться с понятием предельной нагрузки. Так, для системы, состоящей из трех стержней (см. рис. 10.11), она оказалась равной

$$F_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}} A(1 + 2\cos\alpha),$$

а для стержня прямоугольного сечения предельный изгибающий момент

$$M_{\text{пред}} = \frac{1}{4}\sigma_{\text{т}} bh^2.$$

Обобщая полученные результаты, следует отметить, что под предельной понимается нагрузка, по достижении которой исчерпывается способность системы воспринимать дальнейшее ее возрастание, или нагрузка, при которой возникают столь заметные изменения геометрических размеров системы, что последняя перестает удовлетворять своему назначению.

Усвоить приемы определения предельных нагрузок проще всего путем решения конкретных задач. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10.7. Определить разрушающую нагрузку для трехстержневой системы (рис. 10.30) при условии, что диаграмма растяжения для стержней имеет участок упрочнения и разрушение происходит при напряжении $\sigma_{\text{в}}$ (см. рис. 10.30).

Уравнение упругого участка диаграммы имеет вид $\sigma = E\varepsilon$. Для участка упрочнения $\sigma - \sigma_{\text{т}} = D(\varepsilon - \varepsilon_{\text{т}})$.

За разрушающую примем ту нагрузку, при которой разорвется средний стержень. Это произойдет тогда, когда удлинение ε_2 станет равно $\varepsilon_{\text{в}}$. Определим, какое удлинение ε_1 будет иметь при этом каждый из боковых стержней: $\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha$. Учитывая, что $l_1 = l/\cos\varphi$, получим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \cos^2\alpha$.

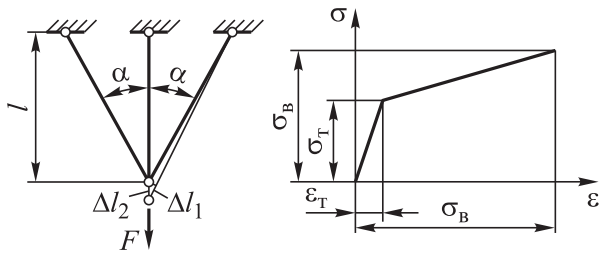


Рис. 10.30

Таким образом, к моменту разрыва среднего стержня боковые будут иметь удлинения $\varepsilon_1 = \varepsilon_в \cos^2\alpha$. Напряжения при этом будут: в среднем стержне $\sigma_в$, а в боковых — либо $\sigma_1 = \sigma_т + D(\varepsilon_в \cos^2\alpha - \varepsilon_т)$, если $\varepsilon_в \cos^2\alpha > \varepsilon_т$, либо же $\sigma_1 = E\varepsilon_в \cos^2\alpha$, если $\varepsilon_в \cos^2\alpha < \varepsilon_т$.

Предельная нагрузка $F_{пред} = \sigma_в A + 2\sigma_1 A \cos\alpha$. Подставляя σ_1, находим

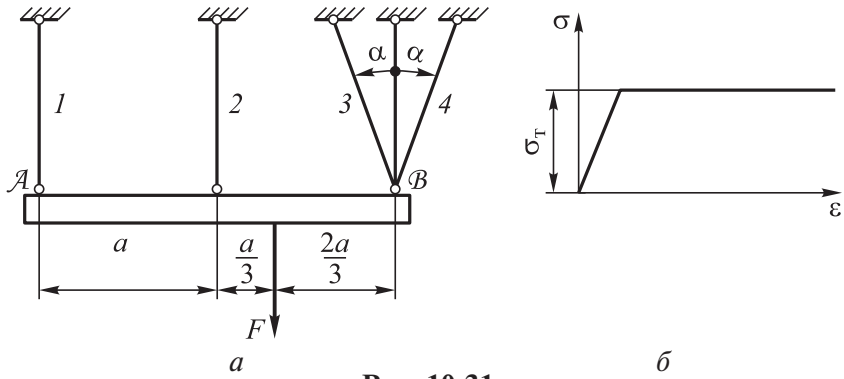
$$F_{пред} = \sigma_в A + 2\sigma_т A \cos\alpha + 2AD(\varepsilon_в \cos^2\alpha - \varepsilon_т)\cos\alpha$$

при $\varepsilon_в \cos^2\alpha > \varepsilon_т$ или

$$F_{пред} = \sigma_в A + 2EA\varepsilon_в \cos^3\alpha$$

при $\varepsilon_в \cos^2\alpha < \varepsilon_т$.

Пример 10.8. Определить предельную нагрузку для системы, показанной на рис. 10.31, *а*. Балка предполагается жесткой, а стержни имеют одинаковое поперечное сечение и выполнены из одного и того же материала, диаграмма растяжения которого дана на рис. 10.31, *б*.



а *б*

Рис. 10.31

Если постепенно увеличивать силу F, то усилия в стержнях будут увеличиваться. При некотором значении силы F в стержне *1* или же в стержнях *3* и *4* напряжение станет равно $\sigma_т$. Однако эта сила еще не будет предельной. Предельной является та, при которой заметные пластические деформации возникнут и в стержне *2*. Тогда система превратится в механизм и балка как жесткое целое повернется относительно точки A или B (относительно какой — это будет выяснено в дальнейшем).

Положим сначала, что предел текучести достигнут в стержнях *1* и *2*. Тогда, взяв сумму моментов всех сил относительно точки $\mathcal{B}$ (рис. 10.32, *а*), определяем предельную нагрузку. В этом случае

$$\sigma_т A \cdot 2a + \sigma_т Aa = F_{пред} \frac{2}{3} a,$$

откуда

$$F_{пред} = \frac{9}{2} \sigma_т A.$$

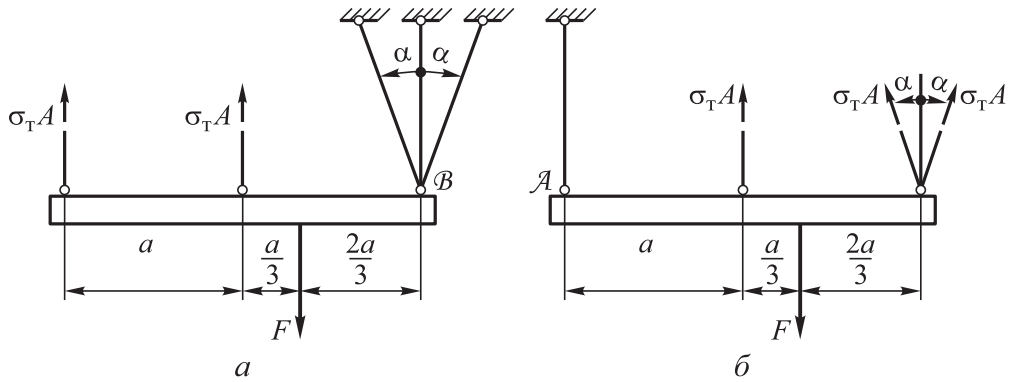


Рис. 10.32

Допустим теперь, что предел текучести достигнут в стержнях *2*, *3* и *4*. Определяем сумму моментов относительно точки $\mathcal{A}$ (рис. 10.32, *б*):

$$\sigma_т A \cdot 4a \cos\alpha + \sigma_т Aa = F_{пред} \frac{4}{3} a,$$

откуда

$$F_{пред} = \frac{3}{4} \sigma_т A(1 + 4\cos\alpha).$$

Из двух полученных значений $F_{пред}$ выбираем меньшее. При любых углах α меньшим будет второе значение $F_{пред}$.

Пример 10.9. Определить предельную нагрузку для балки, показанной на рис. 10.33. Поперечное сечение — прямоугольное. Диаграмма растяжения имеет участок с идеальной пластичностью.

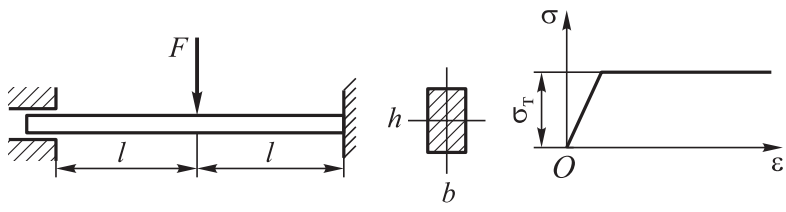


Рис. 10.33

Для решения задач такого типа следует ввести понятие *пластического шарнира*.

Рассмотрим процесс распространения зоны пластических деформаций в стержне при увеличении нагрузки. Пластические деформации появятся сначала в точках, расположенных у верхней и нижней поверхностей в наиболее напряженных сечениях. Зоны пластических деформаций (при некотором значении силы F) на рис. 10.34 заштри-

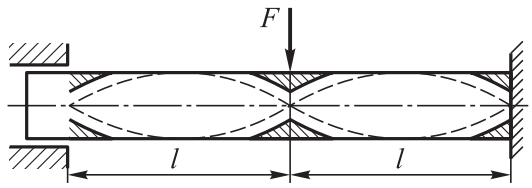


Рис. 10.34

хованы. По мере роста нагрузки эти зоны расширяются. В качестве предельного можно рассматривать случай, когда в некотором сечении, где имеет место наибольший изгибающий момент, эти зоны сомкнутся, как это показано пунктиром на рис. 10.34. Все сечение будет охвачено тогда пластической деформацией, и изгибающий момент в нем достигнет предельного значения $M_{\text{пред}}$. Как уже было установлено в 10.3, для прямоугольного сечения

$$M_{\text{пред}} = \frac{1}{4}\sigma_{\text{т}} bh^2.$$

Изгибающий момент не может стать больше предельного. Сечение, в котором возник предельный момент, можно уподобить шарниру с постоянным моментом трения. Такой шарнир носит название *пластического шарнира*. Очевидно, если в балке или раме возникнет несколько шарниров, система может стать механизмом.

Возвращаясь к рассматриваемой балке, обнаруживаем, что ее предельное состояние характеризуется возникновением трех пластических шарниров (рис. 10.35).

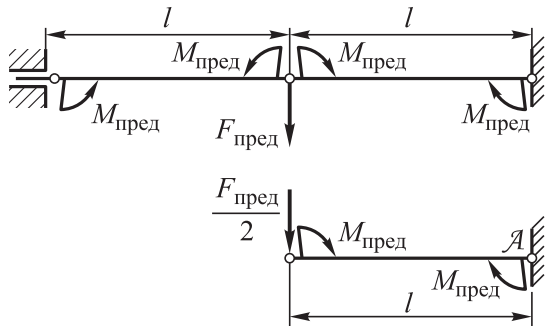


Рис. 10.35

Из условия равновесия половины балки находим

$$F_{\text{пред}} = \frac{4M_{\text{пред}}}{l}, \tag{10.23}$$

или

$$F_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}} \frac{bh^2}{l}.$$

В дополнение к рассмотренному примеру на рис. 10.36 показано несколько статически неопределимых систем и соответствующих им шарнирных механизмов.

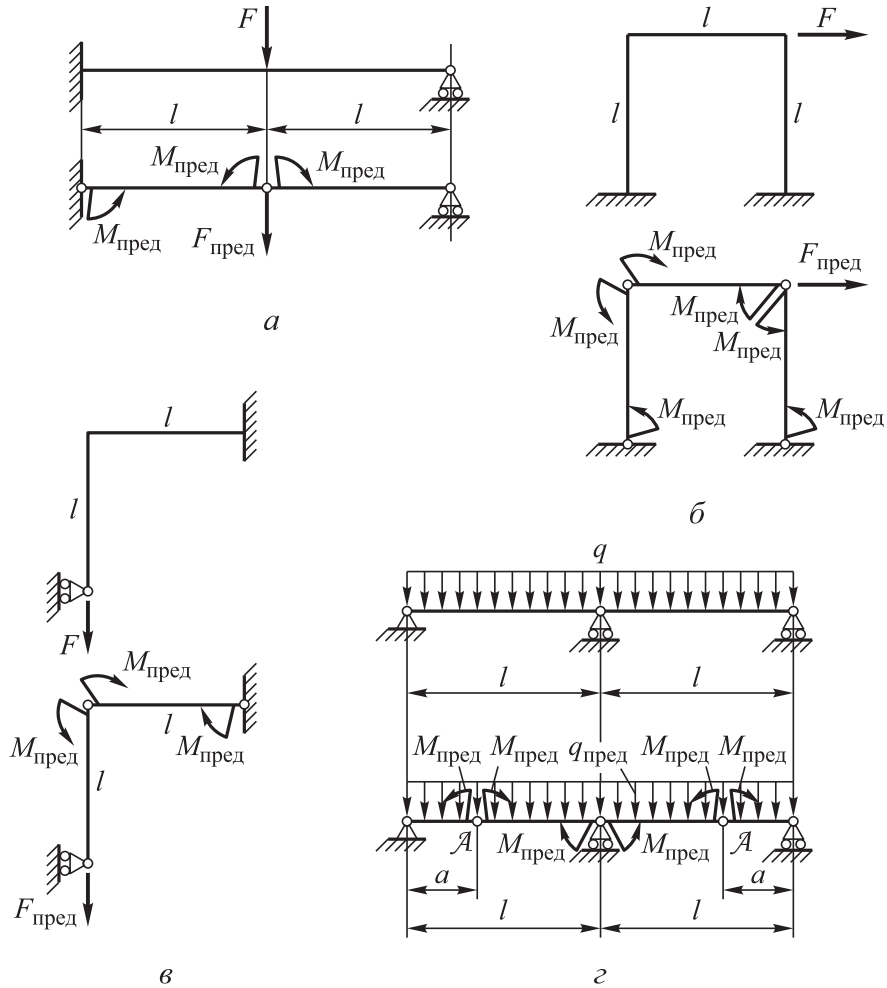


Рис. 10.36

Для систем, показанных на рис. 10.36, *а*—*г*, соответственно имеем

$$F_{\text{пред}} = 3M_{\text{пред}}/l; \quad F_{\text{пред}} = 4M_{\text{пред}}/l; \quad F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пред}}/l;$$

$$q_{\text{пред}} = \frac{2M_{\text{пред}}}{la} \frac{l+a}{l-a}.$$

Для системы на рис. 10.36, *г* расстояние *a* подбираем из условия максимума изгибающего момента в шарнирах *А*. Полагая, что на расстоянии *a* от опор поперечная сила *Q* равна нулю, находим

$$a = l(\sqrt{2} - 1); \quad q_{\text{пред}} = \frac{2M_{\text{пред}}}{l^2}(\sqrt{2} + 1)^2.$$

При изменении формы поперечного сечения в полученных выражениях меняется только $M_{\text{пред}}$.

Пример 10.10. Определить $M_{\text{пред}}$ для круглого и треугольного поперечных сечений.

В обоих случаях зона пластичности охватывает все сечение (рис. 10.37), и предельный момент представляет собой момент сил, выражающихся через постоянное напряжение $\sigma_т$.

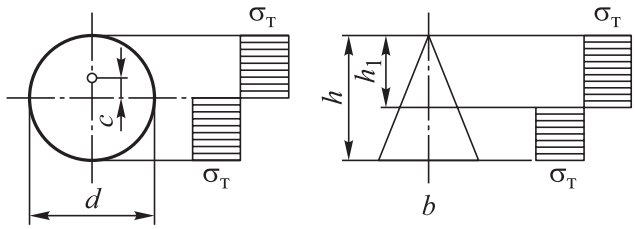


Рис. 10.37

Для круга $M_{\text{пред}} = 2\sigma_т \frac{\pi d^2}{8} c$. Так как $c = \frac{2d}{3\pi}$, то $M_{\text{пред}} = \frac{\sigma_т d^3}{6}$.

Для треугольного сечения сначала необходимо найти положение оси раздела, т. е. высоту h_1. Ее определяют из условия равенства нулю нормальной силы в сечении или равенства площадей верхней растянутой и нижней сжатой зон.

Предельный момент равен сумме моментов сил в обеих зонах:

$$M_{\text{пред}} = \frac{1}{3}\sigma_т bh^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

10.6. Начала теории пластичности

До сих пор мы имели дело с простейшими видами напряженных состояний. Мы рассматривали либо одноосное растяжение или сжатие, либо чистый сдвиг. При этом характеристика материала для соответствующего напряженного состояния считалась заданной, и в этих условиях решение задачи не встречало принципиальных трудностей.

Если перейти к более сложным задачам, то прежде всего возникает вопрос, как при других напряженных состояниях связать аналитически напряжения и деформации, а главное, как по результатам испытания образца на растяжение перейти к зависимостям сложного напряженного состояния.

В пределах упругих деформаций этот вопрос решить сравнительно просто.

При растяжении справедлив закон Гука в простейшей форме:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Для сложного напряженного состояния имеем линейные соотношения обобщенного закона Гука:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G};\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.
\end{aligned} \tag{10.24}$$

Условия перехода из упругого состояния в пластическое могут быть определены по критерию пластичности. Как мы уже знаем, в настоящее время имеется несколько критериев перехода из упругого состояния в пластическое. Наиболее приемлемыми являются: теория Мора, вытекающая из нее в частном случае гипотеза максимальных касательных напряжений и гипотеза энергии формоизменения. Наиболее удобной для нахождения соотношений пластичности является последняя. По этой гипотезе переход из упругого состояния в пластическое происходит тогда, когда величина

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)}, \tag{10.25}$$

называемая *интенсивностью напряжений*, достигает предела текучести.

В упругом состоянии величина σ_i может быть выражена при помощи соотношений (10.24) через деформации. Тогда после преобразований

$$\sigma_i = E\frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)}.$$

Обозначим

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2)} \quad (10.26)$$

и будем называть эту величину *интенсивностью деформаций*.

Для упругого состояния справедливо следующее соотношение:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i. \quad (10.27)$$

Это выражение можно рассматривать как одну из форм обобщенного закона Гука.

Теперь надо решить, как будет выражаться связь между компонентами напряжений и деформаций в пластическом состоянии. Определение этих соотношений и решение на их основе ряда задач механики сплошных сред составляют содержание теории пластичности.

Зависимости между компонентами напряжений и деформаций в зоне пластичности должны быть, очевидно, построены так, чтобы при упругих деформациях искомые соотношения переходили в соотношения (10.24). Но этого мало. Нужно, чтобы из тех же выражений как следствие вытекал принятый ранее критерий пластичности, т. е. в данном случае критерий энергии формоизменения. Тогда искомые соотношения пластичности будут представлять собой логическое расширение установленных ранее закономерностей.

Для законов пластичности удобно избрать ту же форму написания, что и для законов упругости. Так, вместо того чтобы писать $\sigma = f(\varepsilon)$, где $f(\varepsilon)$ есть функция, заданная графически диаграммой растяжения, можно записать

$$\sigma = E'\varepsilon, \quad (10.28)$$

где E' рассматривается как функция деформации ε. Из диаграммы растяжения (рис. 10.38) видно, что $E' = \sigma/\varepsilon$. При упругих деформациях $\varphi' = \varphi$, $E' = E$ (см. рис. 10.38).

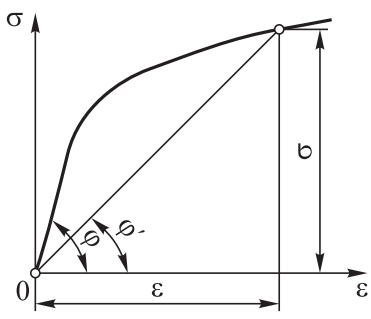


Рис. 10.38

При переходе к сложному напряженному состоянию весьма заманчиво выглядит перспектива обобщить таким же образом и соотношение (10.27), приняв

$$\sigma_i = E'\varepsilon_i, \quad (10.29)$$

где E' снова рассматривается как переменная величина, а соотношение (10.29) сохраняется единым для всех видов напряженного состояния.

При упругих деформациях выражение (10.29) принимает вид (10.27). Переход же упругого состояния в пластическое характеризуется равенством $\sigma_i = \sigma_т$.

Согласно выражению (10.25), мы приходим, таким образом, к гипотезе энергии формоизменения. Многочисленные эксперименты, поставленные для проверки высказанного предложения, показали, что оно является правильным для весьма широкого класса задач.

Таким образом, было установлено, что вид функции (10.29) определяется в основном свойствами материала и почти не зависит от типа напряженного состояния. Это положение является первым (исходным) положением теории пластичности.

Вторым положением теории пластичности является условие, что изменение объема

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

остается чисто упругим. Это хорошо согласуется с экспериментами. При всех достижимых для современной техники давлениях не удалось с помощью всестороннего сжатия вызвать в материале пластические деформации.

При деформировании материала пластические деформации, как правило, заметно больше упругих. Так как e является величиной того же порядка, что и упругие удлинения, то обычно принимают, что при пластическом деформировании объем меняется незначительно. Тогда при выводе формул, связывающих компоненты напряжений и деформаций в пластической зоне, принимают $\nu = 1/2$.

Теперь составим искомые соотношения. Прежде всего отметим, что при одноосном растяжении, когда

$$\sigma_x = \sigma, \qquad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0,$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon, \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon, \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0,$$

интенсивность напряжений σ_i и интенсивность деформаций ε_i обращаются соответственно в σ и ε. Значит, выражение (10.29) переходит в (10.28), а это есть аналитическое выражение кривой обычной диаграммы растяжения. Но, согласно первому положению теории пластичности, называемому гипотезой единой кривой, зависимость (10.29) едина для всех напряженных состояний. Следовательно, она ничем не отличается от обычной зависимости,

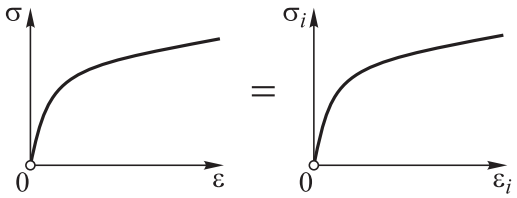


Рис. 10.39

задаваемой диаграммой растяжения. Надо только откладывать по осям не σ и ε, а σ_i и ε_i (рис. 10.39). Тогда

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},$$

т. е. мы получаем величину переменного модуля.

Теперь аналогично выражениям (10.24) выписываем соотношения пластичности:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{yz};\\
\varepsilon_y &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right], \quad \gamma_{zx} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{zx};\\
\varepsilon_z &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy},
\end{aligned} \tag{10.30}$$

где $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ с учетом того, что $\nu = 1/2$, т. е.

$$G' = \frac{1}{3}E' = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}.$$

Приведенные соотношения пластичности не являются совершенно точными и считаются верными по крайней мере для тех видов нагружения, при которых внешние силы в процессе нагружения возрастают пропорционально некоторому параметру, например времени. В этом случае, как можно показать, главные оси напряженного состояния при изменении внешних сил сохраняют свое направление. Такой вид деформации носит название *простой деформации*, а нагружение — *простого нагружения*.

Рассмотрим примеры решения некоторых задач, для которых необходимо применение аппарата теории пластичности.

Пример 10.11. Дана диаграмма растяжения $\sigma = f(\varepsilon)$. Построить соответствующую ей диаграмму сдвига $\tau = f(\gamma)$.

Диаграмму сдвига можно получить либо из прямого испытания на кручение, либо же перестройкой диаграммы растяжения при помощи соотношений пластичности.

Обратимся к формулам (10.25) и (10.26). Для растяжения $\sigma_i = \sigma$, а $\varepsilon_i = \varepsilon$. При сдвиге, полагая $\nu = 1/2$, находим $\sigma_i = \tau\sqrt{3}$, $\varepsilon_i = \gamma/\sqrt{3}$. Но зависимость $\sigma_i = f(\varepsilon)$ едина для всех напряженных состояний.

Поэтому зависимости $\sigma = f(\varepsilon)$ и $\tau = f(\gamma/\sqrt{3})$ одинаковы. Перестройка диаграммы заключается, следовательно, в простой замене σ на $\tau\sqrt{3}$, а ε — на $\gamma/\sqrt{3}$. Чтобы получить диаграмму сдвига, нужно в каждой точке диаграммы растяжения ординату уменьшить в $\sqrt{3}$ раз, а абсциссу во столько же раз увеличить (рис. 10.40).

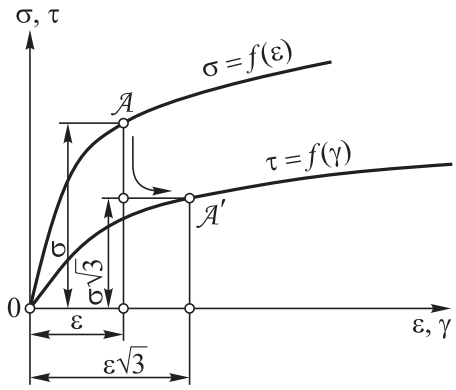


Рис. 10.40

Пример 10.12. Определить увеличение диаметра цилиндрического бака (рис. 10.41, *а*) в зависимости от давления p. Диаграмма растяжения материала задана (рис. 10.41, *б*); $D = 1800$ мм, $h = 10$ мм.

Осевое и окружное напряжения в стенках цилиндра равны

$$\sigma_x = \sigma_m = \frac{pD}{4h}, \quad \sigma_y = \sigma_t = \frac{pD}{2h}.$$

Согласно формулам (10.30),

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_m\right),$$

или $$\varepsilon_t = \frac{3}{8}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\frac{pD}{h}.$$

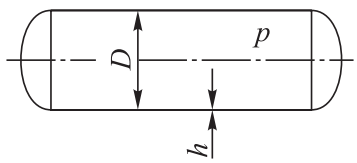
Увеличение диаметра

$$\Delta D = D\varepsilon_t = \frac{3}{8}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\frac{pD^2}{h}. \qquad (10.31)$$

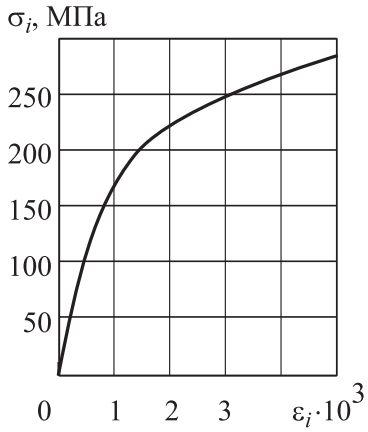
По формуле (10.25) находим

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_m^2 - \sigma_m\sigma_t + \sigma_t^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{pD}{h}.$$

Построим теперь зависимость ΔD от давления p. Задаваясь давлением p, находим σ_i, а по диаграмме испытания находим ε_i. Затем из выражения (10.31) определяем ΔD и по точкам строим искомую зависимость (рис. 10.42).



а



б

Рис. 10.41

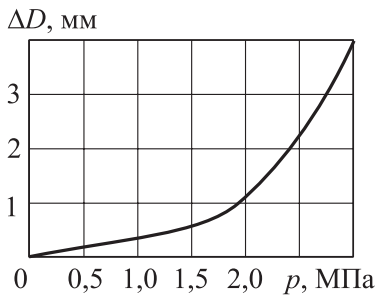


Рис. 10.42

Полученное решение справедливо в пределах небольших величин ΔD, пренебрежимо малых по сравнению с диаметром D. В противном случае в выражениях для σ_x и σ_y необходимо было бы учитывать изменение диаметра.

Пример 10.13. Для определения силы ударной волны, возникающей при взрыве, часто применяют тонкие свинцовые мембраны (рис. 10.43). Под действием давления мембрана получает остаточный

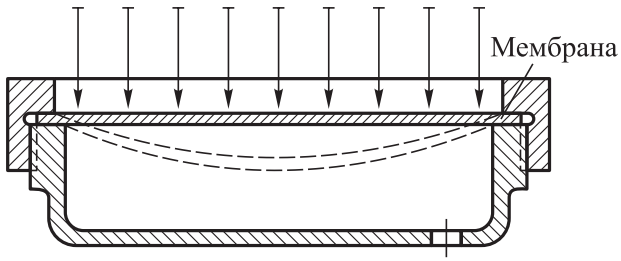


Рис. 10.43

прогиб, по величине которого и судят о силе волны. Требуется определить зависимость прогиба такой мембраны от давления.

Решим задачу приближенно, полагая, что напряжения распределены по толщине мембраны равномерно и что форма изогнутой мембраны близка к сферической поверхности. Такое предположение, не сказываясь сильно на количественных результатах, значительно упрощает решение.

Обозначим через r радиус кривизны сферической поверхности, а через α — половину центрального угла сегмента (рис. 10.44). Очевидно, $r = a/\sin\alpha$, или, вследствие малости α, $r \approx a/\alpha$, где a — радиус мембраны.

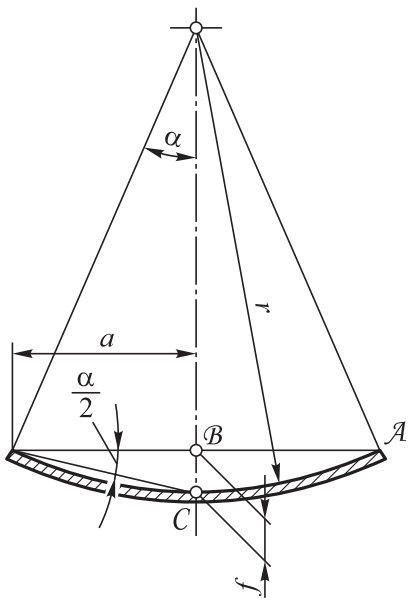


Рис. 10.44

Прогиб мембраны $f = a\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} \approx \dfrac{a\alpha}{2}$.

Окружные и осевые напряжения в мембране

$$\sigma_t = \sigma_m = \frac{pr}{2h} = \frac{pa^2}{4hf}. \qquad (10.32)$$

Наконец, удлинения в мембране можно определить по разности длины дуги AC и хорды AB:

$$\varepsilon = \frac{r\alpha - r\sin\alpha}{r\sin\alpha} \approx \frac{\alpha^2}{6} = \frac{2}{3}\frac{f^2}{a^2}. \qquad (10.33)$$

Теперь обратимся к соотношениям пластичности (10.30). Примем $\sigma_z = 0$, $\sigma_x = \sigma_m$, $\sigma_y = \sigma_r$. Тогда

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_m - \frac{1}{2}\sigma_t\right); \quad \varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_m\right),$$

откуда

$$\sigma_m = \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_m + \frac{1}{2}\varepsilon_t\right); \quad \sigma_t = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_m\right).$$

Подставляя σ_m и σ_t в третье выражение (10.30), находим $\varepsilon_z = -(\varepsilon_m + \varepsilon_t)$.

Подставляем ε_z в выражение интенсивности деформаций (10.26). Тогда $\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_m\varepsilon_t + \varepsilon_t^2}$. Но $\varepsilon_m = \varepsilon_t = \varepsilon$, поэтому $\varepsilon_i = 2\varepsilon$, или, согласно выражению (10.33),

$$\varepsilon_i = \frac{4}{3}\frac{f^2}{a^2}. \tag{10.34}$$

Наконец, выражение σ_i (10.25) с учетом того, что $\sigma_z = 0$, а $\sigma_m = \sigma_t$, приводим к виду

$$\sigma_i = \sigma_m = \frac{pa^2}{4hf}. \tag{10.35}$$

Порядок построения искомой зависимости выглядит следующим образом. Задаемся прогибом f. По формуле (10.34) находим ε_i. Далее, по диаграмме растяжения $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ определяем σ_i, а по формуле (10.35) находим давление p, соответствующее принятому прогибу. Так по точкам строим искомую зависимость.

Пример 10.14. Отожженную проволоку протягивают через коническое сужающееся отверстие (фильеру). В результате диаметр проволоки меняется с размера D_2 на D_1 (рис. 10.45). Пренебрегая трением и считая угол конусности малым, определить, во сколько раз при указанной схеме вытяжки можно уменьшить диаметр проволоки. Материал обладает свойством идеальной пластичности.

Обозначим через D текущий диаметр, а через p — контактное давление и составим уравнение равновесия для элемента проволоки длиной dz (рис. 10.46):

$$(\sigma + d\sigma)\frac{\pi}{4}(D + 2\alpha\, dz)^2 - \sigma\frac{\pi D^2}{4} + p\pi D\alpha\, dz = 0,$$

где α — половина угла при вершине конуса. После преобразований получим

$$\frac{d\sigma}{dz} + \frac{4\alpha}{D}(\sigma + p) = 0.$$

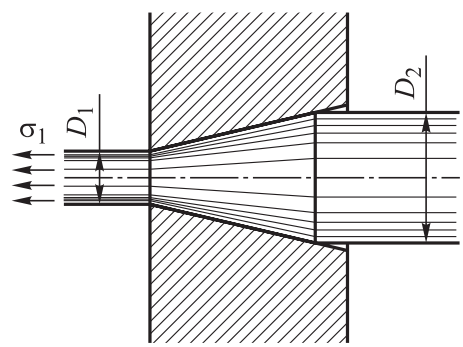


Рис. 10.45

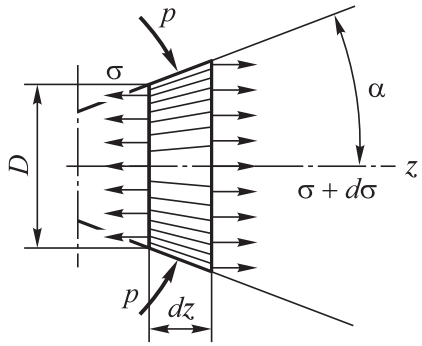


Рис. 10.46

Так как материал обладает идеальной пластичностью, то интенсивность напряженного состояния σ_i постоянна и равна $\sigma_т$. Но в данном случае $\sigma_z = \sigma$, $\sigma_x = \sigma_y = -p$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Поэтому, согласно выражению (10.25), получаем $\sigma + p = \sigma_т$, а так как $D = D_1 + 2\alpha z$, то уравнение равновесия примет вид

$$\frac{d\sigma}{dz} = -\frac{4\alpha\sigma_т}{D_1 + 2\alpha z}.$$

Интегрируя, получим

$$\sigma = -2\sigma_т [\ln(D_1 + 2\alpha z) - \ln C].$$

Постоянную C подбираем из условия, что при входе в фильеру, т. е. при $D = D_2$, напряжение $\sigma = 0$. Тогда получим

$$\sigma = 2\sigma_т \ln \frac{D_2}{D}.$$

Напряжение на вытягиваемом участке

$$\sigma_1 = 2\sigma_т \ln \frac{D_2}{D_1}.$$

Но σ_1 не может быть больше $\sigma_т$, иначе этот участок будет продолжать удлиняться и сужаться, поэтому

$$\frac{D_2}{D_1} < \sqrt{e} = 1{,}65.$$

Естественно, что упрочнение материала и учет сил трения могут заметно изменить эту оценку.

Глава 11

ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

11.1. Понятие об усталости материалов

Многие детали машин в процессе работы испытывают напряжения, циклически меняющиеся во времени. Например, детали кривошипно-шатунного механизма двигателя внутреннего сгорания (рис. 11.1) находятся под действием периодически меняющихся сил. Закон их изменения определяется видом индикаторной диаграммы и кинематическими особенностями механизма.

Ось вагона, вращающаяся вместе с колесами (рис. 11.2), также испытывает циклически изменяющиеся напряжения, хотя внешние силы остаются неизменными. Происходит это в результате того, что частицы вращающейся оси оказываются попеременно то в растянутой, то в сжатой зонах.

Для оси вагона на рис. 11.2 показана эпюра изгибающих моментов. В точке A (рис. 11.3, *а*) поперечного сечения имеем $\sigma = My/J_x$. Расстояние y от точки A до нейтральной оси меняется во времени по закону $y = \frac{D}{2}\sin\omega t$, где ω — угловая скорость вращения колеса. Следовательно,

$$\sigma(t) = \frac{FaD}{2J_x}\sin\omega t.$$

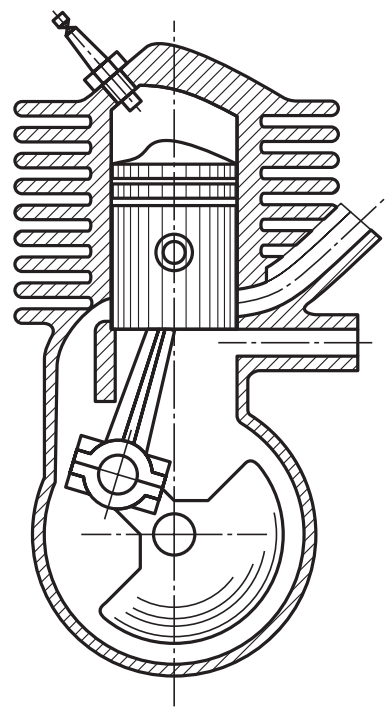


Рис. 11.1

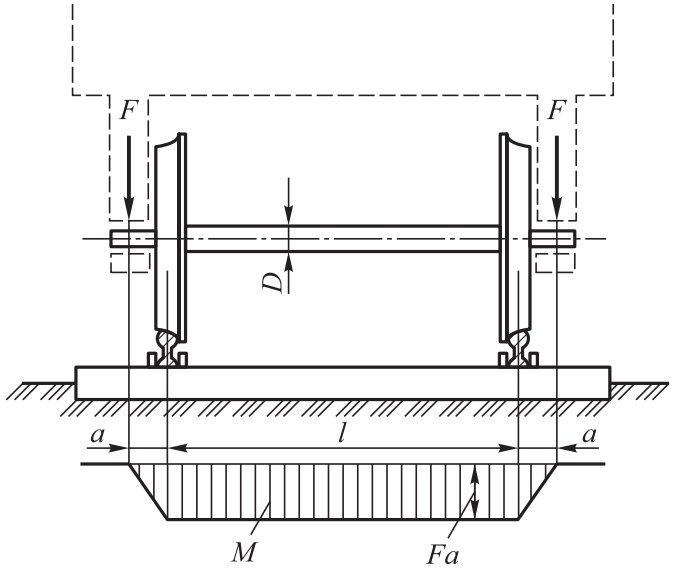


Рис. 11.2

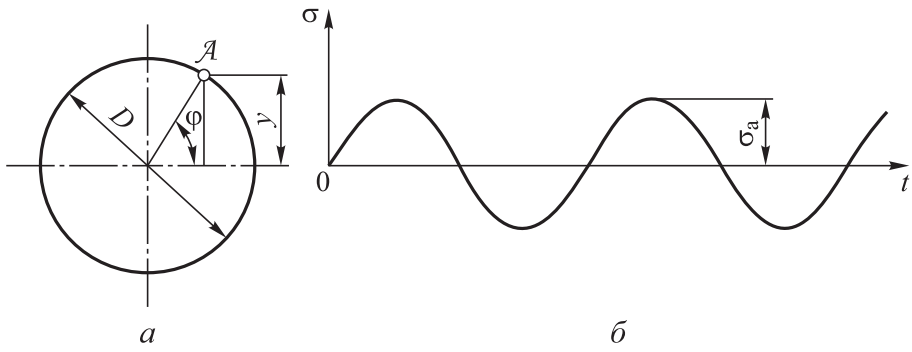


Рис. 11.3

Таким образом, нормальное напряжение в сечениях оси меняется (рис. 11.3, *б*) по синусоиде с амплитудой

$$\sigma_a = \frac{FaD}{2J_x}.$$

Опыт показывает, что при переменных напряжениях после некоторого числа циклов может наступить разрушение детали, в то время как при том же неизменном во времени напряжении разрушения не происходит.

Число циклов до момента разрушения зависит от σ_a и изменяется в весьма широких пределах. При больших напряжениях для раз-

рушения бывает достаточно 5–10 циклов. Это хорошо видно хотя бы на примере многократного изгиба куска проволоки (рис. 11.4). При меньших напряжениях деталь выдерживает миллионы и миллиарды циклов, а при еще меньших — способна работать неограниченно долго.

