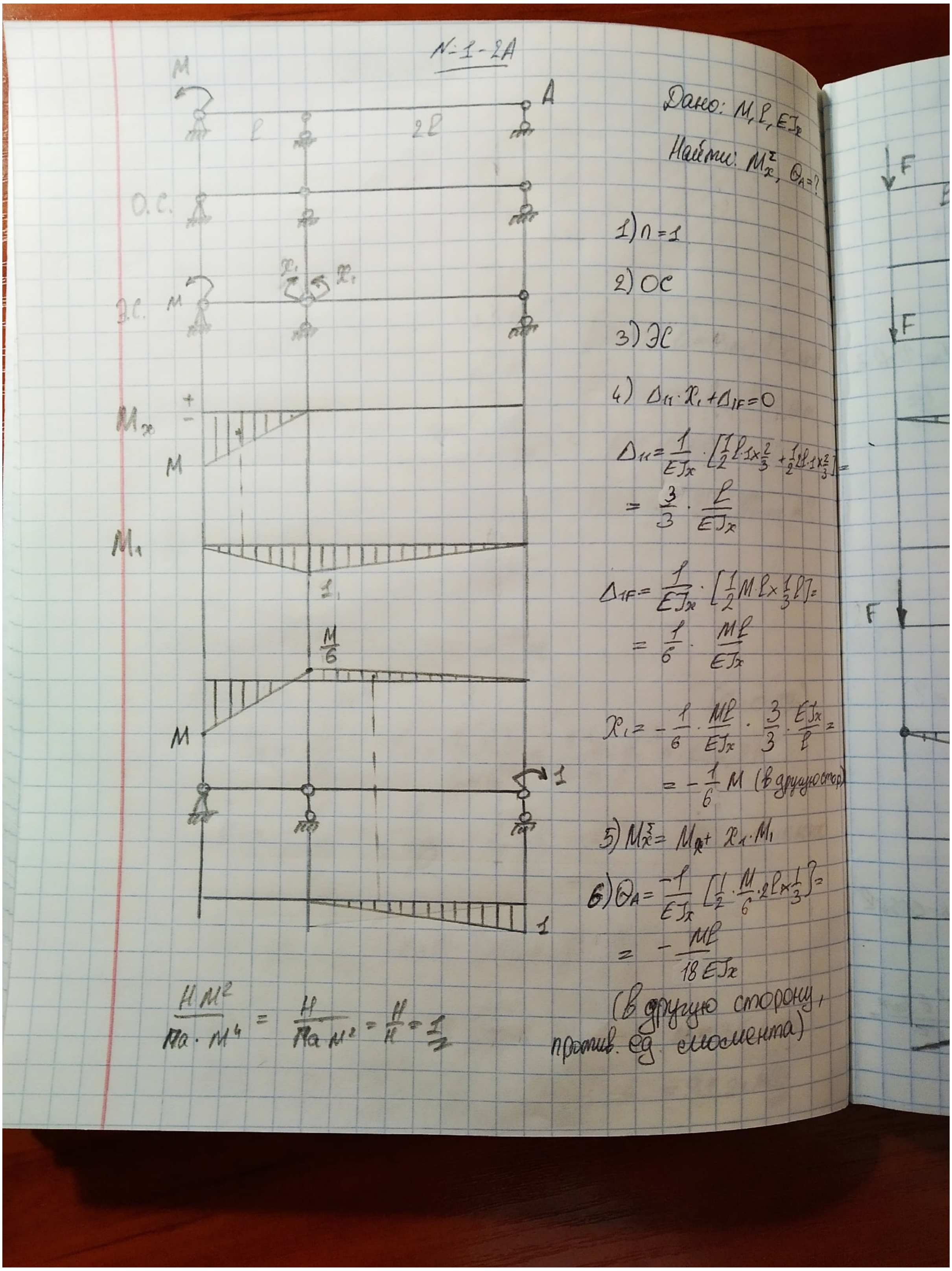
Содержание

Билет 1



N-1-2A

Дано: M, ℓ, EJ_x

Найти: M_x^{Σ}, $\theta_A = ?$

1) $n = 1$

2) ОС

3) ЭС

4) $\Delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$

$$\Delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \cdot \left[\frac{1}{2}\ell \cdot 1 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} 2\ell \cdot 1 \times \frac{2}{3}\right] = \frac{3}{3} \cdot \frac{\ell}{EJ_x}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ_x} \cdot \left[\frac{1}{2} M \ell \times \frac{1}{3}\ell\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{M\ell}{EJ_x}$$

$$X_1 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{M\ell}{EJ_x} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{EJ_x}{\ell} = -\frac{1}{6} M \text{ (в другую стор)}$$

5) $M_x^{\Sigma} = M_x + X_1 \cdot M_1$

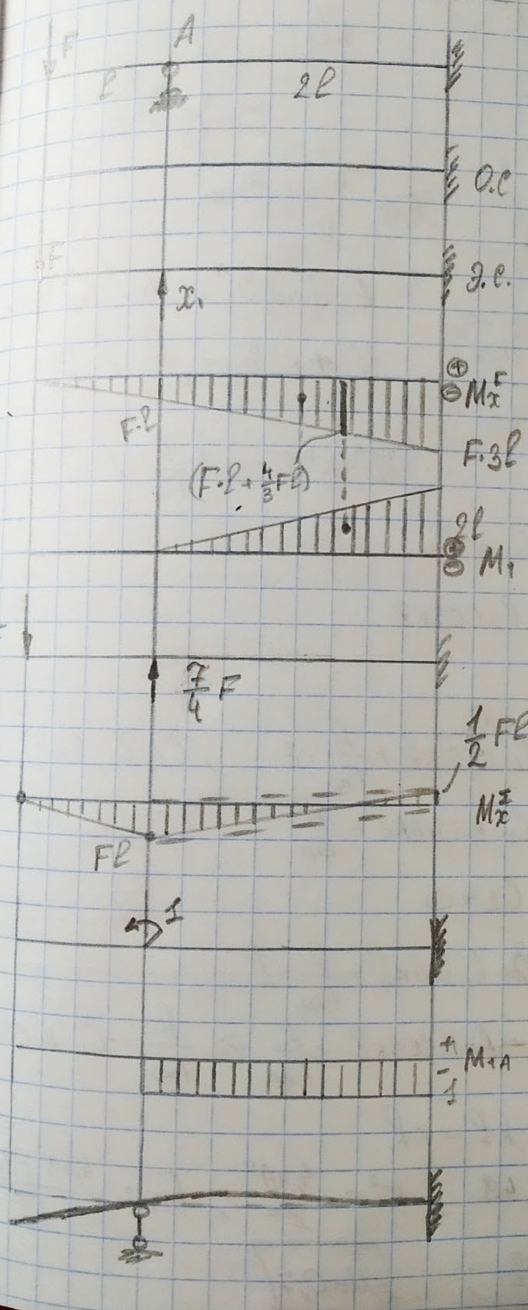
6) $$\theta_A = \frac{-1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{6} \cdot 2\ell \times \frac{1}{3}\right] = -\frac{M\ell}{18 EJ_x}$$

(в другую сторону, против. ед. момента)

$$\frac{Н \cdot м^2}{Па \cdot м^4} = \frac{Н}{Па \cdot м^2} = \frac{Н}{Н} = \frac{1}{1}$$

Билет 2

№ 2-2А



Дано: F, l, EJ_x

Найти: M_x, $\theta_A = ?$

1) $n = 1$

2) ОС

3) ЭС

4) $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}(2l)^2 \times \frac{2}{3} \cdot 2l\right] = \frac{8l^3}{3EJ_x}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{-1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}(2l)^2 \times \left(Fl + \frac{4}{3}Fl\right)\right] = -\frac{14Fl^3}{3EJ_x}$$

$$X_1 = \frac{14Fl^3}{3EJ_x} \cdot \frac{3EJ_x}{8l^3} = \frac{7}{4}F$$

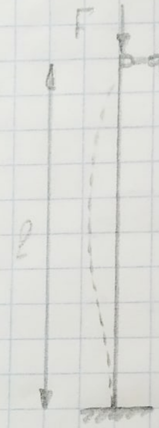
6) $M_x^\Sigma = M_F + M_{x_1}$

5) ОЭС

7) $$\theta_A = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2} \cdot Fl \, 2l \times 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} Fl \cdot 2l \times 1\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl^2}{EJ_x}$$

Билет 4

№ 4-2А



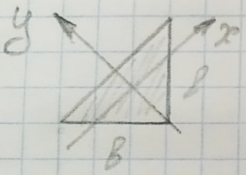
Дано: $b=30$ мм, $l=500$ мм, $F=50$ кН,

$E=2\cdot10^5$ МПа, $\sigma_{пц}=230$ МПа

$\sigma_т=280$ МПа

Найти: $F_{кр}$, $n_y=?$

$\mu=0,7$ — для данного случая



$J_x=\frac{b^4}{72}$; $J_y=\frac{b^4}{24}$;

$J_{min}=J_x=\frac{b^4}{72}$

$i_{min}=\sqrt{\frac{J_{min}}{A}}=\sqrt{\frac{b^4}{72\cdot\frac{1}{2}b^2}}=\frac{b}{6}=5$ мм

$\lambda=\frac{\mu l}{i_{min}}=\frac{0,7\cdot0,5}{0,005}=70<\lambda_{пред}=\cancel{100}\ \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}=92,6$

$\sigma_{кр}=\sigma_{тс}-(\sigma_{тс}-\sigma_{пц})\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda_{пред}}\right)^2=255,5$ МПа

$F_{кр}=\sigma_{кр}\cdot A=255,5\cdot\frac{1}{2}30^2\approx115$ кН

~~$\varphi=0,81$ факт~~

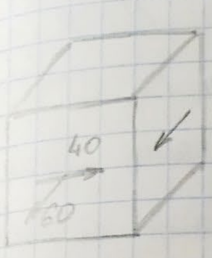
~~$F_{доп}=\varphi[\sigma]_c\cdot A=0,81\cdot280\cdot\frac{1}{2}30^2\approx102$ кН~~

~~$n_y=\frac{F_{кр}}{F_{доп}}=1,127$~~

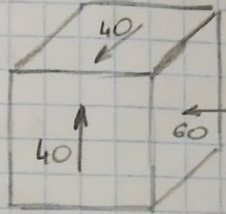
$n_y=\frac{F_{кр}}{F}=\frac{115}{50}=2,3$

Билет 5

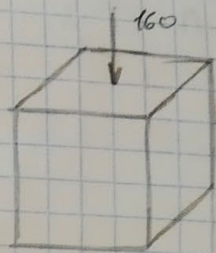
№ 5-2А



точка 1



точка 2



точка 3

$\sigma_{вр} = 0{,}5\,\sigma_{вс}$, $K = \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}} = 0{,}5$

УПНС

$\sigma_{экв} = \frac{-K+1}{2}\sigma + \frac{K+1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$

$\sigma_{гл} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2} =$

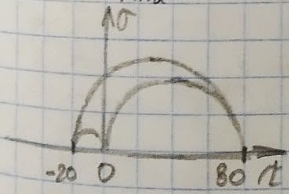
$= 30 \pm \sqrt{900+1600} =$

$= 30 \pm 50$

$\sigma_1 = 80$ МПа

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -20$ МПа



$K = 0{,}5$

$\sigma_{экв} = \sigma_1 - K\sigma_3 = 80+10 =$

$= 90$ МПа

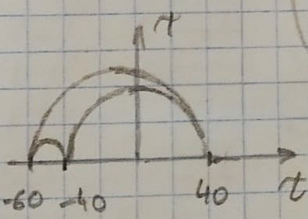
$\sigma_{гл} = 0 \pm \sqrt{0+40^2} =$

$= \pm 40$

$\sigma_1 = 40$ МПа

$\sigma_2 = -40$ МПа

$\sigma_3 = -60$ МПа



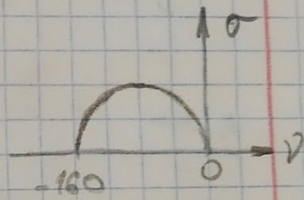
$\sigma_{экв} = \sigma_1 - K\sigma_3 =$

$= 40 + 30 = 70$ МПа

$\sigma_1 = 0$

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -160$ МПа



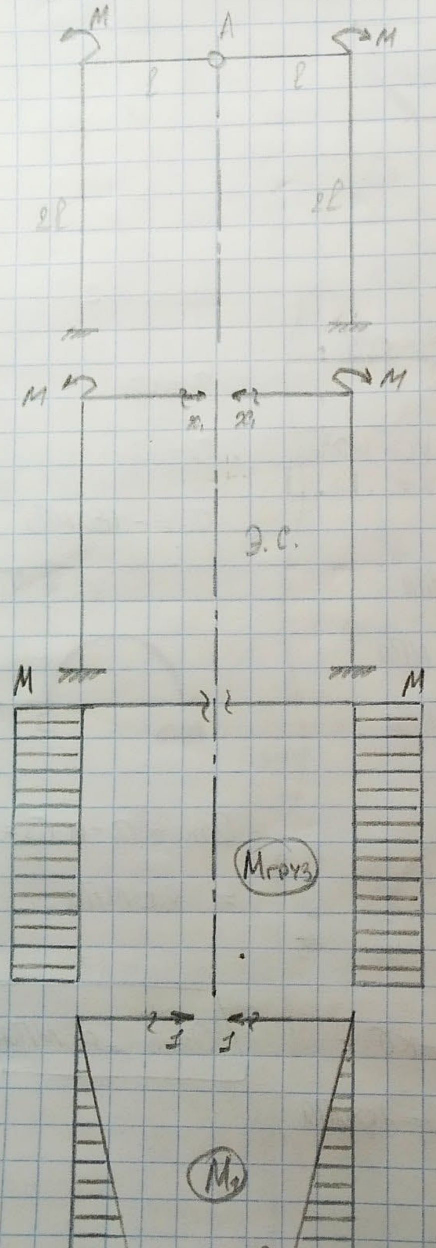
$\sigma_{экв} = \sigma_1 - K\cdot\sigma_3 =$

$= 80$ МПа

$\boxed{\sigma_{экв}^{max} = 90\text{ МПа}}$

Билет 7

№-7-2А



Дано: M, l, J_x, E

Найти: M_x, $\delta_A^{вер} = ?$

$n = 2$, рама симм. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ кососим. факторы $= 0$

$n = 1$

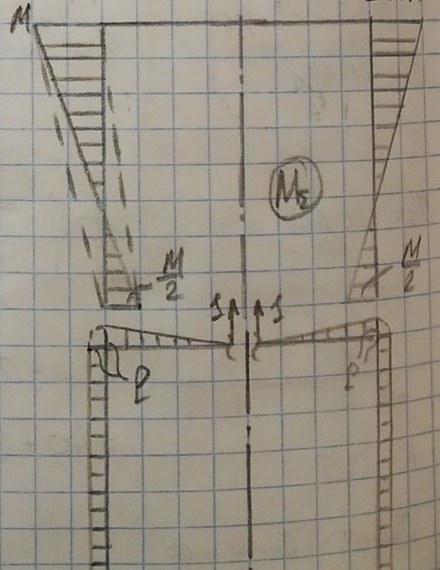
$\Delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$

$$\Delta_{11} = \frac{2}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}(2l)^2 \times \frac{2}{3}2l\right] = \frac{16l^3}{3EJ_x}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{-2}{EJ_x}\left[M \cdot 2l \times l\right] = -\frac{4Ml^2}{EJ_x}$$

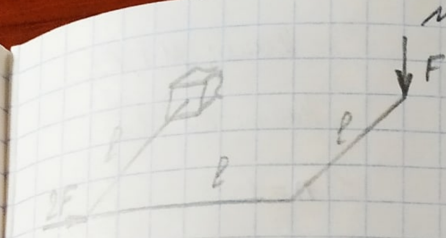
$$X_1 = \frac{4Ml^2}{EJ_x} \cdot \frac{3EJ_x}{16l^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{M}{l}$$

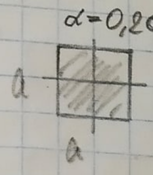
$$\delta_A^{вер} = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}M \cdot 2l \times l - \frac{1}{2}\frac{M}{2} \cdot 2l \times l\right] = \frac{Ml^2}{2EJ_x}$$



Билет 8

№ 8-2А



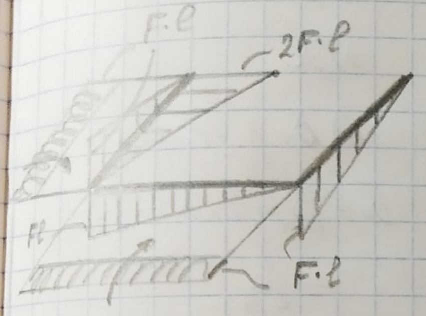


Дано: F = 1кН

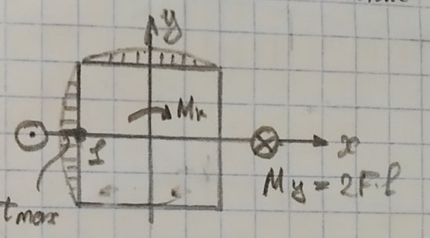
$l = 0,5$м; $\sigma_т = 320$МПа, $n_т = 2$

Найти: $M_x, M_y, M_к$ + a = ?

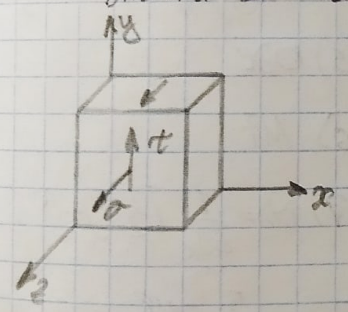
через энерг. теор.



Опасное сечение в заделке



Точка 1 - наиб. опасная



$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} = \frac{2F\cdot l}{a^3}\cdot 6$$

$$\tau = \frac{M_к}{W_к} = \frac{F\cdot l}{\alpha\cdot a^3}$$

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$ - теор. Хубера-Мизиса

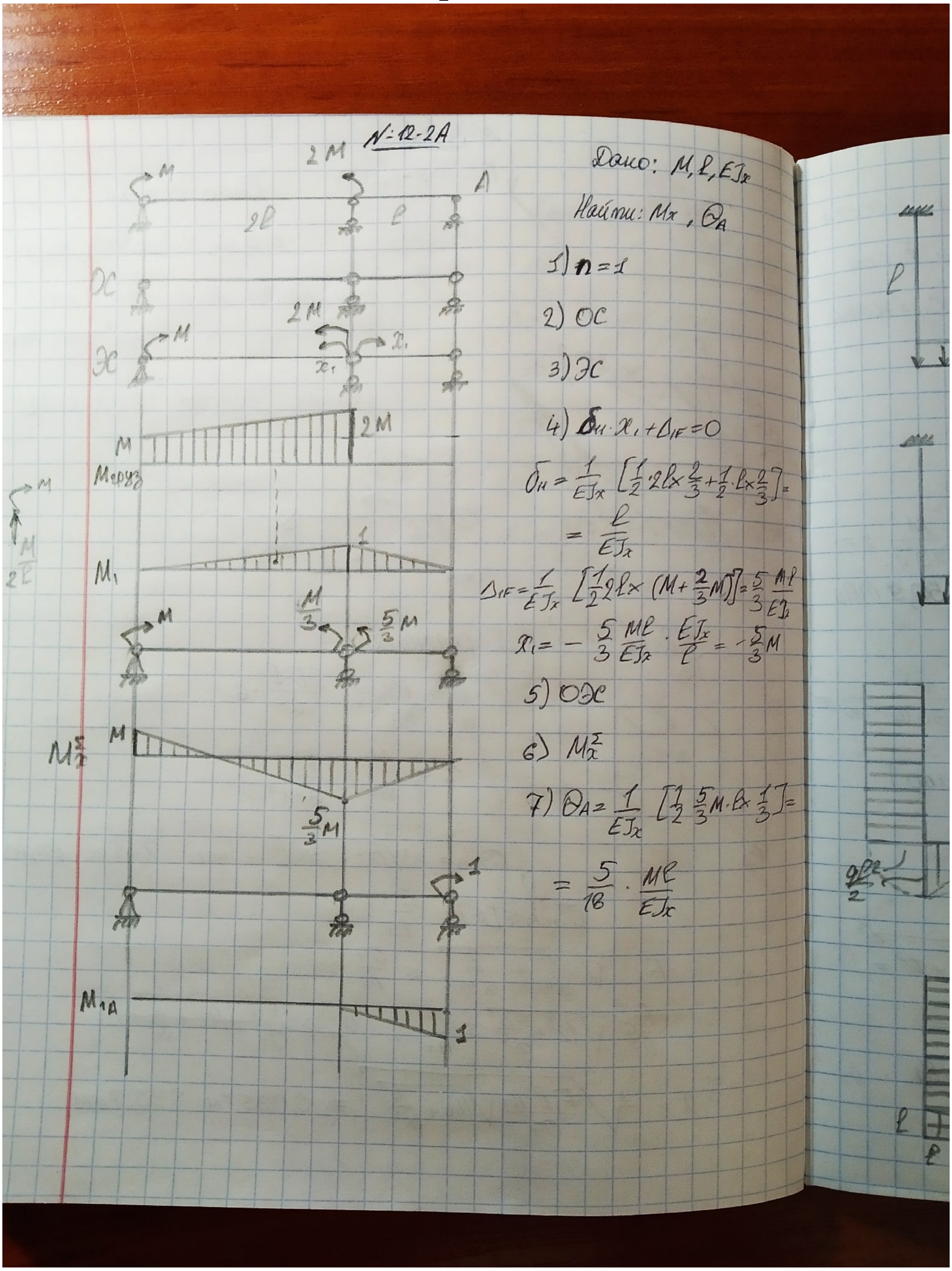
$$\sigma_{экв} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_т}$$

$$F\cdot l\sqrt{\frac{12^2}{a^6} + \frac{3}{\alpha^2 a^6}} \leq \frac{\sigma_т}{n_т};$$

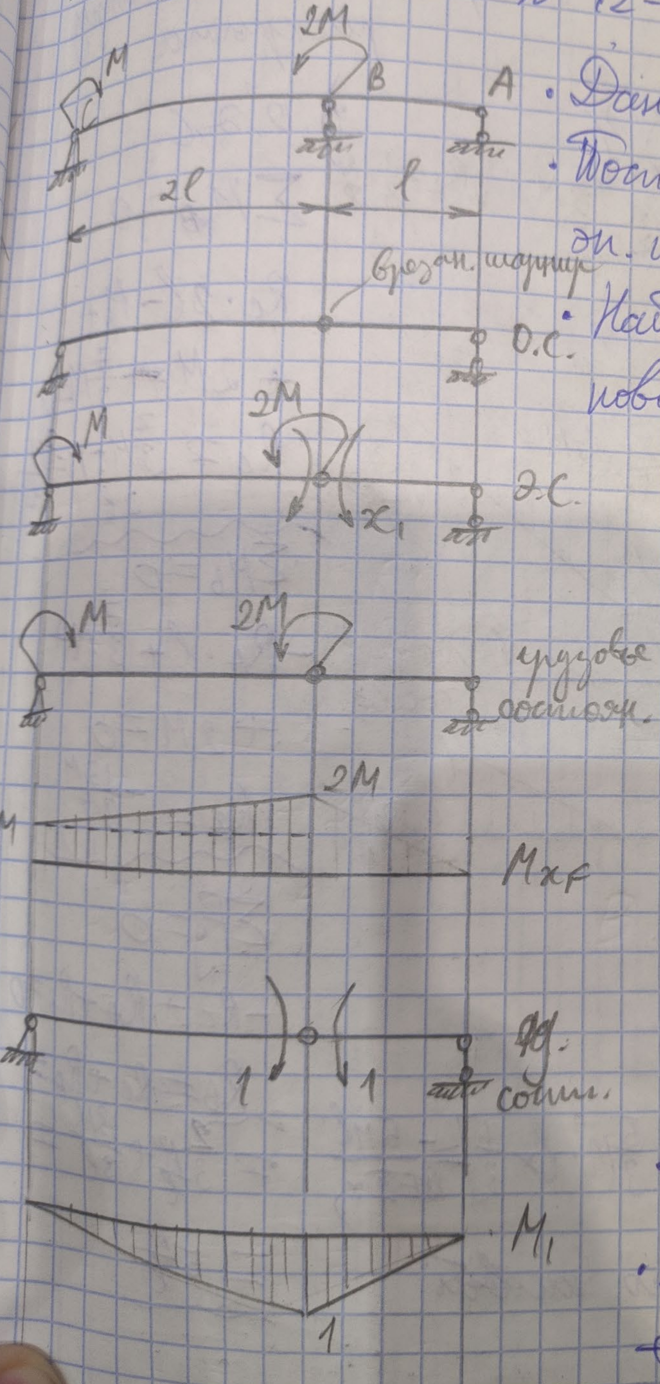
$$\frac{F\cdot l}{a^3}\sqrt{12^2 + \frac{3}{\alpha^2}} \leq \frac{\sigma_т}{n_т}; \quad a^3 \geq \frac{F\cdot l}{\sigma_т}\sqrt{12^2 + \frac{3}{\alpha^2}}\cdot n_т$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{F\cdot l\cdot n_т}{\sigma_т}\sqrt{144 + \frac{3}{\alpha^2}}} = 0,0357м = 35,7мм$$

Билет 12
(см. 2 фото ниже)



Билет № 12-2А.



• Дано: $M,\ l,\ EJ_x$

• Построить: эп. изгиб. мом.

• Найти: угол поворота сечения A

1) О.С.

2) Э.С.