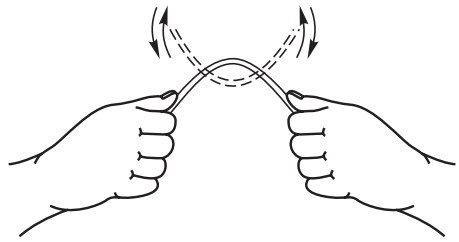


Рис. 11.4

После разрушения на поверхности излома детали обнаруживаются обычно две ярко выраженные зоны (рис. 11.5 и 11.6). В одной зоне кристаллы можно различать невооруженным глазом с большим трудом. Микроповерхность излома сглажена. В другой зоне явно выступают признаки свежего хрупкого разрушения, кристаллы имеют острую огранку и блестящую чистую поверхность.



Рис. 11.5

В целом создается впечатление, что подобного рода разрушение связано с изменением кристаллической структуры металла. Именно этим и объясняли в свое время разрушение при циклических напряжениях.

В настоящее время установлено, что структура металла при циклических нагрузках не меняется. Разрушению предшествует многократно сменяющаяся прямая и обратная пластическая де-

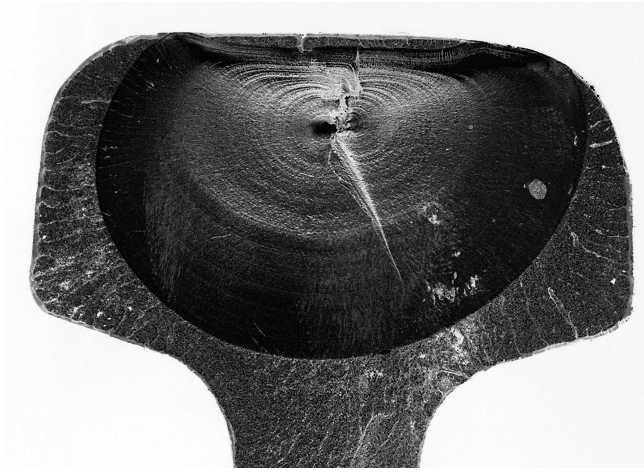


Рис. 11.6

формация в наиболее слабых плоскостях наименее удачно расположенных кристаллов. Это приводит к тому, что кристаллическое зерно, сохраняя в основном свою форму и связь с соседними зернами, постепенно разделяется на части полуразрушенными разрыхленными прослойками, имеющими определенную кристаллографическую ориентацию.

Из рис. 11.5 видно, что разрушение вала произошло в результате развития трещины, образовавшейся у края сечения. Разрушение рельса (см. рис. 11.6) обусловлено развитием трещины, образовавшейся внутри сечения в зоне местного порока. По характеру излома можно судить о направлении развития трещины. Обычно хорошо видны линии торможения («отдыха») трещины, связанные как с изменением режима работы детали, так и с особенностями структуры материала в сечении.

В настоящее время, однако, физические основы теории твердого тела не находятся еще на такой стадии развития, чтобы на их базе можно было создать методы расчета на выносливость. Поэтому приходится, сохраняя все предпосылки механики сплошной среды, идти по пути накопления экспериментальных фактов, из совокупности которых можно было бы выбрать подходящие правила как руководство для расчета. Объединение и систематика экспериментальных данных и представляют собой в настоящее время содержание теории сопротивления усталости.

11.2. Основные характеристики цикла и предел выносливости

Рассмотрим вначале случай одноосного напряженного состояния. Закон изменения главного напряжения σ во времени представлен кривой, показанной на рис. 11.7. Наибольшее и наименьшее

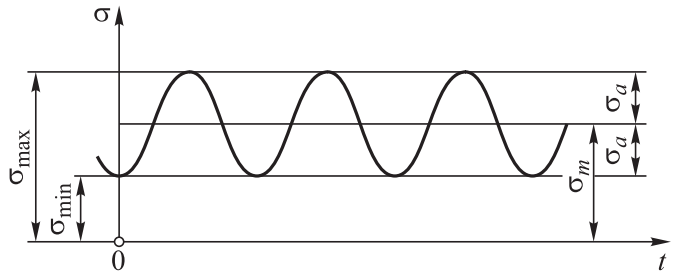
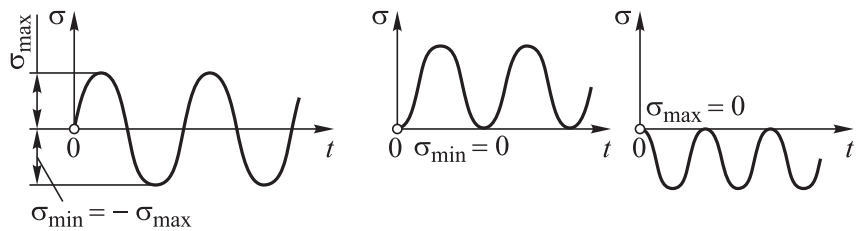


Рис. 11.7

напряжения цикла обозначим через σ_{max} и σ_{min}. Их отношение называется *коэффициентом асимметрии цикла*:

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = R_\sigma. \qquad (11.1)$$

В случае когда $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $R_\sigma = -1$, и цикл называется *симметричным*. С таким циклом, в частности, мы уже познакомились, рассматривая пример вращающейся оси вагона. Если $\sigma_{min} = 0$ или же $\sigma_{max} = 0$, цикл называется *пульсационным* (рис. 11.8). Для пульсационного цикла $R_\sigma = 0$ или $R_\sigma = -\infty$. Циклы, имеющие одинаковые показатели R_σ, называются *подобными*.



Симметричный цикл

Пульсационные циклы

Рис. 11.8

Любой цикл может быть представлен как результат наложения постоянного напряжения σ_m на напряжение, меняющееся по симметричному циклу с амплитудой σ_a (см. рис. 11.7). Очевидно, при этом

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}. \tag{11.2}$$

Процесс образования трещины при переменных напряжениях связан с накоплением пластических деформаций. Поэтому следует ожидать, что усталостное разрушение определяется только наибольшим и наименьшим напряжениями цикла и не зависит от закона изменения напряжений внутри интервала от σ_{max} до σ_{min}. Следовательно, циклы, показанные, например, на рис. 11.9,

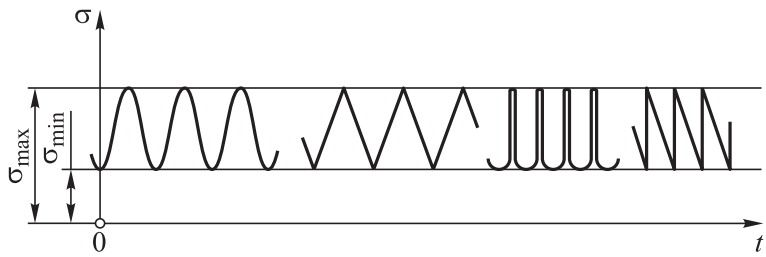


Рис. 11.9

являются равноценными. Точно так же, как показывают опыты, несущественным является влияние частоты изменения напряжений. Исключения представляют испытания при высоких температурах, а также при воздействии коррозионной среды. В этих условиях уменьшение частоты приводит к некоторому снижению сопротивления усталости. В итоге для оценки усталостного разрушения в условиях заданного цикла достаточно знать только σ_{max} и σ_{min} или σ_m и σ_a.

Теперь, в дополнение к уже известным нам механическим характеристикам материала, введем некоторые новые, связанные со спецификой циклического нагружения. Естественно, что эти характеристики могут быть определены только путем специально поставленных экспериментов.

Наиболее распространенными являются испытания в условиях симметричного цикла. При этом обычно используют принцип чистого изгиба вращающегося образца. На рис. 11.10 показана схема машины для испытания образцов при чистом изгибе. Образец *1* зажат во вращающихся цангах *2* и *3*. Усилие передается от груза, подвешенного на серьгах *4* и *5*. Счетчик *6* фиксирует число оборотов образца. Когда образец ломается, происходит автоматическое отключение двигателя *7* от контакта *8*.

Для проведения стандартных испытаний на усталость необходимо иметь не менее десятка одинаковых образцов с тем, чтобы

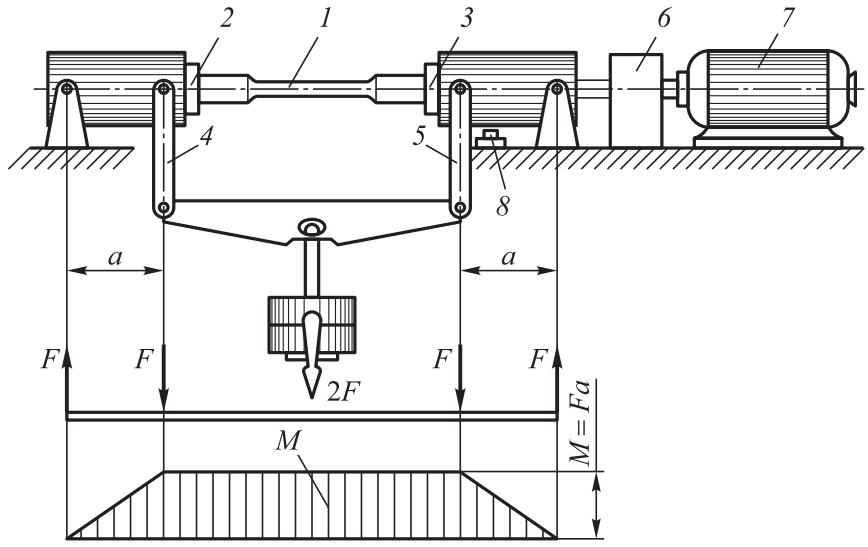


Рис. 11.10

можно было определить число циклов, которое выдержит образец до разрушения, в зависимости от заданного напряжения.

Техника определения этой зависимости не содержит принципиальных трудностей, но сам процесс оказывается достаточно длительным. Поэтому испытания ведут, как правило, одновременно на нескольких машинах.

Примерно половину партии образцов испытывают сначала при относительно высоких напряжениях, составляющих примерно 0,5...0,7 от предела прочности. При большем напряжении образец, естественно, выдерживает меньшее число циклов. Так как с уменьшением напряжения число циклов N растет очень быстро, то полученные точки зависимости $N = f(\sigma)$ удобно откладывать в полулогарифмической шкале (рис. 11.11). Спускаясь по оси ординат вниз, т. е. уменьшая от образца к образцу напряжение, мы обнаруживаем, что какая-то часть образцов, несмотря на длительность испытания, не проявляет склонности к разрушению. Значит, при каком-то числе циклов испытание образца необходимо прекратить.

Опыт испытания стальных образцов при нормальной температуре показывает, что если образец не разрушился до 10^7 циклов (это примерно 54 ч при 3000 об/мин), то он не разрушится и при более длительном испытании. Число циклов, до которого ведут испытание, называется *базой испытания*. Таким образом, для стальных образцов в обычных условиях база испытания равна десяти миллионам циклов.

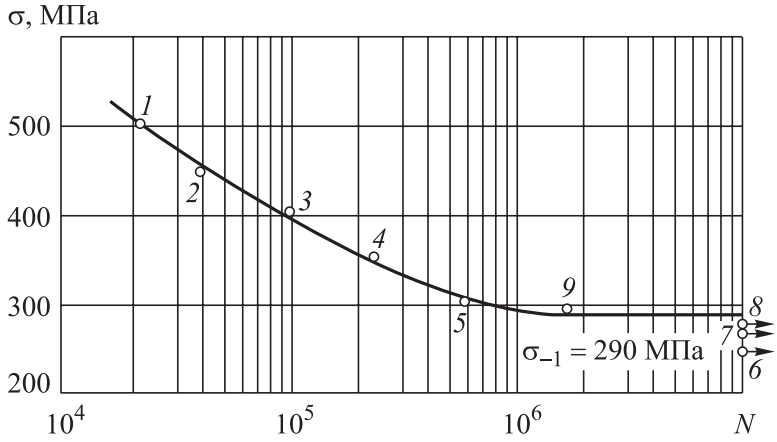


Рис. 11.11

Для цветных металлов и для закаленных до высокой твердости сталей не удается установить такое число циклов, выдержав которое, образец не разрушился бы в дальнейшем. Поэтому в подобных случаях базу испытаний увеличивают до 10^8 циклов.

Точки, соответствующие неразрушившимся образцам, откладывают в правой части графика против базового числа и отмечают стрелками (см. рис. 11.11). Оставшимся образцам испытуемой партии (образцы *7*, *8*, *9*) последовательно задают напряжения, лежащие в интервале между минимальным разрушающим напряжением и максимальным неразрушающим напряжением. В результате устанавливают то наибольшее значение максимального напряжения цикла, при котором образец не разрушается до базы испытания. Это напряжение называется *пределом выносливости*.

Предел выносливости обозначают через σ_R, где индекс R соответствует коэффициенту асимметрии цикла. Так, для симметричного цикла обозначение предела выносливости принимает вид σ_{-1}, для пульсационного — σ_0 и т. д.

Для расчета деталей, не предназначенных для длительного срока службы, а также при некоторых специальных расчетах вводят понятие *ограниченного предела выносливости* σ_{RN}, где под N понимают заданное число циклов, меньшее базового. Ограниченный предел выносливости легко определить по кривой усталостного испытания (см. рис. 11.11). Для данного материала, например, при $N = 10^5$ получаем $\sigma_{1N} = 400$ МПа.

Для испытаний на усталость характерен большой разброс экспериментально полученных точек, и для достоверного определения предела выносливости требуется испытание большого числа образцов с последующей статистической обработкой результатов,

что является трудоемкой операцией. Поэтому был сделан ряд попыток связать эмпирическими формулами предел выносливости с известными механическими характеристиками материала.

Обычно считается, что для сталей предел выносливости при изгибе составляет приблизительно половину предела прочности:

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}4 \ldots 0{,}5)\sigma_{в.р},$$

причем для углеродистых сталей он ближе к нижней границе, для легированных — к верхней. Для высокопрочных сталей можно принять

$$\sigma_{-1} \approx 400 + \frac{1}{6}\sigma_{в.р}.$$

Для цветных металлов предел выносливости изменяется в более широких пределах:

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}25 \ldots 0{,}5)\sigma_{в.р}.$$

Аналогично испытанию на чистый изгиб можно вести испытание на кручение в условиях циклически изменяющихся напряжений. Для обычных сталей в этом случае

$$\tau_{-1} \approx 0{,}6\sigma_{-1},$$

для хрупких материалов (высоколегированная сталь, чугун)

$$\tau_{-1} \approx 0{,}8\sigma_{-1}.$$

Композитные материалы по отношению к циклически изменяющимся напряжениям естественно обладают той же анизотропией, которая проявляется и при обычном нагружении. В тех случаях, когда усталостная трещина развивается поперек арматуры, композиты, как и следовало ожидать, проявляют высокое сопротивление усталости. Так, например, для углепластиков $\sigma_{-1} \approx 0{,}8\sigma_{в.р}$.

Приведенные выше соотношения и все им подобные следует применять с осмотрительностью, поскольку они получены только для определенных материалов и в определенных условиях испытания (при изгибе, при кручении). Предел выносливости, например, полученный в условиях циклического растяжения и сжатия, оказывается на 10…20 % ниже, чем предел выносливости, полученный при изгибе, а предел выносливости при кручении сплошных образцов отличается от предела выносливости, полученного для полых образцов.

В табл. 11.1 приводятся данные по пределу выносливости для некоторых материалов.

Таблица 11.1

Материал	$\sigma_{т.р}$, МПа	$\sigma_{в.р}$, МПа	σ_{-1}, МПа (изгиб)	τ_{-1}, МПа
Сталь низкоуглеродистая	180	320 — 420	160 — 220	80 — 120
Сталь 30 незакаленная	280	480 — 600	200 — 270	110 — 140
Сталь 45 незакаленная	340	600 — 750	250 — 340	150 — 200
Сталь 30ХГСА закаленная	1500	1700	700	400
Чугун серый	—	210	100	80
Алюминиевый сплав АМЦ (термообработанный)	35 — 176	100 — 190	49 — 70	—
Органическое стекло	—	75	20 — 25	—

Примечание. Представленный разброс экспериментальных данных объясняется обычными отступлениями параметров технологических режимов (плавки, прокатки, термообработки) от номинальных.

Мы рассмотрели испытания при симметричном цикле. Образцы в условиях несимметричных циклов испытывают обычно не на изгиб, а на растяжение — сжатие или на кручение специальными машинами — гидропульсаторами. Но не исключено также и применение простейших приспособлений. Так, можно на испытуемом образце установить пружину, создающую постоянное растяжение образца с напряжением σ_m (рис. 11.12). Во время испытания на это напряжение накладывается напряжение изгиба, меняющееся по симметричному циклу.

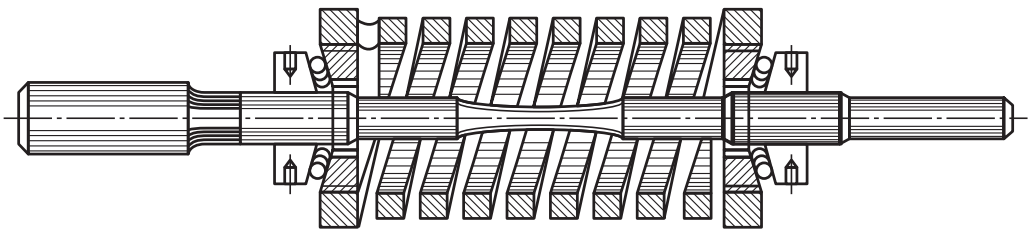


Рис. 11.12

Естественно, что введение дополнительного параметра (показателя асимметрии цикла) делает задачу экспериментатора более громоздкой, а для испытаний необходимо располагать уже не одним, а несколькими десятками одинаковых образцов. Образцы разбивают на группы, для каждой из которых при испытании фиксируют значение среднего напряжения цикла σ_m, а предельную амплиту-

ду σ_a определяют по базовому числу циклов, подобно тому как это делали для симметричного цикла. Кривая усталости (σ_a, $\lg N$) получается схожей с показанной на рис. 11.11, но, естественно, с другими числовыми значениями, зависящими от заданного σ_m.

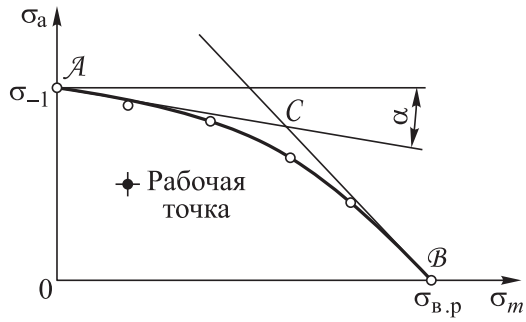


Рис. 11.13

В результате испытания группы образцов мы получаем предельное значение σ_a, соответствующее выбранному значению σ_m. Это дает одну точку на плоскости σ_m, σ_a (рис. 11.13). Проводя испытание следующей группы образцов, мы находим вторую точку. Действуя подобным образом и далее, получаем кривую предельных напряжений при асимметричном цикле (см. рис. 11.13). Она называется *диаграммой предельных амплитуд*.

Смысл ее очевиден. Положим, цикл характеризуется известными значениями σ_m и σ_a, которые можно рассматривать как координаты рабочей точки. Нанося эту точку на диаграмму (см. рис. 11.13), мы получаем возможность судить о прочности образца. Если рабочая точка располагается ниже кривой, то образец способен выдержать неограниченное число циклов или, во всяком случае, сохранит прочность до базового числа. Если же точка расположена выше кривой, то это означает, что разрушение произойдет при каком-то ограниченном числе циклов.

Так как построение диаграммы предельных амплитуд является достаточно трудоемким, то для целей расчета ее целесообразно схематизировать. Точка A диаграммы (см. рис. 11.13) отражает результат испытания образцов при симметричном цикле. Точка B для хрупких материалов ограничивает условия работы образца по пределу прочности. Левая часть диаграммы с более чем достаточной точностью может быть аппроксимирована прямой, проходящей через точку A и имеющей угловой коэффициент $\psi_\sigma = \operatorname{tg}\alpha$. Для построения этой прямой достаточно знать предел выносливости при симметричных циклах σ_{-1} и располагать либо еще одной точкой, например пределом выносливости при пульсационном цикле ($\sigma_m = \sigma_a$), либо величиной самого углового коэффициента ψ_σ. Значения последнего, как показала систематизация многочисленных опытов, лежат в пределах 0,1 ... 0,2 для углеродистых сталей и 0,2 ... 0,3 для легированных. Испытание образцов на кручение дает заметно меньшие значения углового коэффициента ψ_τ для тех же сталей: 0,05 ... 0,1 и 0,1 ... 0,15 соответственно.

Правая часть диаграммы аппроксимируется прямой, проходящей через точку $\mathcal{B}$ и составляющей угол 45° с координатными осями σ_m и σ_a, т. е.

$$\sigma_m + \sigma_a = \sigma_{в.р}.$$

Смысл этой прямой очевиден. Максимальное напряжение цикла $\sigma_m + \sigma_a$ не может превышать $\sigma_{в.р}$. Следовательно, при схематизации диаграмма предельных амплитуд заменяется двумя прямыми $\mathcal{A}C$ и $\mathcal{B}C$ (см. рис. 11.13).

Итак, построив диаграмму предельных амплитуд при асимметричных циклах, мы получили, казалось бы, основные данные для того, чтобы проводить расчеты на прочность любой детали, работающей в условиях циклически изменяющихся напряжений. Но это только так кажется. Главное — впереди. Циклическая прочность деталей в отличие от прочности образцов содержит в себе ряд специфических особенностей, к рассмотрению которых мы сейчас и перейдем.

11.3. Влияние концентрации напряжений на прочность при циклическом нагружении

Одним из основных факторов, которые необходимо учитывать при практических расчетах на циклическую прочность, является концентрация напряжений.

Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что в области резких изменений формы упругого тела (внутренние углы, отверстия, выточки), а также в зоне контакта деталей возникают повышенные напряжения. Например, при растяжении полосы с небольшим отверстием (рис. 11.14, *а*) закон равномерного распределения напряжений вблизи отверстия нарушается. Напряженное состояние становится двухосным, а у края отверстия появляется пик осевого напряжения. Аналогично при изгибе ступенчатого стержня (рис. 11.14, *б*) в зоне внутреннего угла возникает повышенное напряжение, которое зависит в первую очередь от радиуса закругления r. При прессовой посадке втулки на вал (рис. 11.14, *в*) у концов втулки и вала также возникают местные напряжения. Подобных примеров можно привести очень много. Описанная особенность распределения напряжений получила название *концентрации напряжений*. Зона распространения повышенных напряжений ограничена узкой областью, расположенной в окрестности очага концентрации, и в связи с локальным характером распространения эти напряжения называются *местными*.

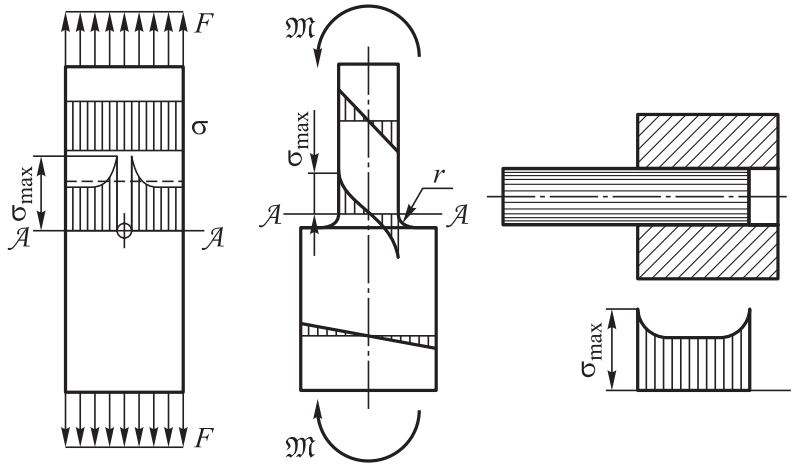


Рис. 11.14

Степень влияния местных напряжений на прочность детали существенным образом зависит от характера нагружения.

Проводя расчет конструкции, работающей в условиях обычного, нециклического нагружения, мы местными напряжениями, как правило, пренебрегаем. И к этому имеются основания. Даже незначительные проявления пластических свойств материала приводят к тому, что в зоне концентрации напряжений возникают необратимые деформации, не приводящие к образованию трещины, и даже если она и образуется, то конструкция в целом сохраняет свою несущую способность. Так, в частности для стержня, показанного на рис. 11.14, *а*, наличие отверстия не сказывается сколь-либо заметным образом на силе, при которой наступает разрыв.

Иначе обстоит дело при циклически изменяющихся напряжениях. Многократное изменение напряжений в зоне очага концентрации приводит к образованию и дальнейшему развитию трещины с последующим усталостным разрушением детали. Поэтому при циклическом нагружении явление концентрации требует особого внимания, что находит свое выражение прежде всего в тех мерах, которые применяются на практике при проектировании машин. Для деталей, работающих в условиях циклических напряжений, внешние обводы стремятся сделать возможно более плавными, радиусы закругления во внутренних углах увеличивают, необходимые отверстия располагают в зоне пониженных напряжений и т. д.

На рис. 11.15, *а* показана конструкция галтели с глубоким поднутрением, уменьшающим местные напряжения. Для увеличения радиуса галтели можно применять также проставочные кольца, как

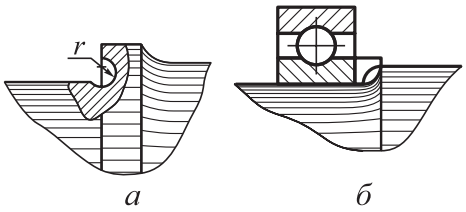


Рис. 11.15

это показано на рис. 11.15, *б*. Для снижения местных напряжений иногда практикуется введение разгрузочных канавок (рис. 11.16, *а*), наличие которых благотворно сказывается на усталостной прочности вала. Такого же рода разгрузочные канавки можно применять и в местах посадки (рис. 11.16, *б*).

Однако подобного рода приемы, используемые при проектировании ответственных деталей, могут только снизить вредное влия-

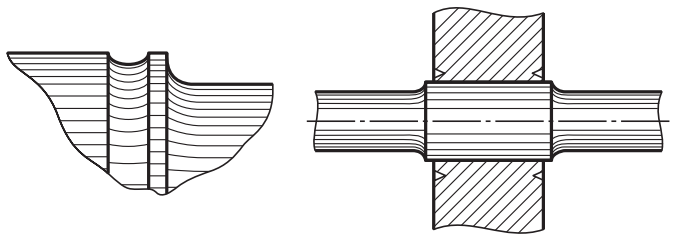


Рис. 11.16

ние местных напряжений, но не освобождают от него полностью. Поэтому, очевидно, необходимо выработать способы количественной оценки этого фактора с тем, чтобы иметь возможность учесть его при расчетах.

Местные напряжения в зависимости от геометрической формы детали определяют обычно при помощи методов теории упругости. Часто при определении местных напряжений проводят также испытание моделей. Обычно здесь применяют поляризационный метод (см. 14.4).

Основными показателями местных напряжений являются *теоретические коэффициенты концентрации напряжений*: для нормальных напряжений

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}}, \qquad (11.3)$$

а для касательных напряжений (кручение вала)

$$\alpha_\tau = \frac{\tau_{max}}{\tau_{ном}},$$

где σ_{max} и τ_{max} — наибольшие местные напряжения, $\sigma_{ном}$ и $\tau_{ном}$ — так называемые *номинальные напряжения*, которые определяются по простым формулам сопротивления материалов без учета эффекта концентрации. Обычно подсчет $\sigma_{ном}$ ведут по наиболее ослабленному сечению детали, например по сечению $А—А$ (см. рис. 11.14). В частности, для полосы с отверстием (см. рис. 11.14, *а*)

$$\sigma_{ном} = \frac{F}{A_{А-А}},$$

для случая изгиба ступенчатого стержня (рис. 11.14, *б*)

$$\sigma_{ном} = \frac{\mathfrak{M}}{W_{А-А}}.$$

Однако если при подобных подсчетах возникают трудности, за номинальное следует принимать напряжение в неослабленном сечении. Например, при кручении вала, имеющего поперечное отверстие (рис. 11.17), имеем

$$\tau_{ном} = \frac{M_к}{W_p},$$

где W_p — полярный момент сопротивления неослабленного сечения.

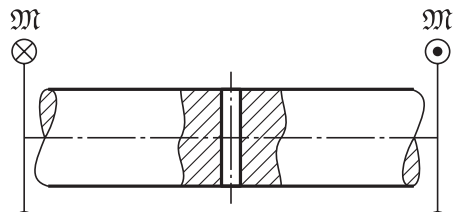
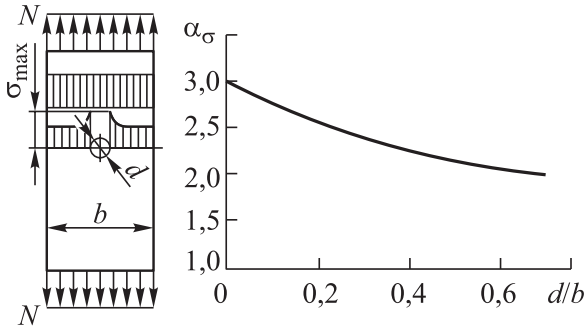


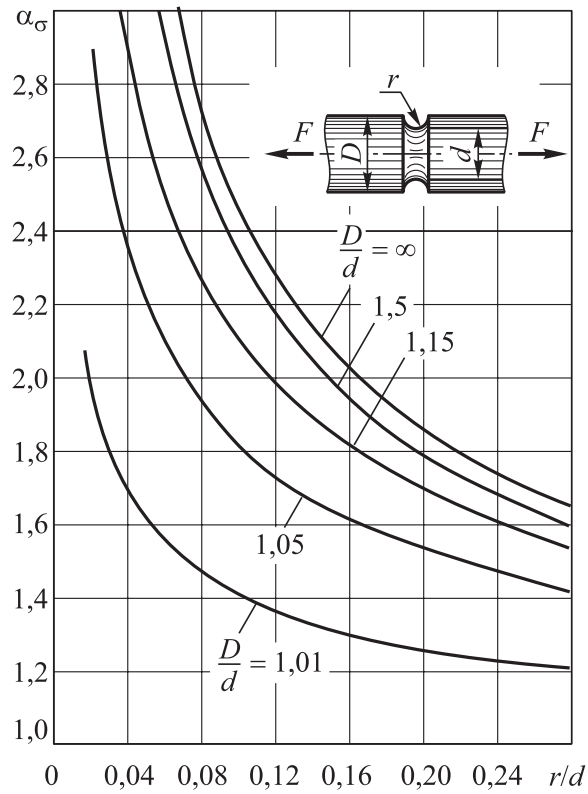
Рис. 11.17

Так или иначе, номинальное напряжение выбирают в первую очередь из соображений, связанных с простотой расчета. Теоретический коэффициент концентрации определяют для основных встречающихся на практике типовых конструкционных элементов. Значения α_σ даны в виде таблиц и графиков в справочной литературе по машиностроению. Так, на рис. 11.18 показана зависимость теоретического коэффициента концентрации от отношения геометрических размеров для полосы с отверстием и для вала с выточкой соответственно.

Теоретический коэффициент концентрации не описывает полностью характер изменения местных напряжений, а характеризует только относительное увеличение одной компоненты напряженного состояния. Поэтому влияние местных напряжений на сопротивление усталости при одном и том же теоретическом коэффициенте концентрации, но при различных типах очагов концентрации оказывается различным. Но еще бо̀льшую роль играют свойства самого материала, или, как говорят, его чувствительность к местным напряжениям.



а



б

Рис. 11.18

В связи с этим в отличие от теоретических коэффициентов концентрации вводят понятия *эффективных коэффициентов концентрации* K_σ и K_τ. В условиях симметричного цикла (при $R = -1$) эффективные коэффициенты концентрации определяются отношениями

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}} \quad \text{и} \quad K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}}, \tag{11.4}$$

где σ_{-1} и τ_{-1} — пределы выносливости гладкого образца; σ_{-1k} и τ_{-1k} — пределы выносливости, подсчитанные по номинальным напряжениям для образцов, имеющих концентрацию напряжений, но такие же размеры поперечного сечения, как и у гладкого образца.

Эффективный коэффициент концентрации зависит уже не только от геометрической формы и способа нагружения, но и от механических свойств материала. При несимметричных циклах, как показывает опыт, диаграмму предельных амплитуд для образцов с концентрацией напряжений можно получить из соответствующей диаграммы гладких образцов (см. рис. 11.13) путем деления всех ординат на K_σ.

Наиболее достоверные числовые значения эффективного коэффициента концентрации, естественно, получаются на основе усталостного испытания образцов. В настоящее время в этом направлении накоплен достаточно большой экспериментальный материал. Для типовых и наиболее часто встречающихся видов концентрации напряжений и основных конструкционных материалов созданы таблицы и графики, которые приводятся в справочной литературе. На рис. 11.19 показаны в качестве примера типичные графики для определения эффективного коэффициента концентрации.

На рис. 11.19, *а* приведены значения K_σ стального ступенчатого стержня при растяжении и сжатии (кривые *1*, *2* и *3*) для сталей с $\sigma_{в.р}$, равном 400, 800 и 1200 МПа, а на рис. 11.19, *б* — K_τ при кручении вала с кольцевой выточкой для углеродистой стали с $\sigma_{в.р}$ = 500 МПа.

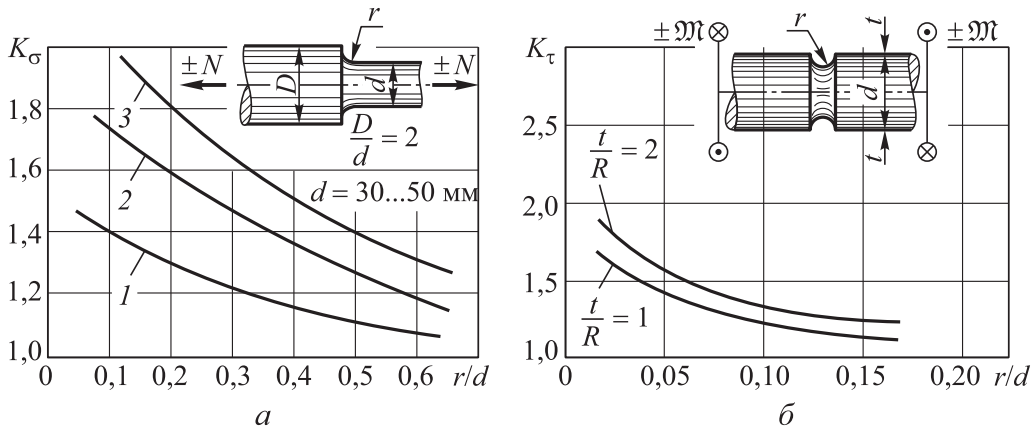


Рис. 11.19

В тех случаях, когда прямые экспериментальные данные по определению эффективного коэффициента концентрации отсутствуют, прибегают к различным приближенным оценкам. В частности, сопоставление результатов многочисленных испытаний позволяет в некоторой ограниченной мере установить соотношение между эффективным и теоретическим коэффициентами концентрации в виде

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1),$$

где q — коэффициент чувствительности материала к местным напряжениям.

Величина q зависит в основном от свойств материала. Например, можно считать, что для высокопрочных легированных сталей величина q близка к единице, для конструкционных сталей в среднем $q = 0{,}6 \ldots 0{,}8$, причем более прочным сталям соответствуют бо̀льшие значения q. Для серого чугуна величина q близка к нулю. Иначе говоря, серый чугун нечувствителен к местным напряжениям. Объясняется это тем, что крупные зерна графита, содержащиеся в структуре чугуна, уже сами по себе являются такими очагами концентрации, по сравнению с которыми геометрические особенности детали теряют свое значение.

Описанный способ определения эффективного коэффициента концентрации является довольно грубым. Коэффициент чувствительности заметно меняется в зависимости от геометрических особенностей как самой детали, так и очага концентрации напряжений. Наблюдается некоторое снижение q в случае больших коэффициентов K_σ и некоторое возрастание при увеличении абсолютных размеров детали. Поэтому вопрос определения эффективного коэффициента концентрации смыкается с так называемым масштабным эффектом, к рассмотрению которого мы сейчас и перейдем.

11.4. Масштабный эффект

Если из одного и того же материала изготовить несколько отличающихся по диаметру партий образцов, то после испытания на усталость обнаруживается, что предел выносливости с увеличением диаметра уменьшается. Эта зависимость носит асимптотический характер. По виду кривой можно заключить, что для очень больших образцов, которые мы уже ни изготовить, ни испытать не можем, снижение предела выносливости с увеличением диаметра прекращается.

Снижение предела выносливости с увеличением размеров детали получило название *масштабного эффекта*. Этот эффект следует рассматривать как очевидное следствие того, что максимальное напряжение в образце, а тем более в детали, не характеризует полностью процесс усталостного разрушения, а предел выносливости, как уже указывалось, не выражает в чистом виде свойств материала. Статистический характер возникновения микротрещин тесно связан с неоднородностью напряженного состояния в пределах малых объемов, и геометрическое подобие, как критерий для оценки усталостного разрушения, потребовало бы геометрического подобия всех кристаллов в структуре и даже геометрического подобия их строения. Но эти условия при переходе от малого образца к большому не соблюдаются. Естественно поэтому, что не сохраняя полного геометрического подобия, мы не получаем и силового подобия.

Вопрос состоит в том, как учесть этот эффект количественно. Понятно, что единственная возможность сделать это заключается в накоплении, систематизации и осмысливании экспериментальных данных, ибо получить какие-либо обнадеживающие результаты из теоретического анализа явлений, протекающих в поликристаллической структуре металла, мы пока не можем.

Прежде всего введем *коэффициенты масштабного фактора*

$$K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}, \quad K_{d\tau} = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}}, \tag{11.5}$$

т. е. безразмерные величины, которые показывают, на какое число следует умножить предел выносливости σ_{-1} или τ_{-1} стандартного образца диаметром 7,5 мм, чтобы получить предел выносливости σ_{-1d} или τ_{-1d} образца диаметром d.

При несимметричных циклах поправка $K_{d\sigma}$, так же как и K_σ, входит только в амплитудную составляющую цикла. Ибо опять же, как показывает опыт, при увеличении абсолютных размеров образцов диаграмма предельных амплитуд претерпевает изменения только в значениях ординат, каждое из которых с учетом описанной ранее концентрации напряжений становится равным $\sigma_a K_\sigma / K_{d\sigma}$.

В расчетных выкладках, как мы увидим в дальнейшем, множитель $K_\sigma / K_{d\sigma}$ используется как единое целое. Числитель отражает в основном роль концентрации напряжений, но в то же время зависит и от размеров детали, а знаменатель, отражая масштабный эффект, определяется в какой-то мере и концентрацией напряжений.

Таким образом, разделение факторов носит условный характер. Поэтому естественной является попытка связать масштабный эф-

фект и концентрацию напряжений в единый комплекс не только по форме, но и по существу. А существо состоит в тех представлениях о статистическом характере возникновения и накопления структурных повреждений, о которых говорилось выше. Этот вопрос частично поддается количественной оценке при помощи аппарата теории вероятности, но доведение задачи до числа нуждается, конечно, в принятии некоторых правдоподобных гипотез и систематизации опытных данных. Остановимся на основных предпосылках и рассмотрим окончательную полуэмпирическую зависимость, полученную в результате такого подхода.

Мы уже видели, что значение σ_{max} вблизи очага концентрации, выраженное через теоретический коэффициент концентрации α_σ, еще не характеризует полностью роль местных напряжений в усталостном разрушении. Было замечено, что большое значение имеет также и скорость убывания этих напряжений, т. е. их градиент. Это — тоже своего рода масштабный эффект. Если местные напряжения убывают медленно, то в относительно широкой зоне местных напряжений оказывается большое число кристаллитов, и вероятность индивидуальной неблагоприятности их состояния и расположения возрастает. Если градиент большой и напряжения по мере удаления от очага концентрации быстро падают, то в среднем статистическом опасность зарождения трещины снижается.

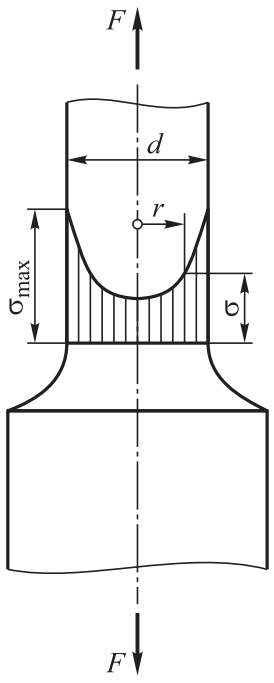


Рис. 11.20

Скорость убывания местных напряжений определяется их градиентом G, т. е. производной от напряжения по некоторой характерной координате. Например, для стержня, показанного на рис. 11.20,

$$G = \left.\frac{d\sigma}{dr}\right|_{r=d/2}.$$

Под *относительным градиентом* понимается величина

$$\bar{G} = \frac{d\sigma}{dr}\frac{1}{\sigma_{max}}.$$

Увеличение относительного градиента снижает чувствительность материала к местным напряжениям.

Обратное влияние оказывает линейная протяженность L очага концентрации. Чем

больше L, тем больший объем материала детали находится в зоне повышенных напряжений и вероятность образования усталостной трещины возрастает. Например, для стержня, показанного на рис. 11.20, $L = \pi d$, а для стержня прямоугольного сечения, имеющего две канавки (рис. 11.21), $L = 2t$.

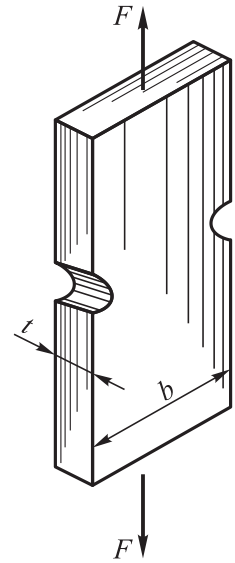


Рис. 11.21

Таким образом, площадь поперечного сечения, охваченная зоной повышенных напряжений, характеризуется отношением $L/\bar{G}$ и чувствительность детали к местным напряжениям и масштабному эффекту определяется именно этой величиной. Эксперименты в достаточной мере подтверждают эту мысль. В результате была предложена дробно-степенная зависимость $K_\sigma/K_{d\sigma}$ от $L/\bar{G}$. Для сталей, алюминиевых и магниевых сплавов, а также для чугуна с шаровидным графитом она имеет вид

$$\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} = \frac{2\alpha_\sigma}{1+\left(88{,}3\dfrac{\bar{G}}{L}\right)^{\nu_\sigma}} \tag{11.6}$$

или при кручении

$$\frac{K_\tau}{K_{d\tau}} = \frac{2\alpha_\tau}{1+\left(88{,}3\dfrac{\bar{G}}{L}\right)^{\nu_\tau}}, \tag{11.7}$$

где 88,3 — коэффициент, имеющий размерность [мм^2], поэтому $1/\bar{G}$ и L следует подставлять в миллиметрах; ν_σ, ν_τ — показатели степени, постоянные для данного материала при определенной температуре и частоте испытания. Для углеродистых сталей ν_σ = = 0,1–0,14; для алюминиевых сплавов ν_σ = 0,08–0,09; для чугуна с шаровидным графитом ν_σ = 0,15; для легированных сталей, как правило, ν_σ = 0,04–0,08. Значения ν_τ определены с меньшей достоверностью и для меньшего числа материалов. При отсутствии информации можно ориентироваться на простое соотношение

$$\nu_\tau \approx (1{,}5–2)\nu_\sigma.$$

В выражениях (11.6) и (11.7) еще не определено значение $\bar{G}$. Подобно теоретическому коэффициенту концентрации, оно зависит от формы тела и условий нагружения и определяется законом изменения напряжений в окрестности очага концентрации. Это — второй (кроме α_σ) параметр, характеризующий особенности местных напряжений. Введение в расчет градиента не требует специального решения каких-либо новых задач. Его определяют в каждом конкретном случае одновременно с теоретическим коэффициентом концентрации.

Надо, однако, сказать, что в справочной литературе ограничиваются в основном систематизацией данных по коэффициентам концентрации, хотя градиенты во всех случаях известны. На них стали обращать внимание лишь в последние годы.

Возвращаясь к рассмотренным ранее примерам концентрации напряжений, приведем данные по градиентам.

Для полосы с отверстием (см. рис. 11.19, *а*)

$$\bar{G} = 4{,}6/d\,.$$

Для вала с выточкой (см. рис. 11.19, *б*), если $D/d > 1{,}5$, то при растяжении $\bar{G} = 2/r$, а при изгибе $\bar{G} = 2/r + 2/d$. Если же $D/d < 1{,}5$, то соответственно имеем

$$\bar{G} = \frac{2(1+\varphi)}{r} \quad \text{и} \quad \bar{G} = \frac{2(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{d},$$

где

$$\varphi = \frac{1}{4\sqrt{\dfrac{D-d}{2r}} + 2}. \qquad (11.8)$$

При кручении, независимо от D/d, $\bar{G} = 1/r + 2/d$.

Для вала с галтелью (см. рис. 11.19):

при $D/d > 1{,}5$ для растяжения и изгиба $\bar{G} = 2{,}3/r$ и $\bar{G} = 2{,}3/r + 2/d$,

при $D/d < 1{,}5$ $\bar{G} = \dfrac{2{,}3(1+\varphi)}{r}$ и $\bar{G} = \dfrac{2{,}3(1+\varphi)}{r} + \dfrac{2}{d}$, где φ по-прежнему определяется выражением (11.8). Для кручения, также независимо от D/d,

$$\bar{G} = \frac{1{,}15}{r} + \frac{2}{d}. \qquad (11.9)$$

В последнем примере наглядно проявляются преимущества изложенного подхода. Каждая кривая, показанная на рис. 11.19, пригодна лишь для определенного материала и при определенном отношении D/d. Выражение (11.9) обладает несравненно большей универсальностью.

11.5. Влияние качества обработки поверхности

В большинстве деталей усталостное разрушение начинается с поверхности. Поэтому состояние поверхности существенным образом влияет на предел выносливости и в еще большей степени сказывается на долговечности детали.

Особенности, связанные с обработкой поверхности, учитывают при расчетах на усталостную прочность введением *коэффициента качества поверхности*

$$K_F = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}}, \qquad (11.10)$$

где σ'_{-1} — предел выносливости для серии образцов, имеющих шероховатость, измеряемую в микрометрах по ГОСТ 25142—82; σ_{-1} — предел выносливости тщательно полированных образцов. Шероховатость 12 мкм примерно соответствует тонкой обточке образца на токарном станке.

На рис. 11.22 приведены ориентировочные значения коэффициентов качества поверхности различных сталей в зависимости от временного сопротивления. Коэффициент K_F для полированных образцов можно считать равным единице.

Токарная обточка алюминиевых образцов дает K_F = 0,8–0,9, магниевых — 0,7–0,8. Очень чувствительны к качеству обработки поверхности титановые сплавы. Снижение предела выносливости титановых точеных образцов по сравнению со шлифованными составляет при нормальной температуре примерно 33 %.

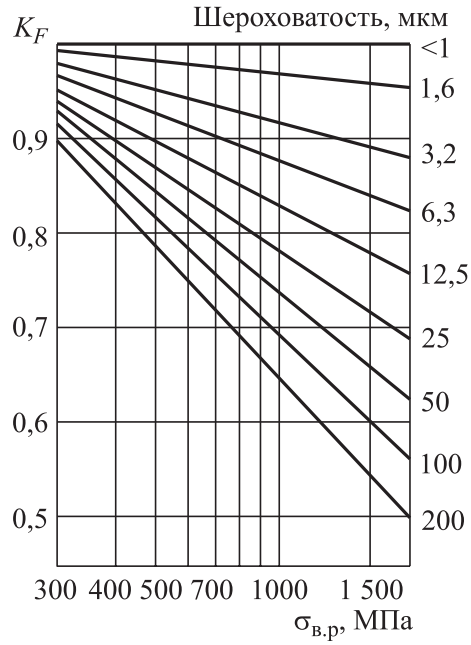


Рис. 11.22

Большое влияние на предел выносливости оказывает коррозия. На рис. 11.23 показано снижение коэффициента K_F в зависимости от предела прочности стали при различной выдержке в условиях коррозии до испытания на усталость.

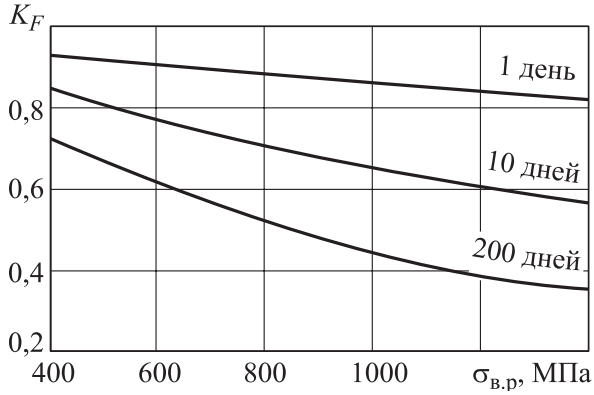


Рис. 11.23

Все это — примеры негативного влияния поверхностной обработки по сравнению с полировкой. Теперь следует поговорить о специальной обработке, повышающей предел выносливости.

В промышленности уже давно и весьма широко применяют методы поверхностного упрочнения деталей, работающих в условиях циклических напряжений (рессоры и полуоси автомобилей, зубья шестерен, винтовые клапанные пружины и пр.). Эта специальная поверхностная обработка не преследует целей общего изменения прочностных показателей металла. Речь идет именно об усталостном упрочнении, часто в сочетании с требованиями износостойкости. К числу таких методов, применяемых в различных сочетаниях, относятся химико-термические (азотирование, цементация), поверхностная закалка токами высокой частоты и наклеп поверхностного слоя обкаткой роликами или обдувом дробью.

Поверхностная обработка создает двоякий эффект. Во-первых, повышается прочность поверхностного слоя, но сохраняется вязкость нижележащих слоев, а во-вторых, в поверхностном слое создаются остаточные сжимающие напряжения, препятствующие образованию трещины. В результате обработки предел выносливости в оптимальных случаях может увеличиться в несколько раз, а долговечность детали — в десятки раз. Причем наибольший эффект поверхностная обработка дает для деталей, имеющих заметную концентрацию напряжений.

Таблица 11.2

Тип обработки	Диаметр, мм	K_v	
		Образец без концентрации напряжений	Образец с концентрацией напряжений
Закалка токами высокой частоты	7—20	1,3—1,6	1,6—2,8
	30—40	1,2—1,5	1,5—2,5
Азотирование на глубину 0,1—0,4 мм	8—15	1,15—1,25	1,9—3,0
	30—40	1,10—1,15	1,3—2,0
Цементация на глубину 0,2—0,6 мм	8—15	1,2—2,1	1,5—2,5
	30—40	1,1—1,5	1,2—2,0
Обкатка роликами	7—20	1,2—1,4	1,5—2,2
	30—40	1,1—1,25	1,3—1,8
Обдув дробью	7—20	1,1—1,3	1,4—2,5
	30—40	1,1—1,2	1,1—1,5

В табл. 11.2 приведены ориентировочные данные для углеродистых и легированных конструкционных сталей, характеризующие эффект поверхностного упрочения коэффициентом K_v.

11.6. Коэффициент запаса при циклическом нагружении и его определение

Теперь, когда мы познакомились с основными факторами, влияющими на сопротивление усталости, мы можем вернуться к диаграмме σ_m, σ_a, полученной при испытании образцов (см. рис. 11.13). Эта диаграмма для упрощения была представлена наклонной прямой

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi\sigma_m,$$

а рабочая область справа ограничена условием, что максимальное напряжение цикла, равное $\sigma_m + \sigma_a$, не превышает $\sigma_{т.р}$ или $\sigma_{в.р}$.

Но все это — для образцов. Если перейти к детали, то влияние местных напряжений, масштабного фактора и качества обработки поверхности приводит к тому, что предельные амплитуды циклов σ_a для рассматриваемой детали уменьшатся в $K_\sigma / K_{d\sigma} K_F$ раз и уравнение предельной прямой (рис. 11.24) примет вид

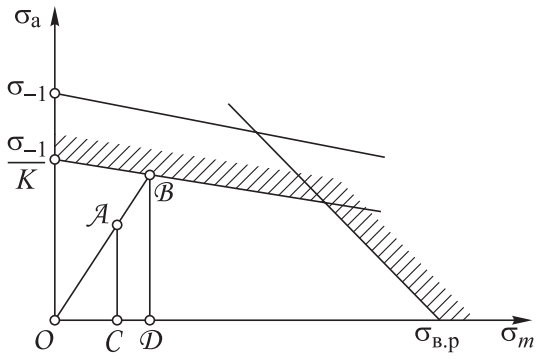


Рис. 11.24

$$\sigma_{\text{a}} = \frac{1}{K}(\sigma_{-1} - \psi\sigma_m), \quad (11.11)$$

где

$$K = \frac{K_\sigma}{K_{d\sigma} K_F} \quad (11.12)$$

представляет собой результирующее влияние трех факторов на циклическую прочность детали. По результатам экспериментальных работ рекомендуется влияние качества обработки поверхности учитывать иным способом, а именно принимать

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_\nu}. \quad (11.13)$$

Ограничение по пределу прочности или по пределу текучести сохраняется для деталей таким же, как и для образца. В результате получаем диаграмму предельных амплитуд для детали (см. рис. 11.24).

Номинальные напряжения $\sigma_{m\,\text{ном}}$ и $\sigma_{\text{a ном}}$ цикла, в условиях которого работает деталь, примем за координаты рабочей точки $\mathcal{A}$. Если эта точка расположена ниже предельной прямой, то деталь обладает некоторым запасом циклической прочности. При пропорциональном увеличении составляющих цикла приходим к предельному состоянию (точка $\mathcal{B}$).

Условимся под коэффициентом запаса циклической прочности понимать отношение отрезка $O\mathcal{B}$ к отрезку $O\mathcal{A}$:

$$n_R = \frac{O\mathcal{B}}{O\mathcal{A}}.$$

Это отношение характеризует степень близости рабочих условий к предельным. Из выражения (11.11) получаем для точки $\mathcal{B}$

$$\sigma_{\text{a}\mathcal{B}} = \frac{1}{K}(\sigma_{-1} - \psi\sigma_{m\mathcal{B}}).$$

Но

$$\sigma_{\text{a}\mathcal{B}} = \sigma_{m\mathcal{B}} \frac{\sigma_{\text{a ном}}}{\sigma_{m\,\text{ном}}}.$$

Приравнивая эти выражения, находим

$$\sigma_{m\mathcal{B}} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{a\text{ном}} + \psi\sigma_{m\text{ном}}}\sigma_{m\text{ном}}.$$

Однако

$$\frac{O\mathcal{B}}{O\mathcal{A}} = \frac{O\mathcal{D}}{OC} = \frac{\sigma_{m\mathcal{B}}}{\sigma_{m\text{ном}}}.$$

Таким образом, коэффициент запаса циклической прочности принимает вид

$$n_R = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi\sigma_m} \qquad (11.14)$$

(здесь индекс «ном» при обозначении номинальных напряжений σ_m и σ_a опущен).

Выражение (11.14) дает нам значение коэффициента запаса циклической прочности по верхней прямой диаграммы предельных амплитуд (см. рис. 11.24). Казалось бы, теперь необходимо установить условие для определения коэффициента запаса на случай, если предельная точка $\mathcal{B}$ окажется не на верхней, а на правой ограничивающей прямой. Практически, однако, в этом нет никакой необходимости, ибо правая прямая дает условие, по которому максимальное напряжение цикла не может превышать предела прочности, т. е.

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a < \sigma_{в.р}.$$

Но конструктор, назначая размеры детали, начинает, естественно, с выполнения обычных условий по пределу текучести или пределу прочности, обеспечивая необходимый запас

$$n_в = \frac{\sigma_{в.р}}{\sigma_{\max}} \quad \text{или} \quad n_т = \frac{\sigma_т}{\sigma_{\max}},$$

и только затем (если это нужно) вычисляет n_R (11.14).

Если деталь работает в условиях циклического изменения касательных напряжений, то структура выражения (11.14) для коэффициента запаса сохраняется, меняются лишь обозначения:

$$n_R = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_a + \psi_\tau\tau_m}. \qquad (11.15)$$

Известны многие попытки создания гипотез усталостного разрушения в сложном напряженном состоянии. Все они сводятся в

основном к обобщению известных гипотез прочности и пластичности на случай циклических напряжений. Для наиболее часто встречающегося на практике расчета при двухосном напряженном состоянии (σ, τ) общепринятой в настоящее время является эмпирическая формула Гафа и Полларда

$$\frac{1}{n_R^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}, \tag{11.16}$$

где n_R — искомый коэффициент запаса; n_σ — коэффициент запаса в предположении, что касательные напряжения τ отсутствуют; n_τ — запас по касательным напряжениям, установленный в предположении, что $\sigma = 0$.

Формула (11.16) применима не только в случае синфазного изменения σ и τ, но и при таких циклах, когда максимумы σ и τ достигаются не одновременно.

Рассмотрим некоторые примеры расчетов в условиях циклических напряжений.

Пример 11.1. Стальной шлифованный вал с галтелью (рис. 11.25) работает на кручение по несимметричному циклу. Наибольшее значение момента $\mathfrak{M} = 800$ Н·м, наименьшее значение $\mathfrak{M} = -200$ Н·м. Механические характеристики материала $\tau_{-1} = 190$ МПа, $\sigma_{в.р} = 600$ МПа. Определить коэффициент запаса.

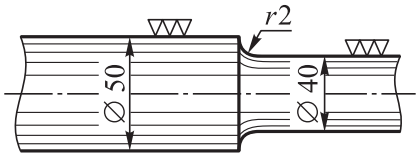


Рис. 11.25

Подсчитываем номинальные характеристики цикла:

$$\tau_{max} = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{0{,}2d^3} = 62{,}5 \text{ МПа},$$

$$\tau_{min} = \frac{\mathfrak{M}_{min}}{0{,}2d^3} = 15{,}6 \text{ МПа},$$

откуда $\tau_a = 23{,}5$ МПа, $\tau_m = 39{,}0$ МПа.

Определяем теоретический коэффициент концентрации. Для этого воспользуемся справочными данными*. На рис. 11.26 показаны графически значения теоретического коэффициента для вала с галтелью, работающего на кручение. При $D/d = 50/40 = 1{,}25$ и $r/d = 2/40 = 0{,}05$ получаем $\alpha_\tau = 1{,}6$. Градиент местных напряжений для этого случая определяем из выражения (11.9): $\overline{G} = 0{,}602$ мм$^{-1}$.

Длина очага концентрации $L = \pi d = 126$ мм. Так как показатель ν_τ нам неизвестен, то примем $\nu_\tau = 1{,}7\nu_\sigma$. Значение же ν_σ для стали

* ГОСТ 25.504—82. Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости.

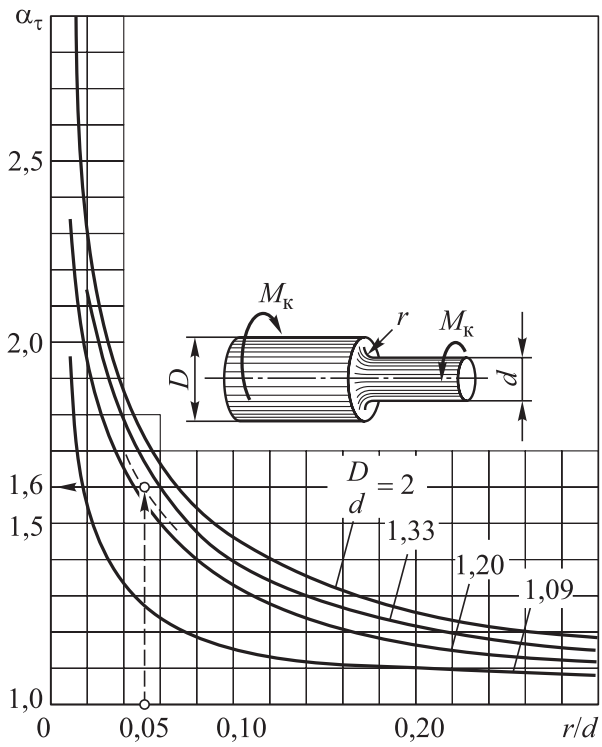


Рис. 11.26

равно 0,1. Поэтому $\nu_\tau = 0{,}17$. Теперь по формуле (11.7) определяем $K_\tau/K_{d\tau} = 1{,}72$. Для шлифованного вала с $Rz = 6{,}3$ мкм и $\sigma_{в.р} = 600$ МПа из графика, показанного на рис. 11.22, находим $K_F = 0{,}92$.

Итоговый поправочный коэффициент для детали, согласно формуле (11.13), $K = 1{,}81$.

Коэффициент ψ_τ для углеродистых сталей лежит в пределах 0,05–0,1. Принимаем $\psi_\tau = 0{,}075$ и по формуле (11.15) находим коэффициент запаса $n_R = 2{,}63$.

Пример 11.2. Требуется определить коэффициент запаса циклической прочности для вала I (рис. 11.27).

Момент $\mathfrak{M} = 1000$ Н · м, диаметр вала $d = 5$ см, $a = 20$ см, $b = 8$ см, радиус напрессованной шестерни $R = 8$ см. Материал — углеродистая сталь: $\sigma_{т.р} = 400$ МПа, $\sigma_{в.р} = 800$ МПа, $\sigma_{-1} = 350$ МПа. Обработка вала — тонкая обточка.

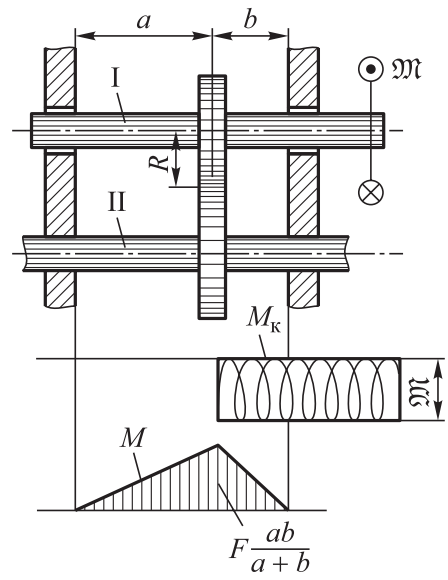


Рис. 11.27

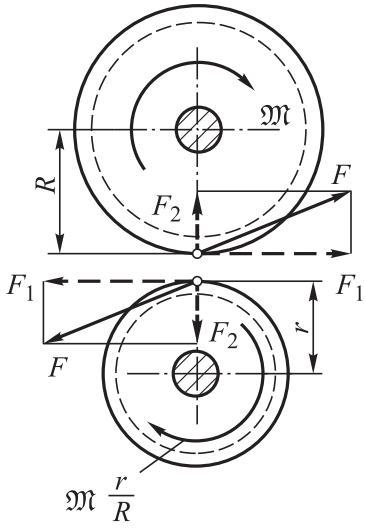


Рис. 11.28

Под действием постоянного момента $\mathfrak{M}$ в поперечных сечениях вала возникают неизменные во времени касательные напряжения τ. Одновременно с кручением имеет место изгиб вала под действием силы F — силы взаимодействия между шестернями (рис. 11.28).

Из теории зубчатых зацеплений известно, что $F_2 \approx 0{,}4F_1$. Поэтому $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \approx 1{,}08F_1$. Но из условии равновесия вала I $F_1 = \mathfrak{M}/R$, $F = 1{,}08\ \mathfrak{M}/R$. В зоне посадки шестерни в поперечных сечениях вала возникают нормальные напряжения. Вследствие вращения вала они будут меняться по симметричному циклу.

Таким образом, напряженное состояние вала является двухосным, и для определения коэффициента запаса надо обратиться к эмпирической формуле Гафа и Полларда (11.16). Сначала определим отдельно условные запасы прочности по σ и τ:

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{M}{0{,}1d^3} = 1{,}08\frac{\mathfrak{M}}{R} \times \frac{ab}{a+b}\frac{1}{0{,}1d^3},$$

откуда $\sigma_{max} = \sigma_a = 61{,}6$ МПа, $\sigma_m = 0$. Цикл симметричный. Поэтому, согласно формуле (11.14), $n_\sigma = \sigma_{-1}/K\sigma_a$.

Для определения K необходимо иметь значение $K_\sigma/K_{d\sigma}$, соответствующее условиям посадки шестерни на вал. На рис. 11.29 дан необходимый для этого график, взятый из ГОСТ 25.504—82. По приведенным кривым для данного диаметра можно определить ве-

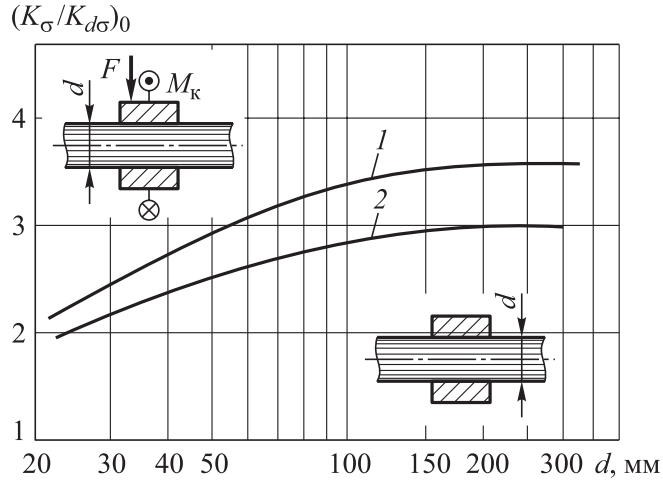


Рис. 11.29

личину $K_\sigma/K_{d\sigma}$ при изгибе вала. Кривая *1* соответствует рассматриваемому случаю, когда через напрессованную деталь передается сила или момент (левая деталь на рис. 11.29). Кривая *2* дает значения $K_\sigma/K_{d\sigma}$ при отсутствии сил и моментов (правая деталь на рис. 11.29).

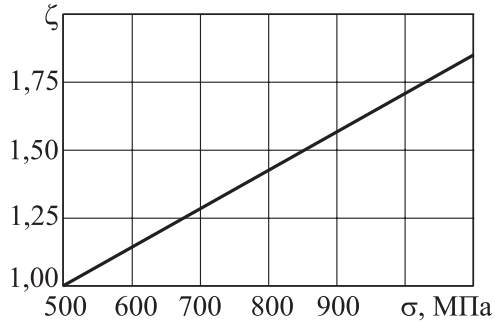


Рис. 11.30

График построен для давления напрессовки, большего 30 МПа, и для $\sigma_{в.р} = 500$ МПа. Если давление напрессовки меньше указанного, а $\sigma_{в.р}$ больше, то в найденное по графику значение $(K_\sigma/K_{d\sigma})_0$ следует ввести поправочные коэффициенты.

Будем считать, что в нашем случае давление посадки больше чем 30 МПа и поправки на давление не требуется. А вот на $\sigma_{в.р}$ необходима поправка. Поправочный коэффициент задается графиком, показанным на рис. 11.30. Из графика находим при $\sigma_{в.р} = 800$ МПа коэффициент $\zeta = 1{,}4$. Умножаем ζ на $(K_\sigma/K_{d\sigma})_0 = 2{,}9$ (см. рис. 11.29, кривая *1* при $d = 50$ мм). Таким образом, $K_\sigma/K_{d\sigma} = 2{,}9 \cdot 1{,}4 = 4{,}06$. Для тонкой обточки (12,5 мкм) при $\sigma_{в.р} = 800$ МПа с помощью диаграммы, приведенной на рис. 11.22, определяем значение $K_F = 0{,}85$. Положим, что вал проходит обкатку роликами, и в соответствии с табл. 11.2 $K_v = 1{,}3$. В итоге, согласно формуле (11.13), получаем $K = 3{,}26$. Следовательно, $n_\sigma = 1{,}74$.

Далее, имеем $\tau_a = 0$, $\tau_m = \mathfrak{M}/(0{,}2d^3) = 40$ МПа. Поскольку $\tau_a = 0$, коэффициент запаса следует определять по пределу текучести: $n_\tau = \sigma_{т.р}/\sigma_{экв} = 5$.

По формуле (11.16) вычисляем n_R:

$$n_R = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = 1{,}64.$$

Глава 12

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

12.1. Понятие об устойчивости

Под устойчивостью мы интуитивно понимаем свойство системы сохранять свое состояние при внешних воздействиях. Если система таким свойством не обладает, она называется неустойчивой. В равной мере можно сказать, что неустойчивым является ее состояние.

В реальных условиях всегда существуют какие-то причины, по которым может произойти отклонение от исходного равновесного состояния. Следовательно, разумно предположить, что возможность перехода к новому состоянию в неустойчивой системе всегда реализуется. В этом случае говорят, что произошла *потеря устойчивости*.

Система при потере устойчивости может вести себя по-разному. Обычно происходит переход к некоторому новому положению равновесия, что в большинстве случаев сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или полным разрушением. В некоторых случаях при потере устойчивости конструкция продолжает работать и выполняет по-прежнему свои основные функции, как, например, тонкостенная обшивка в самолетных конструкциях. Возможны, наконец, и такие случаи, когда потерявшая устойчивость система, не обладая устойчивыми положениями равновесия, переходит в режим незатухающих колебаний.

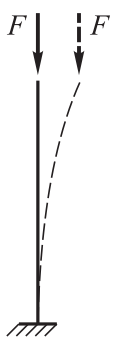


Рис. 12.1

Явление потери устойчивости для упругих тел можно наблюдать на целом ряде примеров. Наиболее простым случаем является потеря устойчивости центрально-сжатого стержня (рис. 12.1). При некоторой силе F прямолинейная форма становится неустойчивой и стержень переходит в новое состояние, показанное на рис. 12.1 штриховой линией.

Тонкостенная труба (рис. 12.2), нагруженная внешним давлением, способна потерять устойчивость. При этом круговая форма сечения переходит в эллиптическую, а затем труба полностью сплющивается, хотя напряжения к моменту потери устойчивости далеко не достигают предела текучести.

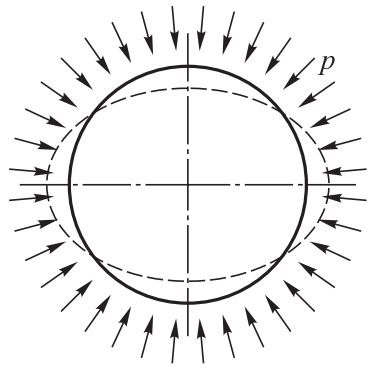


Рис. 12.2

Та же труба может потерять устойчивость и при осевом сжатии (рис. 12.3). Аналогичное явление имеет место и при закручивании трубы (рис. 12.4).

Подобных примеров можно привести очень много. Обобщая сказанное, следует отметить, что наиболее ярко явление потери устойчивости проявляется в легких тонкостенных конструкциях:



Рис. 12.3

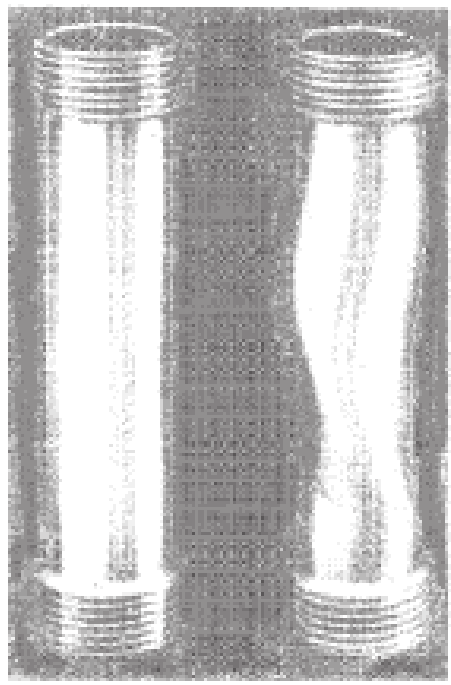


Рис. 12.4

в сжатых стержнях, оболочках и тонких стенках. Поэтому при проектировании подобных конструкций одновременно с расчетом на прочность проводят и расчет на устойчивость как отдельных узлов, так и системы в целом.

Одной из мер повышения запаса устойчивости системы является увеличение ее жесткости. Так, в практике самолетостроения тон-

костенные перегородки подкрепляют специальными профилями. Такая подкрепленная стенка имеет высокую степень устойчивости при сравнительно малом весе.

Для анализа устойчивости необходимо выбрать расчетную схему и соответствующую ей математическую модель. Основной, ставшей уже классической, является следующая. Система предполагается идеальной, т. е. если речь идет о сжатом стержне, ось его строго прямолинейна, силы приложены центрально. Если рассматривают цилиндрическую оболочку, то также считают, что она имеет совершенную форму и нагрузка не отступает от предписанных законов распределения.

Идеальной системе сообщают отклонение от положения равновесия. При этом рассматривают отклонения, которые не только являются малыми, но и могут быть меньше любой наперед заданной малой величины. Если после устранения причин, вызвавших отклонение, система возвращается в исходное состояние равновесия, то последнее считается устойчивым, если же нет, то положение равновесия считается неустойчивым. Силы инерции, возникающие при деформациях системы, не учитывают.

Такая расчетная схема позволяет рассчитывать систему на устойчивость и определять условия перехода от устойчивого состояния к неустойчивому. Параметры, характеризующие такой переход, называются *критическими*. В частности, обобщенная сила, превышение которой приводит к переходу от устойчивого равновесия к неустойчивому, называется *критической силой*.

При расчете на устойчивость рабочая нагрузка назначается как n-я доля критической. При этом под n понимают *коэффициент запаса устойчивости*, значение которого, как и при расчетах на прочность, назначают в зависимости от конкретных обстоятельств, связанных со спецификой технологии, с условиями эксплуатации, а также со степенью ответственности конструкции. Естественно, что расчет на устойчивость по коэффициенту запаса не исключает, а даже предполагает необходимость одновременной проверки конструкции по условиям прочности.

12.2. Определение критических нагрузок

Чтобы более наглядно показать особенности подхода, который обычно используют при анализе устойчивости упругих систем, рассмотрим для начала простейшую механическую модель.

На конце жесткого стержня (перевернутого маятника, показанного на рис. 12.5, *а*) укреплен груз F. Внизу стержень имеет шарнир

и удерживается в вертикальном положении упругой пружиной, имеющей линейную характеристику. Это значит, что при повороте стержня на угол φ в шарнире возникает момент, равный $c\varphi$, где c — жесткость пружины.

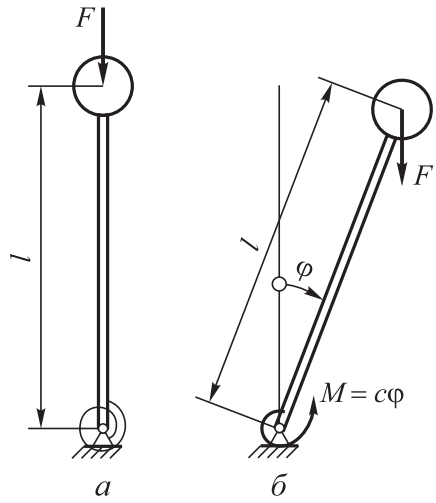


Рис. 12.5

Эта модель, обладая предельной простотой, сохраняет в себе все основные свойства, характерные для более сложных задач, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

Можно предположить, что при достаточно большой силе F или достаточно большой высоте расположения груза положение равновесия обращенного маятника станет неустойчивым; при малом отклонении стержня от вертикали пружина не сможет восстановить исходное состояние равновесия.

В основе анализа устойчивости упругих систем лежит определение условий существования соседних форм равновесия. Сообщим системе возмущение, т. е. примем, что маятник отклонился от вертикали на некоторый малый угол φ (рис. 12.5, *б*). По какой причине это произошло, не имеет никакого значения.

Приравняв момент силы F шарнирному моменту, получим

$$Fl \sin\varphi = c\varphi. \tag{12.1}$$

Так как угол φ мал, то $\sin\varphi \approx \varphi$; тогда

$$(Fl - c)\,\varphi = 0, \tag{12.2}$$

и мы получаем два возможных решения.

Первое из них, $\varphi = 0$, означает, что при вертикальном положении маятника условие равновесия выполняется при любом значении силы F, что совершенно очевидно. Такое решение называют обычно тривиальным.

Имеется вторая возможность. Пусть $\varphi \neq 0$, и маятник, следовательно, отклонен от вертикали. Тогда условие равновесия выполняется при $F = c/l$, и вблизи исходного состояния равновесия обнаруживается второе состояние равновесия, сколь угодно близкое к первому. Силу, соответствующую этой, как говорят, бифуркации форм равновесия, мы принимаем за критическую.

Результат представляется весьма правдоподобным. Действительно, чем меньше жесткость пружины c и чем больше высота маятника l, тем при меньшем значении силы F произойдет потеря устойчивости. Но вместе с тем возникают очевидные неясности.

Во-первых, мы привыкли считать, что между действующими силами и возникающими перемещениями всегда существует определенная зависимость. В данном же случае, определив силу F, мы не нашли углового перемещения φ. Мы только приняли, что $\varphi \neq 0$, но пока не видно, как этот угол может быть найден.

Во-вторых, если принять, что при силе, равной критической (при $F = c/l$), маятник начинает отклоняться от вертикали, то здравый смысл подскажет нам, что при $F > c/l$ он отклонится еще сильнее. Между тем мы видим, что при $F \neq c/l$ уравнение (12.2) удовлетворяется только при $\varphi = 0$. Следовательно, маятник, начавший было отклоняться от вертикали, должен при увеличении силы снова вернуться к исходному состоянию.

И, наконец, в-третьих: почему мы решили, что нашли критическую силу? Почему мы полагаем, что при силе, меньшей c/l, вертикальное положение равновесия маятника устойчиво, а при большей — неустойчиво? Ведь мы нашли только условие существования новой формы равновесия, и ниоткуда не следует, что это условие можно отождествлять с признаками критического состояния.

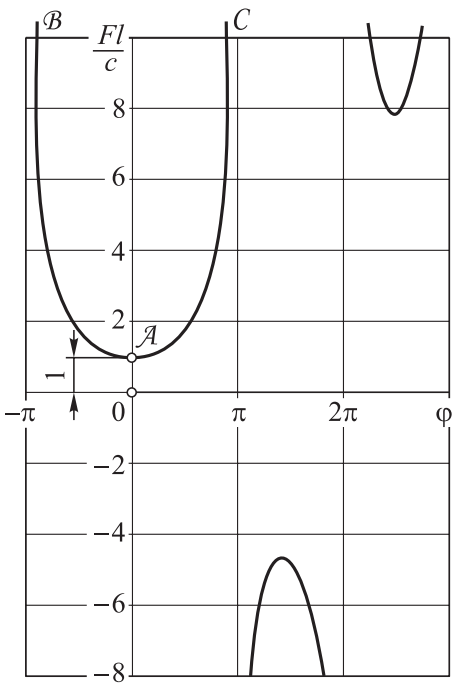


Рис. 12.6

В данном случае на все эти вопросы можно довольно просто получить исчерпывающий ответ.