3) Каноническ. ур-ние метода сил:

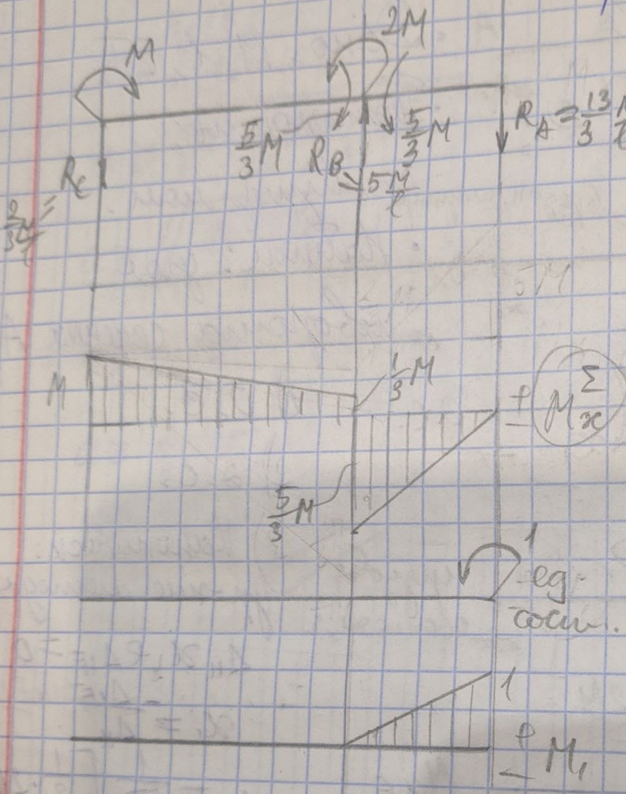
$$\Delta_{11} x_1 + \Delta_{1F} = 0$$

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\Delta_{11}}$$

• $\Delta_{11} = \frac{1}{EI_x}\left[\frac{1}{2}\cdot 2l \cdot 1 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot l \cdot 1 \times \frac{2}{3}\right] = \frac{l}{EI_x}$

• $\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI_x}\cdot\left[\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot M \times \frac{2}{3}}_{\frac{2}{3}Ml} + \underbrace{M\cdot 2l \times \frac{1}{2}}_{Ml} + \cancel{\frac{1}{2}\cdot 2M\cdot l \times \frac{2}{3}}\right] = -\frac{5Ml}{3EI_x}$

$x_1 = \frac{7Ml EI_x}{3EI_x l} = \frac{5}{3}M$, статическая неопред. раскрыта



4) 0, 2l.

$\sum M_B = 0$

$R_C \cdot 2l - M + 2M - \frac{7}{3}M = 0$

$R_C = \frac{\frac{7}{3}M - M}{2l} = \frac{2}{3}\frac{M}{l}$

$\sum M_B = 0$

$-R_A \cdot l + \frac{7}{3}M + 2M = 0$

$R_A = \frac{13M}{3l}$

$\sum P_y = 0$

$-R_C - R_A + R_B = 0$

$R_B = R_C + R_A = \frac{2}{3}\frac{M}{l} + \frac{13M}{3l} = 5\frac{M}{l}$

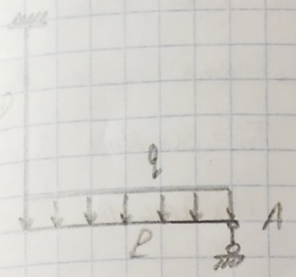
$\Theta_A = \frac{1}{EI_x}\left[-\frac{1}{2}\frac{5}{3}M \cdot l \times \frac{1}{3}\right] = -\frac{5Ml}{18EI_x}$, повернется по часовой

Билет 13

№-13-2А

Дано: q, l, EJ_x

Найти: M_x, θ_A

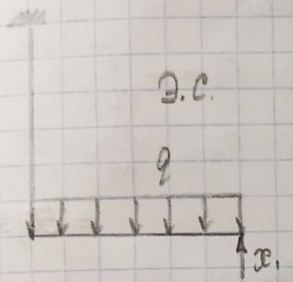


$n = 1$

$\frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{2}$

$\Delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$

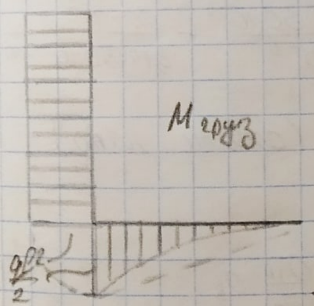
$\Delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2} l^2 \times \frac{2}{3} l + l^2 \times l\right] = \frac{4}{3}\frac{l^3}{EJ_x}$

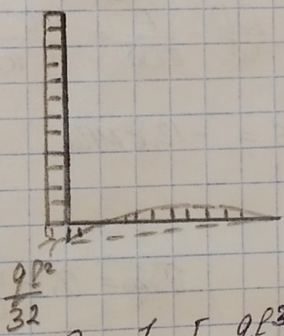


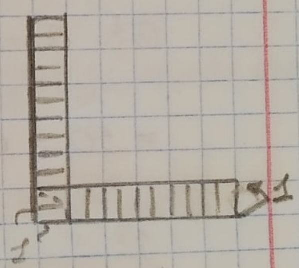
$\Delta_{1F} = \frac{-1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}\frac{ql^2}{2} \cdot l \times \frac{2}{3} - \frac{ql^3}{12} \times \frac{l}{2} + \right.$

$\left. + \frac{ql^2}{2} \cdot l \times l\right] = -\frac{15}{24}\frac{ql^4}{EJ_x}$

$X_1 = \frac{5}{8}\frac{ql^4}{EJ_x} \cdot \frac{3EJ_x}{4l^3} = \frac{15}{32} \cdot ql$



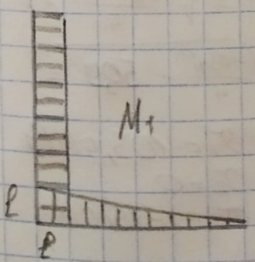




$\theta_A = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{ql^3}{12} \times 1 - \frac{1}{2}\frac{ql^2}{32} \cdot l \times 1 - \frac{ql^2}{32} \cdot l \times 1\right] =$

$= \frac{ql^3}{EJ_x}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{64} - \frac{1}{32}\right) = \frac{ql^3}{EJ_x}\frac{64 - 12 - 24}{12 \cdot 64} =$

$= \frac{28}{12 \cdot 64}\frac{ql^3}{EJ_x} = \frac{7}{192}\frac{ql^3}{EJ_x}$

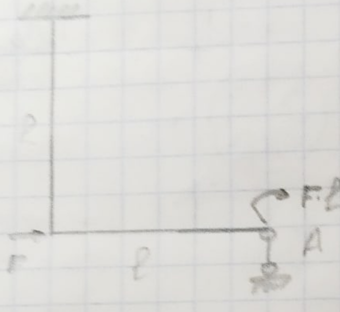


Билет 15

N-15-2A

Дано: F, l, EJ_x

Найти: M_x, $\delta_A^{гор}$

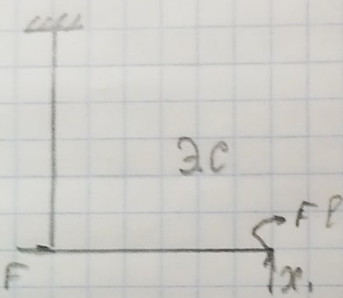


$n = 1$

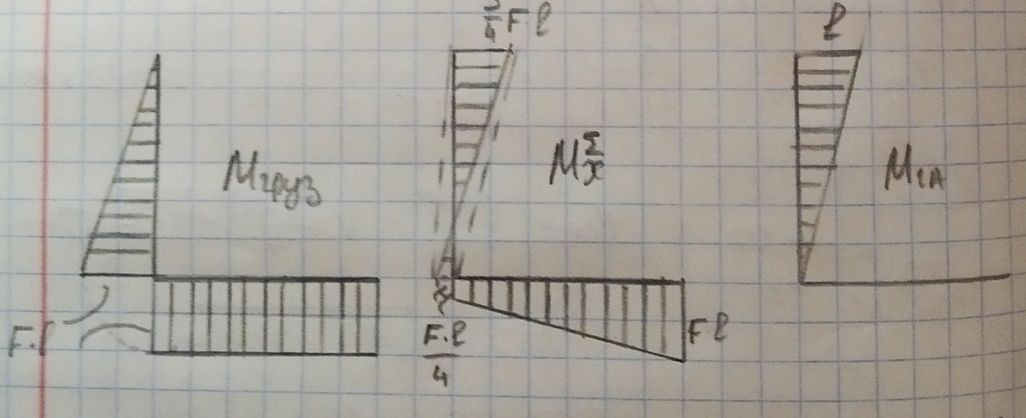
$\Delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$

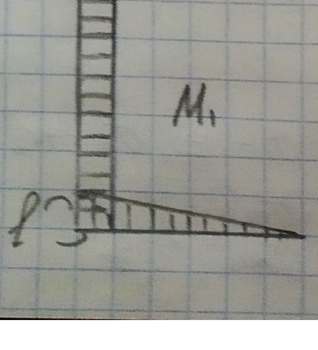
$\Delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}l^2 \times \frac{2}{3}l + l^2 \times l\right] = \frac{4}{3}\frac{l^3}{EJ_x}$

$\Delta_{1F} = \frac{-1}{EJ_x}\left[F \cdot l \cdot l \times \frac{l}{2} + \frac{1}{2}F \cdot l \cdot l \times l\right] = -\frac{Fl^3}{EJ_x}$



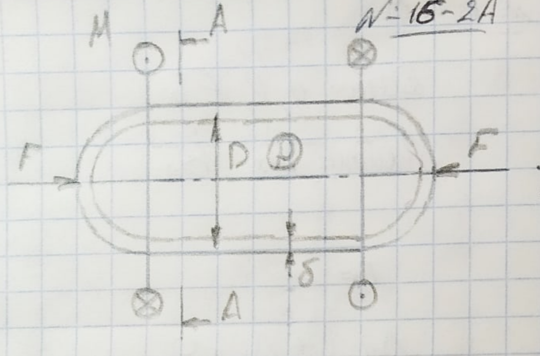
$X_1 = \frac{Fl^3}{EJ_x} \cdot \frac{3EJ_x}{4l^3} = \frac{3}{4}F$





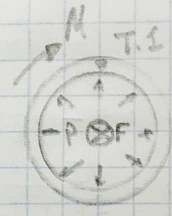
$\delta_A^{гор} = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}F \cdot l \cdot l \times \frac{2}{3}l - \frac{1}{2}\frac{Fl}{4} \cdot l \times \frac{l}{3}\right] = \frac{Fl^3}{EJ_x}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right) = \frac{5}{24} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_x}$

Билет 16



Дано: $p = 4$ МПа; $M = 200$ Н·м; $F = 10$ кН; $D = 50$ мм, $\delta = 1$ мм; $\sigma_{тр} = 300$ МПа; $\sigma_{тс} = 400$ МПа

Найти: $n_т$



Напряжения

1) от силы F: $\sigma_z = -\dfrac{F}{\pi D \delta}$

2) от момента M: $\tau_{max} = \dfrac{M_к}{W_p} = \dfrac{M}{\pi D^2 \delta} \cdot 2 = 50{,}9$ МПа

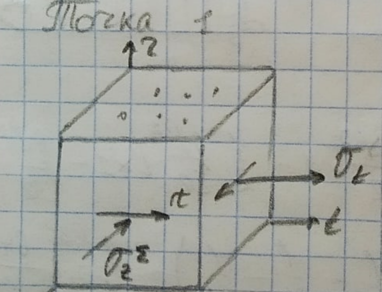
3) от давления p:

$$\sigma_m = \frac{pD}{4\delta}; \quad \sigma_t = \frac{pD}{2\delta} = 100 \text{ МПа}$$

$$\sigma_z^{\Sigma} = \sigma_m + \sigma_z = \frac{pD}{4\delta} - \frac{F}{\pi D \delta} = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} - \frac{10 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}$$

$$= 50 - 63{,}6 = -13{,}6 \text{ МПа} \quad \text{(сжим. напр.)}$$

Точка 1



$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{тс}} \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z^{\Sigma} + \sigma_t}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_z^{\Sigma} - \sigma_t)^2}{4} + \tau^2} =$$

$$= \frac{86{,}4}{2} \pm \sqrt{\frac{113{,}6^2}{4} + 50{,}9^2} =$$

$$= 43{,}2 \pm 76{,}3 \text{ МПа}; \quad \sigma_1 = 119{,}5 \text{ МПа}$$

$\sigma_2 = 0$

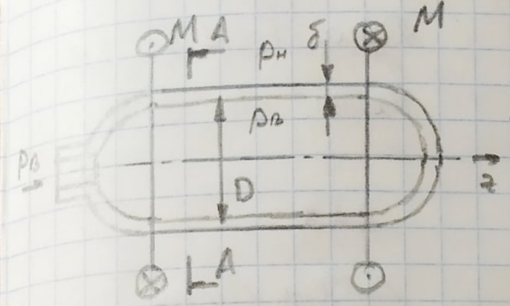
$\sigma_3 = -33{,}1$ МПа

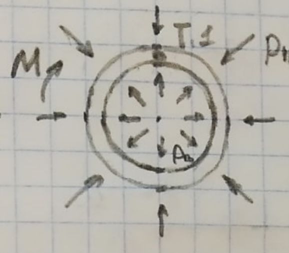
$$\sigma_{экв} = 119{,}5 - \frac{300}{400}(-33{,}1) = 144{,}3 \text{ МПа}$$

$$n_т = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{экв}} = \frac{300}{144{,}3} = 2{,}08$$

Билет 17

№ ~~17~~-2А





Дано:
$p_в = 12$ МПа; $p_н = 10$ МПа
$M = 500$ Н·м, $D = 100$ мм
$\delta = 1$ мм, $\sigma_{тр} = 240$ МПа
$\sigma_{тс} = 300$ МПа

от общего давления:

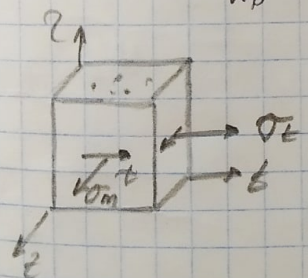
$$p = p_в - p_н = 2 \text{ МПа}$$

$$\sigma_m = \frac{pD}{4\delta} = \frac{2\cdot 10^6 \cdot 100\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10^{-3}} = 50 \text{ МПа}$$

$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta} = 100 \text{ МПа}$$

от момента M:

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_p} = \frac{M}{\pi D^2 \cdot \delta}\cdot 2 = \frac{500}{3{,}14\cdot 100^2 \cdot 10^{-6}\cdot 10^{-3}}\cdot 2 = 31{,}8 \text{ МПа}$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_m + \sigma_t}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_m - \sigma_t)^2}{4} + \tau^2} =$$

$$= 75 \pm \sqrt{\frac{50^2}{4} + 31{,}8^2} =$$

$$= 75 \pm 40{,}5 \text{ МПа}$$

$\sigma_1 = 115{,}5$ МПа

$\sigma_2 = 34{,}5$ МПа

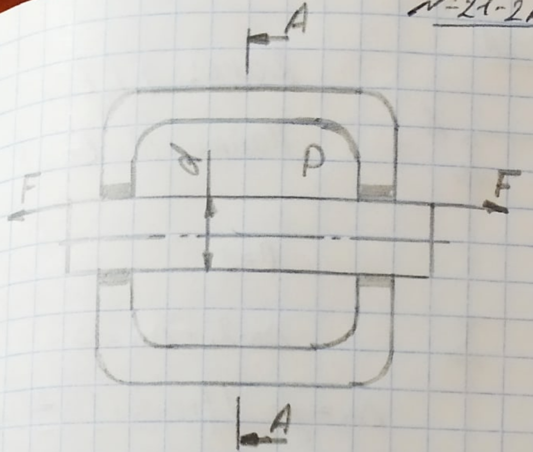
$\sigma_3 = 0$

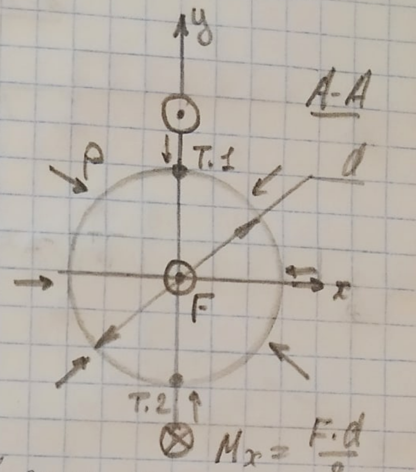
$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{тс}}\cdot\sigma_3 = 115{,}5 \text{ МПа}$$

$$n_т = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{экв}} \approx 2{,}08$$

Билет 21

№ 21-2А





$M_x = \frac{F \cdot d}{2}$

Дано: $p = 50$ МПа, $F = 10$ кН, $d = 20$ мм, $\sigma_т = 300$ МПа

Найти: $n_т = ?$

точка 1

от p: $\sigma_{r,t} = -p = -50$ МПа

от F: $\sigma_{z_F} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d^2} \cdot 4 = 31{,}8$ МПа

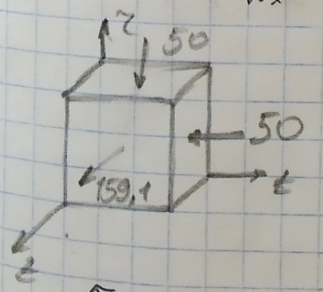
от M_x: $\sigma_{z_{M_x}} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{F \cdot d}{2 \cdot \pi d^3} \cdot 32 = 127{,}3$ МПа

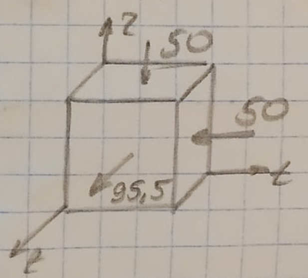
точка 2

$\sigma_{r,t} = -p = -50$ МПа

$\sigma_{z_F} = 31{,}8$ МПа

$\sigma_{z_{M_x}} = -127{,}3$ МПа

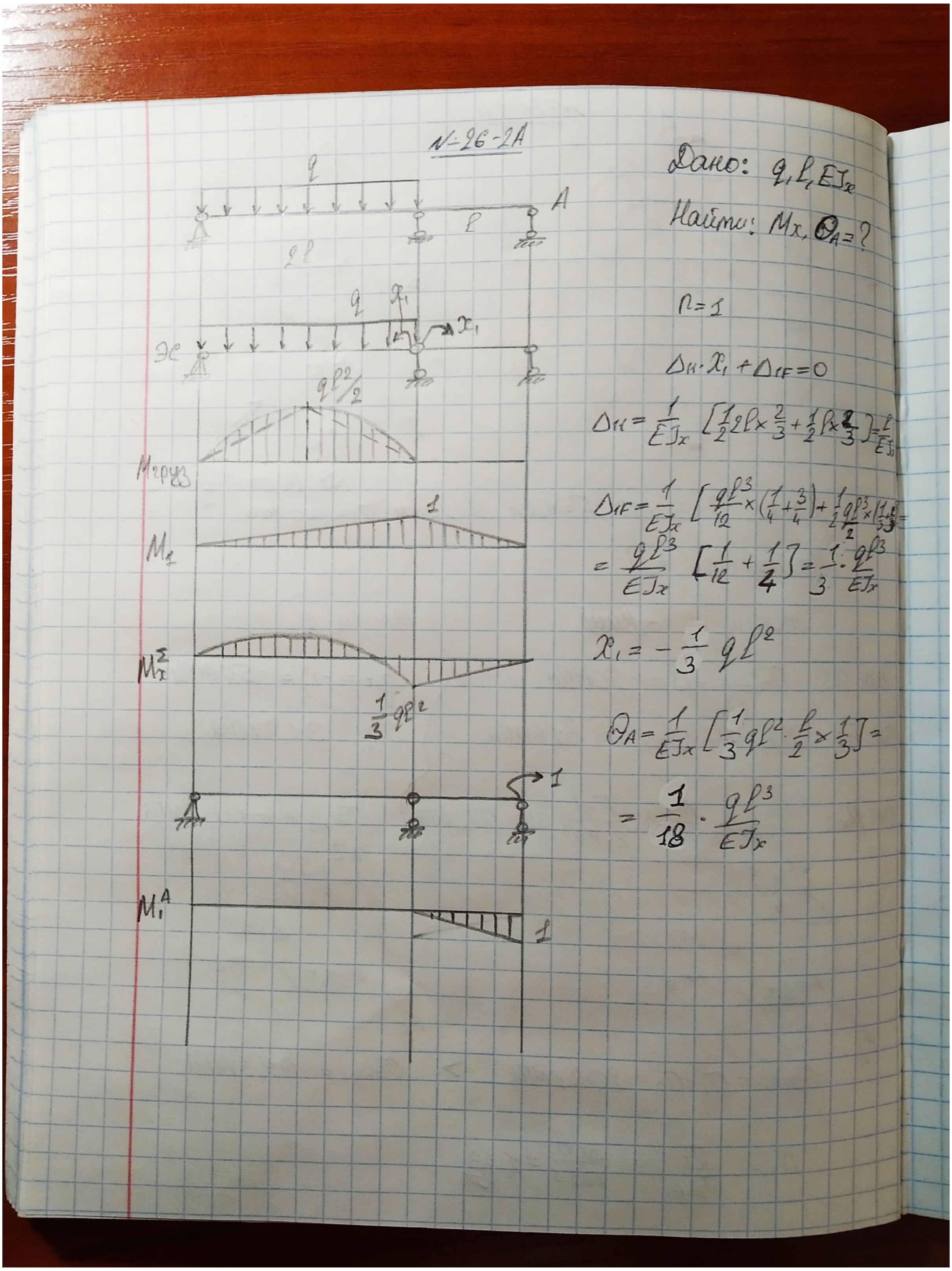




$\sigma_{экв_1} = \sigma_1 - \sigma_3 = 209{,}1$ МПа $>$ $\sigma_{экв_2} = 145{,}5$ МПа

$n_т = \frac{\sigma_т}{\sigma_{экв_1}} = \frac{300}{209{,}1} = 1{,}43$

Билет 26

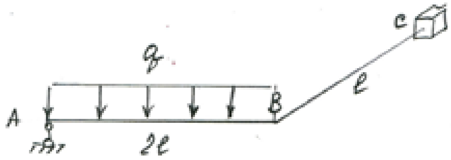

№-26-2А
q
A
l
2l
q
X_1
X_1
ЭС
$ql^2/2$
Mгруз
1
M_1
M_x^Σ
$\frac{1}{3}ql^2$
1
M_1^A
1
Дано: q, l, EJ_x
Найти: $M_x, \Theta_A = ?$
$n = 1$
$\Delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$
$\Delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}2l \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2}l \times \frac{2}{3}\right] = \frac{l}{EJ_x}$
$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{ql^3}{12} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{ql^3}{2} \times \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)\right] =$
$= \frac{ql^3}{EJ_x}\left[\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^3}{EJ_x}$
$X_1 = -\frac{1}{3}ql^2$
$\Theta_A = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{3}ql^2 \cdot \frac{l}{2} \times \frac{1}{3}\right] =$
$= \frac{1}{18} \cdot \frac{ql^3}{EJ_x}$

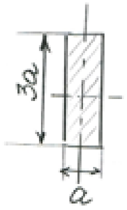
1. Статически неопределимые плоско-пространственные рамы

Пример

Дано: E, q, l, $\nu = 0{,}25$

Построить эп M





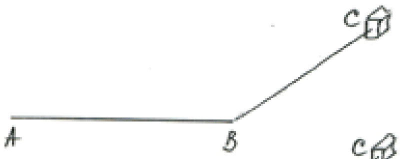
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2}{5}E$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{9}{4}a^4$$

$$J_k = \beta h \cdot b^3 = 0{,}789a^4$$

$$k = \frac{EJ_x}{GJ_k} \approx \frac{50}{7}$$

О.С.

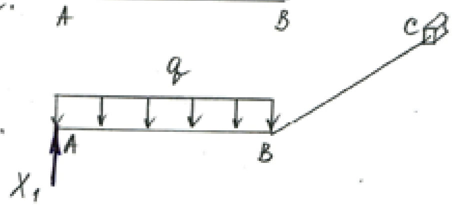


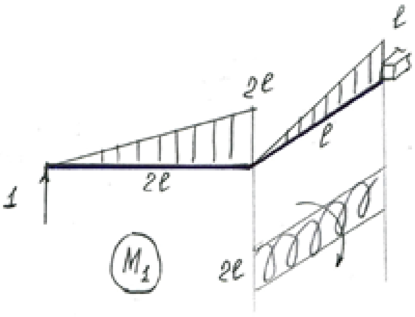
$$n = 4 - 3 = 1$$

$$\Delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\Delta_{11}}$$

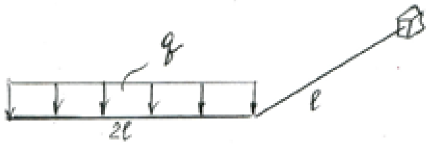
Э.С.

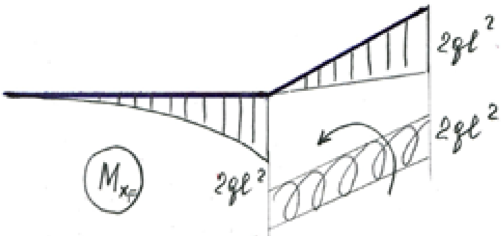




$$\Delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l + \frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\frac{2}{3}l\right] + \frac{1}{GJ_k}\left[2l^2\cdot 2l\right] =$$

$$= \frac{3l^3}{EJ_x} + \frac{4l^3}{GJ_k} = \frac{3l^3}{EJ_x} + \frac{50}{7}\frac{4l^3}{EJ_x} = \frac{221l^3}{7EJ_x}$$

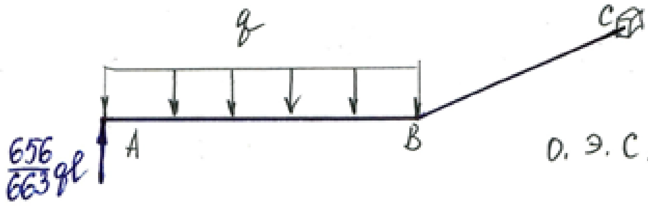




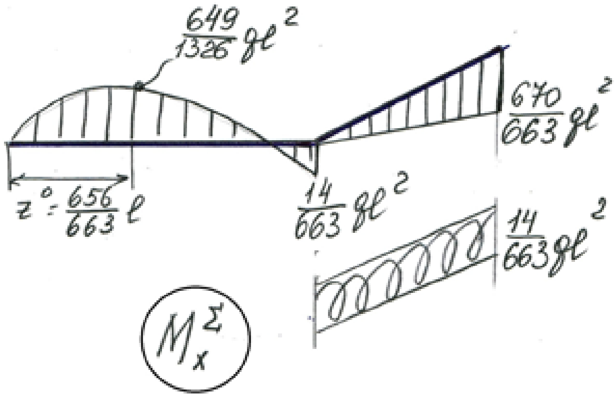
$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ_x}\left[-\frac{1}{3}\cdot 2l\cdot 2ql^2\cdot\frac{3}{2}l - \frac{1}{2}\cdot l\cdot 2ql^2\cdot\frac{2}{3}l\right] + \frac{1}{GJ_k}\left[-2ql^3\cdot 2l\right]$$

$$= -\frac{8}{3}\frac{ql^4}{EJ_x} - \frac{50}{7}\frac{4ql^4}{EJ_x} = -\frac{656}{21}\frac{ql^4}{EJ_x}$$

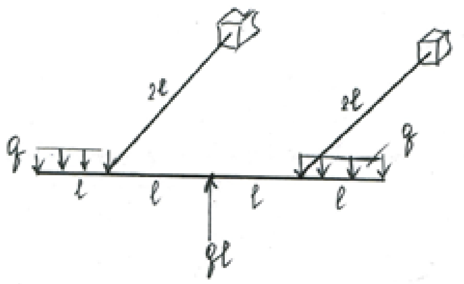
$$X_1 = \frac{656}{663}ql \approx 0{,}9894\,ql$$

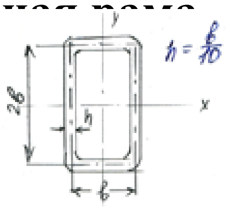


О. Э. С.