В основе возникающих недоумений лежит проведенная выше линеаризация уравнения равновесия. Мы рассмотрели малое отклонение стержня от вертикали и приняли $\sin\varphi \approx \varphi$. Если же быть более последовательными и точными, то следует вернуться к уравнению (12.1), которое дает вполне определенную зависимость между действующей силой и возникающим угловым перемещением.

Построим график зависимости $Fl/c = f(\varphi)$ (рис. 12.6). Прежде всего мы видим, что при $\varphi = 0$ уравнение (12.1) справедливо при

любых значениях силы F. Значит, ось ординат принадлежит исследуемому графику. Остальные ветви кривой определяются выражением

$$\frac{Fl}{c} = \frac{\varphi}{\sin\varphi},$$

которое будет верным, пока пружина сохраняет линейность характеристики. При значениях φ, кратных π, график терпит разрыв, и происходит смена знака F через бесконечность. Оно и понятно. Когда угол поворота маятника приближается к π, плечо силы уменьшается до нуля, а сама сила должна неограниченно возрастать (рис. 12.7). Если маятник протолкнуть через мертвую точку, то для того, чтобы удержать его в новом положении равновесия, следует приложить силу обратного знака.

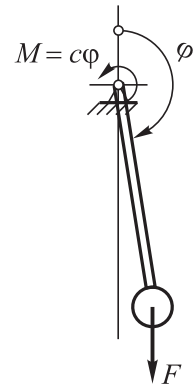
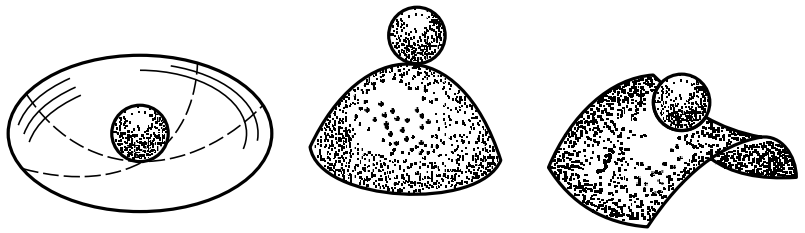


Рис. 12.7

Таким образом, каждой точке кривой соответствует определенное положение равновесия. Линеаризуя уравнение, мы, естественно, не можем охватить всего многообразия форм равновесия. При малом значении φ мы получаем только ту часть графика, которая непосредственно примыкает к оси ординат. Мы смотрим на эту картину как бы через узкую щель — через чуть приоткрытую дверь — и видим только ось ординат и часть кривой, проходящей через точку бифуркации A. Но в пределах малых значений φ эта кривая представляется нам как горизонтальная прямая, и определить угол φ при силе $F = c/l$ мы не можем. Перемещение оказывается неопределенным, угол φ может быть любой малой величиной. При силе, большей c/l, упрощенное линеаризованное уравнение дает нам только форму равновесия, соответствующую точкам, расположенным на оси ординат, т. е. тривиальную форму равновесия.

Теперь обратимся к вопросу, какие точки на построенных кривых отражают устойчивые и какие — неустойчивые положения равновесия.

Основным критерием устойчивости, как известно из механики твердого тела, является условие минимума полной потенциальной энергии системы. Например, для шарика, лежащего на дне лунки и занимающего устойчивое положение равновесия (рис. 12.8, *а*), потенциальная энергия будет наименьшей по сравнению со всеми соседними положениями. Если шарик расположен на вершине выпуклости (рис. 12.8, *б*) или на седловине (рис. 12.8, *в*), его положение равновесия будет неустойчивым. Этот критерий применим, естественно, и к упругим системам, — конечно, с учетом потенциальной энергии деформации.



а *б* *в*

Рис. 12.8

В нашем случае потенциальная энергия системы U состоит из двух слагаемых: из потенциальной энергии деформации пружины $\frac{1}{2}c\varphi^2$ и потенциальной энергии груза $Fl\cos\varphi$ (см. рис. 12.5). Таким образом,

$$U = \frac{1}{2}c\varphi^2 + Fl\cos\varphi.$$

Дифференцируя это выражение по φ, получим

$$\frac{dU}{d\varphi} = c\varphi - Fl\sin\varphi.$$

Если приравнять производную нулю, то мы придем к уравнению равновесия (12.1), на основе которого построены кривые, показанные на рис. 12.6. Значит, положение равновесия определяется экстремумом потенциальной энергии системы. Остается только решить, какие точки на построенных кривых соответствуют максимуму, а какие — минимуму потенциальной энергии.

После второго дифференцирования получаем условие минимума (условие устойчивости) в виде следующего неравенства:

$$c - Fl\cos\varphi > 0. \qquad (12.3)$$

Сначала рассмотрим вертикальное положение маятника ($\varphi = 0$). Условие устойчивости выполняется при $F < c/l$. При силе, большей c/l, вертикальное положение маятника оказывается неустойчивым. Таким образом, все точки оси ординат, расположенные ниже точки бифуркации A, отражают устойчивое положение равновесия, а выше — неустойчивое.

При $\varphi \neq 0$ условие устойчивости (12.3) удобно преобразовать с учетом уравнения равновесия (12.1). Исключив силу F, получим

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} > \cos\varphi.$$

Легко установить, что на участке от $-\pi$ до $+\pi$ это условие выполняется. Следовательно, ветвь кривой $\mathcal{BAC}$ (см. рис. 12.6), расположенная внутри этого интервала, отражает устойчивые положения равновесия, и по достижении силой критического значения происходит переход из неустойчивого вертикального положения к новому, устойчивому положению с отклоненной от вертикали осью. Другие ветви, показанные на рис. 12.6, в свою очередь, также имеют участки как устойчивого, так и неустойчивого положения равновесия.

Теперь мы получили ответ на все поставленные ранее вопросы. Если задача решается в малых перемещениях, а это, как мы увидим в дальнейшем, существенно упрощает дело, то мы можем определить критическую силу, но не определяем самих перемещений и не в состоянии исследовать вопрос о закритическом поведении системы. Для последнего необходимо привлекать нелинейные соотношения. И, наконец, из рассмотренной энергетической оценки вытекает, что нагрузка, соответствующая условию бифуркации форм равновесия, действительно является критической. Это можно считать общим правилом, из которого возможны лишь редкие исключения.

12.3. Задача Эйлера

Теперь мы можем перейти непосредственно к некоторым задачам об устойчивости упругих систем. Начнем с простейшей задачи о равновесии стержня, сжатого центральными силами F (рис. 12.9). Впервые эта задача была поставлена и решена великим математиком Леонардом Эйлером в середине XVIII века. Поэтому часто, когда говорят об устойчивости сжатого стержня, употребляют выражения: «задача Эйлера» или «устойчивость стержня по Эйлеру».

Положим, что по какой-то причине сжатый стержень несколько изогнулся (см. рис. 12.9). Рассмотрим условия, при которых возможно равновесие стержня с изогнутой осью.

Координаты точек упругой линии стержня обозначим через z и y. При малых прогибах

$$EJy'' = M. \qquad (12.4)$$

Изгиб стержня происходит в плоскости минимальной жесткости, и поэтому под величиной J понимается минимальный момент инерции сечения.

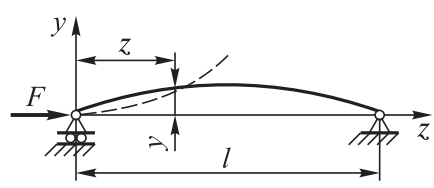


Рис. 12.9

Изгибающий момент M по абсолютной величине равен, очевидно, Fy. Вопрос о знаке изгибающего момента в подобных случаях требует особого обсуждения.

Условимся считать положительным тот момент, который увеличивает кривизну. Рассматривая упругую линию, изображенную на рис. 12.9, замечаем, что сжимающая сила F в алгебраическом смысле кривизну уменьшает. Действительно, при положительном y упругая линия имеет выпуклость вверх. Кривизна упругой линии, следовательно, отрицательна. Момент силы F направлен так, что еще сильнее искривляет упругую линию, делает кривизну «еще более отрицательной», т. е. уменьшает ее. Таким образом,

$$EJy'' = -Fy. \tag{12.5}$$

Для того чтобы в подобных случаях не ошибаться в знаках, можно руководствоваться следующим простым правилом: необходимо, не предугадывая формы упругой линии, изобразить ее на чертеже формально так, чтобы функция y и ее первая и вторая производные были положительны (см. штриховую линию на рис. 12.9). Тогда, рассматривая рисунок, можно безошибочно выписать моменты сил со знаком плюс или минус в зависимости от того, увеличивается или уменьшается кривизна упругой линии под действием внешних сил. Обозначим

$$\frac{F}{EJ} = k^2. \tag{12.6}$$

Тогда уравнение (12.5) примет вид

$$y'' + k^2 y = 0, \tag{12.7}$$

откуда

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \tag{12.8}$$

Постоянные C_1 и C_2 должны быть выбраны так, чтобы были удовлетворены граничные условия: при $z = 0$ $y = 0$ и при $z = l$ $y = 0$. Из первого условия вытекает, что $C_2 = 0$, а из второго — что

$$C_1 \sin kl = 0. \tag{12.9}$$

Это уравнение имеет два решения: $C_1 = 0$ и $\sin kl = 0$.

В первом случае ($C_1 = C_2 = 0$) перемещения y (12.8) обращаются тождественно в нуль, и стержень, следовательно, имеет прямолинейную форму. Этот случай нас не интересует.

Во втором случае $kl = \pi n$, где n — произвольное целое число. Учитывая выражение (12.6), получаем $F = \pi^2 n^2 EJ/l^2$. Это означает,

что для того, чтобы стержень сохранял криволинейную форму, необходимо, чтобы сила F принимала определенное значение. Наименьшая сила F, отличная от нуля, будет при $n = 1$

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{12.10}$$

Эта сила носит название *эйлеровой* или *критической силы*.

При $n = 1$ имеем $kl = \pi$, и уравнение упругой линии (12.8) принимает вид

$$y = C_1 \sin\frac{\pi z}{l}.$$

Стержень изгибается по полуволне синусоиды с максимальным прогибом C_1.

При любом целочисленном значении n

$$y = C_1 \sin\frac{\pi n z}{l},$$

и упругая линия стержня изображается кривой в виде n полуволн (рис. 12.10).

Как и в рассмотренной ранее задаче об устойчивости обращенного маятника, мы видим, что константа C_1 в выражении для упругой линии осталась неопределенной. Перемещения найдены, как говорят, с точностью до постоянного множителя. Кроме того, как и в задаче с маятником, увеличение силы сверх критической снова приводит нас к тривиальному решению. Действительно, в этом случае $kl \neq \pi$; тогда из уравнения (12.9) вытекает, что $C_1 = C_2 = 0$, поскольку $kl \neq 0$. Это означает, что функция (12.8) тождественно равна нулю и стержень остается прямым. Получается, что при $F = F_{\text{кр}}$ стержень принимает криволинейную форму, а при значении F, несколько большем $F_{\text{кр}}$, снова становится прямым, что не вяжется с представлениями о механике изгиба стержня.

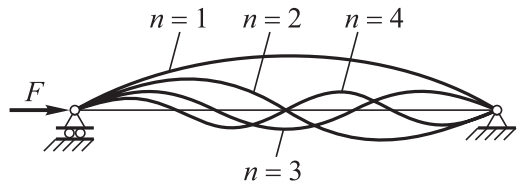


Рис. 12.10

Но теперь эти невязки нас смутить не могут. Мы знаем, что они являются следствием линеаризации уравнения упругой линии. Оно является приближенным и верно лишь при малых прогибах. Если же это уравнение написать точно, то получим

$$\frac{EJy''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -Fy.$$

При силе F, большей критической, перемещения столь велики, что пренебрегать величиной y'^2 в знаменателе нельзя.

Наконец, из рассмотренного примера видно, что у сжатого стержня существуют высшие формы равновесия (n = 2, 3, ...), которым соответствуют и большие значения сил. Эти формы в чистом виде не реализуются. Они неустойчивы. Но если стержень снабдить промежуточными равноотстоящими одна от другой опорами, то соответственно числу пролетов n можно определить и критическую силу.

12.4. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня

В пределах малых перемещений для стержня, шарнирно закрепленного по концам, изгиб при потере устойчивости происходит по полуволне синусоиды, и критическая сила

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Используя особенности упругой линии, мы можем довольно просто распространить полученное решение и на другие случаи закрепления стержня. Так, если стержень на одном конце жестко защемлен, а на другом — свободен (рис. 12.11), то упругую линию стержня путем зеркального отображения относительно заделки легко привести к упругой линии шарнирно закрепленного стержня. Очевидно, критическая сила для защемленного одним концом стержня длиной l будет равна критической силе шарнирно закрепленного стержня, имеющего длину $2l$. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}.$$

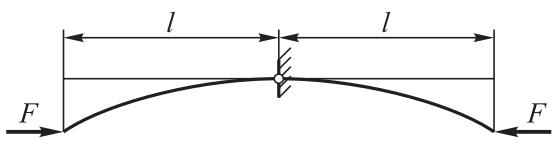


Рис. 12.11

Шарнирно закрепленный стержень, имеющий посредине опору (рис. 12.12), при потере устойчивости изогнется по двум полуволнам. Следовательно, каждая его половина теряет устойчивость как шарнирно опертый стержень, имеющий длину $l/2$. Поэтому

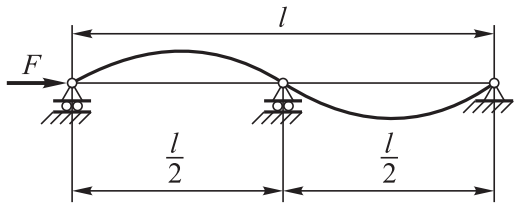


Рис. 12.12

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 El}{(l/2)^2}.$$

Обобщая полученные формулы, можно написать общее выражение критической силы для сжатого стержня в виде

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \qquad (12.11)$$

где μ — так называемый *коэффициент приведения длины*, $\mu = 1/n$; n — число полуволн.

Коэффициент μ — это число, показывающее, во сколько раз следует увеличить длину шарнирно опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе стержня длиной l в рассматриваемых условиях закрепления. Для стержня, защемленного на одном конце и свободного на другом, $\mu = 2$; для стержня, приведенного на рис. 12.12, $\mu = 1/2$.

На рис. 12.13 показано несколько видов закрепления стержня и указаны соответствующие значения коэффициента приведения длины μ. Во всех случаях, кроме последнего, значение μ опреде-

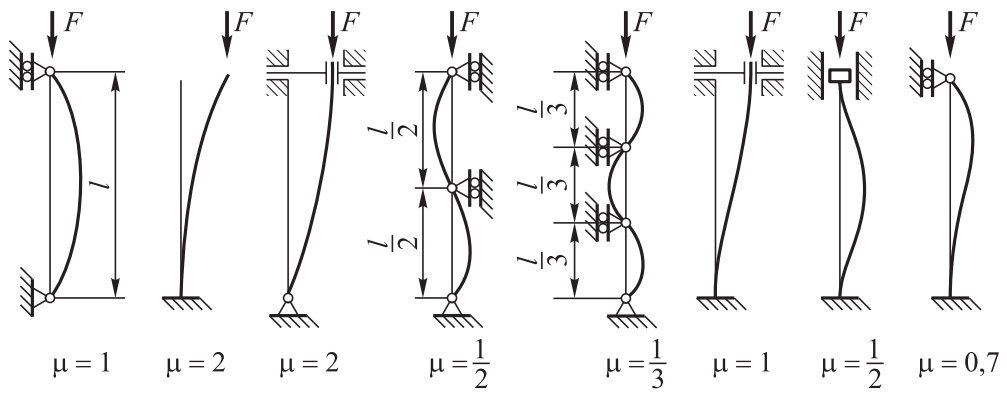


Рис. 12.13

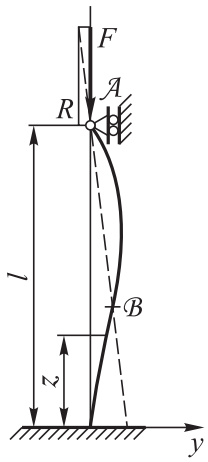


Рис. 12.14

ляют путем простого сопоставления упругой линии изогнутого стержня с длиной полуволны синусоиды при шарнирном закреплении.

Последний случай из показанных на рис. 12.13 нужно рассмотреть особо. Здесь на упругой линии стержня имеются две точки, в которых кривизна равна нулю: точка $\mathcal{A}$ и точка $\mathcal{B}$ (рис. 12.14). В отличие от других случаев эти точки не находятся на прямой, параллельной линии действия силы F. Следовательно, здесь возникает поперечная сила R (см. рис. 12.14), которая в рассмотренных ранее случаях закрепления отсутствовала.

Составим дифференциальное уравнение упругой линии изогнутого стержня. Очевидно,

$$EJy'' = -Fy + R(l - z),$$

или же

$$y'' + k^2 y = \frac{R}{EJ}(l - z),$$

откуда

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + \frac{R}{EJk^2}(l - z).$$

Постоянные C_1, C_2 и R должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись следующие граничные условия: при $z = 0$ $y = 0$ и $y' = 0$, а при $z = l$ $y = 0$. Соответственно этим условиям выписываем три уравнения:

$$C_2 + \frac{Rl}{EJk^2} = 0, \quad C_1 k - \frac{R}{EJk^2} = 0,$$
$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

Теперь имеются две возможности.

1. Система дает решение $C_1 = C_2 = 0$, $R = 0$. Тогда $y \equiv 0$ и стержень остается прямым. Этот случай нас не интересует.

2. Постоянные C_1, C_2 и R не все равны нулю, и стержень, следовательно, получает поперечные перемещения.

Система однородных уравнений дает ненулевое решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Таким образом, получаем условие искривления стержня в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dfrac{l}{EJk^2} \\ k & 0 & -\dfrac{1}{EJk^2} \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} kl = kl. \qquad (12.12)$$

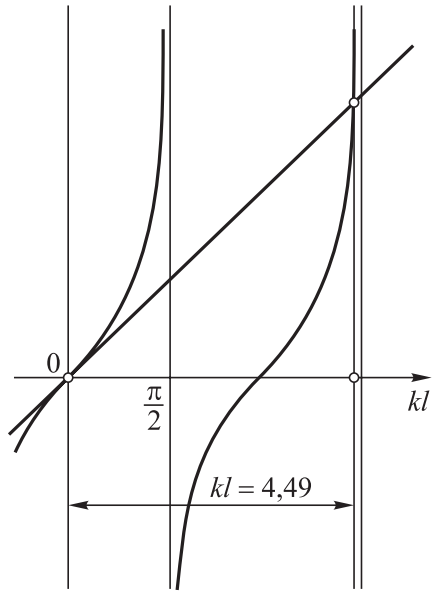


Рис. 12.15

Это трансцендентное уравнение должно быть решено относительно kl.

Надо сказать, что в задачах, связанных с определением критических сил, необходимость решать трансцендентные уравнения является скорее правилом, чем исключением.

В данном примере и ему подобных проще всего предварительно изобразить на чертеже зависимость от kl правой и левой частей уравнения (рис. 12.15). Из таких графиков всегда можно ориентировочно установить, где следует искать наименьший, отличный от нуля корень. В данном примере видно, что искомое kl имеет значение, несколько меньшее $3\pi/2$. Затем, задавшись, например, значением $kl_1 = 4$, проделаем несколько раз операцию

$$\operatorname{arctg} kl_i + \pi = kl_{i+1}.$$

В итоге

$$kl = \sqrt{\frac{F}{EJ}}\,l = 4,49.$$

Тогда

$$F_{\text{кр}} = \frac{4,49^2\,EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}.$$

Таким образом, $\mu \approx 0,7$.

Рассмотрим несколько более сложных примеров на определение критических сил.

Пример 12.1. Определить критическую силу для стержня с двумя участками различной жесткости (рис. 12.16), если жесткость одного участка в четыре раза больше жесткости другого.

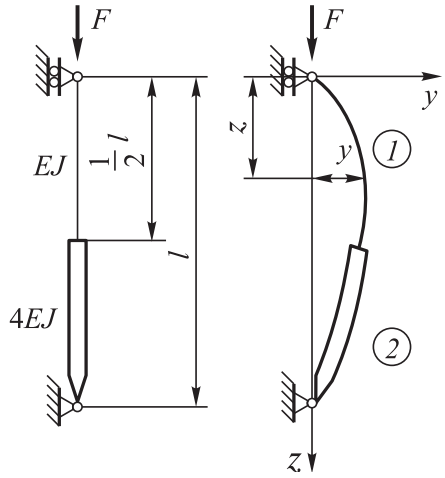


Рис. 12.16

Соответственно для первого и второго участков получаем уравнения

$$EJy_1'' + Fy_1 = 0; \qquad 4EJy_2'' + Fy_2 = 0.$$

Обозначаем $\dfrac{F}{4EJ} = k^2$. Тогда

$$y_1'' + 4k^2y_1 = 0; \qquad y_2'' + k^2y_2 = 0,$$

откуда

$$y_1 = C_1 \sin 2kz + C_2 \cos 2kz;$$

$$y_2 = C_3 \sin kz + C_4 \cos kz.$$

Из условия, что при $z = 0$ прогиб $y_1 = 0$, получаем $C_2 = 0$.

Далее, имеем еще три условия: при $z = l/2$ перемещения $y_1 = y_2$ и $y_1' = y_2'$, при $z = l$ прогиб $y_2 = 0$. Соответственно записываем три уравнения:

$$C_1 \sin kl = C_3 \sin \frac{kl}{2} + C \cos \frac{kl}{2};$$

$$2C_1 \cos kl = C_3 \cos \frac{kl}{2} - C \sin \frac{kl}{2};$$

$$C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0.$$

Приравниваем нулю определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \sin kl & -\sin \dfrac{kl}{2} & -\cos \dfrac{kl}{2} \\ 2\cos kl & -\cos \dfrac{kl}{2} & \sin \dfrac{kl}{2} \\ 0 & \sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0$$

и получаем два уравнения: $\sin \dfrac{kl}{2} = 0$ и $^2 \dfrac{kl}{2} = 2$g Наименьший,. отличный от нуля корень находим из условия $\operatorname{tg} \dfrac{kl}{2} = \sqrt{2}$, $kl/2 = 0{,}955$.

Тогда $F_{\text{кр}} = \dfrac{14{,}6EJ}{l^2}$.

Пример 12.2. Определить критическую силу для шарнирно закрепленного стержня, нагруженного продольной силой посередине (рис. 12.17).

Здесь для первого и второго участков имеем

$$EJy_1'' = -F\frac{f}{l}z;$$

$$EJy_2'' = -F\frac{f}{l}z + F(f - y_2),$$

или

$$y_1'' = -\frac{k^2 f}{l}z; \quad y_2'' + k^2 y_2 = k^2 f\left(1 - \frac{z}{l}\right),$$

откуда

$$y_1 = -\frac{k^2 f}{l}\frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2;$$

$$y_2 = C_3 \sin kz + C_4 \cos kz + f\left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

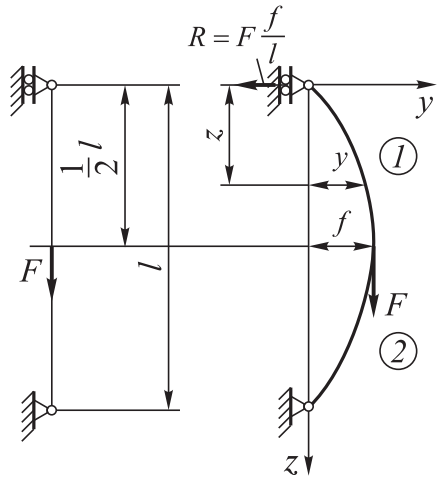


Рис. 12.17

При $z = 0$ прогиб $y_1 = 0$. Следовательно, $C_2 = 0$. При $z = l/2$ перемещения $y_1 = f$, $y_2 = f$ и $y_1' = y_2'$, а при $z = l$ прогиб $y_2 = 0$. Таким образом, получаем следующие четыре уравнения:

$$-\frac{k^2 f}{l}\frac{l^3}{48} + C_1\frac{l}{2} = f;$$

$$C_3 \sin\frac{kl}{2} + C_4 \cos\frac{kl}{2} + \frac{1}{2}f = f;$$

$$-\frac{k^2 fl}{8} + C_1 = C_3 k\cos\frac{kl}{2} - C_4 k\sin\frac{kl}{2} - \frac{f}{l};$$

$$C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0.$$

Приравниваем нулю определитель этой системы, рассматривая C_1, C_3, C_4 и f как неизвестные:

$$\begin{vmatrix} \frac{l}{2} & 0 & 0 & -1 - \frac{k^2 l^2}{48} \\ 0 & \sin\frac{kl}{2} & \cos\frac{kl}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -k\cos\frac{kl}{2} & k\sin\frac{kl}{2} & \frac{1}{l} - \frac{k^2 l}{8} \\ 0 & \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда

$$\operatorname{tg}\frac{kl}{2} = \frac{3kl/2}{(kl/2)^2 - 9}.$$

Наименьший корень этого уравнения $kl/2 = 2{,}16$. Тогда

$$F_{\text{кр}} \approx \frac{18{,}7EJ}{l^2}.$$

Пример 12.3. Определить критическую силу для защемленного стержня, к свободному концу которого передается через жесткий шатун длиной a сила F (рис. 12.18).

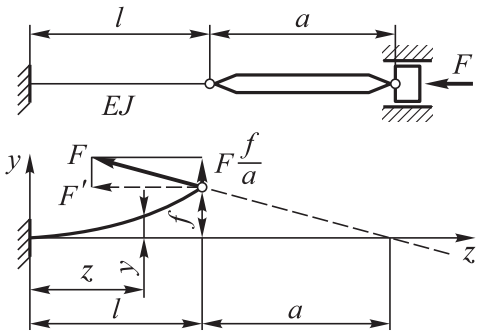


Рис. 12.18

Отбрасываем жесткий шатун и прикладываем к упругому стержню продольную силу $F' \approx F$ и поперечную силу Ff/a. Тогда

$$EJy'' = F(f - y) + F\frac{f}{a}(l - z),$$

или

$$y'' + k^2 y = k^2 f\left(1 + \frac{l}{a} - \frac{z}{a}\right),$$

откуда

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + f\left(1 + \frac{l}{a} - \frac{z}{a}\right).$$

Далее, имеем граничные условия: при $z = 0$, $y = 0$ и $y' = 0$, а при $z = l$, $y = f$.

Таким образом, получаем три уравнения:

$$C_2 + f\left(1 + \frac{l}{a}\right) = 0; \quad C_1 k - f\frac{1}{a} = 0; \quad C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$\text{g}\, kl = kl\left(1 + \frac{a}{l}\right) \quad \text{t} \qquad ,$$

из которого находим критическую силу в зависимости от отношения a/l.

В частности, при $a = 0$ приходим к уравнению (12.12), а при $a = \infty$ критическая сила оказывается равной $\dfrac{\pi^2 EJ}{4l^2}$, что и было получено ранее для защемленного одним концом стержня.

Последний пример заслуживает дополнительного обсуждения.

Упругий стержень нагружен сжимающей силой, но она передается через жесткий шатун и при отклонении стержня меняет на-

правление линии своего действия. Поэтому критическая сила зависит от длины шатуна. Выясняется, что устойчивость определяется не только условиями закрепления стержня и самой силой, но и ее поведением при малых возмущениях.

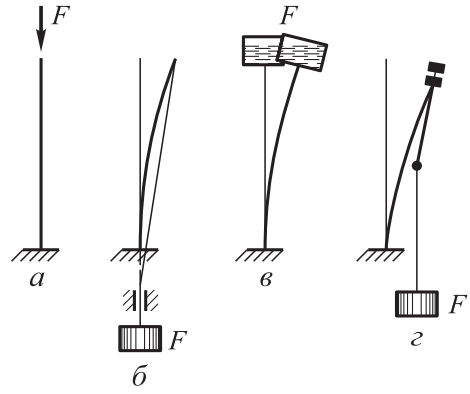


Рис. 12.19

Если никаких оговорок о поведении силы не делается, то принято считать, что при отклонении стержня сила F (рис. 12.19, *а*) сохраняет направление вертикали. Но, вообще говоря, об устойчивости стержня, показанного на рис. 12.19, *а*, ничего сказать нельзя, пока не задан характер поведения приложенных сил. А возможностей здесь много. В частности, на рис. 12.19, *б — г* показаны примеры одинаково, казалось бы, нагруженных стержней, имеющих, однако, различные значения критических сил.

12.5. Устойчивость плоской формы изгиба

Хорошо известно, что в некоторых случаях плоская форма изгиба стержня становится неустойчивой и при потере устойчивости происходит изгиб в еще одной (второй) плоскости и одновременно возникает кручение. Наиболее заметно это проявляется у стержней, имеющих большую жесткость в плоскости действия внешних сил и малую жесткость — во второй главной плоскости.

Рассмотрим брус (рис. 12.20), нагруженный на концах моментами, действующими в вертикальной плоскости. Условия закрепления на концах будем считать допускающими свободный поворот сечения при изгибе как в одной, так и в другой плоскости и в то же время запрещающими поворот при кручении. Жесткость в плоскости заданных внешних моментов предполагаем достаточно большой. Это позволяет

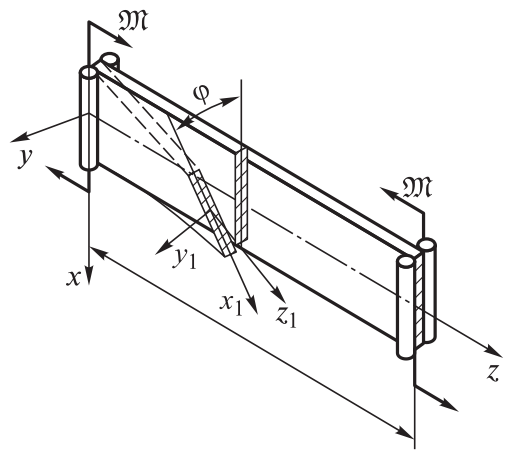


Рис. 12.20

считать, что до потери устойчивости брус сохраняет в основном прямолинейную форму.

Представим себе, что брус изогнулся в плоскости, перпендикулярной плоскости моментов $\mathfrak{M}$, и одновременно закрутился. На рис. 12.20 форма изогнутого бруса показана так, что перемещение y и его первая и вторая производные положительны. Это исключает ошибку в знаках при составлении уравнений.

В произвольном сечении, расположенном на расстоянии z от левого конца, изгибающий момент относительно оси x_1 (см. рис. 12.20)

$$M = -\mathfrak{M}\varphi,$$

где φ — угол поворота рассматриваемого сечения относительно продольной оси. Знак минус поставлен в связи с тем, что момент M направлен в сторону уменьшения кривизны.

Крутящий момент в том же сечении

$$M_к = \mathfrak{M}\theta,$$

где $\theta = y'$ — угол поворота сечения относительно вертикальной оси, а $\mathfrak{M}\theta$ — составляющая момента $\mathfrak{M}$ относительно оси z_1 (см. рис. 12.20).

Пользуясь известными соотношениями

$$EJ\theta' = M; \qquad GJ_к\varphi' = M_к,$$

получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$EJ\theta' = -\mathfrak{M}\varphi; \qquad GJ_к\varphi' = \mathfrak{M}\theta. \tag{12.13}$$

Здесь под EJ понимается жесткость стержня на изгиб в направлении, перпендикулярном плоскости действия внешних моментов $\mathfrak{M}$. Величина $GJ_к$ представляет собой жесткость на кручение. Исключив из уравнений (12.13) θ, получим

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{\mathfrak{M}^2}{GJ_к EJ}, \tag{12.14}$$

отсюда

$$\varphi = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \tag{12.15}$$

Функция φ должна обращаться в нуль при $z = 0$ и $z = l$. Значит, $C_2 = 0$ и $C_1 \sin kl = 0$.

Как и для шарнирно защемленного стержня, $C_2 = 0$, $\sin kl = 0$. Наименьшее, отличное от нуля значение критического момента определяется из условия $kl = \pi$.

Согласно выражению (12.14), находим

$$\mathfrak{M}_{\text{кр}} = \frac{\pi}{l}\sqrt{GJ_{\text{к}}EJ}.$$

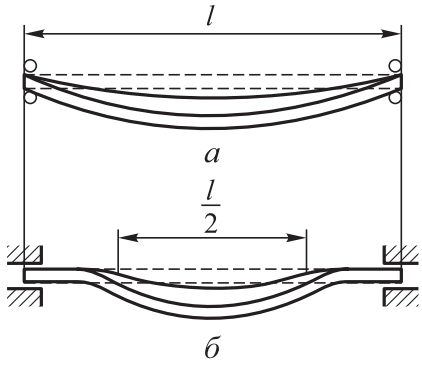


Рис. 12.21

Выражение (12.15) принимает вид

$$\varphi = C_1 \sin\frac{\pi z}{l}.$$

Примерная форма стержня после потери устойчивости показана на рис. 12.21, *а*.

Воспользовавшись методом приведения длины, как это делалось для сжатых стержней, можно установить, что в случае защемленных концов (рис. 12.21, *б*)

$$\mathfrak{M}_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{EJGJ_{\text{к}}}.$$

Задачи об устойчивости плоской формы изгиба при нагружении стержня поперечными силами оказываются существенно более сложными, чем рассмотренная выше, поскольку изгибающий момент в плоскости нагружения меняется вдоль оси.

12.6. Устойчивость колец и труб при нагружении их внешним давлением

Рассмотрим задачу об устойчивости кольца, сжатого радиальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 12.22). При некотором значении этой нагрузки круговая форма кольца становится неустойчивой, и кольцо изгибается, принимая примерно эллиптическую форму (см. рис. 12.22).

Выделим из изогнутого кольца элементарный участок длиной ds (рис. 12.23). Местный радиус кривизны обозначим через r. Будем считать, что эта величина мало отличается от начального радиуса кривизны R.

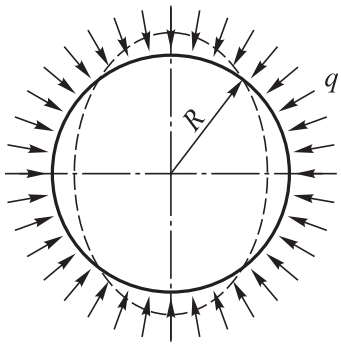


Рис. 12.22

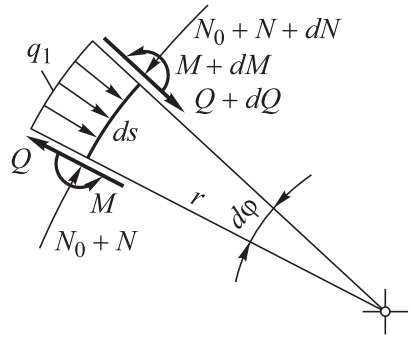


Рис. 12.23

В поперечных сечениях изогнутого кольца возникают нормальные силы и изгибающие моменты. Нормальную силу представим состоящей из двух частей: из слагаемого N_0, т. е. той силы, которая возникла в поперечных сечениях кольца до потери устойчивости, и из слагаемого N, представляющего собой малое изменение нормальной силы вследствие изгиба кольца.

Таким образом, нормальная сила равна $N_0 + N$. Из условий равновесия в докритическом состоянии очевидно, что

$$N_0 = qR. \tag{12.16}$$

Теперь составим уравнения равновесия для изогнутого элемента (рис. 12.23). Проецируя все силы на направление нормали, получаем

$$q\,ds + dQ - (N_0 + N)\frac{ds}{r} = 0,$$

или, учитывая выражение (12.16),

$$q\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{R}\frac{dQ}{ds} - \frac{N}{rR} = 0.$$

Изменение кривизны обозначим через $\varkappa$:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \varkappa. \tag{12.17}$$

Далее, поскольку $r \approx R$, получим

$$-q\varkappa + \frac{1}{R}\frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R^2} = 0.$$

Составляем еще два уравнения равновесия:

$$\frac{Q}{R}+\frac{dN}{ds}=0,\ \ \frac{dM}{ds}+Q=0.$$

Из трех уравнений равновесия исключаем величины Q и N. Тогда

$$q\frac{d\varkappa}{ds}+\frac{1}{R}\frac{d^3M}{ds^3}+\frac{1}{R^3}\frac{dM}{ds}=0,$$

или после интегрирования

$$q\varkappa+\frac{1}{R}\frac{d^2M}{ds^2}+\frac{1}{R^3}M=C_1. \qquad (12.18)$$

Но момент M связан с изменением кривизны (12.17) известным соотношением

$$M=EJ\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)=EJ\varkappa.$$

Исключая из выражения (12.18) момент M, получаем уравнение относительно одного неизвестного $\varkappa$:

$$\frac{d^2\varkappa}{ds^2}+k^2\varkappa=C_1\frac{R}{EJ}, \qquad (12.19)$$

где

$$k^2=\frac{1}{R^2}+\frac{qR}{EJ}. \qquad (12.20)$$

Решаем уравнение (12.19):

$$\varkappa=C_1\frac{R}{k^2EJ}+C\ \sin ks+C_2\ \cos ks. \qquad (12.21)$$

Для замкнутого кольца критическую нагрузку проще всего определить из условия периодичности решения (12.21). Действительно, если переменное s увеличить на полную длину дуги кольца, т. е. на $2\pi R$, функция $\varkappa$ должна остаться неизменной. Но для этого необходимо, чтобы ks изменилось на величину, кратную 2π. Таким образом, $k(s+2\pi R)-ks=2\pi n$, где n — любое целое число. Тогда $kR=n$. Согласно (12.20), получаем

$$q_{\text{кр}}=\frac{(n^2-1)EJ}{R^3}. \qquad (12.22)$$

Наименьшее значение, отличное от нуля, $q_{кр}$ имеет при $n = 2$:

$$q_{кр} = \frac{3EJ}{R^3}. \qquad (12.23)$$

В этом случае кривизна $\varkappa$ при обходе кольца получает два полных периода изменения, как это видно на рис. 12.22. Кольцо изгибается по четырем полуволнам, принимая форму, близкую к эллипсу.

Если кольцо подкрепить четным числом $2n$ ($n > 2$) равноотстоящих друг от друга опор (рис. 12.24), то изгиб произойдет по $2n$ полуволнам, и критическое значение q будет определяться выражением (12.22) для заданного n.

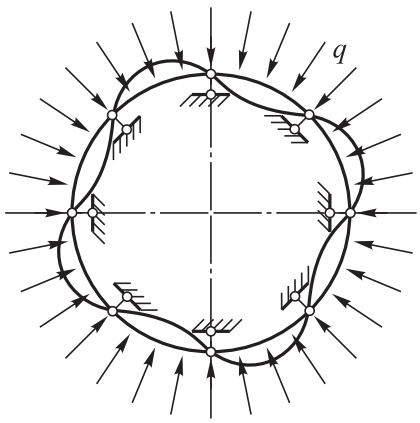


Рис. 12.24

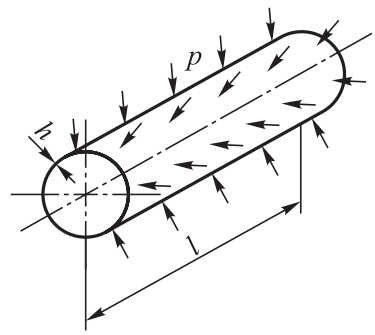


Рис. 12.25

Результаты, полученные для кольца, без труда распространяются на случай длинных труб, нагруженных внешним давлением p (рис. 12.25). В данном случае $q = pl$, а жесткость оболочки на изгиб будет $\dfrac{Eh^3 l}{12(1-\mu^2)}$, где множитель $1 - \mu^2$ в знаменателе является следствием «стесненности» изгиба, — предположения, что образующие цилиндра (рис. 12.25) не искривляются.

Таким образом,

$$p_{кр} = \frac{(n^2-1)Eh^3}{12(1-\mu^2)R^3}.$$

Более сложно выглядит задача определения критического давления в случае короткой оболочки, когда искривляется образующая цилиндра. Точно так же сложнее определяются критические нагрузки для незамкнутых колец, т. е. для арок.

12.7. Энергетический метод определения критических нагрузок

Энергетический *метод* определения критических нагрузок и энергетический *подход* к их определению — не совсем одно и то же.

Энергетический подход содержит в своей основе поиск условий, при которых энергия равновесной системы сохраняет минимум (система остается устойчивой). Он широко используется в технике машинных расчетов и имеет различные модификации. О них мы сейчас говорить не будем.

Энергетический метод, название которого вынесено в заголовок, представляет собой способ приближенного определения критических нагрузок. Он имеет довольно длительную историю развития и до недавнего времени занимал доминирующее положение среди практических расчетов инженерных сооружений. Сейчас, однако, в связи с развитием вычислительных средств он в том виде, в каком традиционно применялся, потеснен другими, более эффективными методами расчета. Тем не менее о нем надо знать. Он может порой принести ощутимую пользу, и к нему следует во всяком случае относиться с должным уважением.

Положим, что стержень (рис. 12.26) сжат силой F, меньшей критического значения. В этом случае он находится в устойчивом положении равновесия. Его можно изогнуть, прикладывая к нему поперечную нагрузку (сила F_1). При переходе стержня от прямолинейной формы равновесия к криволинейной силы F и F_1 совершат работу, в результате чего увеличится потенциальная энергия изгиба стержня. Энергетический баланс системы можно выразить в виде уравнения

$$U_{\text{изг}} = F\lambda + W(F_1), \qquad (12.24)$$

где $W(F_1)$ — работа поперечной силы F_1, а λ — перемещение точки приложения продольной силы. Произведение $F\lambda$, в отличие от рассматривавшихся ранее случаев, множителя 1/2 не имеет, поскольку на пути λ сила F остается неизменной.

Одна и та же энергия изгиба $U_{\text{изг}}$ может быть получена при различных соотношениях сил F и F_1. Из уравнения (12.24) видно, что при неизменном $U_{\text{изг}}$ большей силе F соответствует меньшее значение поперечной силы F_1. Возможен, очевидно, случай, когда переход от пря-

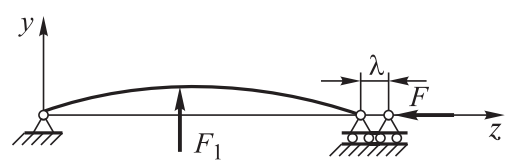


Рис. 12.26

молинейной формы равновесия к криволинейной произойдет без приложения добавочных поперечных сил. Это имеет место, как мы знаем, при критическом значении продольной силы. Уравнение (12.24) в этом случае принимает вид

$$U_{\text{изг}} = F_{\text{кр}}\lambda. \tag{12.25}$$

В обычных системах, например при изгибе балки, поперечные нагрузки производят работу на прогибах, являющихся перемещениями первого порядка малости. Полученное выражение (12.25) имеет своей отличительной особенностью то, что в нем учитывается работа внешних сил на перемещениях второго порядка малости λ. Именно это обстоятельство и характерно для задач, связанных с явлением потери устойчивости.

Выразим величины $U_{\text{изг}}$ и λ через поперечные перемещения стержня y (рис. 12.27).

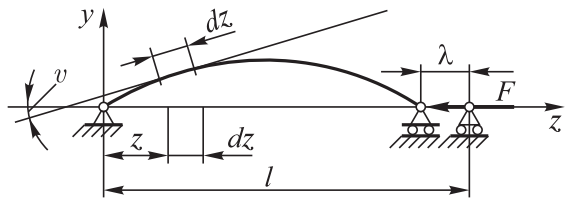


Рис. 12.27

Энергия изгиба выражается через изгибающий момент следующим образом:

$$U_{\text{изг}} = \int_0^l \frac{M_{\text{изг}}^2 dz}{2EJ}.$$

Учитывая, что $M_{\text{изг}} = EJy''$, получим

$$U_{\text{изг}} = \frac{1}{2}\int_0^l EJy''^2 dz. \tag{12.26}$$

Перемещение λ может быть определено как разность между длиной l и проекцией изогнутой упругой линии на прямую, соединяющую опоры. Очевидно (см. рис. 12.27),

$$d\lambda = dz - dz\cos v \approx \frac{v^2}{2}dz.$$

Но при малых прогибах $v = y'$. Поэтому

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l y'^2 dz. \tag{12.27}$$

Таким образом, из выражения (12.25) находим

$$F_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l EJy''^2 dz}{\int_0^l y'^2 dz}. \tag{12.28}$$

Если функция y известна, то $F_{\text{кр}}$ определяется без труда. Например, для шарнирно закрепленного стержня (см. рис. 12.27), как мы уже знаем, $y = C\sin\frac{\pi z}{l}$. После подстановки y в выражение (12.28) находим уже известное значение

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

В действительности функция y остается неизвестной до тех пор, пока не решено дифференциальное уравнение упругой линии. Получается, что для определения критической силы надо вернуться к прежнему методу решения.

Однако функция y может быть задана приближенно. При этом погрешности в форме упругой линии мало сказываются на величине критической силы. Поэтому можно получить достаточно точное решение, задаваясь функцией y из простых физических соображений, т. е. примерно «угадывая» форму упругой линии.

Допустим, нам не известно, что стержень, шарнирно закрепленный по концам, при потере устойчивости изгибается по полуволне синусоиды. Зададимся какой-либо другой «похожей» кривой. Примем, например, что стержень изгибается по дуге параболы:

$$y = Cz(l - z). \tag{12.29}$$

Выбирая функцию, мы, естественно, должны следить за тем, чтобы она удовлетворяла граничным условиям. В данном случае при $z = 0$ и $z = l$ перемещение y обращается в нуль, и граничные условия соблюдаются. Вместе с тем можно сказать, что выбранная функция не очень удачна, поскольку $y'' = \text{const}$. Это означает, что

кривизна стержня при потере устойчивости постоянна, в то время как на самом деле она максимальна посередине и равна нулю по концам стержня.

Посмотрим, однако, что дает приближенный прием в этом случае. Подставляя принятую функцию (12.29) в выражение (12.28), вместо $F_{\text{кр}} = \dfrac{\pi^2 EJ}{l^2}$ находим

$$F_{\text{кр}} = \frac{12EJ}{l^2}.$$

Даже при этом, довольно грубом, приближении ошибка, как видим, не столь велика.

Точность решения может быть резко увеличена, если учесть характер изменения изгибающего момента по длине стержня. Можно, например, принять, что по закону квадратной параболы изменяется не прогиб, а кривизна. Тогда

$$y'' = Cz(l - z).$$

После интегрирования получим

$$y' = C\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} + a\right).$$

Постоянную a подбираем так, чтобы y' обратилось в нуль посередине стержня. Тогда

$$y' = \frac{1}{12}C\left(6lz^2 - 4z^3 - l^3\right).$$

Подставляем y' и y'' в выражение (12.28) и после интегрирования находим

$$F_{\text{кр}} = \frac{168}{17}\frac{EJ}{l^2},$$

что только в третьем знаке отличается от точного значения критической силы.

Если вернуться к достаточно громоздкому примеру 12.2, то и для него можно довольно легко получить значение критической силы энергетическим методом. Поскольку сила приложена посередине длины стержня (см. рис. 12.17), интегрирование величины λ (12.27) следует вести от $l/2$ до l, и взамен выражения (12.28) получаем

$$F_{\text{кр}} = \frac{\int\limits_0^l EJy''^2 dz}{\int\limits_{l/2}^l y'^2 dz}.$$

Примем, что $y = C\sin\dfrac{\pi z}{l}$. Тогда после интегрирования находим $F_{\text{кр}} = \dfrac{2\pi^2 EJ}{l^2}$. Точное решение дает $F_{\text{кр}} = \dfrac{18{,}7\,EJ}{l^2}$.

Рассмотренные примеры убеждают нас в том, что приближенным методом можно без особого труда получить достаточно точное значение критических сил.

В заключение приведем еще один пример.

Пример 12.4. Определить критическую нагрузку для защемленного стержня, находящегося под действием сил собственного веса q (рис. 12.28).

Задаемся уравнением упругой линии изогнутого стержня в виде

$$y = C\left(1 - \cos\frac{\pi z}{2l}\right).$$

Легко убедиться в том, что это выражение удовлетворяет граничным условиям.

Определяем энергию изгиба:

$$U_{\text{изг}} = \frac{1}{2}\int_0^l EJy''^2 dz = \frac{1}{4}EJC^2 l\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4.$$

Для того чтобы найти работу сил q при переходе от прямолинейной формы к криволинейной, подсчитаем, согласно выражению (12.27), значение λ_z (см. рис. 12.28):

$$\lambda_z = \frac{1}{2}\int_0^l y'^2 dz = \frac{1}{4}C^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\left(z - \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi z}{l}\right).$$

Работа сил q будет следующей:

$$\int_0^l q\lambda_z dz = \frac{1}{4}qC^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\left(\frac{l^2}{2} - \frac{2l^2}{\pi^2}\right).$$

Приравнивая эту работу энергии изгиба, находим

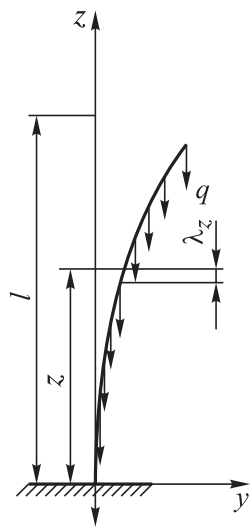


Рис. 12.28

$$q_{\text{кр}} = \frac{EJ}{2l^3}\frac{\pi^4}{\pi^2 - 4} \approx \frac{8{,}29EJ}{l^3};$$

точное решение дает

$$q_{\text{кр}} = \frac{7{,}83EJ}{l^3}.$$

Характерной особенностью энергетического метода является то, что ошибка в определении критических нагрузок всегда имеет один знак. Приближенное значение критической силы оказывается завышенным по сравнению с точным. Объясняется это тем, что, задаваясь приближенно формой упругой линии, мы как бы накладываем на систему лишние связи, заставляем ее деформироваться несвойственным ей образом и тем самым увеличиваем в среднем ее жесткость.

12.8. Метод начальных параметров

Остановимся на одном из наиболее распространенных машинных методов определения критических нагрузок — методе начальных параметров.

Выберем для наглядности какой-нибудь достаточно простой пример и опишем алгоритм вычислений с таким расчетом, чтобы просматривались возможности экстраполяции метода и на более сложные задачи.

Положим, нам необходимо определить критическую силу для стержня, имеющего промежуточную упругую опору с коэффициентом жесткости c (рис. 12.29). Это означает, что реакция промежуточной опоры в точке A при положительном перемещении y_A

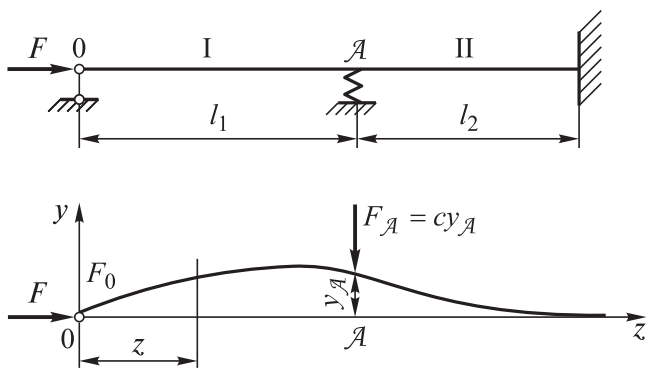


Рис. 12.29

будет направлена вниз и имеет величину $cy_Д$. Жесткость стержня на изгиб будем считать переменной.

Поместим начало координат на левой опоре. Ее отбросим, а реакцию обозначим F_0.

Напишем уравнение упругой линии:

$$EJy'' = M = -Fy + F_0 z|_{\text{I}} - F_Д (z - l_1)|_{\text{II}}. \qquad (12.30)$$

Вертикальные разграничительные линии показывают, какие слагаемые для каких участков необходимо брать при вычислении изгибающего момента. Для первого участка надо взять два слагаемых, для второго — три. Такой способ записи может быть применен при любом числе участков.

Введем обозначение $y' = \theta$ и запишем уравнение (12.30) в форме двух уравнений первого порядка:

$$\theta' = -\frac{F}{EJ}y + \frac{F_0}{EJ}z\Big|_{\text{I}} - \frac{F_Д}{EJ}(z - l_1)\Big|_{\text{II}}, \quad y' = \theta. \qquad (12.31)$$

Далее надо выбрать шаг интегрирования Δz, затем необходимо предусмотреть процедуру вычисления EJ для текущего значения z и, наконец, в программе должен быть ключ к переходу от первого участка ко второму. При этом вычисляется сила $F_Д = cy_Д$, а затем при вычислении правой части первого уравнения (12.31) вместо двух берутся все три слагаемых.

Интегрирование может проводиться любым из доступных для машины способом: Рунге — Кутта, Адамса... Можно обойтись и бесхитростным интегрированием по Эйлеру:

$$\Delta\theta_i = \left(\frac{M}{EJ}\right)_{i-1} \Delta z, \quad \Delta y_i = \theta_{i-1}\Delta z.$$

Как бы то ни было, но, чтобы двигаться по оси z, необходимо знать начальные параметры, те самые, именем которых назван метод. В рассматриваемом примере известно, что в начале интегрирования, т. е. при $z = 0$, перемещение y_0 равно нулю, а начальные параметры θ_0 и F_0 остаются неопределенными. Они должны быть выбраны так, чтобы выполнялись условия закрепления на правом конце стержня: при $z = l_1 + l_2 = L$ перемещение y_L и угол θ_L должны обращаться в нуль.

Но чтобы найти критическую силу, незачем определять θ_0 и F_0, а надо следовать уже известным нам следующим традиционным рассуждениям.

Так как мы рассматриваем линейную задачу, то конечные параметры линейно зависят от начальных:

$$y_L = a_{11} y_0 + a_{12} \theta_0,$$
$$\theta_L = a_{21} y_0 + a_{22} \theta_0, \qquad (12.32)$$

где a_{ik} — неизвестные пока коэффициенты.

Если граничные условия в конце интервала интегрирования удовлетворяются, то

$$a_{11} y_0 + a_{22} \theta_0 = 0, \; a_{21} y_0 + a_{22} \theta_0 = 0.$$

Эта система однородных уравнений дает для y_0 и θ_0 нулевые значения, что соответствует тривиальной прямолинейной форме равновесия стержня. Чтобы система имела ненулевые решения, надо, чтобы определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (12.33)$$

был равен нулю. Из этого условия и определяется значение критической силы.

Кажется непонятным, как найти значения коэффициентов a_{ik}. Делается это очень просто. Зададимся прежде всего некоторым значением силы F, заведомо меньшим критического. Можно, например, отбросить промежуточную опору, а наименьшую жесткость принять постоянной по всей длине стержня. Критическая сила в таком случае известна, и она несомненно меньше ее истинного значения для рассматриваемой системы. Далее проведем интегрирование уравнений (12.31), положив $y = 1$, а $\theta_0 = 0$. Тогда, согласно выражениям (12.32), полученное y_L и есть a_{11}, а $\theta_L = a_{21}$. Затем надо повторить интегрирование при $y_0 = 0$ и $\theta_0 = 1$. Этим будут определены a_{12} и a_{22}. Остается найти определитель (12.33). Он, конечно, в нуль не обращается. И неудивительно. Сила F не равна критической.

Дальнейшее понятно. Даем силе F небольшое приращение ΔF и многократно повторяем описанные операции, пока не сменится знак D. Это означает, что определитель прошел через нуль, а сила — через свое критическое значение. Дальше, естественно, можно последний интервал ΔF пройти с меньшим шагом, еще с меньшим, проинтерполировать... Словом, можно приблизиться к критическому значению силы с необходимой точностью.

Описанная последовательность операций типична для численного определения критических сил, и такого рода процедуры широко используются, особенно в тех случаях, где необходимо не просто найти критическую силу, но и выбрать оптимальное конструктивное решение. Тогда процедура определения критических

сил рассматривается как подпрограмма, входящая в некоторую более общую программу.

Решение подобных задач, как, впрочем, и вообще любых задач, требует от учащегося определенного навыка. Надо не только свободно владеть машиной — это подразумевается само собой... Необходима еще и культура в обращении с уравнениями. Перед выходом на машину их следует должным образом преобразовать. Приемы бывают разные, но универсальный и почти обязательный — сведение уравнений к безразмерной форме. Было бы, например, в высшей степени нерационально при интегрировании уравнений (12.31) координату z подставлять в метрах или сантиметрах, а критическую силу определять в ньютонах. Такое решение было бы лишено не только элегантности, но и минимально требуемой общности.

Обратимся к уравнениям и посмотрим, что можно с ними сделать.

Прежде всего, вместо переменной z удобно ввести безразмерную переменную $\zeta = z/L$, где $L = l_1 + l_2$ (см. рис. 12.29). Переменная ζ меняется от нуля до единицы. Безразмерная координата точки $\mathcal{A}$ будет $\zeta_{\mathcal{A}} = l_1/L$. Вместо y введем переменную $\eta = y/L$. Тогда уравнения (12.31) примут вид

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{FL^2}{EJ}\eta + \frac{F_0L^2}{EJ}\zeta\Big|_{\text{I}} - \frac{cL^3}{EJ}\eta_{\mathcal{A}}\left(\zeta - \zeta_{\mathcal{A}}\right)\Big|_{\text{II}}; \quad \frac{d\eta}{d\zeta} = \theta.$$

По условию жесткость стержня на изгиб EJ есть величина переменная, зависящая от ζ. Представим ее в виде безразмерной функции с размерным коэффициентом, т. е. в следующем виде:

$$EJ = EJ_0\frac{EJ}{EJ_0} = EJ_0 f(\zeta),$$

где EJ_0 — жесткость стержня на изгиб в точке $\zeta = 0$, т. е. на левой опоре. Теперь уравнения примут окончательный вид:

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{1}{f(\zeta)}\left[-\Pi\eta + \Pi_0\zeta\Big|_{\text{I}} - C\eta_{\mathcal{A}}\left(\zeta - \zeta_{\mathcal{A}}\right)\Big|_{\text{II}}\right]; \quad \frac{d\eta}{d\zeta} = \theta,$$

где $\Pi = FL^2/(EJ_0)$, $\Pi_0 = F_0L^2/(EJ_0)$, $C = cL^3/(EJ_0)$.

С помощью описанного выше алгоритма критическая сила определяется теперь в безразмерной форме $FL^2/(EJ_0)$, а ее значение в ньютонах может быть легко найдено в дальнейшем, когда уже произведен окончательный выбор размеров для сжатой стойки как элемента создаваемой конструкции.

Рассмотрим еще пример определения критической силы с помощью машинного алгоритма и особое внимание обратим на приведение уравнений к безразмерной форме.

К упругой полосе с узким прямоугольным сечением (рис. 12.30) подвешен груз F. Требуется определить силу $F_{кр}$, при которой теряется устойчивость плоской формы изгиба. Точка подвеса груза смещена на величину a относительно центра тяжести сечения. Ясно, что если сила смещена вниз, критическая сила будет больше, нежели при более высоком расположении точки подвеса.

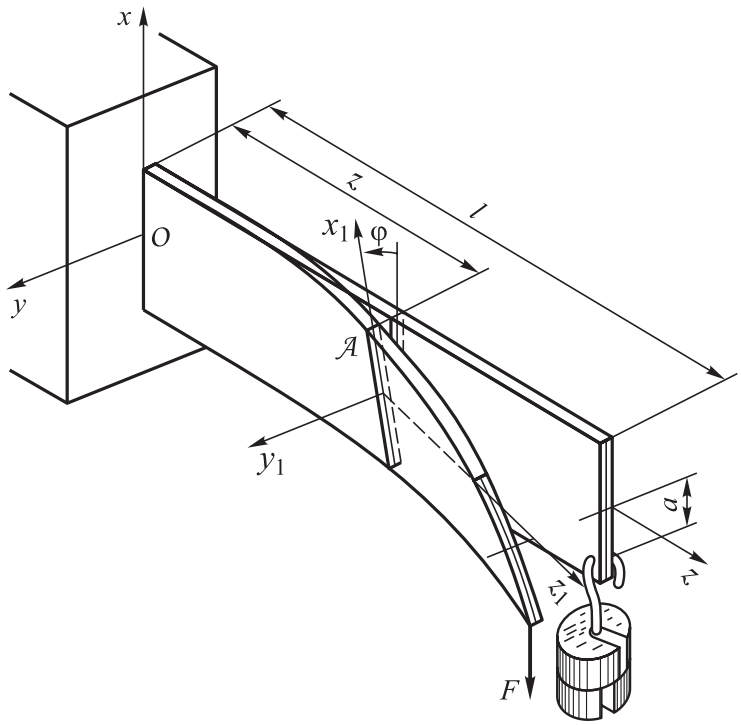


Рис. 12.30

Задача известная. Она давно решена с применением функций Бесселя, но на машине решение получается более простым.

Начало координат x, y, z выберем в заделке, а в произвольно взятом сечении A введем следящие оси x_1, y_1, z_1. Оси x_1 и y_1 лежат в плоскости повернутого сечения, а ось z_1 нормальна к сечению и соответственно направлена по касательной к упругой линии изогнутого стержня. Ее направление составляет угол θ с осью z.

Угол поворота сечения относительно оси z обозначим через φ, а перемещение по направлению оси y — через y,

$$EJ_x y'' = EJ_x \theta' = M; \quad GJ_к \varphi' = M_к,$$

M и $M_к$ определяются как моменты силы F относительно осей x_1 и z_1:

$$M = F(l - z)\varphi,\ M_к = F\,[y_l - y - \theta(l - z) - \varphi_l a].$$

Здесь y_l и φ_l — перемещение и угол поворота концевого сечения стержня при $z = l$.

Уравнения имеют вид

$$\theta' = \frac{F}{EJ_x}(l - z)\varphi,\ \ \varphi' = \frac{F}{GJ_к}\left[y_l - y - \theta(l - z) - \varphi_i a\right],$$

$$y' = \theta.$$

Это — размерная форма, показывающая, что критическая сила, выраженная в ньютонах, зависит от множества параметров. Но перейдем к безразмерной форме. Примем, что $z = l\zeta$, $y = l\eta$, $a = l\alpha$, $Fl^2/EJ_x = F_0$.

Отношение жесткости на изгиб к жесткости на кручение $EJ_x/GJ_к$ для прямоугольного поперечного сечения может быть написано в виде $E\dfrac{bh^3}{12G\beta bh^3}$, где β — табличный коэффициент, зависящий от отношения сторон прямоугольника (см. табл. 2.1). При большом отношении сторон $\beta = 0{,}333$. Так как $G = E/[2(1 + \mu)]$, то отношение жесткостей оказывается равным $EJ_x/GJ_к = (1 + \mu)/2 \approx 0{,}65$.

Теперь уравнения принимают безразмерную форму:

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = F_0(1 - \zeta)\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = 0{,}65F\left[\eta_l - \eta - 0(1 - \zeta) - \alpha\varphi_l\right],\ \frac{d\eta}{d\zeta} = 0.$$

Переписываем их в конечно-разностном виде:

$$\Delta\theta_i = F_0(1 - \zeta_i)\varphi_{i-1}\Delta\zeta,$$

$$\Delta\varphi_i = 0{,}65F_0\left[\eta_l - \eta_{i-1} - \theta_{i-1}(1 - \zeta_i) - \alpha\varphi_l\right]\Delta\zeta,$$

$$\Delta\eta_i = \theta_{i-1}\Delta\zeta,$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta_i,\ \ \varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i,\ \ \eta_i = \eta_{i-1} + \Delta\eta_i.$$

Интегрирование ведется по ζ от нуля до единицы с шагом, равным 0,01 или 0,005. Этого вполне достаточно.

Когда интегрирование начинается, необходимо принять $\varphi = \theta = \eta = 0$ и задаться величинами η_l и φ_l. Это — линейное и угловое перемещения концевого сечения стержня. Закончив интегрирование, мы на конце интервала интегрирования, т. е. при $\zeta = 1$, получим η_1 и φ_1, которые с принятыми заранее значениями η_l и φ_l, естественно, не совпадают, но зависят от них линейно:

$$\eta_1 = a_{11}\eta_l + a_{12}\varphi_l,\ \varphi_1 = a_{21}\eta_l + a_{22}\varphi_l. \qquad (12.34)$$

Для определения коэффициентов a_{ij}, как и в предыдущей задаче, надо провести интегрирование два раза. Сначала пусть $\eta_l = 1$ и $\varphi_l = 0$. Тогда, согласно выражениям (12.34), a_{11} равно η_1, а a_{22} равно найденному в результате интегрирования φ_1. Затем интегрирование проводится второй раз. Теперь принимаем $\eta_l = 0$ и $\varphi_l = 1$, а найденные в конце интервала интегрирования значения η_1 и φ_1 соответственно равны a_{12} и a_{22}. Коэффициенты a_{ij}, таким образом, найдены.

Но так как должны соблюдаться равенства $\eta_1 = \eta_l$ и $\varphi_1 = \varphi_l$, то

$$(a_{11} - 1)\ \eta_l + a_{12}\varphi_l = 0,\ \ a_{21}\eta_l + (a_{22} - 1)\ \varphi_l = 0.$$

Ненулевые значения η_l и φ_l получаются при условии

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, наша задача заключается в том, чтобы найти такое значение силы F_0, при котором определитель D обращался бы в нуль. Достигается это следующим образом.

Фиксируем параметр α и задаемся значением F_0, заведомо меньшим критического значения. Проводим описанную последовательность операций и находим значение определителя D. Важен не сам определитель, а его знак. Далее повторяем операции, давая силе F_0 приращение ΔF_0, и все время следим за знаком определителя. Если он сменился, это значит, что мы прошли через критическое значение F_0. Последующей интерполяцией или проходом последнего интервала с уменьшенным шагом ΔF_0 значение критической силы уточняется.

Если читатель захочет самостоятельно построить программу и для практики реализовать ее, указываем для проверки следующие контрольные точки. При $\alpha = 0$ ($a = 0$) безразмерная критическая сила $F_0 = 4{,}98$, а при $\alpha = \pm 0{,}1$ критические значения будут 5,34 и 4,52 соответственно.

12.9. О пределах применимости формулы Эйлера

Когда заходит речь о пределах применимости теории Эйлера, то часто этот вопрос обсуждается в том смысле, что она, эта теория, верна в пределах линейной зависимости между напряжениями и деформациями, т. е. в рамках закона Гука. И это верно. Однако тео-

рия изгиба балок, например, также верна только в пределах закона Гука, но там этот вопрос даже и не поднимается. В чем же дело?

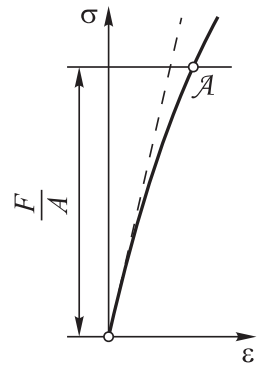


Рис. 12.31

Представим себе диаграмму испытания материала $\sigma = f(\varepsilon)$. Сейчас нам нужна только ее начальная часть, где между напряжением и деформацией наблюдается линейная зависимость, описываемая законом Гука. Положим, что закон Гука соблюдается не совсем точно, и между идеальной линейной зависимостью, показанной на рис. 12.31 штриховой линией, и реальной зависимостью $\sigma = f(\varepsilon)$ имеется некоторое различие, которое мы на рисунке для наглядности несколько преувеличили.

Модуль упругости E есть постоянный угловой коэффициент схематизированной диаграммы испытания материала. Для действительной же диаграммы угловой коэффициент $d\sigma/d\varepsilon$ зависит от напряжения и может рассматриваться как текущий, переменный модуль упругости.

Представим себе, что при сжатии стержня силой F напряжение достигло значения F/A. Стержень сохраняет прямолинейную форму и напряжения распределены равномерно по сечению. Теперь сообщим системе малое возмущение: отклоним стержень от положения равновесия. Стержень изгибается, и в его сечениях возникает изгибающий момент EJ/r. Спрашивается, какой модуль следует понимать под E? Обычный модуль или «мгновенный» модуль $E_{\mathcal{A}} = d\sigma/d\varepsilon$, соответствующий точке $\mathcal{A}$ диаграммы? Конечно, $E_{\mathcal{A}}$. И этот мгновенный модуль должен далее войти в выражение эйлеровой критической силы $\pi^2 E_{\mathcal{A}} J/l^2$. Таким образом, сколь сильно модуль $E_{\mathcal{A}}$ отличается от модуля E, столь же сильно реальная критическая сила отличается от той, которую дает схематизированная линейная диаграмма.

Теперь ясно, почему этот вопрос поднимается при определении критической силы по Эйлеру, но не при выводе обычных уравнений теории изгиба балок. В задаче Эйлера стержень *весь*, *целиком*, в результате предварительного сжатия переводится в область пониженного модуля упругости. При обычном же изгибе ничего подобного не происходит.

Итак, снижение текущего модуля упругости определяется напряжением сжатия в критическом состоянии. Посмотрим, от чего это напряжение зависит. Имеем

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 A}.$$

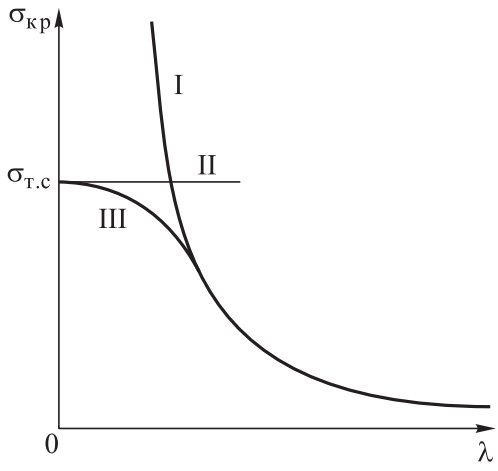


Рис. 12.32

Обозначим, как это принято, J/A через i^2. Величину i называют радиусом инерции сечения. Теперь выражение для критического напряжения можно написать в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \qquad (12.35)$$

где λ — *гибкость* стержня,

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}.$$

Зависимость $\sigma_{кр}$ от λ показана на рис. 12.32 в виде кривой I.

Как видим, для длинных стержней критическое напряжение невелико, и это свидетельствует о применимости формулы Эйлера. Но оно же неограниченно возрастает по мере уменьшения гибкости. И ясно, что на устремление кривой I в бесконечность должен быть наложен очевидный запрет. Любая, короткая или длинная стойка теряет несущую способность, если напряжение достигает предела текучести $\sigma_{т.с}$. Таким образом, на рис. 12.32 появляется прямая II, ограничивающая напряжение сверху. Но это еще не все. Если при малой гибкости критическое напряжение достигает всего лишь предела пропорциональности, то текущий модуль упругости $d\sigma/d\varepsilon$ будет в полтора раза меньше E (см. 1.9), и, следовательно, формула Эйлера соответственно дает завышенное в полтора раза значение критической силы. Значит, в практических расчетах, прежде чем поверить результату, полученному по формуле Эйлера, следует еще определить и критическое напряжение, а затем сопоставить его не только с пределом текучести, но и с пределом пропорциональности. Не велик труд, конечно, но беда в том, что предел пропорциональности не относится к числу справочных характеристик.

При малой гибкости, для весьма коротких образцов, ограничением служит, конечно, предел текучести, а по мере увеличения гибкости ограничивающая по напряжениям кривая должна быть нисходящей (кривая III), сливающейся с линией I при некотором напряжении, меньшем предела пропорциональности.

Высказанные соображения реализуются в методе расчета сжатых стоек по коэффициенту снижения допускаемых напряжений. Идея метода простая. Если для весьма и весьма короткого сжатого

стержня допускаемое напряжение на сжатие есть [σ], то по мере увеличения гибкости его следует уменьшать, умножая на некоторый *коэффициент снижения допускаемого напряжения* φ, меньший единицы.

Значения коэффициента φ в зависимости от λ табулируются для каждой стали, характеризуемой своим пределом текучести $\sigma_{т.с}$. Зависимость φ(λ) качественно повторяет ход кривых II, III, I (см. рис. 12.32). В табл. 12.1 приведены значения коэффициента φ для стали, имеющей предел текучести $\sigma_т = 400$ МПа. При значениях $\lambda > 220$ можно безо всяких опасений вести расчет по Эйлеру; при меньших λ — по коэффициенту снижения допускаемых напряжений.

Таблица 12.1

λ	φ	λ	φ	λ	φ
0	1,000	80	0,532	160	0,152
10	0,982	90	0,447	170	0,136
20	0,949	100	0,369	180	0,123
30	0,905	110	0,306	190	0,111
40	0,854	120	0,260	200	0,101
50	0,796	130	0,223	210	0,093
60	0,721	140	0,195	220	0,086
70	0,623	150	0,171		

Рассмотрим примеры.

Пример 12.5. Определить допускаемую сжимающую силу для шарнирно закрепленного стержня. Длина стержня $l = 2$ м. Поперечное сечение — двутавр № 30а (см. сортамент прокатной стали в конце книги), $i_{min} = 2{,}95$ см, $A = 49{,}9$ см^2. Допускаемое напряжение на сжатие [σ]= 200 МПа.

Находим гибкость: $\mu l/i = 200/2{,}95 = 67{,}8$. Из табл. 12.1 следует, что $\varphi = 0{,}645$. Далее определяем допускаемую нагрузку: $F/A = [\sigma]\varphi$; $F = 643$ кН.

Пример 12.6. Найти диаметр стойки, защемленной одним концом, а на другом имеющей шарнирное опирание. Стойка нагружена силой $F = 20$ кН. Длина $l = 1$ м. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 200$ МПа.

Задача решается путем последовательных проб, поскольку гибкость стержня неизвестна. Если бы стержень был совсем коротким, диаметр определялся бы из обычного соотношения $\frac{4F}{\pi d^2} = [\sigma]$; $d = 1{,}13$ см.

Теперь же, задаваясь несколькими значениями d, большими чем 1,13 см, подсчитываем гибкость λ:

$$\lambda = \frac{0,7l}{i} = \frac{0,7l}{\sqrt{J/A}} = \frac{2,8l}{d}.$$

Затем, как и в предыдущей задаче, для нескольких d находим допускаемую нагрузку F. То значение, при котором эта нагрузка окажется равной заданной (20 кН), и будет искомым. В рассматриваемой задаче оказывается $d \approx 2,3$ см.

12.10. Продольно-поперечный изгиб

Рассмотрим нагружение прямого шарнирно закрепленного стержня (рис. 12.33) продольной силой и системой поперечных сил. Такой вид нагружения принято называть продольно-поперечным изгибом.

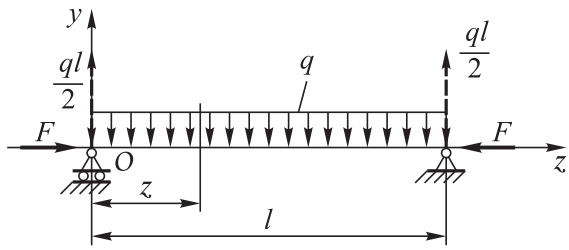


Рис. 12.33

При составлении дифференциального уравнения упругой линии изгибающий момент можно рассматривать как сумму момента поперечных сил $M_{\text{п}}$ и момента продольной силы Fy. При этом, поскольку прогибы считаются малыми, момент $M_{\text{п}}$ зависит в явном виде только от z и не зависит ни от y, ни от продольной силы F:

$$EJy'' = -Fy + M_{\text{п}}. \tag{12.36}$$

Дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид

$$y'' + k^2 y = \frac{M_{\text{п}}}{EJ}, \tag{12.37}$$

откуда

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + y^*,$$

где y^* — частное решение уравнения (12.37), зависящее от функции $M_{\text{п}}$, т. е. от вида поперечной нагрузки. Например, для двухопорной равномерно загруженной балки (см. рис. 12.33) имеем

$$EJy'' = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} - Fy.$$

Тогда

$$y'' + k^2 y = \frac{q}{2EJ}(lz - z^2); \quad y^* = \frac{q}{2EJk^2}\left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2\right)$$

и, следовательно,

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + \frac{q}{2EJk^2}\left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2\right).$$

Постоянные C_1 и C_2 подбирают с таким расчетом, чтобы прогиб y при $z = 0$ и $z = l$ обращался в нуль.

В итоге

$$y = \frac{q}{EJk^4}\left[-(1 - \cos kl)\frac{\sin kz}{\sin kl} + 1 - \cos kz + \frac{k^2}{2}(lz - z^2)\right].$$

Изгибающий момент

$$M = EJy'' = \frac{q}{k^2}\left[(1 - \cos kl)\frac{\sin kz}{\sin kl} + \cos kz - 1\right].$$

Наибольший изгибающий момент имеет место при $z = l/2$:

$$M_{\max} = \frac{q}{k^2}\frac{1 - \cos(kl/2)}{\cos(kl/2)}. \qquad (12.38)$$

При малых значениях сжимающей силы F (при малом k) это выражение после раскрытия неопределенности, как и следовало ожидать, принимает вид $M_{\max} = ql^2/8$, т. е. максимальный момент совпадает с тем, который дает поперечная распределенная сила q. По мере роста силы F максимальный изгибающий момент резко возрастает.

При более сложных видах поперечной нагрузки, например при нескольких поперечных силах, определение изгибающих моментов описанным выше способом становится затруднительным, поскольку изгибающий момент на различных участках описывается различными функциями. В таких случаях удобнее применять приближенные, менее точные, но более простые приемы расчета. Один из таких весьма распространенных способов мы сейчас и рассмотрим.

Обратимся к выражению (12.36)

$$EJy'' = M_{\text{п}} - Fy.$$

При отсутствии продольной силы оно принимает вид

$$EJy''_{\text{п}} = M_{\text{п}},$$

где индекс «п» соответствует нагружению стержня только поперечными силами. Исключая $M_{\text{п}}$, получаем

$$EJy'' = EJy''_{\text{п}} - Fy. \tag{12.39}$$

Примем допущение, что форма упругой линии как при наличии продольных сил, так и без них близка к синусоидальной:

$$y = f \sin\frac{\pi z}{l}; \quad y_{\text{п}} = f_{\text{п}} \sin\frac{\pi z}{l}.$$

Подставляем y и $y_{\text{п}}$ в уравнение (12.39). Тогда

$$EJf\frac{\pi^2}{l^2} = EJf_{\text{п}}\frac{\pi^2}{l^2} + Ff,$$

откуда

$$f = \frac{f_{\text{п}}}{1 - F/F_{\text{кр}}}. \tag{12.40}$$

В случае других способов закрепления стержня часто пользуются той же формулой (12.40), но подставляют другое значение критической силы.

Предполагая изгибающие моменты пропорциональными прогибам, можно написать

$$M = \frac{M_{\text{п}}}{1 - F/F_{\text{кр}}}. \tag{12.41}$$

Проверим полученную формулу на примере рассмотренной выше балки с равномерно распределенной нагрузкой q.

Пусть $F = F_{\text{кр}}/2$. Тогда, согласно формуле (12.41), $M = 2M_{\text{п}}$. Но поперечная нагрузка дает изгибающий момент $M_{\text{п}} = ql^2/8$. Таким образом, в этом случае имеем $M_{\max} = 0{,}25ql^2$.