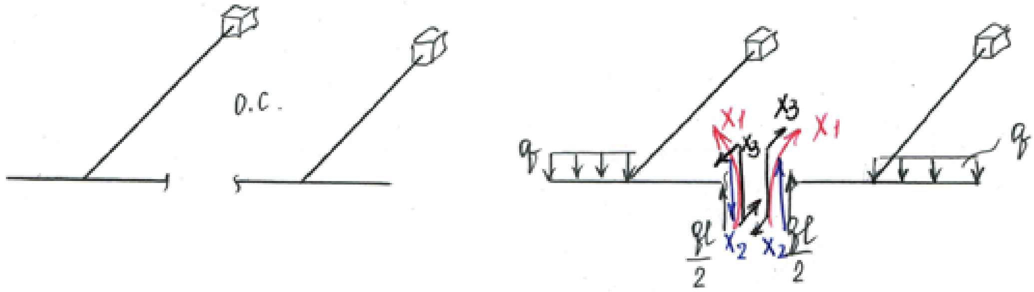
2. Симметричная плоско-пространственная рама



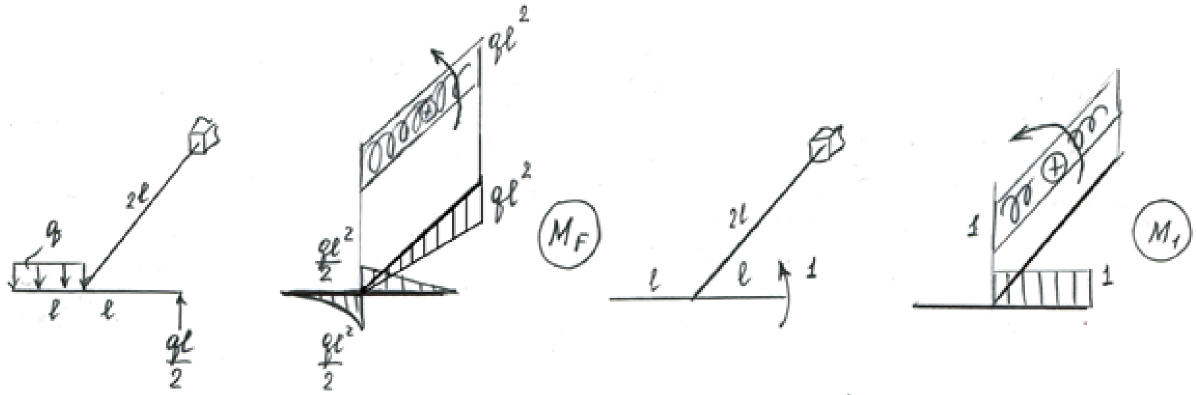


$h = \frac{b}{10}$

$\frac{1}{GJ_к} = \frac{25}{8}\frac{1}{EJ_x}$



$X_2 = 0$
$X_3 = 0$

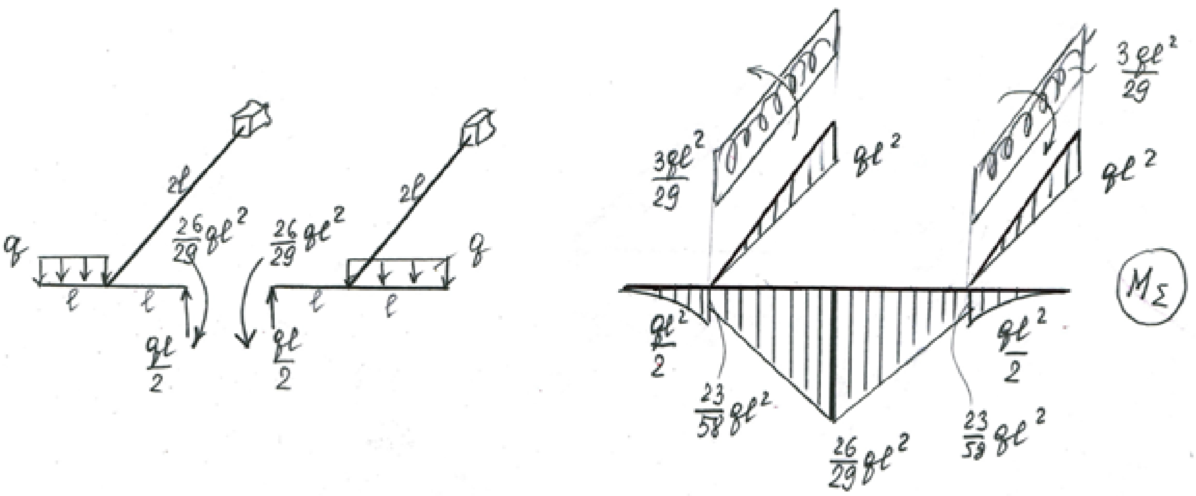


$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0 \qquad X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}$

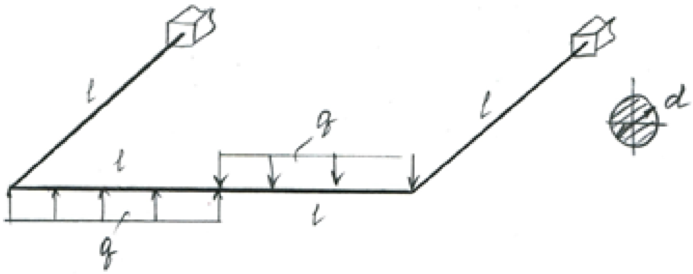
$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left[l \cdot 1 + \frac{25}{8}(2l \cdot 1)\right] = \frac{29\,l}{4EJ_x}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot 1 + \frac{25}{8}\left(ql^2 \cdot 2l \cdot 1\right)\right] = \frac{13 ql^3}{2EJ_x}$$

$$\boxed{X_1 = -\frac{26\, ql^2}{29}}$$

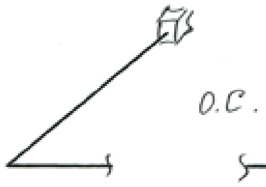


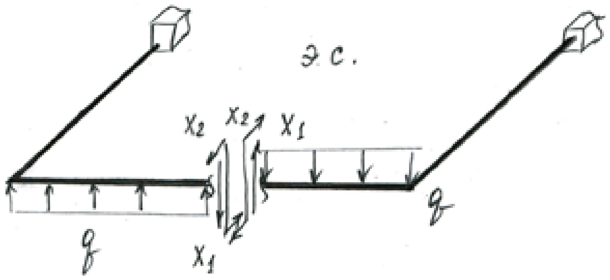
3. Кососимметричная плоско-пространственная рама



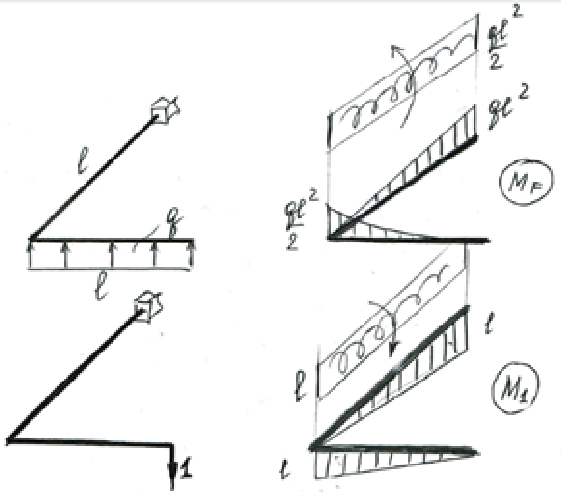
$G = \frac{2}{5}E \qquad \frac{1}{GJ_p} = \frac{5}{4}\frac{1}{EJ_x}$

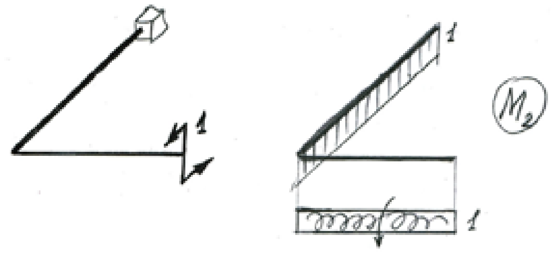
$k = \frac{5}{4}$





$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$





$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}l^2\cdot\frac{2}{3}l\times 2 + \frac{5}{4}l^2\cdot l\right] =$$

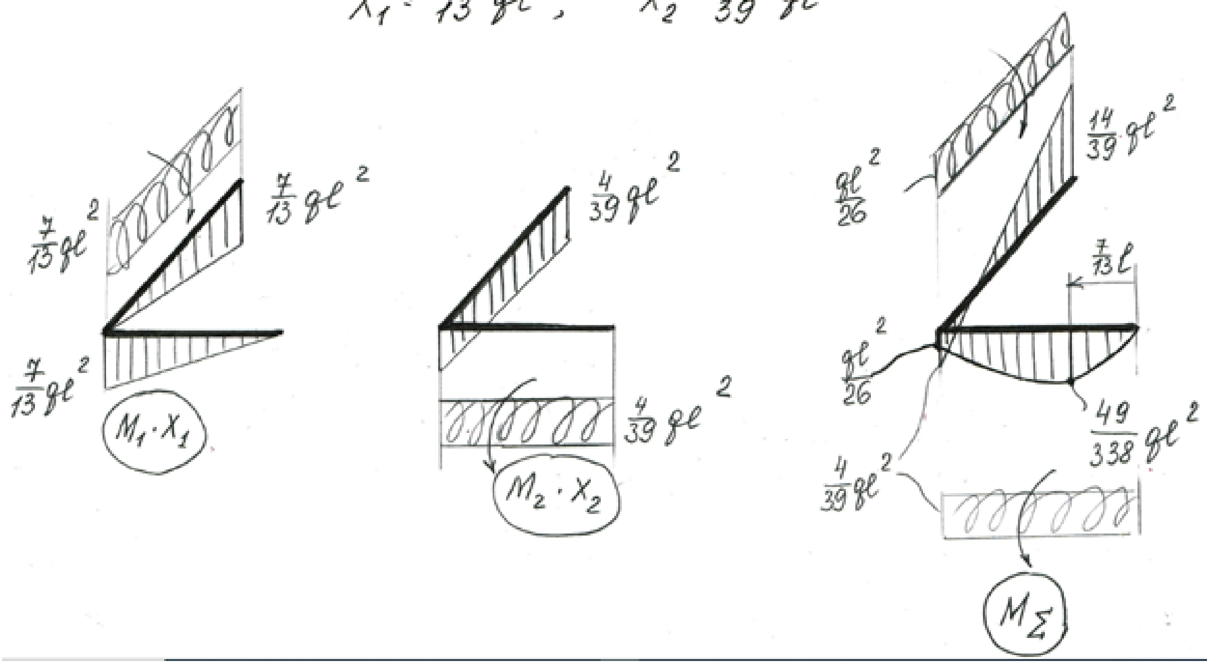
$$= \frac{2}{EJ_x}\left[\frac{2}{3}l^3 + \frac{5}{4}l^3\right] = \frac{23l^3}{6EJ_x}$$

$$\delta_{12} = \frac{2}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}l^2\cdot 1\right] = \frac{l^2}{EJ_x} \qquad \delta_{22} = \frac{2}{EJ_x}\left[l + \frac{5}{4}l\right] = \frac{9l}{2EJ_x}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{2}{EJ_x}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}l + \frac{ql^3}{12}\cdot\frac{l}{2} - \frac{1}{2}ql^2\cdot l\cdot\frac{2}{3}l - \frac{5}{4}\frac{ql^3}{2}\cdot l\right] = \frac{-13ql^4}{6EJ_x}$$

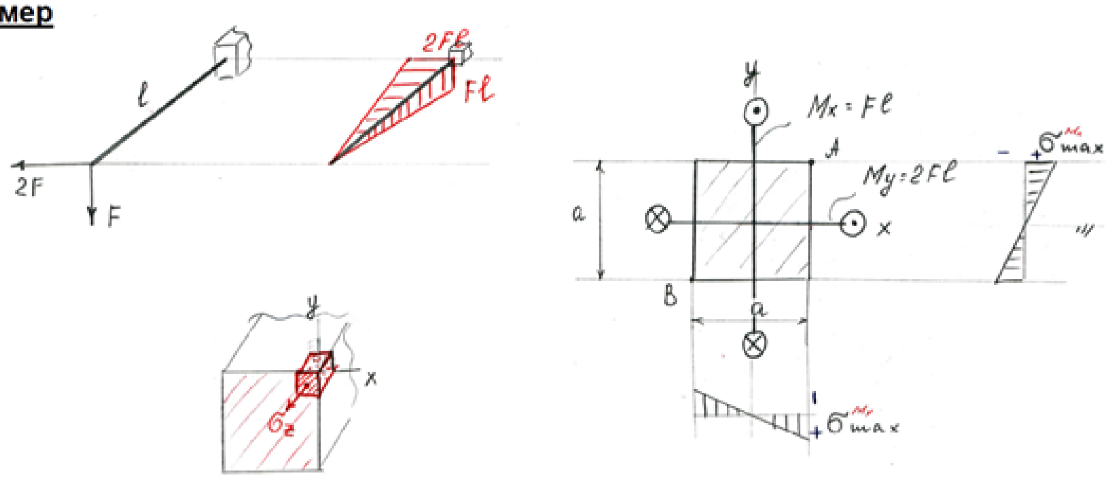
$$\Delta_{2F} = \frac{2}{EJ_x}\left[-\frac{ql^3}{2}\cdot 1\right] = -\frac{ql^3}{EJ_x}$$

$$X_1 = \frac{7}{13}ql; \qquad X_2 = \frac{4}{39}ql^2$$



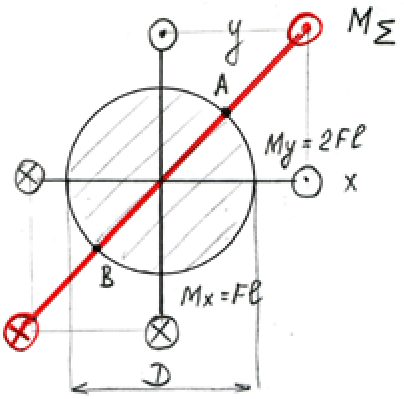
4. Определение НС в опасных точках поперечного сечения произвольно нагруженного стержня