Теперь посмотрим, что дает точная формула (12.38). Выражение для величины k, входящего в эту формулу, принимает при заданном значении F следующий вид:

$$k = \sqrt{\frac{F}{EJ}} = \sqrt{\frac{F_{кр}}{2EJ}} = \frac{\pi}{l\sqrt{2}}.$$

Тогда, согласно выражению (12.38),

$$M_{max} = \frac{2ql^2}{\pi^2} \frac{1 - \cos\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}}{\cos\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}} \approx 0{,}252ql^2.$$

Сопоставляя полученные значения M_{max}, видим, что они практически совпадают.

Хуже обстоит дело при явно несимметричных видах распределения поперечных сил. Но в подобных случаях основное внимание следует уделять не уточнению расчетных формул, а поиску средств, с помощью которых можно было бы вообще избавиться от подобных видов нагружения.

Глава 13

ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ

13.1. О статическом и динамическом нагружениях

Вернемся к началу (см. 1.3). Там говорилось, что работа W внешних сил, действующих на твердое тело, преобразуется в потенциальную U и кинетическую энергию K:

$$W = U + K. \qquad (13.1)$$

В тех случаях, когда силы изменяются весьма медленно, кинетическая энергия в этом балансе с полным основанием считается пренебрежимо малой, и такой вид нагружения называется статическим. Такая расчетная схема нам знакома, и мы ею постоянно и с успехом пользовались.

В практике инженерных расчетов в противоположность статическому принято говорить о *динамическом* нагружении. Это — силовое воздействие, при котором кинетическая энергия оказывается соизмеримой с потенциальной.

Значит, если силы изменяются достаточно медленно — нагружение статическое. В противном случае — динамическое. «Достаточно медленно» — понятие неопределенное, но в данном случае есть простая и вполне очевидная мера. Если промежуток времени, в течение которого сила заметно меняет свое значение, существенно больше периода собственных колебаний системы, нагружение можно считать статическим. Это следует воспринимать как правило, хотя из него возможны и исключения.

Поначалу кажется, что высказанные сравнительные оценки справедливы только для кинематически неизменяемых систем, иначе свобода перемещений создала бы произвол не только в самих перемещениях, но и в кинетической энергии тела, движущегося как жесткое целое. Однако это ограничение оказывается не таким уж и серьезным, если выделить и отбросить не относящуюся к делу кинетическую энергию переносного движения. А это, как правило, всегда удается сделать.

Рассмотрим, например, раму, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω относительно вертикальной оси (рис. 13.1). Система кинематически изменяемая и в зависимости от угловой скорости может обладать сколь угодно большой кинетической энергией. Но, понятно, это — не та кинетическая энергия, которую мы обозначили буквой K в уравнении (13.1).

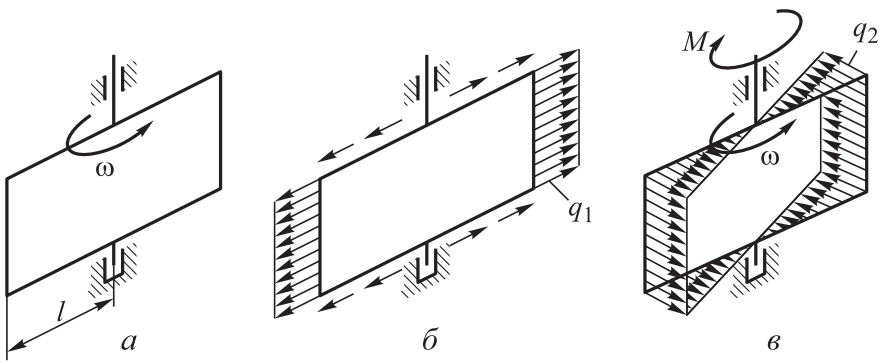


Рис. 13.1

Легко сообразить, что напряжения и упругие перемещения в рассматриваемой раме определяются с помощью схемы статического нагружения, даже в том случае, если угловая скорость меняется, но не слишком быстро.

Заставим воображаемого наблюдателя вращаться вместе с рамой относительно вертикальной оси. Ему представляется, естественно, что рама нагружена распределенной нагрузкой q_1 (рис. 13.1, *б*). Последняя определяется через даламберовы силы как $q_1 = m\omega^2 l$, где m — масса стержня на единицу длины. Последующее раскрытие статической неопределимости не представляет труда. Мы уже знаем, как это делается. Легко представить себе схему нагружения рамы и в условиях плавного торможения. В этом случае появятся силы, перпендикулярные плоскости рамы (рис. 13.1, *в*). Здесь $q^2 = ml^2\omega'$, где ω' — угловое ускорение (при торможении оно отрицательно). И это также — чистая статика. Если же торможение происходит резко, то необходимо уже принять во внимание и кинетическую энергию, связанную с перемещениями из плоскости рамы. Подобный пример будет рассмотрен в следующем параграфе.

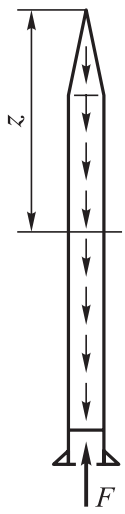


Рис. 13.2

Рассмотрим в качестве еще одного примера вертикально поднимающуюся с ускорением ракету (рис. 13.2), для которой требуется определить сжимающие силы в поперечных сечениях.

Здесь, как и в предыдущем примере, кинетическая энергия движения ракеты как целого нас совершенно не интересует, и задача решается в рамках статического нагружения.

Если из тяги двигателя F вычесть вес ракеты G и полученную разность разделить на массу ракеты M, то можно найти ее ускорение:

$$j = \frac{F - G}{M} = \frac{F}{M} - g.$$

Обозначим через m массу ракеты на единицу длины — величину, естественно, переменную по длине ракеты и изменяющуюся к тому же и во времени. Элементарная масса $m\,dz$ имеет кажущийся вес $m(j + g)dz$, или $mF\,dz/M$. Нормальная сжимающая сила в некотором произвольном сечении в фиксированный момент времени определяется интегралом

$$N = \int_0^z mg\frac{F}{G}\,dz.$$

Далее численным интегрированием могут быть найдены силы и построены их эпюры для нескольких этапов полета.

Такого же рода вычисления, но несравненно более сложные, приходится производить для определения изгибающих моментов в свободно падающем, но затем спасаемом ракетном блоке многократного использования. Сначала устанавливается закон распределения аэродинамических сил по длине блока. Затем находят ускорения центра масс и угловые ускорения при вращении около центра масс. Это дает возможность найти сложный закон распределения даламберовых сил по длине блока. В итоге образуется система самоуравновешенных сил (вес, аэродинамические и даламберовы силы), для которых уже и строится мгновенная эпюра изгибающих моментов.

Как видим, применение условной схемы статического нагружения распространяется гораздо дальше, чем можно было подумать, когда мы занимались кинематически неизменяемыми системами.

Перейдем теперь к простейшим видам ударных нагрузок.

13.2. Ударная нагрузка

Задача о расчете конструкций на ударную нагрузку содержит в себе много трудностей, которые далеко не всегда могут быть преодолены простейшими средствами. Сюда относится в первую

очередь анализ напряженного состояния в зоне контакта соударяющихся тел и процесса изменения контактных сил во времени. Большие сложности вызывает необходимость учета при резких ударах дополнительных степеней свободы упругого тела, влиянием которых при других видах нагружения можно было бы пренебречь. Существенную роль в процессе удара играет трудно поддающийся анализу фактор рассеяния энергии.

Ниже мы ограничимся простейшими приемами расчета, которые не дают высокой точности, но в то же время позволяют правильно оценить порядок перемещений, напряжений и деформаций при ударе.

Рассмотрим, как воспринимается ударная нагрузка в системе с одной степенью свободы (рис. 13.3). Масса m движется в горизонтальном направлении со скоростью v_0 и останавливается упругим элементом, изображенным на рис. 13.3 в виде пружины. Массу пружины будем считать пренебрежимо малой по сравнению с массой груза.

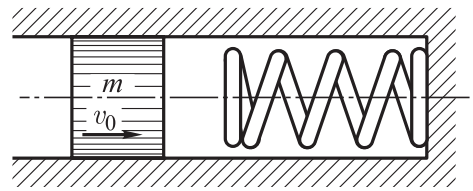


Рис. 13.3

После того как груз коснется пружины, скорость его начнет уменьшаться. Когда вся кинетическая энергия груза перейдет в потенциальную энергию сжатой пружины, груз остановится, а сила, сжимающая пружину, достигает максимума. Далее начнется движение в обратном направлении. Сила взаимодействия между пружиной и грузом будет уменьшаться. Когда пружина полностью распрямится, груз при отсутствии сил трения получит прежнюю скорость v_0, но в обратном направлении.

Максимальная сила, сжимающая упругий элемент, условно называемый пружиной, легко определяется из условия энергетического баланса. Приравнивая кинетическую энергию движущегося груза потенциальной энергии сжатой пружины, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{F_{\max}^2}{c},$$

где c — жесткость пружины — коэффициент пропорциональности между силой F и перемещением упругого элемента λ:

$$F = c\lambda.$$

В итоге

$$F_{\max} = v_0\sqrt{mc}.$$

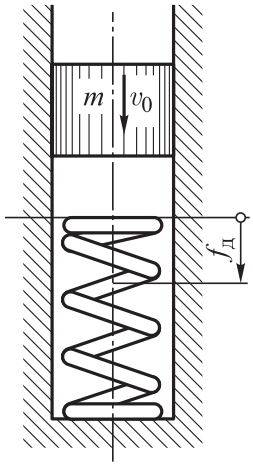


Рис. 13.4

Рассмотрим теперь случай вертикального движения ударяющего груза (рис. 13.4). При составлении энергетического баланса здесь необходимо учесть изменение потенциальной энергии груза на том динамическом прогибе $f_д$, который получает пружина:

$$K_0 + \Delta U = У,$$

где K_0 — кинетическая энергия груза в момент соприкосновения с пружиной; ΔU — изменение потенциальной энергии груза на перемещении $f_д$, а У — упругая энергия сжатой пружины. Очевидно,

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{2},\ \Delta U = mgf_д,\ У = \frac{1}{2}cf_д^2.$$

Тогда

$$\frac{gmv_0^2}{gc} + \frac{2mg}{c}f_д = f_д^2.$$

Отношение mg/c представляет собой прогиб $f_{ст}$, который получила бы пружина под действием статически приложенной силы, равной весу падающего груза. Поэтому

$$f_д^2 - 2f_{ст}f_д - \frac{v_0^2}{g}f_{ст} = 0,$$

откуда

$$f_д = f_{ст}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gf_{ст}}}\right].$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, называется *коэффициентом динамичности*. Обозначим его через

$$\chi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gf_{ст}}}.$$

Тогда

$$f_д = \chi f_{ст}.$$

Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз прогиб при ударе больше прогиба, возникающего при статическом при-

ложении нагрузки. В том же отношении изменяются внутренние силы и напряжения:

$$\sigma_д = \chi\sigma_{ст}.$$

Величина χ зависит в первую очередь от жесткости системы и от кинетической энергии падающего груза. В частности, если груз опускается на упругую систему мгновенно, но без начальной скорости, $v_0 = 0$, и тогда $\chi = 2$. В этом случае максимальный прогиб вдвое превышает тот, который возникал бы при статическом нагружении. Соответственно вдвое большими оказываются и напряжения.

Все сказанное до сих пор относилось к случаю, когда груз непосредственно ударяется об упругий элемент, имеющий весьма малую массу. Обычно, однако, между ударяющим грузом и упругой системой существует промежуточная деталь (буфер), имеющая массу m_1 (рис. 13.5).

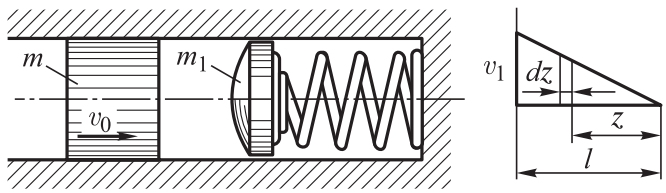


Рис. 13.5

При анализе удара в этих условиях следует различать два вида деформаций: местные деформации грузов, возникающие в зоне контакта, и общие деформации пружины.

Местные деформации подчиняются сложным законам и не могут быть определены средствами сопротивления материалов. Что же касается общих деформаций пружины, то их легко определить на основе энергетических соотношений, считая, что соударение груза с массой буфера является неупругим и что обе массы после удара движутся с общей скоростью v_1.

Тогда из условия сохранения количества движения можно написать

$$mv_0 = (m + m_1)v_1, \tag{13.2}$$

или

$$v_1 = v_0 \frac{m}{m + m_1}.$$

Последующий процесс сжатия пружины протекает так же, как и в рассмотренных выше случаях. Разница заключается только в том, что теперь вместо массы m по пружине ударяет масса $m + m_1$ со скоростью v_1 вместо v_0.

В величину m_1 можно включить и массу пружины $m_п$, приведенную к точке удара. Правда, это приведение уже не может быть обезличенным и зависит от конкретных особенностей упругого элемента, который мы называем пружиной; от того, каков характер его деформирования.

Если принять, например, что перемещения и соответственно скорости в сечениях пружины изменяются по линейному закону (рис. 13.5), то на расстоянии z от опоры скорость будет равна $v_1 z/l$, а масса отрезка dz равна $m_п dz/l$. Соответственно кинетическая энергия массы пружины

$$K_п = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{v_1 z}{l}\right)^2 \frac{m_п dz}{l},$$

или

$$K_п = \frac{m_п v_1^2}{2}\cdot\frac{1}{3},$$

где 1/3 представляет собой коэффициент приведения массы такой пружины к точке удара. Для других «пружин» будут соответственно и другие коэффициенты приведения.

Из всего сказанного по поводу ударных нагрузок становится очевидным, что для задач этого класса нет готовых формул. В каждом конкретном случае надо, сообразовываясь с обстоятельствами, с большей или меньшей степенью правдоподобия воспользоваться условием сохранения энергии и условием сохранения количества движения.

Рассмотрим еще два примера.

Пример 13.1. Клеть массой 2 т опускается вниз со скоростью $v_0 = 1$ м/с. Требуется произвести поверочный расчет на прочность в аварийном случае внезапного заедания троса. Длина троса l в момент заедания предполагается равной 10 м. Приведенный модуль упругости* троса $E = 70$ ГПа, $A = 4$ см^2, допускаемая нагрузка на трос $12\cdot10^4$ Н.

К моменту удара трос имеет статическую нагрузку, равную весу клети. Обозначим этот вес через F. При остановке кинетическая энергия клети $Fv_0^2/2g$ и потенциальная энергия $F(f_д - f_{ст})$ переходят

* Модуль упругости для троса при растяжении вследствие распрямления нитей существенно ниже модуля упругости самих нитей.

в изменение потенциальной энергии троса, равное $c\left(f_{д}^2 - f_{ст}^2\right)/2$. Таким образом получаем уравнение энергетического баланса в виде

$$\frac{Fv_0^2}{2g} + F(f_{д} - f_{ст}) = \frac{1}{2}c(f_{д}^2 - f_{ст}^2).$$

Но так как $F = cf_{ст}$, то

$$f_{д}^2 - 2f_{ст}f_{д} + f_{ст}^2 - f_{ст}\frac{v_0^2}{g} = 0,$$

и тогда

$$f_{д} = f_{ст}\left[1 + \sqrt{\frac{v_0^2}{gf_{ст}}}\right].$$

В данном случае, очевидно,

$$f_{ст} = \frac{Fl}{EA}.$$

Для коэффициента динамичности имеем

$$\varkappa = 1 + \sqrt{\frac{EAv_0^2}{Flg}} = 4{,}8.$$

Следовательно,

$$F_{д} = \varkappa\, F_{ст} = 9{,}42 \cdot 10^4\ \text{Н},$$

и трос условию прочности в этом расчетном случае удовлетворяет.

Пример 13.2. Маховик, имеющий момент инерции J_m, вращается с числом оборотов n. Электромотор установлен на раме, состоящей из двух балок (рис. 13.6). Момент инерции статора электромотора и оснований подшипников относительно оси маховика — J_{m1}. Требуется определить динамический момент $M_{д}$, действующий на раму при внезапной остановке маховика.

Из условия неизменности момента количества движения получаем

$$J_m\omega = (J_m + J_{m1})\omega_1,$$

где ω и ω_1 — угловая скорость маховика до удара и в момент удара. Полная аналогия с выражением (13.2)!

Приравниваем далее кинетическую энергию маховика и присоединенных масс потенциальной энергии изгиба рамы:

$$\frac{1}{2}(J_m + J_{m1})\omega_1^2 = \frac{M_{д}^2}{2c},$$

или

$$\frac{J_m^2}{J_m + J_{m1}}\left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2 = \frac{M_{д}^2}{c}.$$

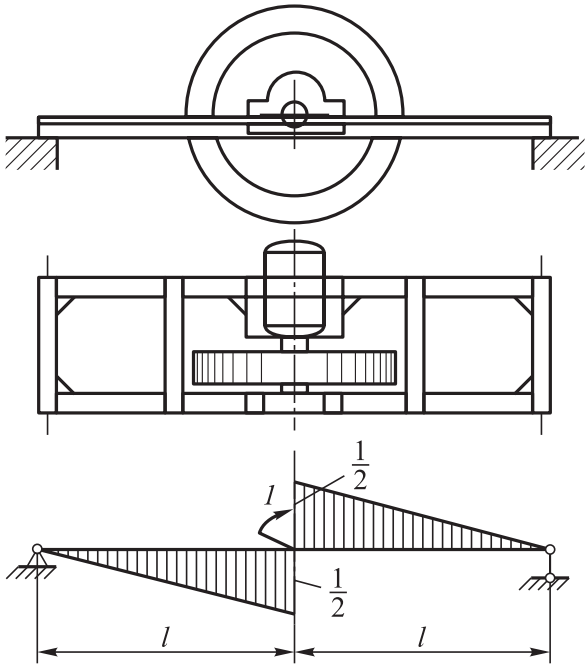


Рис. 13.6

Величину c находим, умножая единичную эпюру (рис. 13.6) саму на себя:

$$\frac{1}{c}=\frac{l}{6EJ},$$

где J — суммарный момент инерции поперечных сечений балок. Таким образом, в итоге

$$M_{\text{д}}=\frac{\pi n}{30}J_m\sqrt{\frac{1}{J_m+J_{m1}}\frac{6EJ}{l}}.$$

Глава 14

МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ

14.1. Испытание материалов и конструкций

Говоря об экспериментальных методах замера деформаций и напряжений, необходимо делать различие между механическими испытаниями материалов и испытаниями конструкций.

Испытания материалов проводят с целью определения механических характеристик, таких, как предел текучести, временное сопротивление, модуль упругости и т. д. Кроме того, их можно проводить в исследовательских целях, например для изучения условий прочности в сложных напряженных состояниях или выявления механических свойств материала.

Для испытания материалов используют образцы, размеры и форму которых варьируют в зависимости от имеющейся измерительной аппаратуры и самих условий испытания.

Для получения объективных характеристик материала необходимо соблюдать условие *однородности напряженного состояния*, т. е. необходимо обеспечить постоянство напряженного состояния для всех точек испытуемого образца. Это условие соблюдается, например, при растяжении, частично при сжатии короткого образца и при кручении тонкостенной трубки. Изменение свойств материала в этих испытаниях происходит одновременно во всем объеме образца и легко поддается количественной оценке. При кручении сплошных образцов, а также и при изгибе напряженное состояние является неоднородным. Качественные изменения свойств материала в отдельных точках не влекут за собой заметных изменений в характеристиках образца.

Требование однородности напряженного состояния накладывает серьезные ограничения на результаты многих видов испытаний. В частности, до сих пор не удается провести объективные испытания

в условиях однородного всестороннего растяжения. Это напряженное состояние можно создать пока только в отдельных точках образца, например в центре сплошного шара, быстро нагреваемого извне.

Одним из видов механических испытаний являются *технологические пробы*, дающие не объективные, а только сравнительные характеристики свойств материала при строго регламентированных условиях испытания. Сюда относятся испытания на твердость, на ударную вязкость и некоторые другие. К технологическим пробам могут быть отнесены также испытания на усталостную прочность.

Когда говорят об испытании конструкции, то имеется в виду испытание на прочность целой машины, ее отдельных узлов или их моделей. Такое испытание имеет целью, с одной стороны, проверку точности проведенных расчетов, а с другой — проверку правильности выбранных технологических процессов изготовления узлов и ведения сборки, поскольку при недостаточно правильных технологических приемах возможно местное ослабление конструкции. Наиболее широко развито испытание конструкции в таких отраслях техники, как самолето- и ракетостроение, где в силу необходимой экономии веса вопросы прочности являются наиболее ответственными. При создании новой машины отдельные ее узлы, уже выполненные в металле, подвергают статическим испытаниям до полного разрушения с целью определения так называемой разрушающей нагрузки. Эту нагрузку сопоставляют затем с расчетной. Характер приложения сил при статических испытаниях устанавливают таким, чтобы имитировались рабочие нагрузки для определенного, выбранного заранее расчетного случая, например: для шасси самолета — случай посадки, для крыльев — выход из пике и т.д.

Кроме статических испытаний часто возникает необходимость проведения и динамических испытаний. Например, весьма распространены испытания приборов, работающих в условиях вибраций. Эти испытания проводят на специальных вибрационных столах при различных значениях частот и амплитуд. При таких испытаниях деформации и напряжения в вибрирующих деталях прибора обычно не замеряют. О прочности отдельных узлов судят только в случае их разрушения. В ряде случаев динамические испытания ведут с осциллографированием (записью) быстро изменяющихся деформаций, возникающих в наиболее опасных узлах.

Существующие в настоящее время способы экспериментального исследования напряженных конструкций сводятся так или иначе к прямому определению деформаций, возникающих в испытуемом объекте. Напряжения определяют косвенно через деформации

на основе закона Гука. В случае пластических деформаций напряжения при испытаниях конструкций обычно не определяют, а устанавливают только разрушающую нагрузку или то значение силы, при котором наблюдаются признаки возникновения пластических деформаций.

Для замера деформаций применяют различные методы. Ниже мы остановимся на определении деформаций при помощи приборов (тензометров) с механическим и электрическим принципами замера; рассмотрим оптический и рентгенографический методы, метод муаровых полос и метод лаковых покрытий.

14.2. Определение деформаций при помощи механических тензометров

Принцип работы механического тензометра основан на замере расстояния между какими-либо двумя точками образца до и после нагружения. Первоначальное расстояние между двумя точками носит название базы тензометра l. Отношение приращения базы Δl к l дает значение среднего удлинения по направлению установки тензометра. Если деформированное состояние однородно, то в результате замера определяют точное значение искомой деформации, как это имеет место, например, при растяжении стержня (рис. 14.1, *а*). В случае если деформация вдоль базы изменяется, замеренное среднее значение ее будет тем ближе к местному истинному, чем меньше база тензометра (см. случай изгиба бруса на рис. 14.1, *б*).

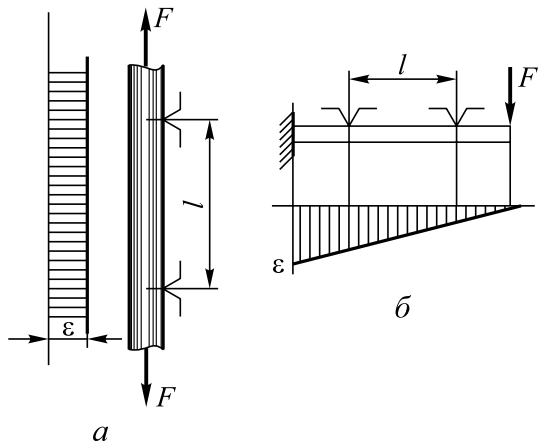


Рис. 14.1

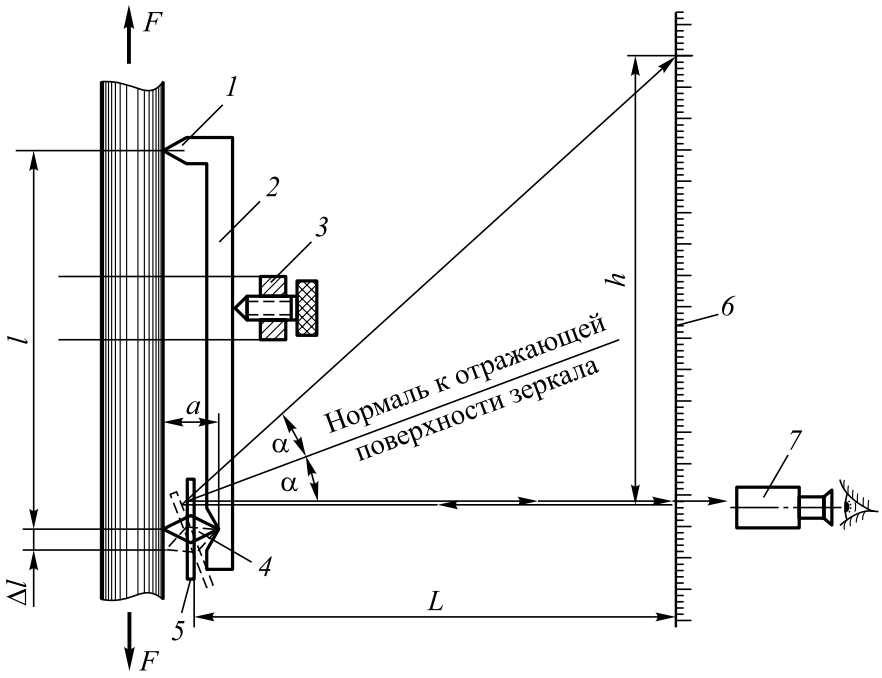


Рис. 14.2

При испытании материалов на растяжение, когда однородность деформации обеспечена, база ограничивается размерами образца. Обычно в этом случае база *l* имеет значения 50, 100, 150 и 200 мм.

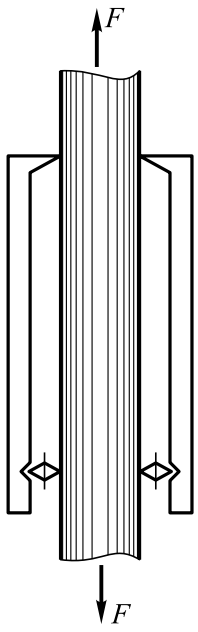


Рис. 14.3

При испытании конструкций увеличение базы ограничено погрешностью, связанной с неоднородностью деформаций, а ее уменьшение определяется потерей точности вследствие инструментальных погрешностей. Как правило, база механических тензометров, применяемых при испытании конструкций, лежит в пределах 2 ... 20 мм.

Для точных замеров упругих удлинений при определении модуля упругости материала широко используется тензометр Мартенса с оптическим рычагом (рис. 14.2).

Тензометр состоит из жесткой планки *2*, прижимаемой к образцу при помощи струбцины *3*. Верхний нож *1* планки неподвижен. В качестве второго ножа используется каленая призма *4*, имеющая ромбовидное сечение. Длина диагонали призмы равна *a*. С призмой жестко связано зеркальце *5*. На расстоянии *L* от зеркальца неподвижно установлена шкала *6*. При удлинении образца зеркальце

поворачивается, и наблюдатель через трубу *7* производит отсчет по отраженной шкале. Увеличение, даваемое прибором, определяется отношением разности показаний по шкале в миллиметрах к значению Δl, измеренному также в миллиметрах.

Угол поворота зеркальца $\alpha = \Delta l / a$. Разность отсчетов по шкале до и после нагружения в силу малости α равна $h = L \cdot 2\alpha$. Исключая угол α, находим коэффициент увеличения прибора

$$i = \frac{h}{\Delta l} = \frac{2L}{a}.$$

Обычно у тензометра Мартенса шкалу (размер L) выбирают так, что $i \approx 500$.

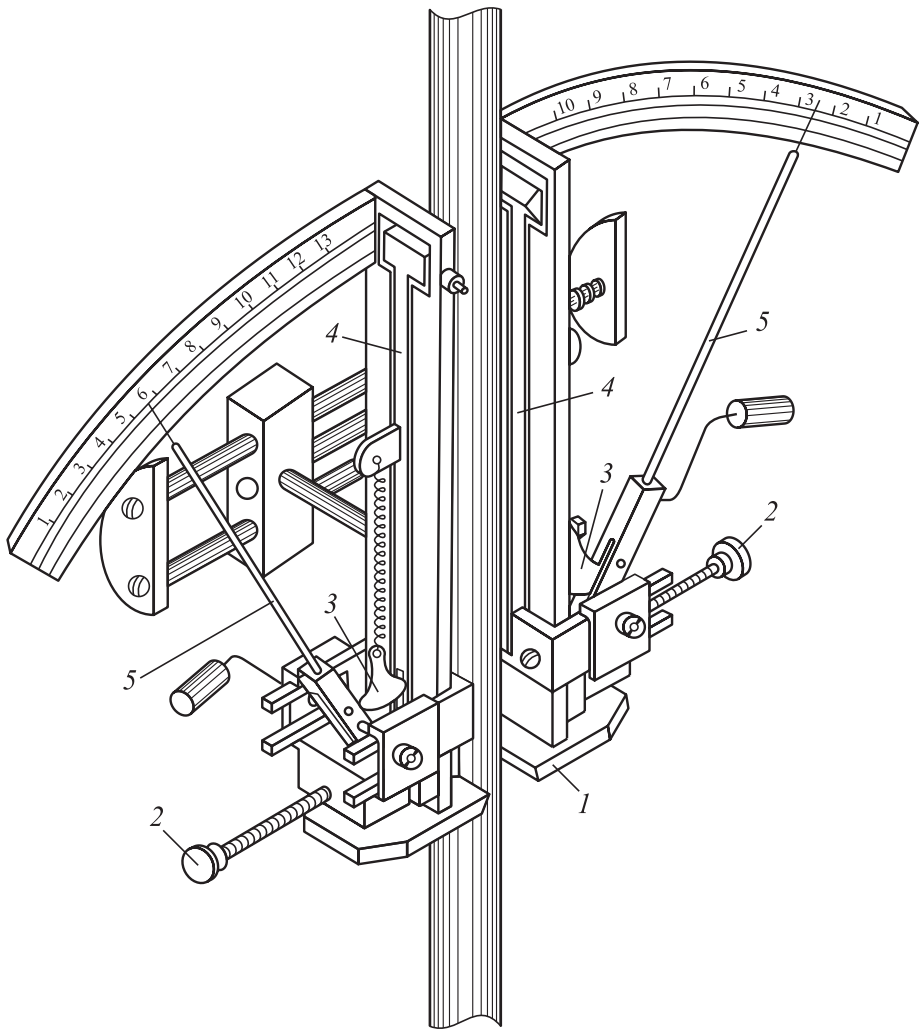


Рис. 14.4

Для исключения погрешностей, связанных с внецентренным растяжением образца и возможным его изгибом, практикуют установку сразу двух тензометров, как это показано на рис. 14.3. Осреднение показаний двух приборов исключает влияние изгиба.

Сдвоенный тензометр Мартенса неудобен тем, что требует сравнительно кропотливой работы при установке. Менее точными, но более удобными в употреблении являются хорошо зарекомендовавшие себя большебазные тензометры МИЛ и Бояршинова, показанные на рис. 14.4 и 14.5.

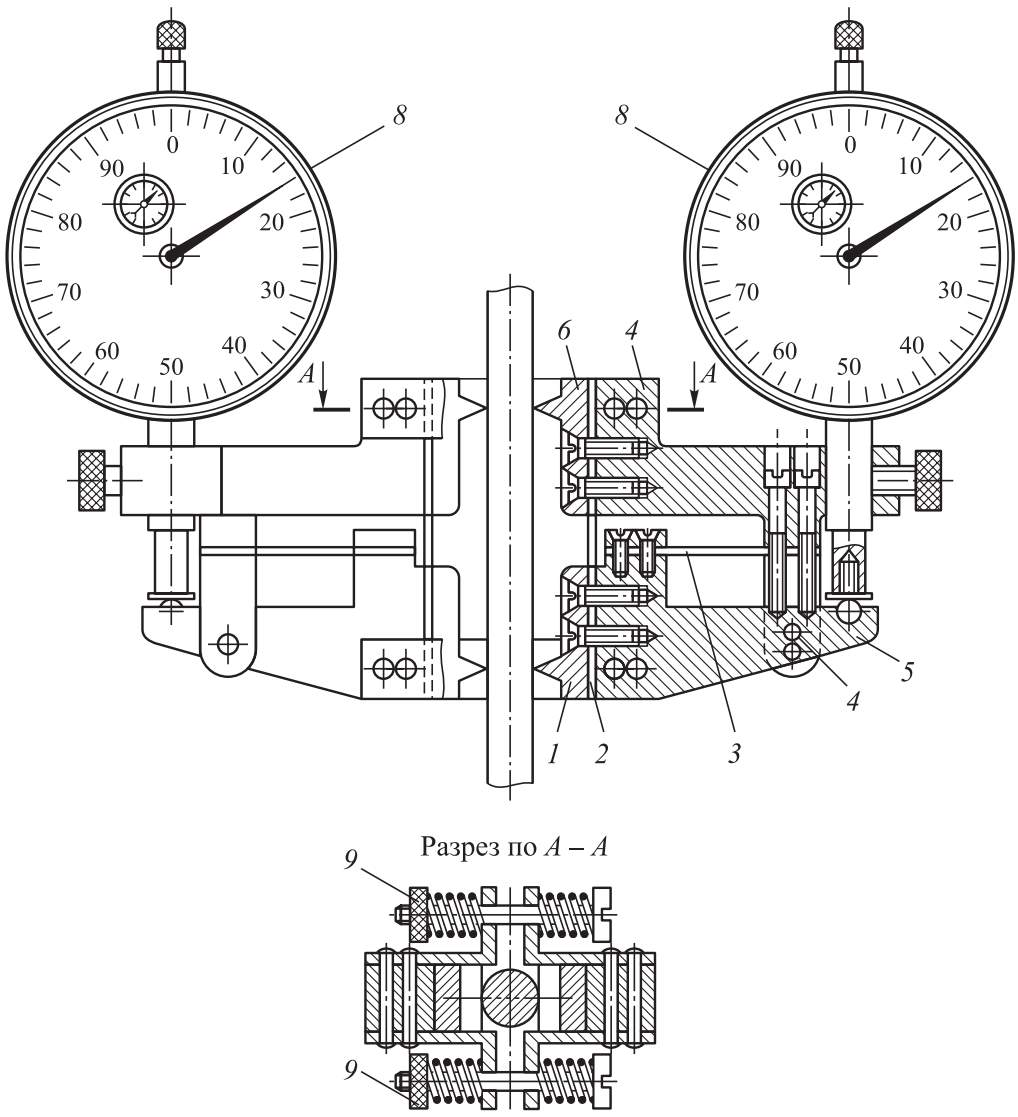


Рис. 14.5

Тензометр МИЛ (см. рис. 14.4) имеет базу 100 мм и является шарнирно-рычажным. Это — сдвоенный тензометр, устанавливаемый на образце при помощи пружинного зажима. Нижняя опора *1* является неподвижной, верхняя же представляет одно целое с рычагом *4*. Перемещение нижнего конца этого рычага передается планке *3*, а от нее — стрелке *5*. При помощи винта *2* имеется возможность устанавливать стрелку перед экспериментом в нулевое положение. Если деформации образца велики настолько, что стрелка выходит за пределы шкалы, тем же винтом можно вернуть ее в исходное положение и во время опыта. Увеличение тензометра МИЛ равно 500.

В тензометре Бояршинова (см. рис. 14.5) вместо механических шарниров применен упругий шарнир, состоящий из двух плоских пружин *2* и *3*. Алюминиевые детали *5* и *6* поворачиваются при

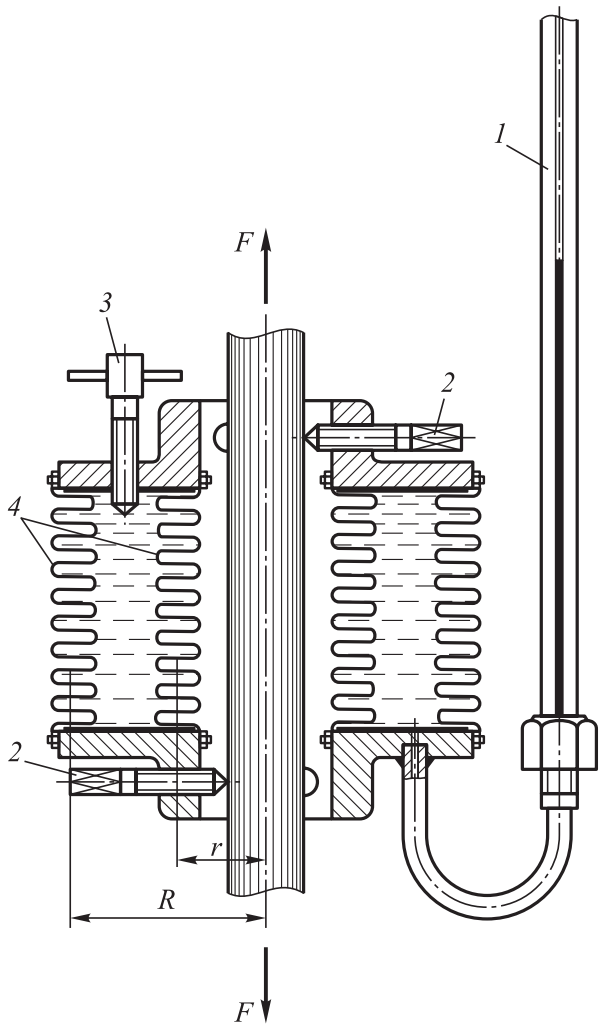


Рис. 14.6

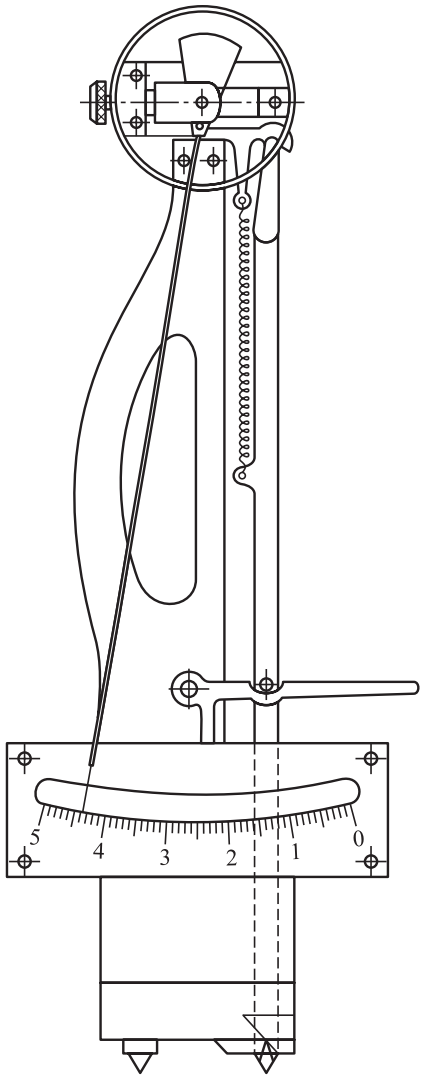


Рис. 14.7

растяжении образца относительно точки пересечения пружин. Упругий шарнир обладает тем преимуществом, что не имеет зоны застоя, которая характерна для обычных механических шарниров вследствие наличия сухого трения. Тензометр имеет два стальных каленых ножа *1*, *7*, которыми он прижимается к образцу при помощи винтов *9*. В момент установки прибор арретируется (запирается) при помощи штифта *4*, соединяющего наглухо детали *5*, *6*. Отсчет деформаций ведется при помощи индикаторов *8*.

Тензометром Бояршинова можно производить отсчеты без перестановки шкалы в пределах деформаций, достигающих 4 %. Таким широким диапазоном измерения другие тензометры не обладают. База тензометра l = 50 мм, увеличение около 500.

При замере деформации образцов, испытываемых на растяжение и сжатие, отлично зарекомендовал себя тензометр Лихарева с «гидравлическим рычагом» (рис. 14.6). Основными частями этого тензометра являются металлические гофрированные коробки (сильфоны *4*), образующие замкнутую полость, сообщающуюся с капилляром *1*. Полость между сильфонами заполнена жидкостью. При удлинении образца объем полости увеличивается и уровень жидкости в капилляре понижается на h.

Из условия неизменности объема жидкости, очевидно,

$$(\pi R^2 - \pi r^2)\Delta l = hA,$$

где R, r — средний радиус большого и малого сильфона соответственно; A — площадь сечения капилляра. Таким образом, увеличение тензометра равно $\pi \dfrac{R^2 - r^2}{A}$ и зависит от размеров выбранных

сильфонов и капилляра. Обычно коэффициент увеличения прибора около 2000.

Тензометр на образце устанавливают с помощью винтов *2*. Для изменения уровня жидкости в капилляре и для установки прибора на нуль служит винт *3*. Наименьшая база прибора около 20 мм.

Среди механических тензометров, применяемых не только при механических испытаниях материалов, но и при испытаниях конструкций, имеющих сравнительно малую базу, наиболее широкое распространение в лабораторной практике получил шарнирно-рычажный тензометр Гугенбергера (рис. 14.7) с базой 20 мм и увеличением около 1000.

Механические тензометры с меньшей базой не имеют широкого распространения и являются уникальными. Попытки отдельных исследователей внедрить такие тензометры в лабораторную практику успеха не имели, поскольку при испытании материалов более предпочтительными являются тензометры с большой базой, а при испытании конструкций тензометры заменяют проволочными датчиками сопротивления.

14.3. Применение датчиков сопротивления

В технике испытания конструкций за последние десятилетия широкое распространение получили проволочные датчики сопротивления.

Проволочный датчик представляет собой наклеенную на полоску бумаги тонкую зигзагообразно уложенную проволочку (рис. 14.8) толщиной 0,015 ... 0,030 мм. К концам проволочки сваркой либо пайкой присоединяются провода.

Датчик наклеивают на поверхность исследуемой детали так, чтобы размер базы l совпадал с направлением, в котором желательно замерить деформацию. При деформации объекта проволочка удлиняется (укорачивается) и ее омическое сопротивление изменяется.

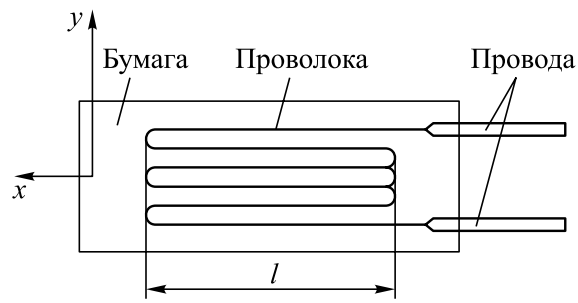


Рис. 14.8

Опыт показывает, что относительное изменение омического сопротивления проволоки $\Delta R/R$ пропорционально ее удлинению, $\Delta R/R = \gamma_0 \varepsilon$, где γ_0 — коэф-

ности — безразмерная величина, зависящая от физических свойств материала. Для материалов, применяемых в датчиках сопротивления, значение γ_0 колеблется в пределах 2,0–3,5. Для константана, например, $\gamma_0 = 2{,}0–2{,}1$, для нихрома 2,1–2,3, для элинвара 3,2–3,5.

У проволочного датчика вследствие закруглений на концах петель обнаруживается чувствительность не только к продольным, но и к поперечным деформациям, и

$$\frac{\Delta R}{R} = \gamma\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y,$$

где ε_x и ε_y — удлинения в направлениях осей x и y (см. рис. 14.8), γ и δ — коэффициенты продольной и поперечной тензочувствительности датчика, определяемые путем тарировки.

Величина γ вследствие наличия закруглений на концах петель оказывается несколько меньше коэффициента тензочувствительности проволоки γ_0. По мере увеличения базы l разница между γ и γ_0 уменьшается и для обычно применяемых датчиков с базой $l = 20$ мм оказывается ничтожно малой. Того же порядка малую величину представляет собой и коэффициент δ. Для датчиков, имеющих малую базу ($l < 5$ мм), значение δ соизмеримо с γ, и при подсчете напряжений коэффициент поперечной тензочувствительности следует принимать во внимание.

При исследовании напряженного состояния в элементах сложной конструкции часто возникает необходимость определить не только значение, но и направление главных напряжений. В таком случае практикуют установку в исследуемой области сразу трех датчиков в направлениях, составляющих углы 45° (рис. 14.9), так называемой розетки датчиков. По трем замеренным удлинениям могут быть без труда определены главные удлинения и угол, опреде-

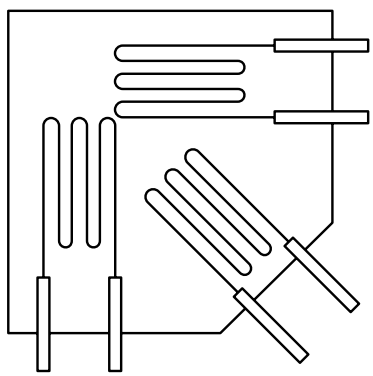


Рис. 14.9

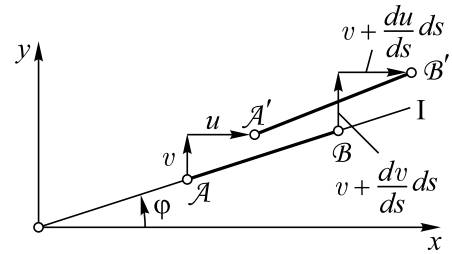


Рис. 14.10

ляющий положение главных осей. Делают это следующим образом: положим, заданы деформации по главным осям x и y (рис. 14.10). Из рис. 14.10 нетрудно установить, что разность отрезков $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$ и $\mathcal{AB}$, т. е. абсолютное приращение длины $\mathcal{AB}$, равно

$$\frac{\partial u}{\partial s} ds \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial s} ds \sin\varphi,$$

где u и v — перемещения по осям x и y.

Относительное удлинение вдоль оси I составляет

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{\partial u}{\partial s}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial s}\sin\varphi,$$

или

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin^2\varphi,$$

откуда

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi.$$

Для трех осей, совпадающих с осями датчиков в розетке (рис. 14.11), получаем соответственно

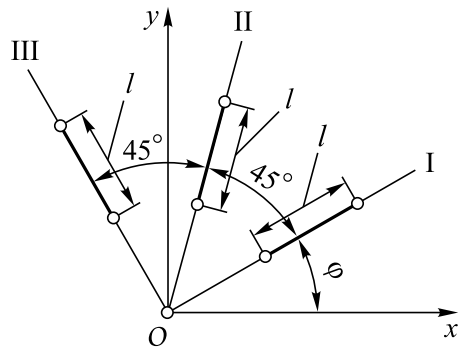


Рис. 14.11

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi;$$

$$\varepsilon_{\mathrm{II}} = \varepsilon_x \cos^2(\varphi + 45^\circ) + \varepsilon_y \sin^2(\varphi + 45^\circ);$$

$$\varepsilon_{\mathrm{III}} = \varepsilon_x \cos^2(\varphi + 90^\circ) + \varepsilon_y \sin^2(\varphi + 90^\circ),$$

откуда после несложных преобразований находим

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\varepsilon_{\mathrm{I}} - 2\varepsilon_{\mathrm{II}} + \varepsilon_{\mathrm{III}}}{\varepsilon_{\mathrm{I}} - \varepsilon_{\mathrm{III}}};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{\mathrm{I}} + \varepsilon_{\mathrm{III}}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{\mathrm{I}} - \varepsilon_{\mathrm{III}})^2 + (\varepsilon_{\mathrm{I}} - 2\varepsilon_{\mathrm{II}} + \varepsilon_{\mathrm{III}})^2};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_{\mathrm{I}} + \varepsilon_{\mathrm{III}}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{\mathrm{I}} - \varepsilon_{\mathrm{III}})^2 + (\varepsilon_{\mathrm{I}} - 2\varepsilon_{\mathrm{II}} + \varepsilon_{\mathrm{III}})^2}.$$

Таким образом, в общем случае получены выражения для определения значения и направления главных деформаций.

Главные деформации с равным успехом могут быть найдены и при помощи трех механических тензометров. В некоторых случа-

ях практикуется определение главных осей при помощи лаковых покрытий (см. далее) с последующей установкой тензометров по главным направлениям.

В современной технике эксперимента датчики сопротивления используют не только для замера деформаций. Во многих силоизмерительных устройствах их используют как чувствительные элементы, реагирующие на изменение внешних нагрузок. Для замера усилий датчики сопротивления наклеивают на деформируемый упругий элемент (стержень, вал) и по изменению сопротивления датчика судят о действующем усилии. Такой способ удобен тем, что позволяет весьма просто осуществить дистанционный замер, без введения сложных дополнительных устройств.

При статических испытаниях датчик, наклеенный на поверхность исследуемой детали, включают в измерительный прибор по мостовой схеме (рис. 14.12) с отсчетом показаний по гальванометру. Одно из четырех сопротивлений моста, например R_1, представляет собой сопротивление датчика. Остальные сопротивления подбирают так, чтобы при отсутствии удлинений детали (до начала опыта) мост был сбалансирован и сила тока в гальванометре $i_г$ равнялась бы нулю. Для этого необходимо, как известно, соблюдение соотношения

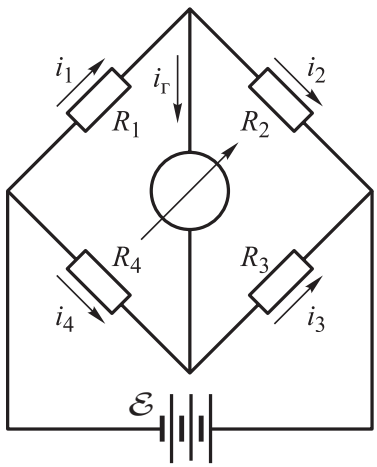


Рис. 14.12

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}. \qquad (14.1)$$

Обычно в качестве сопротивления R_4 берут второй датчик, точно такой же, как и первый, а сопротивления R_2 и R_3 выбирают равными. Таким образом,

$$R_1 = R_4 = R_д, \qquad R_2 = R_3 = R$$

и условие (14.1) соблюдается.

Составляя уравнения Кирхгофа для цепей, представленных на рис. 14.12, нетрудно определить, что в случае несбалансированного моста ток, проходящий через гальванометр

$$i_г = \mathcal{E}\ \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{R_2R_3R_4 + R_1R_3R_4 + R_1R_2R_4 + R_1R_2R_3}. \qquad (14.2)$$

При этом предполагается, что внутреннее сопротивление источника тока и гальванометра много меньше R_1, R_2, R_3 и R_4. При работе датчика сопротивление R_1 изменяется на $\Delta R_д$ и

$$R_1 = R_д + \Delta R_д; \qquad R_2 = R_3 = R; \qquad R_4 = R_д.$$

Выражение (14.2) принимает при этом вид

$$i_г = \frac{\mathcal{E}}{2(R + R_д)} \frac{\Delta R_г}{R_д}.$$

Таким образом, ток, протекающий через гальванометр, пропорционален изменению сопротивления датчика и, следовательно, замеряемой деформации.

Основной погрешностью датчиков сопротивления является температурная погрешность. При изменении температуры сопротивление датчика меняется весьма заметно. Например, для константанового датчика, наклеенного на поверхность стальной детали, при изменении температуры на 1° омическое сопротивление меняется так же, как при изменении напряжения в стальном образце, на 0,7 МПа. С тем чтобы компенсировать температурную погрешность, датчик R_4 в мостовой схеме помещают без приклейки на датчике R_1 и закрывают сверху теплоизолирующим материалом, например тонкой фетровой полоской. Температура обоих датчиков оказывается при этом одинаковой. Тогда одинаковым будет и температурное изменение сопротивлений R_1 и R_4. Балансировка моста, следовательно, меняться не будет, поскольку соотношение (14.1) сохраняется.

Когда ведется исследование напряженного состояния сложной конструкции, имеется большое количество датчиков, с которых необходимо снять показания. Гальванометр и сопротивления R_2 и R_3 остаются при этом общими, а пары сопротивлений R_1, R_4 для каждой исследуемой точки включают в схему поочередно для снятия показаний. Чтобы избежать погрешностей из-за изменения напряжения питания $\mathcal{E}$ непосредственно перед каждым отсчетом следует проводить балансировку моста при помощи переменного сопротивления r (рис. 14.13).

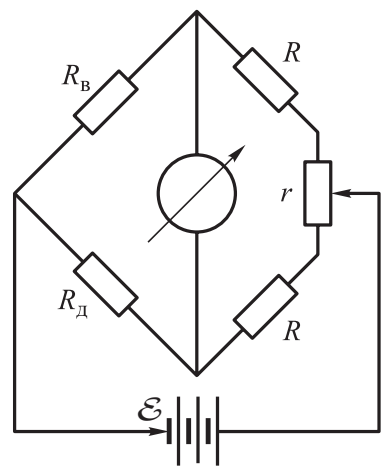


Рис. 14.13

Описанный способ замера пригоден, понятно, только при статическом из-

менении нагрузки. При быстро протекающих процессах вводят специальную регистрирующую аппаратуру. Для записи деформаций применяют осциллографы, а в схему включают усилитель.

14.4. Оптический метод определения напряжений при помощи прозрачных моделей

Оптический метод исследования напряжений заключается в том, что прозрачную модель из оптически активного материала (обычно из специального органического стекла) в нагруженном состоянии просвечивают в поляризованном свете. Изображение модели на экране оказывается при этом покрытым системой полос, форма и расположение которых определяются напряженным состоянием модели. Путем анализа полученной картины имеется возможность найти возникающие напряжения.

Наиболее просто при помощи оптического метода анализируют плоское напряженное состояние в моделях постоянной толщины. Вместе с тем существуют приемы исследования и объемного напряженного состояния. Эта задача, однако, оказывается значительно более сложной как по технике эксперимента, так и по обработке полученных результатов.

Остановимся на случае просвечивания плоской модели в монохроматическом свете.

Схема установки представлена на рис. 14.14. В этой установке S — источник света, *1* — конденсор, *2* — светофильтр, *6* — объектив, *7* — экран. Модель *4* помещают между двумя поляризующими элементами *3* и *5*. Первый из них называется поляризатором, второй — анализатором. Оптические оси поляризатора и анализатора составляют между собой угол 90°. При этом пучок света, прошедший

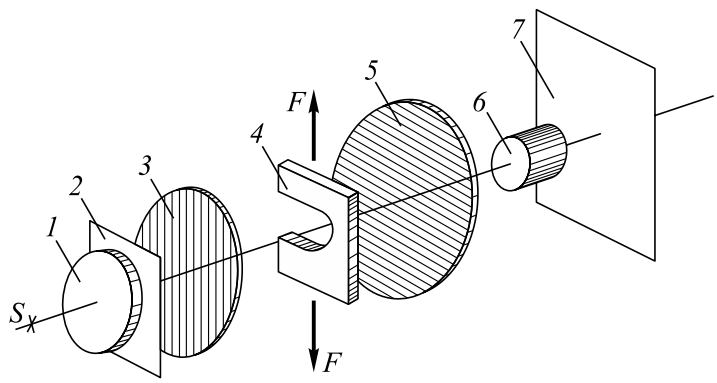


Рис. 14.14

через поляризатор *3*, поляризуется в горизонтальной плоскости (вектор поляризации располагается горизонтально, а световые колебания происходят в вертикальной плоскости). Поляризованный пучок света через анализатор при указанном расположении оптических осей не пройдет, и экран освещен не будет. Поляризатор и анализатор, как говорят, «установлены на темноту». При нагрузке модель приобретает свойство поворачивать в зависимости от величины напряжений плоскость поляризации проходящего через нее света. Тогда свет с повернутой плоскостью поляризации частично проходит через анализатор, давая на экране изображение исследуемой модели, покрытое системой светлых и темных полос.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Аналогом поляризованного света являются механические плоские поперечные колебания, для которых перемещение u изменяется по гармоническому закону:

$$u = a \sin \omega t,$$

где a — амплитуда колебаний, соответствующая яркости светового пучка; ω — частота поперечных колебаний, равная частоте световой волны.

Пусть поляризованный в горизонтальной плоскости пучок (рис. 14.15) проходит через прозрачную напряженную модель. Смещения в вертикальной плоскости OA разложим по главным осям x и y. Тогда

$$u_x = a \sin\alpha \sin \omega t;$$

$$u_y = a \cos\alpha \sin \omega t.$$

Оптически активный материал при наличии напряжений становится анизотропным, и скорость света c при прохождении в направлении осей x и y оказывается различной. Поэтому различными будут и промежутки времени, за которые свет пройдет через пластинку толщиной h:

$$t_x = \frac{h}{c_x}, \quad t_y = \frac{h}{c_y}.$$

Уравнения волн в направлении осей x и y после выхода из пластинки будут соответственно следующими:

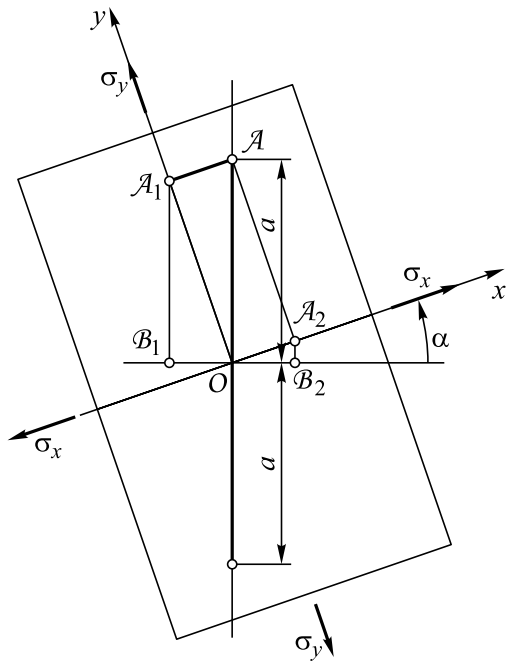


Рис. 14.15

$$u_x = a \sin\alpha \sin\omega(t - t_x);$$
$$u_y = a \cos\alpha \sin\omega(t - t_y). \qquad (14.3)$$

Таким образом, колебания оказываются сдвинутыми по фазе. Сдвиг фаз равен $\omega(t_y - t_x)$.

Через анализатор, «установленный на темноту», пройдут только колебания, происходящие в горизонтальной плоскости, т. е.

$$u' = OB_2 - OB_1 = OA_2 \cos\alpha - OA_1 \sin\alpha,$$

или, согласно выражениям (14.3),

$$u' = a \sin\alpha \cos\alpha[\sin\omega(t - t_x) - \sin\omega(t - t_y)].$$

После простых преобразований окончательно получим

$$u' = a\sin 2\alpha \sin\omega\frac{t_y - t_x}{2}\cos\omega\left(t - \frac{t_x + t_y}{2}\right).$$

Как видно, амплитуда волны, прошедшей через образец и анализатор, оказывается равной

$$a' = a\sin 2\alpha \sin\omega\frac{t_y - t_x}{2}. \qquad (14.4)$$

Следовательно, интенсивность света, падающего на экран, зависит от сдвига фаз $\omega(t_y - t_x)$ и от угла α.

В случае если плоскость поляризации совпадает с направлением одной из главных осей, $\sin 2\alpha = 0$. Тогда экран в соответствующих точках будет затемнен. Кроме того, экран будет затемнен в тех точках изображения модели, где разность фаз $\omega(t_y - t_x)/2$ принимает значения, кратные π:

$$\omega\frac{t_y - t_x}{2} = \pi n. \qquad (14.5)$$

Под n здесь понимается любое целое число.

Таким образом, на экране получаются темные полосы двоякого происхождения. Прежде всего, имеется одна или несколько темных полос, в которых направление главных осей совпадает с плоскостями поляризации. Такие линии носят название *изоклин* (линия постоянного наклона главных напряжений). Вторая система темных полос соответствует значениям $\omega(t_y - t_x)/2$, равным $0, \pi, 2\pi, \ldots$.

Опыт показывает, что разность фаз (разность промежутков времени прохождения света в направлении осей y и x) пропорциональна разности напряжений σ_y и σ_x, т. е.

$$t_y - t_x = \frac{h}{c_y} - \frac{h}{c_x} = kh(\sigma_y - \sigma_x),$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от оптической активности материала.

Следовательно, для каждой полосы второго рода разность напряжений $\sigma_y - \sigma_x$, согласно выражению (14.5), есть величина постоянная, равная

$$0;\quad 1\frac{2\pi}{\omega kh};\quad 2\frac{2\pi}{\omega kh};\quad 3\frac{2\pi}{\omega kh};\quad \ldots;\quad n\frac{2\pi}{\omega kh}.$$

Число n называется порядком полосы.

Оптическую постоянную k легко определить путем предварительного испытания образца при простом растяжении. Если растягивать в поляризованном свете призматический стержень из того же материала, из которого сделана модель, то изображение образца на экране будет последовательно темнеть, когда напряжение в нем будет проходить через значения

$$1\frac{2\pi}{\omega kh};\quad 2\frac{2\pi}{\omega kh}\quad \text{и т. д.}$$

Отсчитывая изменения нагрузки между двумя последующими потемнениями, определяем

$$\sigma = \frac{2\pi}{\omega kh}$$

и для данного значения ω (для взятого цвета) находим значение k.

Темные полосы на модели, соответствующие постоянным значениям $\sigma_y - \sigma_x$, легко отличаются от изоклин. Если поляризатор и анализатор одновременно поворачивать в их плоскости, т. е. изменять угол α, изоклины будут менять свою форму. Полосы же $\sigma_y - \sigma_x = \text{const}$, т. е. остаются постоянными. При исследовании напряженного состояния в плоской модели этим приемом обычно и пользуются. Поворачивая плоскость поляризации (обычно с интервалом в 5°), строят семейства изоклин с соответствующими указаниями углов. По изоклинам без труда могут быть затем построены и траектории главных напряжений в модели.

Если менять нагрузку на модель при неизменном положении поляризатора и анализатора, можно наблюдать возникновение и перемещение полос на изображении модели. Например, при изгибе призматического бруса имеем систему полос, показанную на



Рис. 14.16

рис. 14.16. В средней части модели, где имеет место чистый изгиб, наблюдается равномерное распределение полос. Это значит, что напряжения по высоте сечения распределены по линейному закону. По мере возрастания нагрузки у верхнего и нижнего краев бруса будут возникать новые полосы, перемещающиеся по направлению к нейтральной линии. При этом полосы будут сгущаться, но распределение их сохранится равномерным. Производя нагружение от нуля, очень легко определить порядок каждой полосы и точно указать соответствующую разность $\sigma_x - \sigma_y$.

Оптический метод не дает возможности определить σ_x и σ_y отдельно. Для этого используют побочные приемы. Одним из способов является замер при помощи специального тензометра изменения толщины модели в различных точках. Так как Δh пропорционально сумме напряжений:

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{v}{E}(\sigma_x + \sigma_y),$$

то, зная сумму и разность напряжений, легко подсчитать и сами напряжения. Однако более предпочтительным методом является применение общих уравнений теории упругости с последующим интегрированием внутренних сил в соответствии с полученными направлениями главных напряжений. Более детальное описание этого способа, однако, выходит за рамки курса сопротивления материалов.

Описанным выше приемом просвечивания плоской модели в монохроматическом свете не исчерпываются возможности оптического метода. Часто модели просвечивают в белом свете. На экране в этом случае вместо темных и светлых полос получаются цветные полосы с непрерывными переходами через цвета спектра.

Существуют способы просвечивания моделей с погашением изоклин. Известны приемы исследования напряженного состояния в пространственных моделях путем их «замораживания» с последующим разрезанием на плоские образцы.

14.5. Метод муаровых полос

Муаровый метод основан на эффекте возникновения темных и светлых полос, получающихся при наложении двух сеток с одинаковыми или мало отличающимися параметрами. Образующаяся картина носит название муара. На рис. 14.17 показана фотография, иллюстрирующая этот эффект.

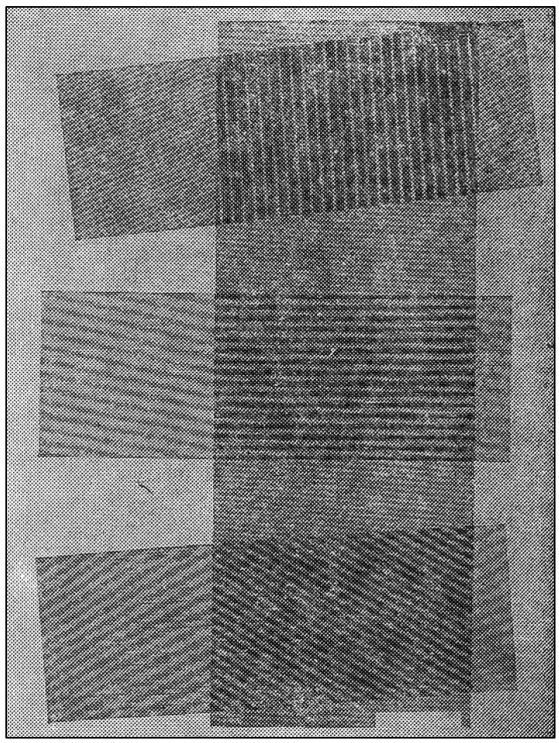


Рис. 14.17

Если одну из сеток связать с исследуемым объектом, то при его деформации сетка исказится; расстояние между линиями изменится и уже не будет постоянным, а сами линии изогнутся. Соответственно изменится и картина муаровых полос. По их форме и расположению можно судить о деформации объекта. Рассмотрим самый простой случай.

Положим, растягивается полоса, на которую наклеена сетка с поперечным расположением линий (рис. 14.18). Сверху на эту сетку свободно наложена вторая, точно такая же и с той же ориентацией линий. Пока образец не деформирован, линии наложенных сеток дают ровный фон: серый, если линия расположена против линии, и темный, если линия одной сетки легла на просвет другой. При

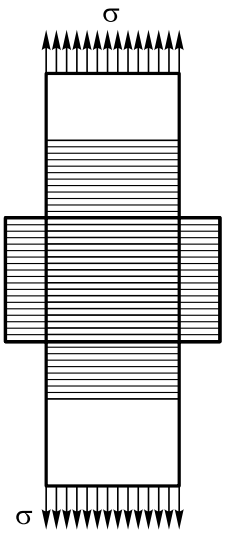


Рис. 14.18

растяжении образца расстояние между линиями первой сетки увеличится и образуются прямые муаровые полосы, имеющие поперечное направление. Картина получится такая же, как на рис. 14.17. Нетрудно установить, чему равно расстояние между муаровыми полосами.

Рассмотрим систему линий в поперечном разрезе (рис. 14.19). Справа показан разрез эталонной недеформированной сетки (шаг a), а слева — деформированной. Ее шаг обозначен через a_1:

$$a_1 = a(1 + \varepsilon),$$

где ε — удлинение испытуемого образца.

В середине темной муаровой полосы (точка A) линия одной сетки расположена против просвета другой. Из схемы видно, что на отрезке S, равном шагу муаровых полос, на недеформируемой сетке укладывается n линий, а на другой сетке n — 1 линия. Поэтому

$$S = na. \qquad (14.6)$$

При этом $S = (n - 1)a_1$, откуда

$$n = \frac{a_1}{a_1 - a} \text{ или } n = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Возвращаясь к выражению (14.6), получим

$$\varepsilon = \frac{a}{S - a.}$$

Так как параметр сетки a известен, остается замерить расстояние S между муаровыми полосами и подсчитать ε.

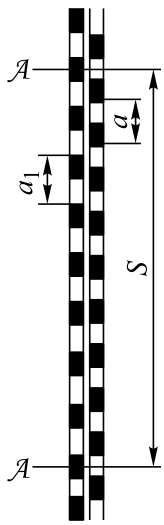


Рис. 14.19

В рассмотренном примере отчетливо видны сущность метода и его принципиальное отличие от поляризационно оптического.

Муар возникает как следствие смещения сеток. Это своего рода индикатор перемещений. Чтобы найти среднюю деформацию на участке, надо сопоставить расположение двух соседних полос. Муар в этом смысле родствен тензометру, но дает не дискретно точечное смещение, а непрерывную картину смещений по области.

В поляризационно оптическом методе дело обстоит иначе. Здесь полоса возникает не как следствие перемещения, а как

следствие местной деформации. Разреженность или сгущенность полос свидетельствует не о величине деформаций, а о градиенте их изменения, как, это например, было показано на рис. 14.16.

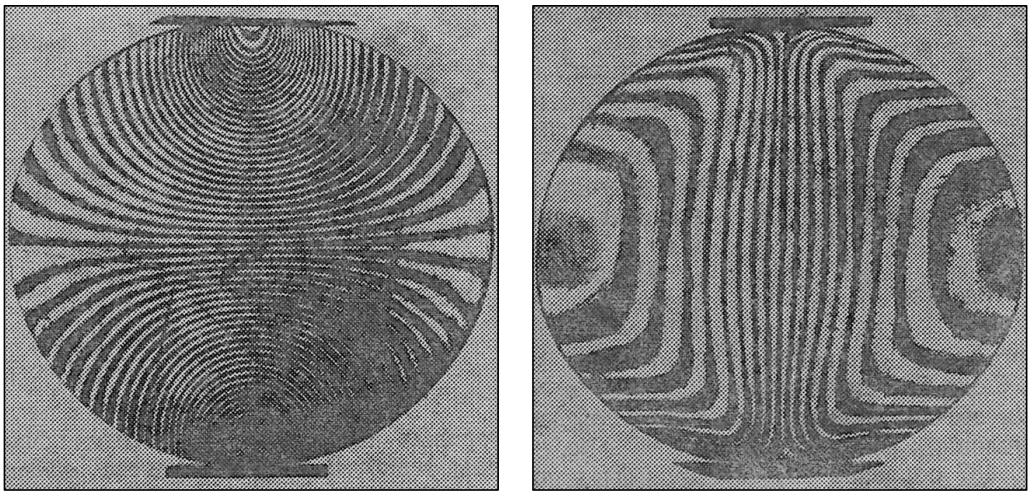
При однородном растяжении пластины, изготовленной из оптически активного материала, мы никаких полос вообще не увидим. Будет происходить лишь периодическое затемнение или просветление изображения, когда возникающая деформация проходит через определенное значение. В муаровом методе такое просветление следом за затемнением будет происходить тогда, когда задана не деформация, а перемещение одной сетки относительно другой как жесткого целого на величину $a/2$.

Переходя на язык математики, можно сказать, что деформация определяется первыми производными от перемещений по координатам x и y. Муаровый метод, следовательно, неизбежно требует дифференцирования наблюдаемых функций перемещений. Это и производится в неявной форме, когда измеряется шаг полос, т. е. определяется разность перемещений. Такая операция связана, естественно, с потерей точности и накладывает ограничения на применение метода муаровых полос. Если деформации малы, полосы расположены редко. В пределах рассматриваемой области их будет мало, и средняя деформация, замеренная на больших отрезках, не дает достаточно полного представления о картине напряженного состояния. К тому же сами полосы оказываются размытыми, и очертить четко их положение и направление становится затруднительным.

Наиболее целесообразно применять метод муаровых полос там, где ожидается возникновение относительно больших деформаций. Сюда относятся задачи, связанные с анализом пластически деформируемых сред или с поведением конструкции в условиях ползучести.

На рис. 14.20 показана картина муаровых полос, возникающих при сжатии по вертикальному диаметру диска из низкомодульного материала. В случае *а* линии сетки имеют горизонтальное направление, а в случае *б* — вертикальное. Каждая из полос представляет собой геометрическое место точек равных перемещений, перпендикулярных линиям сетки. Отчетливо видно, что частота полос в случае *а* больше, чем в случае *б*. Это значит, что деформация в вертикальном направлении больше, чем в горизонтальном.

Одной из разновидностей метода муаровых полос является метод определения угловых перемещений деформируемой поверхности, в частности упругой поверхности пластин или мембран. На рис. 14.21 показана схема установки. Здесь сетка наносится на



а *б*

Рис. 14.20

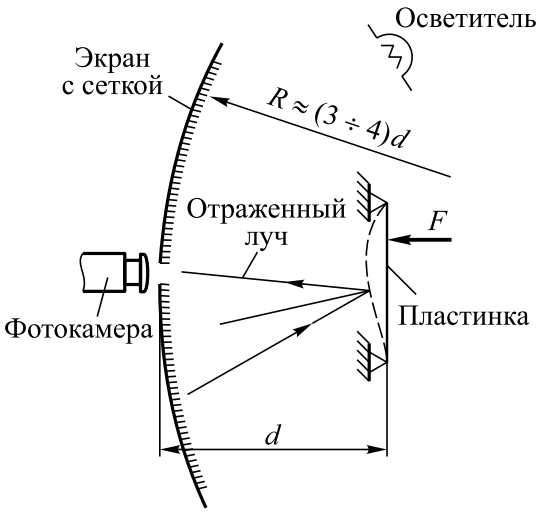


Рис. 14.21

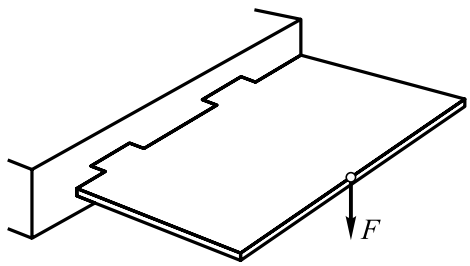
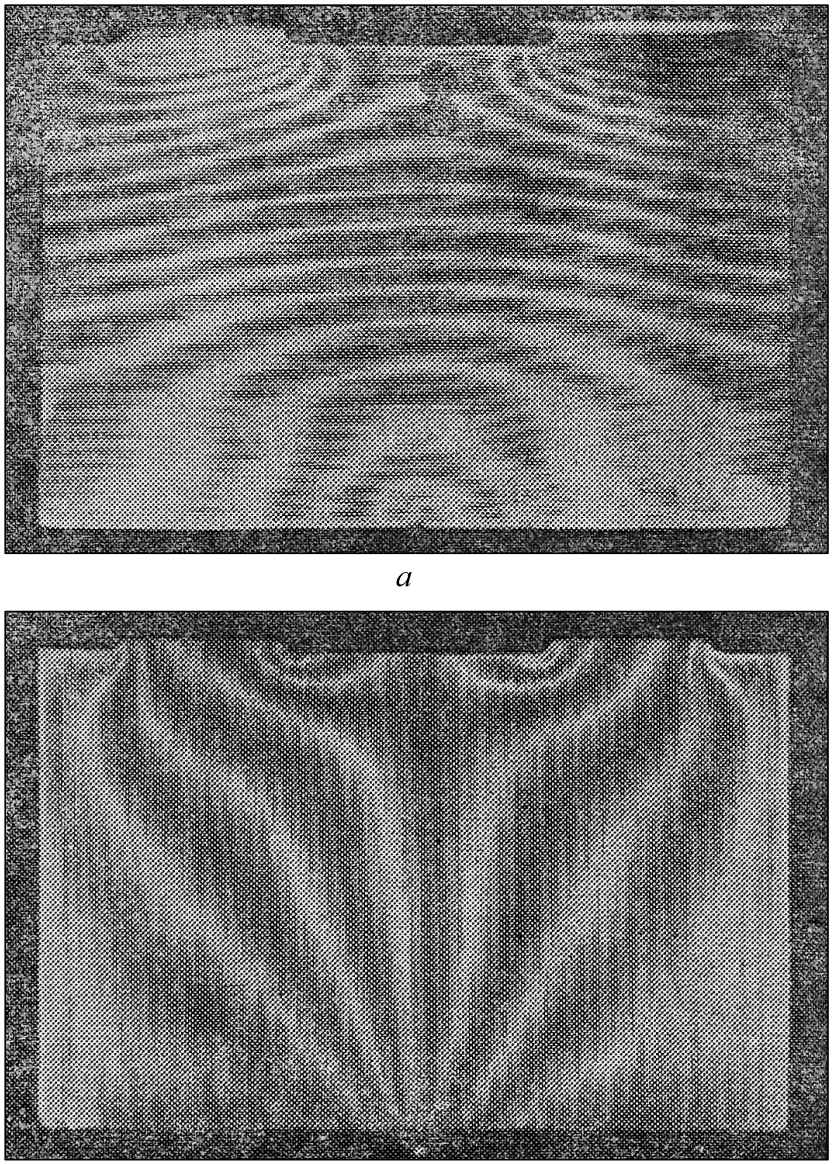


Рис. 14.22

цилиндрический экран, а исследуемая поверхность обрабатывается с целью придания ей зеркальных свойств. Отраженная от этой поверхности сетка экспонируется на фотопленку с одной установки дважды: первый раз — для неизогнутой пластинки, а затем — для изогнутой. На пленке происходит смещение сетки, обусловленное изменением угловой ориентации отражающей поверхности, и возникает муаровый эффект. В отличие от полос, показанных на рис. 14.20, здесь каждая полоса представляет собой геометрическое место точек одинаковых углов поворота поверхности в плоскости, перпендикулярной линиям сетки, нанесенной на экран. По



а

б

Рис. 14.23

угловым перемещениям определяется закон изменения кривизны пластинки, а затем подсчитываются и напряжения.

В качестве примера на рис. 14.22 показана прямоугольная пластинка, защемленная по двум участкам одного края и нагруженная сосредоточенной силой. На рис. 14.23 дана картина распределения муаровых полос для двух случаев расположения сетки.

К настоящему времени создано несколько модификаций метода муаровых полос и разработан ряд приемов, повышающих его точ-

ность и эффективность. В руках исследователя этот метод является хорошим дополнением к арсеналу средств анализа напряженного состояния.

14.6. Рентгеновский метод определения напряжений

Рентгеновский метод определения напряжений основан на замере расстояния между атомами кристаллической решетки металла. Это расстояние может меняться по двум причинам: вследствие температурного и вследствие силового воздействия. В ненапряженном состоянии расстояние между атомами известно. Сопоставляя это расстояние с замеренным, находим относительное удлинение и, вводя температурную поправку, определяем напряжение.

Из сказанного вытекает между прочим важная особенность рентгеновского метода. Он позволяет определять напряжения в металле без «привязки» измерительной аппаратуры к ненапряженному состоянию. При обычном тензометрировании необходима установка тензометра на ненагруженную конструкцию с тем, чтобы сопоставить в дальнейшем показания прибора до и после нагружения. При этом предварительные напряжения в конструкции (натяг, технологические напряжения) тензометрами замечены быть не могут. Рентгеновский метод дает «абсолютные» значения напряжений. Рентгеновским методом можно, например, определить остаточные напряжения в зоне сварного шва после его остывания, что при помощи тензометров сделано быть не может.

Как известно, рентгеновское излучение возникает при попадании пучка быстро летящих электронов или ионов на поверхность металла. Пучок электронов создается в рентгеновской трубке путем нагревания нити накаливания и последующего ускорения электронов в поле высокого напряжения. Электроны, попадающие на анод трубки, дают начало рентгеновскому излучению, распространяющемуся преимущественно в направлении, перпендикулярном пучку (рис. 14.24). Во время работы анод сильно нагревается, охлаждается водой. Для увеличения теплоотвода трубка анода выполняется медной.

Спектр излучения рентгеновской трубки зависит от металла, на который падает электронный пучок (от рабочего металла анода), и от величины приложенного к трубке высокого напряжения.