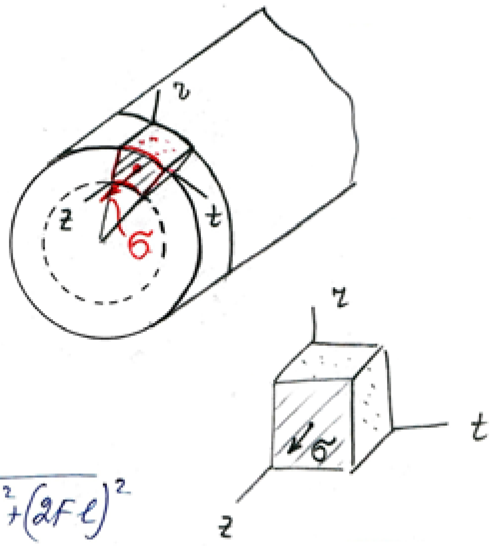
Пример



$W_x = W_y = \frac{a^3}{6}$

$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_x + M_y}{W_x} = \frac{F\ell + 2F\ell}{\frac{a^3}{6}} = \frac{18F\ell}{a^3}$





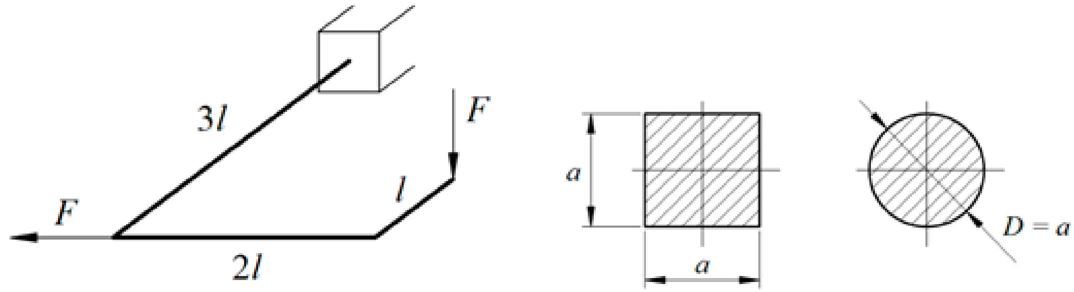
$M_\Sigma = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{F\ell^2 + (2F\ell)^2}$

$\sigma = \frac{M_\Sigma}{W_x} = \frac{\sqrt{5}F\ell}{\frac{\pi D^3}{32}}$

5. Расчет на прочность в общем случае НС

Пример.

Для пространственного бруса подобрать рациональное сечение из двух вариантов. Материал бруса пластичный, одинаково работает на растяжение и сжатие ($\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$).

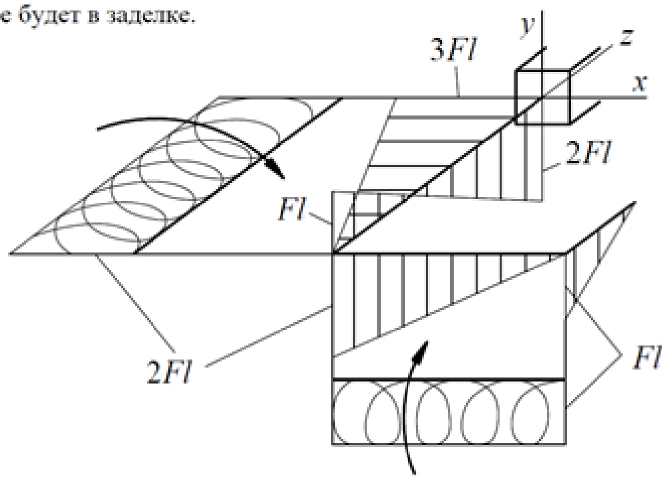


Порядок расчета

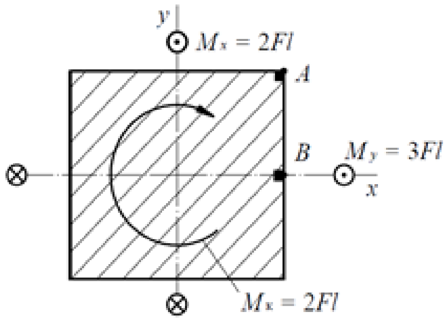
1) Сначала надо построить эпюры изгибающих и крутящих моментов и найти опасное сечение.
2) В опасном сечении найти опасную точку и вычислить для этой точки эквивалентное напряжение.
3) Рациональным будет профиль, у которого эквивалентное напряжение меньше.

Решение

В соответствии с эпюрами, опасное сечение будет в заделке.



Рассмотрим первый профиль - **квадратное сечение** со стороной a. Для квадратного профиля следует рассмотреть две точки – A и B. Опасной будет та точка, в которой эквивалентное напряжение больше.



точка A

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{2Fl + 3Fl}{\frac{a^3}{6}} = 30\frac{Fl}{a^3}; \qquad \sigma^{A}_{экв} = 30\frac{Fl}{a^3}.$$

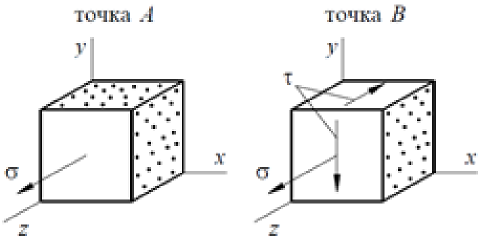
точка B

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} = \frac{3Fl}{\frac{a^3}{6}} = 18\frac{Fl}{a^3}, \quad \tau = \frac{M_к}{W_к} = \frac{2Fl}{0{,}208a^3} = 9{,}62\frac{Fl}{a^3}.$$

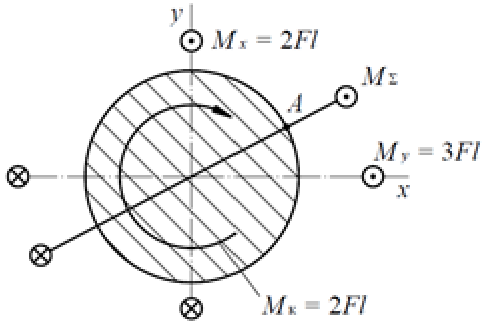
$$\sigma^{B}_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{Fl}{a^3}\sqrt{18^2 + 3\cdot 9{,}62^2} = 24{,}5\frac{Fl}{a^3}.$$

$\sigma^{A}_{экв} > \sigma^{B}_{экв}$, **точка A опаснее, чем точка B,**

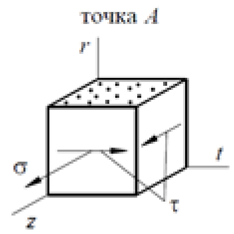
и для квадратного профиля $\sigma_{экв1} = 30\dfrac{Fl}{a^3}$.



Второй профиль - круговое сечение, диаметр которого D равен стороне квадрата a



$$M_\Sigma = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = Fl\sqrt{4+9} = 3{,}6\,Fl.$$



Напряжения в точке A равны

$$\sigma = \frac{M_\Sigma}{W_x} = \frac{3{,}6Fl}{\frac{\pi D^3}{32}} = 36{,}7\frac{Fl}{D^3}, \quad \tau = \frac{M_к}{W_p} = \frac{2Fl}{\frac{\pi D^3}{16}} = 10{,}1\frac{Fl}{D^3},$$

$$\sigma_{экв2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{Fl}{D^3}\sqrt{36.7^2 + 3\cdot 10.1^2} = 40{,}8\frac{Fl}{D^3}.$$

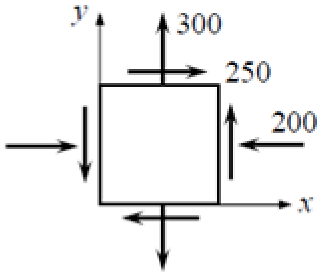
Поскольку диаметр D равен стороне квадрата a, то эквивалентное напряжение для квадратного сечения меньше, чем для кругового ($\sigma_{экв1} < \sigma_{экв2}$), значит, в данном случае **квадратное сечение рациональнее**.

6. Исследование напряженного состояния в общем случае и в частном, когда одно из главных напряжений известно. Определение главных напряжений.

6.1. Одно из главных напряжений известно.

Пример 1. $\sigma_{гл} = ?$ направления $\sigma_{гл}$?

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} -200 & 250 & 0 \\ 250 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{МПа}$$



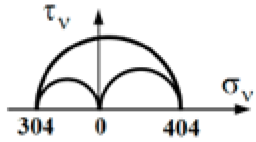
$$\sigma_x = -200 \text{ МПа}, \ \sigma_y = 300 \text{ МПа}, \ \tau_{xy} = \tau_{yx} = 250 \text{ МПа}.$$

Одно из главных напряжений известно $\sigma_{гл} = \sigma_z = 0$.

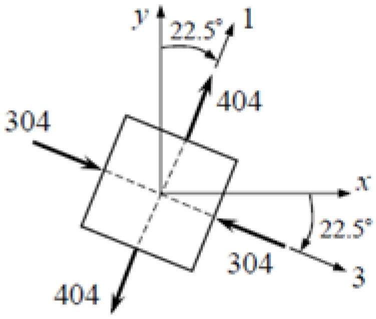
$$\sigma_{гл} = \frac{-200+300}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-200-300}{2}\right)^2 + 250^2} = 50 \pm 354 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{гл}^{+} = 50 + 354 = 404 \text{ МПа}, \quad \sigma_{гл}^{-} = 50 - 354 = -304 \text{ МПа}.$$

Присваиваем индексы с учетом знака
$\sigma_1 = 404$ МПа ; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -304$ МПа .



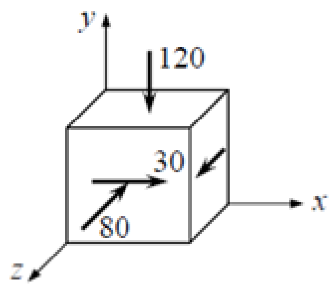
Положение главных площадок $\quad \mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2 \cdot 250}{-200-300} = -1, \quad 2\alpha = -45^\circ, \quad \alpha = -22{,}5^\circ.$



Изобразим главные площадки. Знак угла α отрицательный, поэтому угол откладываем по ходу часовой стрелки относительно исходных координатных осей. Первая главная ось направления действия наибольшего главного напряжения σ_1 проходит через первую и третью четверти координатных осей, где расположены ребра элементарного квадрата, к которым сходятся стрелки касательных напряжений.

Пример 2. $\sigma_{гл} = ?$ направления $\sigma_{гл}$?

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 \\ 0 & -120 & 0 \\ 30 & 0 & -80 \end{pmatrix}, \text{МПа}$$



$\sigma_y = -120$ МПа, $\sigma_z = -80$ МПа,

$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 30$ МПа.

Площадка y – главная, $\sigma_{гл} = \sigma_y = -120$ МПа.

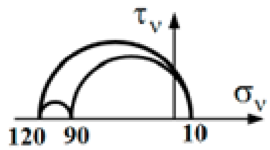
$$\sigma_{гл} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} =$$

$$= \frac{0-80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-(-80)}{2}\right)^2 + 30^2} = -40 \pm 50 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{гл}^{+} = 10 \text{ МПа}, \quad \sigma_{гл}^{-} = -90 \text{ МПа}.$$

С учетом знака:

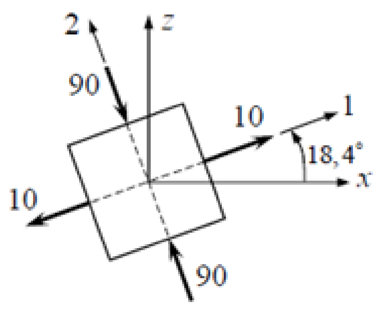
$$\sigma_1 = 10 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -90 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -120 \text{ МПа}.$$



Положение главных площадок

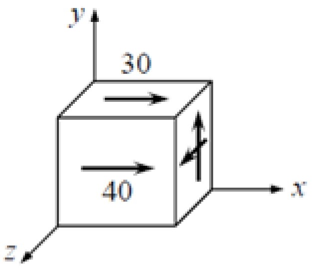
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 30}{0-(-80)} = 0{,}75;$$

$$2\alpha = 36{,}8^\circ; \quad \alpha = 18{,}4^\circ.$$



6.2. Все площадки неглавные

Пример 3. $\sigma_{\text{гл}} = ?$



$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 30 \\ 40 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \text{МПа}$$

$\tau_{yx} = \tau_{xy} = 30$ МПа, $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 40$ МПа.