При рентгеновском методе замера напряжений в металлах используется монохроматическое (характеристическое) рентге-

новское излучение так называемой *K*-серии. Для того чтобы получить такое излучение, необходимо приложить к трубке высокое напряжение, большее некоторой величины, характерной для взятого рабочего металла анода. Например, для исследования стальных конструкций в качестве рабочего металла анода используется кобальт. Если анодное напряжение в трубке не превышает 7710 В, спектр рентгеновского излучения кобальта будет сплошным, охватывающим длины волн от самых коротких, порядка 1,6 Å, до длинных волн теплового излучения. При анодном напряжении, превышающем 7710 В, картина резко меняется. Интенсивность сплошного спектра уменьшается, и на его фоне появляются ярко выраженные излучения с определенными, строго фиксированными длинами волн. Для кобальта таких излучений будет три. Самое интенсивное из них имеет длину волны λ, равную 1,7853 Å. Соседнее с ним, более слабое, — 1,7892 Å. Эти два излучения образуют так называемый дублет K_α. Третье излучение является слабым и практического значения не имеет. При дальнейшем повышении напряжения характер спектра не меняется. Возрастает лишь интенсивность излучения. Указанные же длины волн сохраняются.

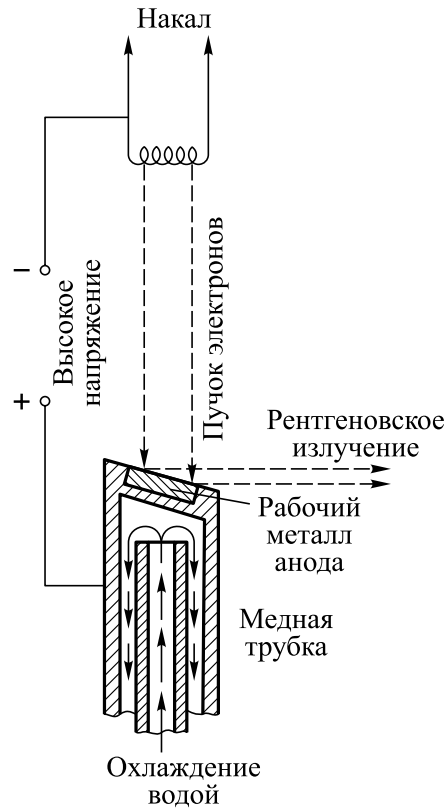


Рис. 14.24

Волны рентгеновского излучения, воздействуя на электроны атомов исследуемого металла, заставляют их колебаться с частотой волны. Таким образом, электроны атомов становятся сами источниками колебаний и распространяют рентгеновское излучение с длиной волны падающего пучка. Поскольку атомы в кристаллической решетке исследуемого металла располагаются в определенном порядке, излучения, исходящие от электронов, интерферируют. В результате рентгеновский пучок, падающий на кристалл, распространяется от кристаллов в определенных направлениях в зависимости от соотношения между длиной волны, размерами решетки и углом падения рентгеновского пучка. Это соотношение носит название условия Брегга.

Условие Брегга трактуется обычно как условие отражения рентгеновского луча от определенной кристаллической плоскости, хотя, по существу, имеет место не отражение, а интерференция колебаний, распространяющихся от возбужденных электронов в атомах кристаллической решетки.

Если рассмотреть две параллельные плоскости AA и BB (рис. 14.25) в некоторой кристаллической решетке, то нетрудно

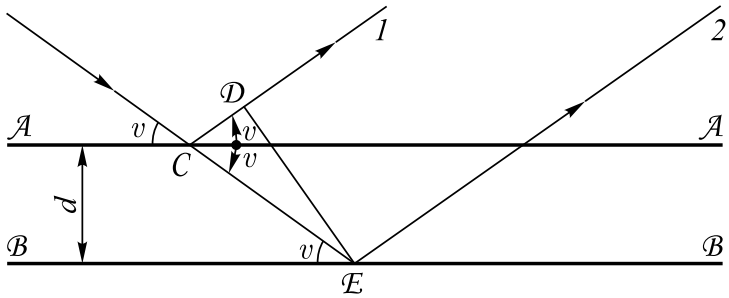


Рис. 14.25

установить условие Брегга. Рентгеновский луч, падающий на плоскости и отражающийся от них, будет усиливаться в том случае, когда разность хода волн *1* и *2* будет составлять целое число волн λ. Тогда

$$CE - CD = n\lambda,$$

или

$$\frac{d}{\sin\vartheta} - \frac{d}{\sin\vartheta}\cos 2\vartheta = n\lambda,$$

где d — расстояние между плоскостями. Окончательно

$$2d \sin \vartheta = n\lambda. \qquad (14.7)$$

Это и есть условие Брегга. Оно показывает, что отражение рентгеновских лучей от некоторой плоскости возможно только при падении на нее луча под определенным углом ϑ, удовлетворяющим указанному соотношению. Число n называется порядком отражения.

Теперь рассмотрим схему отражения рентгеновского луча от поверхности исследуемого образца. Пучок, падающий по нормали к поверхности, охватывает площадку 1,5...2 мм в диаметре. На этой площадке, как показывает опыт, среди большого числа освещенных кристалликов находится обычно достаточное количество таким образом ориентированных кристаллов, что определенные их плоскости находятся в соотношении Брегга с параметрами пада-

ющего луча. При этом происходит отражение луча от кристаллов (рис. 14.26). Отраженные лучи образуют коническую поверхность с углом при вершине 360°—4ϑ. Если на их пути поставить фотографическую пленку, то на ней зафиксируется круг радиусом h (см. рис. 14.26). Очевидно,

$$\operatorname{tg}(180^\circ - 2\vartheta) = -\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{h}{a},$$

где a — расстояние от пленки до поверхности металла. Величины h и a замеряются, и таким образом определяется угол ϑ. Если

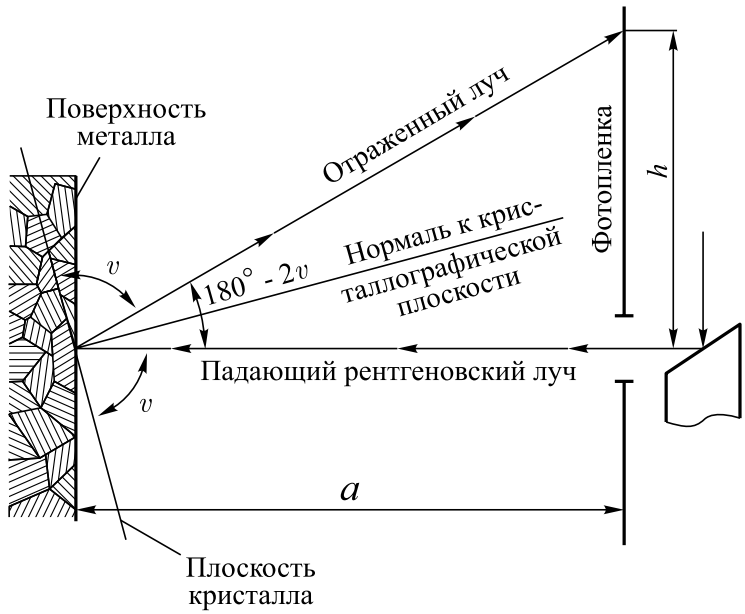


Рис. 14.26

вернуться к выражению (14.7), то, зная длину волны λ и порядок отражения n, можно найти размер d — расстояние между плоскостями кристалла. Эту величину следует сопоставить с размером d_0 ненапряженного кристалла. Таким образом определяется удлинение в направлении, перпендикулярном отражающей плоскости кристалла.

Практически осуществление указанных операций вызывает ряд затруднений, связанных с тем, что все замеры должны быть проведены с точностью, обеспечивающей определение весьма малой разности величин d и d_0.

Прежде всего, возникает затруднение с определением расстояния a от пленки до образца. Это расстояние имеет величину

порядка 50 мм и не может быть замерено просто линейкой, так как должно быть определено с точностью до микрона. Не может быть применен и какой-либо другой более точный измерительный инструмент типа микрометра. Дело в том, что пленка в кассете несколько коробится и при подводе измерительного инструмента изгибается. Поэтому замеренное расстояние a оказывается не соответствующим тому, при котором происходит съемка. Нужно при этом учитывать еще, что для работы в дневных условиях пленка закрыта черной бумагой, непроницаемой для обычных световых лучей и свободно пропускающей рентгеновские лучи. Бумага имеет определенную толщину, на которую при замерах также должна вводиться поправка.

Возникающие затруднения решаются следующим образом. В исследуемой точке поверхность металла зачищается и травится кислотой. Далее, на очищенную поверхность (обычно электролитически) наносятся кристаллы какого-либо другого металла. При исследовании стальных конструкций для этой цели используется чаще всего золото. При съемке на пленке получаются линии рентгеновских лучей, отраженных от кристаллов железа и от кристаллов золота. Поскольку кристаллы золота нанесены электролитически, они не напряжены, и расстояние между атомами в кристаллической решетке золота можно считать известным. Поэтому из уравнения Брегга (14.7) определяется угол ϑ для золота. Если же на проявленной пленке замерить расстояние $2h$ между линиями золота, то из выражения (14.8) можно с высокой степенью точности найти и искомую величину a. Таким образом, эта величина определяется косвенно путем обмера линий на пленке. Однако последняя операция также представляет известные трудности.

Прежде всего, нужно указать, что число отраженных кристаллов на освещенной площадке исследуемого образца измеряется одним-двумя десятками. Поэтому на пленке образуется не непрерывная линия затемнения, а десятка два разной величины засвеченных точек, расположенных на окружности радиусом h. Чтобы осреднить результат, пленку во время экспозиции вращают вокруг оси исходного рентгеновского пучка. Тогда на пленке образуются непрерывные засвеченные линии. Пленка берется в виде узкой полоски, поскольку для замера диаметра засвеченной линии полный круг не нужен. На рис. 14.27 показана кассета с вращающим приводом, так называемая камера Закса. На рис. 14.28 представлена проявленная пленка — рентгенограмма. На ней видны линии железа и золота. Линии сдвоены вследствие того, что характеристическое излучение кобальта образует, как указывалось выше, дублет. Более яркая

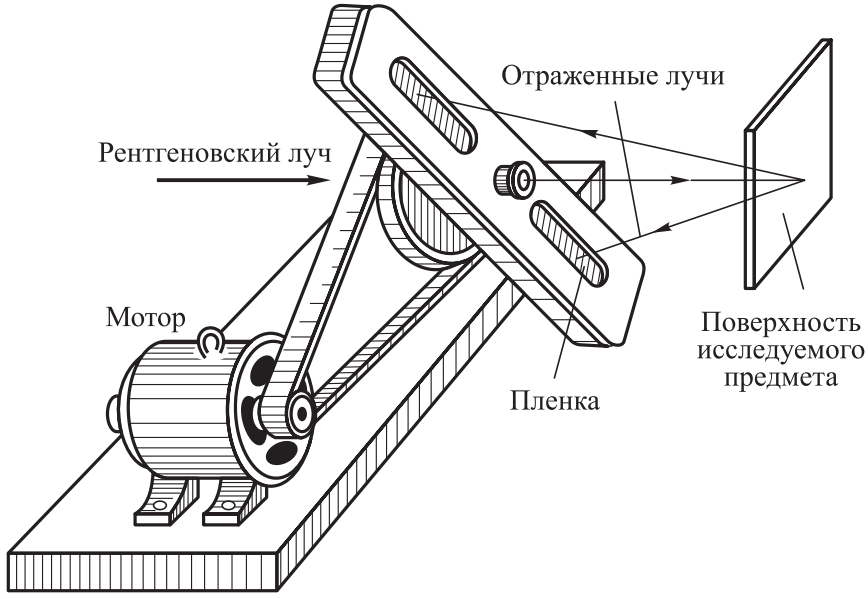


Рис. 14.27

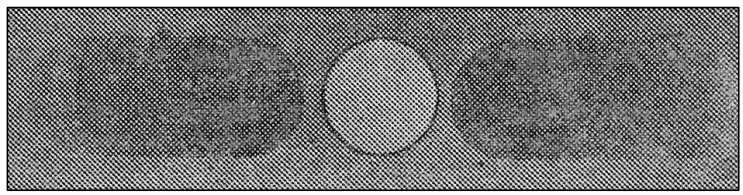


Рис. 14.28

линия соответствует длине волны $\lambda = 1{,}7853$ Å, более слабая — $\lambda = 1{,}7892$ Å. Обмер рентгенограммы производится, естественно, по более яркой линии.

Линии рентгенограммы имеют некоторую расплывчатость, что является основным источником ошибки при обмере полученных линий. Наиболее высокую точность удается получить, если для замеров воспользоваться микрофотометром — прибором, реагирующим на местную плотность затемнения пленки. При этом можно довольно точно найти положение максимума затемнения линии, что на глаз сделать много труднее.

При обмерах вводится поправка на усадку пленки при обработке. Для этого в кассете выполнены контрольные вырезы, в результате чего на рентгенограмме сбоку возникает изображение двух острых зубцов. После сопоставления расстояния между зубцами на пленке и кассете можно ввести необходимую поправку.

В случае сложного напряженного состояния для определения главных напряжений и главных осей одной рентгенограммы недостаточно. Действительно, по результатам описанного замера определяется относительное удлинение в направлении, близком к нормальной оси, и, следовательно,

$$\frac{\Delta d}{d} \approx -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Для определения двух напряжений и угла, характеризующего главные направления в общем случае, необходимо осуществить дополнительно еще два замера. Эти замеры производятся путем освещения исследуемой поверхности не по нормали, а наклонно (например, под углом 45°) в разных плоскостях, как это показано на рис. 14.29. Таким образом, задача определения главных осей и напряжений оказывается принципиально разрешимой.

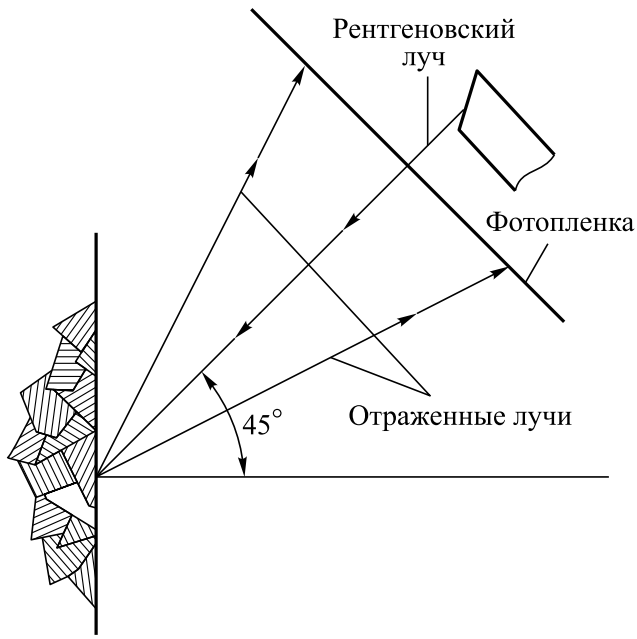


Рис. 14.29

Несмотря на то что по сравнению с другими рентгеновский метод обладает бесспорными преимуществами в определении остаточных напряжений, в практике лабораторных исследований он не получил широкого распространения. Объясняется это, прежде всего, громоздкостью применяемой аппаратуры и сложностью обработки результатов замера. Рентгеновский метод дает сравнительно

невысокую точность, поскольку обмер линий на пленке сопряжен со значительными погрешностями. Наконец, рентгеновский метод имеет еще одну специфическую особенность, затрудняющую его применение. Поскольку отражение рентгеновских лучей обладает избирательностью по отношению к плоскостям кристаллической решетки, возникает вопрос об упругой анизотропии кристаллов. Исследуемый объект в среднем изотропен, отдельные же его кристаллы анизотропны, и при подсчете напряжений это обстоятельство должно учитываться, так как отраженные лучи попадают на пленку не от любых плоскостей, а только от тех, которые имеют определенную кристаллографическую ориентировку. Поэтому при подсчете напряжений следует, вообще говоря, пользоваться не средними значениями упругих констант E и ν, а теми, которые свойственны соответствующим плоскостям кристаллов. Устранению указанных трудностей посвящено много работ, но задачу в целом еще нельзя считать разрешенной. Метод рентгеновского определения напряжений еще нуждается в значительном совершенствовании.

14.7. Метод лаковых покрытий

Метод лаковых покрытий заключается в том, что на чистую поверхность исследуемой конструкции наносится тонкий слой лака. При его высыхании образуется тонкая пленка, плотно соединенная с металлом. Рецептура лака подбирается так, чтобы удлинение пленки при разрыве было в пределах упругих удлинений металла. При нагружении испытуемого объекта в зоне повышенных напряжений в лаковом покрытии образуется сетка мелких трещин.

Опыт показывает, что трещины имеют направление, перпендикулярное оси максимального удлинения. Для изотропного материала это соответствует направлению главного растягивающего напряжения. В прозрачном лаке трещины хорошо заметны и, таким образом, сразу устанавливается направление главных осей в исследуемой зоне. Если момент образования трещин зафиксирован, то тем самым определяется и удлинение, соответствующее определенной нагрузке. Удлинение при разрыве определяется для лака взятой рецептуры путем тарировочных испытаний плоского образца с установкой механических тензометров.

При определении главных направлений в зонах сжимающих напряжений используется обычно искусственный прием. Конструкцию предварительно нагружают и на напряженную поверх-

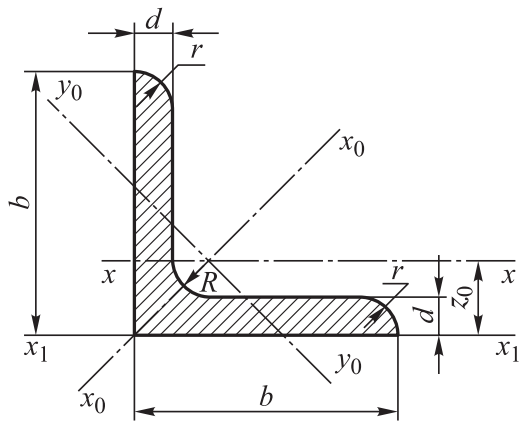
ность наносят лаковое покрытие. При разгрузке в зонах предварительного сжатия образуются трещины.

В качестве наиболее простого и доступного рецепта лака может быть рекомендован раствор 50 г канифоли и 5 г целлулоида в 100 г грушевой эссенции. Существует много и других рецептов приготовления лаков с различными удлинениями при разрыве.

Метод лаковых покрытий имеет наибольшее значение не как самостоятельный метод определения напряжений, а вспомогательный «разведочный» метод, позволяющий при помощи простых средств установить направление главных осей в интересующих зонах и ориентировочно установить порядок действующих напряжений. После такого предварительного испытания имеется возможность наиболее целесообразно расположить датчики сопротивления для определения точной картины напряженного состояния.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ



Сталь прокатная угловая равнополочная (ГОСТ 8509—93)

Номер профиля	b	d	R	r	Площадь сечения, см^2	Справочные данные для осей								Масса 1 м длины профиля, кг
	мм					$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	z_0, см	
						J_x, см^4	i_x, см	J_{x_0} max, см^4	i_{x_0} max, см	J_{y_0} min, см^4	i_{y_0} min, см	J_{x_1}, см^4		
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4			1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4			1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27

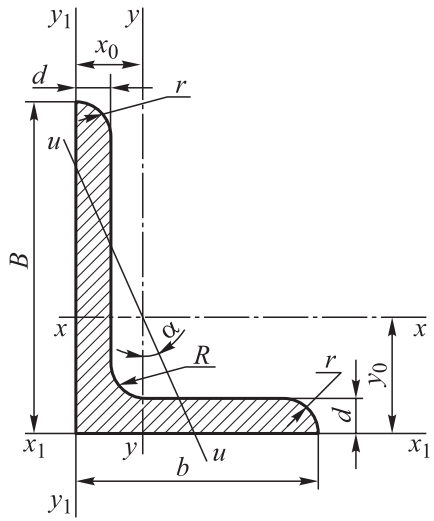
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	1,65
		4			2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	2,16
		3			2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
4	40	4	5,0	1,7	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5			3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
		3			2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
4,5	45	4	5,0	1,7	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5			4,2	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
		3			2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
5	50	4	5,5	1,8	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
		5			5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
		4			4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
6,3	63	5	7,0	2,3	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6			7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72
		4,5			6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5			6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
7	70	6	8	2,7	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7			9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8			10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37

Номер профиля	b	d	R	r	Площадь сечения, см^2	Справочные данные для осей								Масса 1 м длины профиля, кг
	мм					$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	z_0, см	
						J_x, см^4	i_x, см	J_{x_0} max, см^4	i_{x_0} max, см	J_{y_0} min, см^4	i_{y_0} min, см	J_{x_1}, см^4		
7,5	75	5	9	3,0	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6			8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7			10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8			11,50	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9			12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	9	3,0	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6			9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7			10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8			12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10	3,3	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7			12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8			13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9			15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20

		6,5			12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7			13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8			15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
10	100	10	12	4,0	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12			22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14			26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16			29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	12	4,0	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8			17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
		8			19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9			22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
12,5	125	10	14	4,6	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12			28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14			33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16			37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
		9			24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
14	140	10	14	4,6	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12			32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5

Номер профиля	b	d	R	r	Площадь сечения, см^2	Справочные данные для осей								Масса 1 м длины профиля, кг
	мм					$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	z_0, см	
						J_x, см^4	i_x, см	J_{x_0} max, см^4	i_{x_0} max, см	J_{y_0} min, см^4	i_{y_0} min, см	J_{x_1}, см^4		
16	160	10	16	5,3	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11			34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12			37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14			43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16			49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18			54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20			60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	16	5,3	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12			42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	18	6,0	41,7	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13			50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14			54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16			62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20			76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25			94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30			111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6

22	220	14	21	7,0	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16			68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	24	8,0	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18			87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20			97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22			106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25			119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28			133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30			142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4



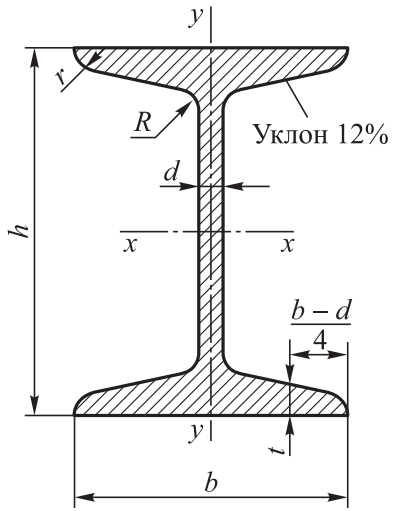
Сталь прокатная угловая неравнополочная (ГОСТ 8509—93)

Номер профиля	B	b	d	R	r	Площадь сечения, см²	Справочные данные для осей										Угол наклона оси tg α	Масса 1 м длины профиля, кг
	мм						x – x		y – y		x1 – x1		y1 – y1		u – u			
							J_x см⁴	i_x, см	J_y, см⁴	i_y, см	J_{x_1}, см⁴	y_0, см	J_{y_1} min, см⁴	x_0, см	J_u min, см⁴	i_u min, см		
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392	0,91
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382	1,17
			4			1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374	1,52
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385	1,48
			4			2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381	1,94

4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382	1,68
			4			2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	12,10	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,17	1,60	1,99	0,91	12,40	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403	1,90
			4			3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	16,60	1,85	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401	2,49
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,40	1,78	3,70	1,02	23,20	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406	2,81
			5			4,41	13,80	1,77	4,48	1,01	29,20	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404	3,46
			4			4,04	16,30	2,01	5,16	1,13	33,00	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397	3,17
6,3/4,0	63	40	5	7,0	2,3	4,98	19,90	2,00	6,26	1,12	41,40	2,08	10,80	0,95	3,72	0,86	0,396	3,91
			6			5,90	23,30	1,99	7,28	1,11	49,90	2,12	13,10	0,99	4,36	0,86	0,393	4,63
			8			7,68	29,60	1,96	9,15	1,09	66,90	2,20	17,90	1,07	5,58	0,85	0,386	6,03
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,80	2,23	9,05	1,27	56,70	2,28	15,20	1,05	5,34	0,98	0,406	4,39
			5			6,11	34,80	2,39	12,50	1,43	69,70	2,39	20,80	1,17	7,24	1,09	0,436	4,79
7,5/5	75	50	6	8,0	2,7	7,25	40,90	2,38	4,60	1,42	83,90	2,44	25,20	1,21	8,48	1,08	0,435	5,69
			8			9,47	52,40	2,35	18,50	1,40	1,12	2,52	34,20	1,29	10,90	1,07	0,430	7,43
8/5	80	50	5	8,0	2,7	6,36	41,60	2,56	12,70	1,41	84,60	2,60	20,80	1,13	7,58	1,09	0,387	4,99
			6			7,55	49,00	2,55	14,80	1,40	102,00	2,65	25,20	1,17	8,88	1,08	0,386	5,92
			5,5			7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384	6,17
9/5,6	90	56	6,0	9,0	3,0	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384	6,70
			8,0			11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380	8,77

Номер профиля	*B*	*b*	*d*	*R*	*r*	Площадь сечения, см²	Справочные данные для осей										Угол наклона оси tg α	Масса 1 м длины профиля, кг
	мм						*x* – *x*		*y* – *y*		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		*u* – *u*			
							J_x см⁴	i_x, см	J_y, см⁴	i_y, см	J_{x_1}, см⁴	y_0, см	J_{y_1} min, см⁴	x_0, см	$J_u$min, см⁴	$i_u$min, см		
10/6,3	100	63	6,0	10	3,3	9,59	98,3	3,20	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393	7,53
			7,0			11,10	113,0	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392	8,70
			8,0			12,60	127,0	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391	9,87
			10,0			15,50	154,0	3,15	47,1	1,55	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387	12,10
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,40	142,0	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402	8,98
			8,0			13,90	172,0	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,2	1,64	32,3	1,52	0,400	10,90
12,5/8	125	80	7,0	11	3,7	14,10	227,0	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119,0	1,80	43,4	1,76	0,407	11,00
			8,0			16,00	256,0	4,00	83,0	2,28	518	4,05	137,0	1,84	48,8	1,75	0,406	12,50
			10,0			19,70	312,0	3,98	100,0	2,26	649	4,14	173,0	1,92	59,3	1,74	0,404	15,50
			12,0			23,40	365,0	3,95	117,0	2,24	781	4,22	210,0	2,00	69,5	1,72	0,400	18,30
14/9	140	90	8,0	12	4,0	18,00	364,0	4,49	120,0	2,58	727	4,49	194,0	2,03	70,3	1,98	0,411	14,10
			10,0			22,20	444,0	4,47	146,0	2,56	911	4,58	245,0	2,12	85,5	1,96	0,409	17,50
16/10	160	100	9,0	13	4,3	22,90	606,0	5,15	186,0	2,85	1221	5,19	300,0	2,23	110,0	2,20	0,391	18,00
			10,0			25,30	667,0	5,13	204,0	2,84	1359	5,23	335,0	2,28	121,0	2,19	0,390	19,80
			12,0			30,00	784,0	5,11	239,0	2,82	1634	5,32	405,0	2,36	142,0	2,18	0,388	23,60
			14,0			34,70	897,0	5,08	272,0	2,80	1910	5,40	477,0	2,43	162,0	2,16	0,385	27,30

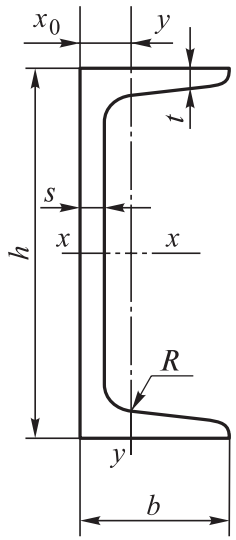
18/11	180	110	10,0	14	4,7	28,30	952,0	5,80	276,0	3,12	1933	5,88	444,0	2,44	165,0	2,42	0,375	22,20
			12,0			33,70	1123,0	5,77	324,0	3,10	2324	5,97	537,0	2,52	194,0	2,40	0,374	26,40
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	1449	6,45	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,392	27,4
			12			37,9	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392	29,7
			14			43,9	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390	34,4
			16			49,8	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388	39,1
25/16	250	160	12	18	6,0	48,30	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410	37,9
			16			63,6	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408	49,9
			18			71,1	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407	55,8
			20			78,5	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405	61,7



Сталь горячекатаная
Балки двутавровые
(ГОСТ 8239—89)

Номер балки	h	b	s	t	R	r	Площадь сечения, см^2	Масса 1 м, кг	Справочные данные для осей						
	мм								$x - x$				$y - y$		
									J_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S^*_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18а	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12

20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54



Швеллеры стальные горячекатаные (ГОСТ 8240-89)

Таблица 1

Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

Номер швеллера серии У	h	b	s	t	R	r	Площадь поперечного сечения, см^2	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							x_0, см
					не более				$x-x$				$y-y$			
	мм								I_x^*, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y^*, см^4	W_y, см^3	i_0, см	
5У	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5У	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8У	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,19	1,31
10У	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44

12У	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14У	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16У	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16аУ	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18У	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18аУ	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13
20У	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07
22У	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21
24У	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42
27У	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47
30У	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52
33У	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59
36У	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68
40У	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75

*В книге в разделе 3.2 моменты инерции сечений обозначены буквой *J*. В редакции ГОСТ 8240–89 эта же величина обозначена буквой *I*.

Таблица 2

Швеллеры с параллельными гранями полок

Номер швеллера серии П	h	b	s	t	R	r	Площадь поперечного сечения, см^2	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							x_0, см
					не более				$x-x$				$y-y$			
	мм								I_x^*, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y^*, см^4	W_y, см^3	i_y, см	
5П	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,61	5,95	2,99	0,98	1,21
6,5П	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90	48,8	15,0	2,55	9,02	9,35	4,06	1,12	1,29
8П	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05	89,8	22,5	3,16	13,30	13,90	5,31	1,24	1,38
10П	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,90	8,59	175,0	34,9	3,99	20,50	22,60	7,37	1,44	1,53
12П	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,30	10,40	305,0	50,8	4,79	29,70	34,90	9,84	1,62	1,66
14П	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,60	12,30	493,0	70,4	5,61	40,90	51,50	12,90	1,81	1,82
16П	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,10	14,20	750,0	93,8	6,44	54,30	72,80	16,40	2,00	1,97
16аП	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,50	15,30	827,0	103,0	6,51	59,50	90,50	19,60	2,15	2,19
18П	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,26	70,00	100,00	20,60	2,20	2,14
18аП	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,20	17,40	1200,0	133,0	7,34	76,30	123,00	24,30	2,35	2,36
20П	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,40	18,40	1530,0	153,0	8,08	88,00	134,00	25,20	2,39	2,30
22П	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,70	21,00	2120,0	193,0	8,90	111,00	178,00	31,00	2,58	2,47
24П	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,60	24,00	2910,0	243,0	9,75	139,00	248,00	39,50	2,85	2,72
27П	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,20	27,70	4180,0	310,0	10,90	178,00	314,00	46,70	2,99	2,78
30П	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,50	31,80	5830,0	389,0	12,00	224,00	393,00	54,80	3,12	2,83
33П	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,50	36,50	8010,0	486,0	13,10	281,00	491,00	64,60	3,25	2,90
36П	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,40	41,90	10850,0	603,0	14,30	350,00	611,00	76,30	3,38	2,99
40П	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,50	48,30	15260,0	763,0	15,80	445,00	760,00	89,90	3,51	3,05

*См. примечание на с. 537.

Оглавление

От издателя 5
Об авторе 7
Предисловие к девятому изданию 9
Основные обозначения 10
Введение 11
В1. Задачи и методы сопротивления материалов 11
В2. Реальный объект и расчетная схема 13
В3. Силы внешние и внутренние 17
В4. Напряжения 23
В5. Перемещения и деформации 24
В6. Закон Гука и принцип независимости действия сил 28
В7. Общие принципы расчета элементов конструкции 31
ГЛАВА 1. **Растяжение и сжатие** 33
1.1. Внутренние силы и напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня при растяжении и сжатии . . 33
1.2. Удлинения стержня и закон Гука 36
1.3. Потенциальная энергия деформации 44
1.4. Статически определимые и статически неопределимые системы 45
1.5. Напряженное и деформированное состояния при растяжении и сжатии 51
1.6. Испытание материалов на растяжение и сжатие 56
1.7. Диаграмма растяжения 61
1.8. Механизм образования деформации 65
1.9. Основные механические характеристики материала 71
1.10. Пластичность и хрупкость. Твердость 77
1.11. Влияние температуры и фактора времени на механические характеристики материала 81
1.12. Коэффициент запаса 88
ГЛАВА 2. **Кручение** 92
2.1. Чистый сдвиг и его особенности 92
2.2. Кручение стержня с круглым поперечным сечением 97
2.3. Кручение стержня с некруглым поперечным сечением . . . 110
2.4. Краткие сведения о пленочной (мембранной) аналогии . . . 114
2.5. Кручение тонкостенного стержня 117

ГЛАВА 3. **Геометрические характеристики поперечных сечений стержня** 128
3.1. Статические моменты сечения 128
3.2. Моменты инерции сечения 132
3.3. Главные оси и главные моменты инерции 135

ГЛАВА 4. **Изгиб** 141
4.1. Внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях стержня при изгибе 141
4.2. Напряжения при чистом изгибе 149
4.3. Напряжения при поперечном изгибе. 160
4.4. Касательные напряжения при поперечном изгибе тонкостенных стержней 170
4.5. Центр изгиба 173
4.6. Дифференциальное уравнение упругой линии балки. Перемещения при изгибе 177
4.7. Балка на упругом основании 182
4.8. Косой изгиб. 186
4.9. Внецентренное растяжение и сжатие 191
4.10. Изгиб бруса большой кривизны 195

ГЛАВА 5. **Перемещения в стержневой системе при произвольной нагрузке** 204
5.1. Потенциальная энергия стержня в общем случае нагружения 204
5.2. Теорема Кастилиано 209
5.3. Интеграл Мора 213
5.4. Способ Верещагина 220
5.5. Определение перемещений и напряжений в витых пружинах 226
5.6. Теорема взаимности работ 231

ГЛАВА 6. **Раскрытие статической неопределимости стержневых систем методом сил** 235
6.1. Связи, накладываемые на систему. Степень статической неопределимости 235
6.2. Выбор основной системы. Метод сил 240
6.3. Канонические уравнения метода сил 242
6.4. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости. 252
6.5. Плоскопространственные и пространственные системы . . 263
6.6. Определение перемещений в статически неопределимых системах 269
6.7. О методе перемещений 271

ГЛАВА 7. **Основы теории напряженного и деформированного состояний** 274
7.1. Напряженное состояние в точке 274
7.2. Определение напряжений в произвольно ориентированной площадке 277
7.3. Главные оси и главные напряжения 280
7.4. Круговая диаграмма напряженного состояния 287
7.5. Обзор различных типов напряженных состояний 293
7.6. Деформированное состояние 298
7.7. Обобщенный закон Гука и потенциальная энергия деформации в общем случае напряженного состояния . . . 302
7.8. Анизотропия 308
ГЛАВА 8. **Критерии пластичности и разрушения** 316
8.1. Основные положения 316
8.2. Гипотезы появления пластических деформаций 321
8.3. Теория Мора и ее применение 324
8.4. О хрупком разрушении и вязкости 336
8.5. О новых материалах 341
ГЛАВА 9. **Тонкостенные и толстостенные сосуды** 347
9.1. Основные особенности оболочек 347
9.2. Определение напряжений в симметричных оболочках по безмоментной теории 348
9.3. Основные уравнения для толстостенной трубы 357
9.4. Определение перемещений и напряжений в толстостенном цилиндре 361
9.5. Определение напряжений в составных трубах 367
ГЛАВА 10. **Принципы расчета элементов конструкций, работающих за пределами упругости** 372
10.1. Отличительные особенности расчета и схематизация диаграммы растяжения 372
10.2. Напряжения и перемещения в простейших стержневых системах при наличии пластических деформаций 376
10.3. Упругопластический изгиб стержня 383
10.4. Кручение стержня круглого поперечного сечения при наличии пластических деформаций 391
10.5. Основы расчета по предельным нагрузкам 395
10.6. Начала теории пластичности 400

ГЛАВА 11. **Прочность при циклически изменяющихся напряжениях** 409
11.1. Понятие об усталости материалов 409
11.2. Основные характеристики цикла и предел выносливости 413
11.3. Влияние концентрации напряжений на прочность при циклическом нагружении 420
11.4. Масштабный эффект 426
11.5. Влияние качества обработки поверхности 431
11.6. Коэффициент запаса при циклическом нагружении и его определение 433

ГЛАВА 12. **Устойчивость равновесия деформируемых систем** . . . 440
12.1. Понятие об устойчивости 440
12.2. Определение критических нагрузок 442
12.3. Задача Эйлера 447
12.4. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня 450
12.5. Устойчивость плоской формы изгиба 457
12.6. Устойчивость колец и труб при нагружении их внешним давлением 459
12.7. Энергетический метод определения критических нагрузок 463
12.8. Метод начальных параметров 468
12.9. О пределах применимости формулы Эйлера 474
12.10. Продольно-поперечный изгиб 478

ГЛАВА 13. **Динамическое нагружение** 482
13.1. О статическом и динамическом нагружениях 482
13.2. Ударная нагрузка 484

ГЛАВА 14. **Методы экспериментального исследования деформированного и напряженного состояний** 491
14.1. Испытание материалов и конструкций 491
14.2. Определение деформаций при помощи механических тензометров 493
14.3. Применение датчиков сопротивления 499
14.4. Оптический метод определения напряжений при помощи прозрачных моделей 504
14.5. Метод муаровых полос 509
14.6. Рентгеновский метод определения напряжений 514
14.7. Метод лаковых покрытий 521
Приложение. Сортамент прокатной стали 523

Учебное издание

Феодосьев Всеволод Иванович

Сопротивление материалов

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 25.05.2021. Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 34,0. Тираж 500 экз.

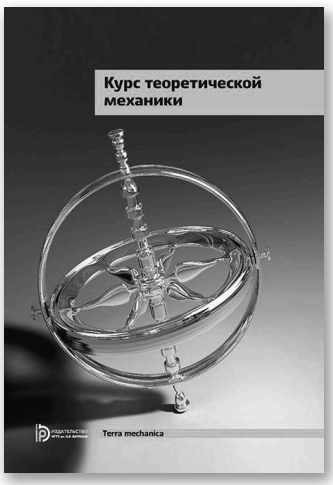
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, к. 1.
press@baumanpress.ru https://bmstu.press

Отпечатано в ПАО «Т8 Издательские технологии»
109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.

BAUMANPRESS
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана

вышел в свет учебник
под редакцией К.С. Колесникова, В.В. Дубинина
«Курс теоретической механики»



Изложены кинематика, статика, динамика точки, твердого тела и механической системы; аналитическая механика; теория колебаний; теория удара; введение в динамику тел переменной массы; основы небесной механики. Приведены примеры решения задач.

Содержание учебника соответствует программе и курсу лекций, которые авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов машиностроительных вузов и технических университетов. Может быть полезен аспирантам и преподавателям, а также специалистам в области статики и динамики механических систем.

Год издания: 2017
Тип издания: Учебник
Объем: 584 стр. / 47,45 п. л.
Формат: 70 × 100/16
ISBN: 978-5-7038-4568-4

Информацию о других новых книгах можно получить
на сайте Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://baumanpress.ru
По вопросам приобретения обращаться в отдел реализации Издательства:
телефон: 8 499 263-60-45;
факс: 8 499 261-45-97
e-mail: press@baumanpress.ru