Ни одна из площадок не является главной!

$I_1 = 0,$

$I_2 = -30^2 - 40^2 = -2500$ МПа^2,

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 30 \\ 40 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

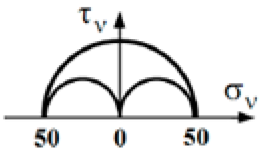
Кубическое уравнение

$$\sigma_{\text{гл}}^3 - 2500 \cdot \sigma_{\text{гл}} = 0,$$

$$\sigma_{\text{гл}} \cdot \left(\sigma_{\text{гл}} - 50\right) \cdot \left(\sigma_{\text{гл}} + 50\right) = 0,$$

С учетом знака:

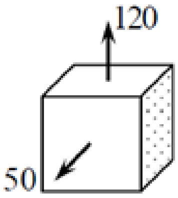
$\sigma_1 = 50$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -50$ МПа *(двухосное НС).*



7. Исследование НС в различных точках нагруженного тела.

Пример 4. Дано: $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$ (пластичный материал)

Определить $\sigma_{экв} = ?$

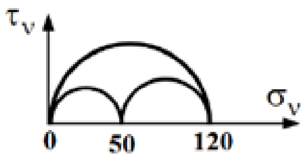


Все напряжения – главные!

$\sigma_1 = 120$ МПа

$\sigma_2 = 50$ МПа

$\sigma_3 = 0$



Теория I (Треска-Сен-Венана):

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = 120 - 0 = 120 \text{ МПа},$$

то есть по теории I одноосное растяжение с $\sigma_{экв} = 120$ МПа равноопасно исходному НС.

Теория II (Хубера-Мизеса):

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{70^2+50^2+120^2} = 104,7 \text{ МПа},$$

то есть по теории II исходному НС равноопасно одноосное растяжение с $\sigma_{экв} = 104,7$ МПа.

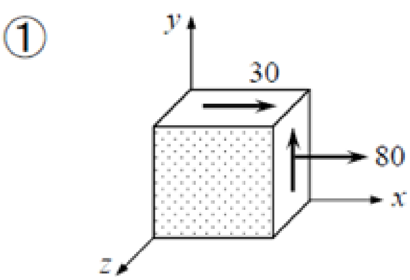
Теории I и II дают близкие, но разные значения $\sigma_{экв}$ (разница не более 14 %).

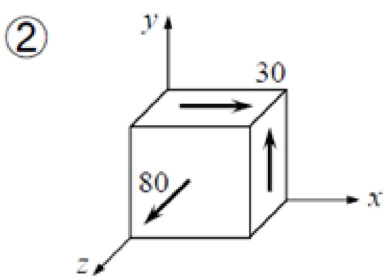
Теория I дает завышенные значения $\sigma_{экв}$. Теория II – заниженные.

Истинное значение – между ними.

Пример 5. Дано: $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$.

Определить, какое из двух НС наиболее опасно?





Наиболее опасно то НС, где меньше коэффициент запаса $n_т = \dfrac{\sigma_т}{\sigma_{экв}}$, то есть где $\sigma_{экв}$ больше.

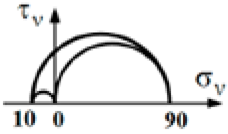
Сравнение по теории Треска-Сен-Венана

Сравним по <u>теории I</u>

Площадка z – главная, $\sigma_{гл} = \sigma_z = 0$

$$\sigma_{гл} = \frac{80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80}{2}\right)^2 + 30^2} = 40 \pm 50 \text{ МПа}.$$

$\sigma_1 = 90$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -10$ МПа.



$$\sigma_{экв1} = \sigma_1 - \sigma_3 = 90 - (-10) = 100 \text{ МПа}$$

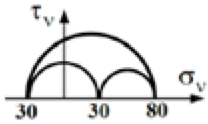
Также это УПНС, лучше использовать формулу

$$\sigma_{экв1} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{80^2 + 4 \cdot 30^2} = 100 \text{ МПа}.$$

Площадка z – главная, $\sigma_{гл} = \sigma_z = 80$ МПа.

$$\sigma_{гл} = 0 \pm \sqrt{0 + 30^2} = \pm 30 \text{ МПа}.$$

$\sigma_1 = 80$ МПа, $\sigma_2 = 30$ МПа, $\sigma_3 = -30$ МПа.



$$\sigma_{экв2} = \sigma_1 - \sigma_3 = 80 - (-30) = 110 \text{ МПа}$$

$\sigma_{экв2} > \sigma_{экв1}$, таким образом, по теории I наиболее опасна точка 2

Сравнение по теории Хубера-Мизеса

Сравним по теории II

Это УПНС, тогда

$$\sigma_{экв1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{80^2 + 3 \cdot 30^2} = = 95{,}39 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{экв2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{50^2 + 60^2 + 110^2} = 95{,}39 \text{ МПа}$$

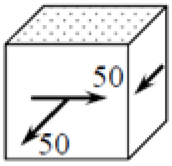
$\sigma_{экв2} = \sigma_{экв1}$, таким образом, по теории II точки 1 и 2 равноопасны.

Теория II считается наиболее точной, т.к. лучше согласуется с экспериментами.

Пример 6. Дано: $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$.

Используя теорию II определить, при каком значении τ два НС равноопасны?

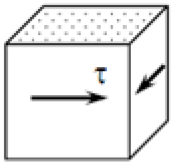
①



УПНС

$$\sigma_{экв1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{50^2 + 3 \cdot 50^2} = = 100 \text{ МПа}$$

②



УПНС (при котором $\sigma = 0$)

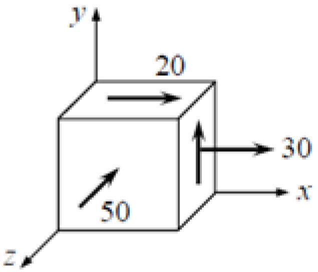
$$\sigma_{экв2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{0 + 3\cdot\tau^2} = \tau\sqrt{3}$$

Два НС равноопасны, когда у них одинаковы коэффициенты запаса, $n_{т1} = n_{т2}$.

$$\frac{\sigma_т}{\sigma_{экв1}} = \frac{\sigma_т}{\sigma_{экв2}} \;\rightarrow\; \sigma_{экв1} = \sigma_{экв2} \;\rightarrow\; 100 = \tau\sqrt{3} \;\rightarrow\; \tau = \frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57{,}74 \text{ МПа}.$$

Пример 7. Дано: $\sigma_{тр} = 300$ МПа, $\sigma_{тс} = 400$ МПа.

Определить $\sigma_{экв} = ?$



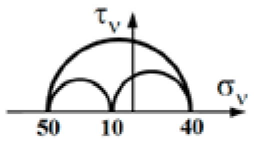
Так как $\sigma_{тр} \neq \sigma_{тс}$, то для определения $\sigma_{экв}$ можно использовать только теорию Мора (III) !!!

Площадка z – главная, $\sigma_{гл} = \sigma_z = -50$ МПа.

$$\sigma_{гл} = \frac{30+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30-0}{2}\right)^2 + 20^2} = 15 \pm 25 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{гл}^{+} = 40 \text{ МПа}, \quad \sigma_{гл}^{-} = -10 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_1 = 40 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -10 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -50 \text{ МПа}.$$



По теории Мора

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{тс}}\sigma_3 = 40 - \frac{300}{400} \cdot (-50) = 77,5 \text{ МПа}.$$

Зная $\sigma_{экв}$, можно определить коэффициент запаса для данного НС

$$n_т = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{экв}}.$$

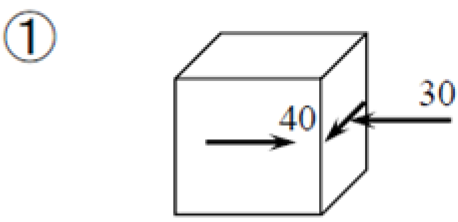
Здесь в формуле именно $\sigma_{тр}$ – предел текучести при растяжении, т.к. $\sigma_{экв}$ – напряжение одноосного растяжения.

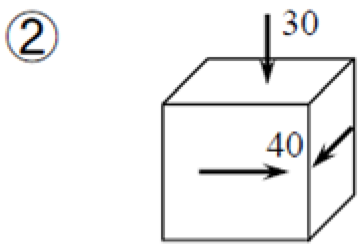
Условие прочности

$$\sigma_{экв} \leq [\sigma], \quad \text{где } [\sigma] = \frac{\sigma_{тр}}{n_т}.$$

Пример 8. Дано: $\sigma_{вр} = \frac{4}{5}\sigma_{вс}$ (хрупкий материал).

Определить, какое из двух НС наиболее опасно?





Для хрупких материалов применяем теорию Мора!

Верхняя площадка – главная, $\sigma_{гл} = 0$.

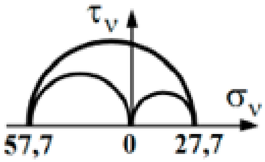
$$\sigma_{гл} = \frac{-30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2 + 40^2} =$$

$$= -15 \pm 42{,}7 \text{ МПа}$$

$\sigma_{гл}^{+} = 27{,}7$ МПа, $\sigma_{гл}^{-} = -57{,}7$ МПа.

$\sigma_1 = 27{,}7$ МПа, $\sigma_2 = 0$,

$\sigma_3 = -57{,}7$ МПа.



$$\sigma_{экв1} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}}\sigma_3 =$$

$$27{,}7 - \frac{4}{5}\cdot(-57{,}7) = 73{,}9 \text{ МПа}.$$

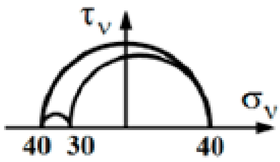
Верхняя площадка – главная,

$\sigma_{гл} = -30$ МПа.

$$\sigma_{гл} = 0 \pm \sqrt{0 + 40^2} = \pm 40 \text{ МПа}$$

$\sigma_1 = 40$ МПа, $\sigma_2 = -30$ МПа,

$\sigma_3 = -40$ МПа.



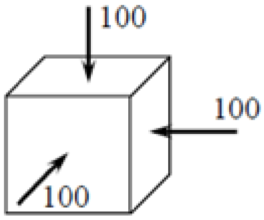
$$\sigma_{экв2} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}}\sigma_3 =$$

$$= 40 - \frac{4}{5}\cdot(-40) = 72 \text{ МПа}.$$

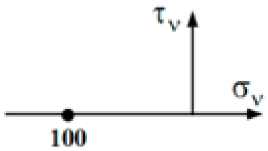
$\sigma_{экв2} < \sigma_{экв1}$, таким образом наиболее опасна точка 1.

Пример 9. Дано: $\sigma_{вр} = \dfrac{\sigma_{вс}}{2}$.

Определить $\sigma_{экв} = ?$



Круги Мора вырождаются в одну точку



Это **всестороннее сжатие** равными по величине напряжениями $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -100$ МПа.

По теории Мора

$$\sigma_{экв} = -100 - \frac{1}{2}\cdot(-100) = -50 \text{ МПа}.$$

$\sigma_{экв} < 0$ – это противоречие,

т.к. $\sigma_{экв}$ – напряжение одноосного растяжения!

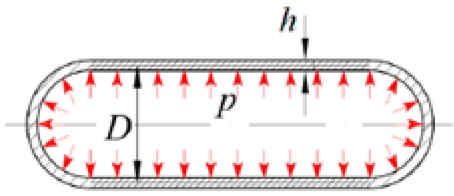
Поэтому, если расчет дает $\sigma_{экв} < 0$, то считают $\sigma_{экв} = 0$.

НС менее опасно, чем НЕнапряженное!

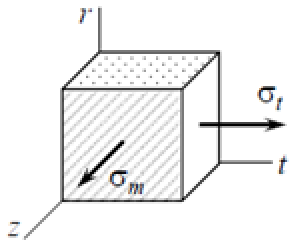
Такое НС не опасно при любых значениях напряжений, сколько они не были бы велики! **Хрупкий материал при всестороннем сжатии не разрушается, а пластичный – не течет.**

8. Расчет на прочность тонкостенной цилиндрической оболочки и вала в общем случае нагружения

8.1. Тонкостенная цилиндрическая оболочка (трубка) под давлением



Пример 1. Тонкостенная оболочка нагружена внутренним давлением p. Найти толщину стенки h цилиндрической части оболочки. Дано: $p = 12$ МПа, $D = 30$ мм, $\sigma_т = 240$ МПа, $n_т = 2$.



В стенке оболочки возникнут окружное σ_t и меридиональное напряжение σ_m:

$$\sigma_t = \frac{pD}{2h}, \quad \sigma_m = \frac{pD}{4h}.$$

В любой точке цилиндрической оболочки реализуется двухосное НС.

Главные напряжения: $\sigma_1 = \sigma_t, \quad \sigma_2 = \sigma_m, \quad \sigma_3 = 0.$

Эквивалентное напряжение: $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \dfrac{pD}{2h} - 0 = \dfrac{pD}{2h}.$

Условие прочности

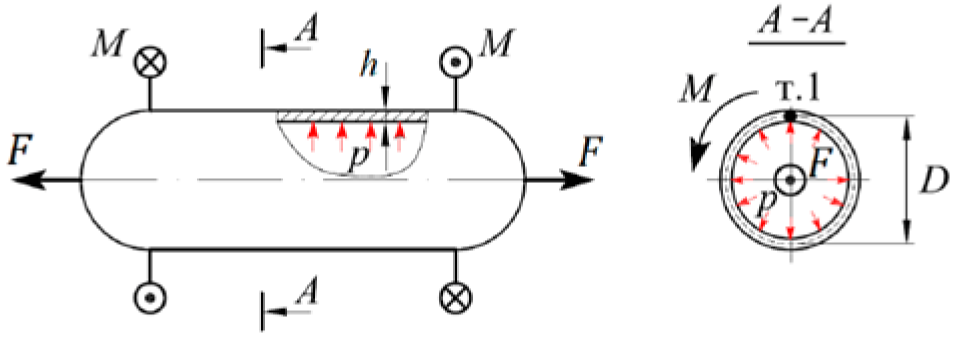
$$\sigma_{экв} = \frac{pD}{2h} \le \frac{\sigma_т}{n_т} \quad \to \quad h \ge \frac{pDn_т}{2\sigma_т} = \frac{12 \cdot 0,03 \cdot 2}{2 \cdot 240} = 0,0015 \text{ м} = 1,5 \text{ мм}.$$

$\dfrac{D}{h} = \dfrac{30}{1,5} = 20 \;\to\;$ ***оболочка тонкостенная, котельные формулы применимы.***

В случае, если на цилиндрическую оболочку вместе с давлением действуют и другие нагрузки, то компоненты НС определяются на основании принципа независимости действия сил.

Пример 2. Тонкостенный цилиндрический сосуд заполнен газом под давлением p и подвергается действию крутящего момента M и осевой силы F. Изучить НС в точках цилиндрической части сосуда на некотором удалении от его торцов. Вычислить коэффициент запаса.

Дано $p = 15$ МПа, $F = 20$ кН, $M = 900$ Н·м, $D = 40$ мм, $h = 2$ мм, $\sigma_{тр} = 500$ МПа, $\sigma_{тс} = 600$ МПа.



Все сечения расчетной части сосуда являются равноопасными, а НС во всех точках сечения одинаково, так как заданная система осесимметрична.

Найдем напряжения от всех воздействий по отдельности.

От внутреннего давления возникают меридиональное и окружное напряжения

$$\sigma_m = \frac{pD}{4h} = \frac{15 \cdot 0{,}04}{4 \cdot 0{,}002} = 75 \text{ МПа}, \qquad \sigma_t = \frac{pD}{2h} = \frac{15 \cdot 0{,}04}{2 \cdot 0{,}002} = 150 \text{ МПа}.$$

Крутящий момент создает касательные напряжения

$$\tau = \frac{M}{W_p} = \frac{2M}{\pi D^2 h} = \frac{2 \cdot 900}{3{,}14 \cdot 0{,}04^2 \cdot 0{,}002} = 179 \text{ МПа}.$$

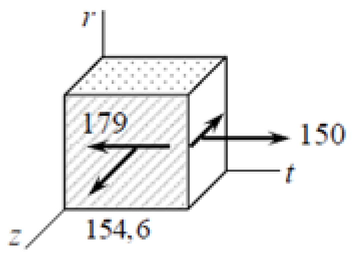
Осевая растягивающая сила создает нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi D h} = \frac{20 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}002} = 79{,}6 \text{ МПа}.$$

В площадке, перпендикулярной оси z, напряжения σ_m и σ складываются:

$$\sigma_z = \sigma_m + \sigma = 75 + 79{,}6 = 154{,}6 \text{ МПа}.$$

Напряженное состояние в опасной точке (точка 1)



Площадка r – главная, $\sigma_{гл} = \sigma_r = 0$.

$$\sigma_{гл} = \frac{\sigma_z + \sigma_t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_t}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{154,6+150}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{154,6-150}{2}\right)^2 + 179^2} =$$

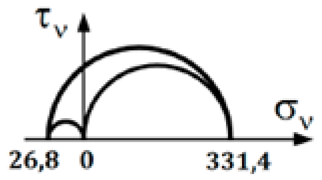
$$= 152,3 \pm 179,1 \text{ МПа}.$$

$\sigma_{гл}^{+} = 331,4$ МПа, $\sigma_{гл}^{-} = -26,8$ МПа.

Присвоим индексы:

$\sigma_1 = 331,4$ МПа, $\sigma_2 = 0$,

$\sigma_3 = -26,8$ МПа.



По теории Мора

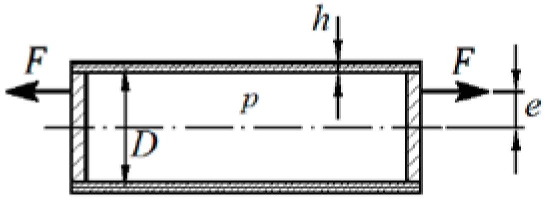
$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{тс}}\sigma_3 = 331,4 - \frac{500}{600}(-26,8) = 353,7 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса по пределу текучести

$$n_т = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{экв}} = \frac{500}{353,7} = 1,41.$$

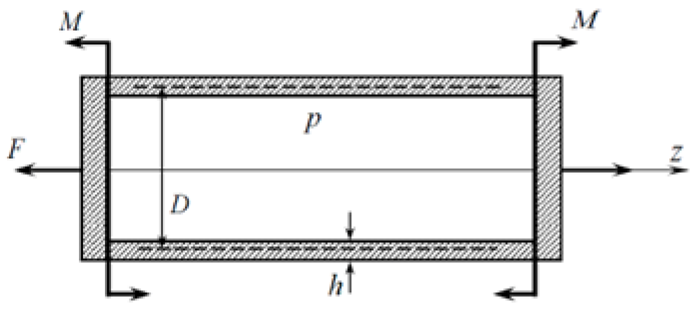
Пример 3.

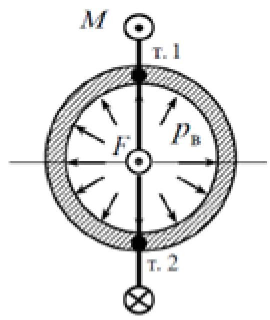
Дано: $p = 8$ МПа, $F = 6$ кН, $e = 10$ мм, $D = 30$ мм, $h = 1,5$ мм, $\sigma_т = 240$ МПа. Исследовать НС и проверить прочность цилиндрической оболочки на некотором удалении от ее торцов, если $[\sigma] = 160$ МПа.



Внецентренное действие силы F с эксцентриситетом e рассмотрим как центральное растяжение силой F и изгиб моментом

$$M = F \cdot e = 6 \cdot 10^3 \cdot 0,01 = 60 \text{ Нм}.$$





Все сечения оболочки являются равноопасными, а наиболее опасными в поперечных сечениях являются точки 1 и 2.

От внутреннего давления возникают напряжения

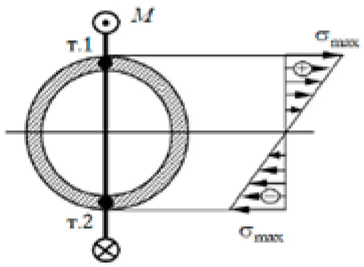
$$\sigma_m = \frac{pD}{4h} = \frac{8 \cdot 0{,}03}{4 \cdot 0{,}0015} = 40 \text{ МПа}, \qquad \sigma_t = \frac{pD}{2h} = \frac{8 \cdot 0{,}03}{2 \cdot 0{,}0015} = 80 \text{ МПа}.$$

Осевая растягивающая сила создает нормальное напряжение

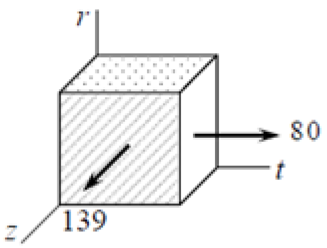
$$\sigma_F = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi D h} = \frac{6 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}0015} = 42{,}4 \text{ МПа}.$$

Изгибающий момент создает нормальные напряжения, которые максимальны в точках 1 и 2

$$\sigma_M = \frac{M}{W_{изг}} = \frac{4M}{\pi D^2 h} = \frac{4 \cdot 60}{3{,}14 \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}0015} = 56{,}6 \text{ МПа}.$$



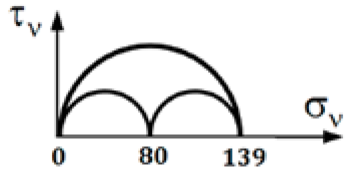
НС в точке 1



$$\sigma_z = \sigma_m + \sigma_F + \sigma_M = 40 + 42{,}4 + 56{,}6 = 139 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения

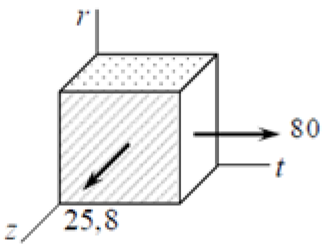
$\sigma_1 = \sigma_z = 139$ МПа, $\sigma_2 = \sigma_t = 80$ МПа, $\sigma_3 = 0$.



Эквивалентное напряжение по теории Сен-Венана

$$\sigma_{экв1} = \sigma_1 - \sigma_3 = 139 - 0 = 139 \text{ МПа}.$$

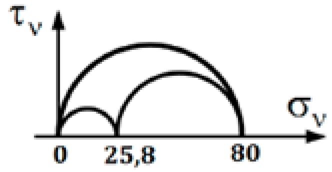
НС в точке 2



$$\sigma_z = \sigma_m + \sigma_F - \sigma_M = 40 + 42{,}4 - 56{,}6 = 25{,}8 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения

$\sigma_1 = \sigma_t = 80$ МПа, $\sigma_2 = \sigma_z = 25{,}8$ МПа, $\sigma_3 = 0$.



Эквивалентное напряжение по теории Сен-Венана

$$\sigma_{экв2} = \sigma_1 - \sigma_3 = 80 - 0 = 80 \text{ МПа}.$$

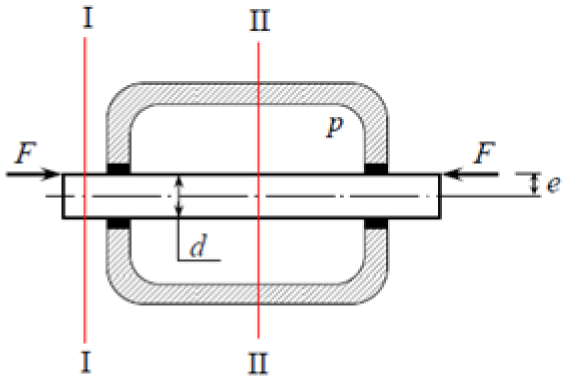
$\sigma_{экв1} > \sigma_{экв2}$, **наиболее опасна точка 1.**

$$\sigma_{экв1} = 139 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

условие прочности выполняется.

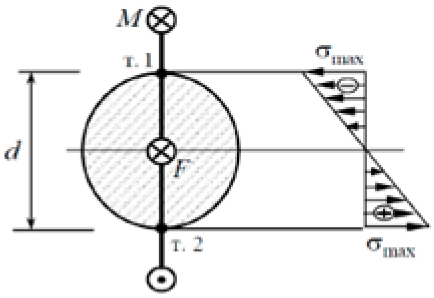
8.2. Цилиндрический валик

Пример 4. Валик проходит через камеру, в которой поддерживается давление p и в осевом направлении внецентренно сжимается силами F. Уплотнения камеры не оказывают влияние на НС валика. Исследовать НС в опасных точках. Определить коэффициент запаса. Дано: $p = 40$ МПа, $F = 5$ кН, $e = 12$ мм, $d = 24$ мм, $\sigma_{вр} = 140$ МПа, $\sigma_{вс} = 310$ МПа.



Внецентренное сжатие силой F с эксцентриситетом e рассмотрим как центральное сжатие силой F и изгиб моментом $M = F \cdot e = 5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}012 = 60$ Нм.

Сечение I–I (вне камеры)



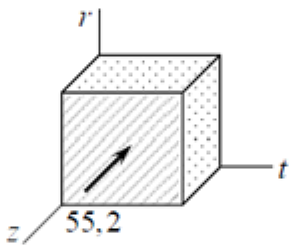
Изгибающий момент создает нормальные напряжения, максимальные в точках 1 и 2

$$\sigma_M = \frac{M}{W_{изг}} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 60}{3{,}14 \cdot 0{,}024^3} = 44{,}2 \text{ МПа}.$$

Осевая сжимающая сила создает нормальное напряжение

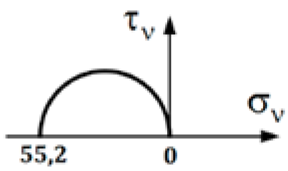
$$\sigma_F = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 0{,}024^2} = 11 \text{ МПа}.$$

НС в точке 1



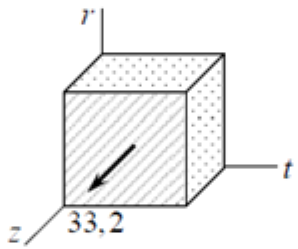
$$\sigma_z = -\sigma_F - \sigma_M = -11 - 44{,}2 = -55{,}2 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = -55{,}2 \text{ МПа}.$$



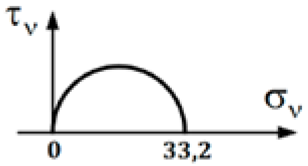
По теории Мора: $\sigma_{экв1} = \sigma_1 - \dfrac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}}\sigma_3 = 0 - \dfrac{140}{310} \cdot (-55{,}2) = 24{,}9$ МПа

НС в точке 2



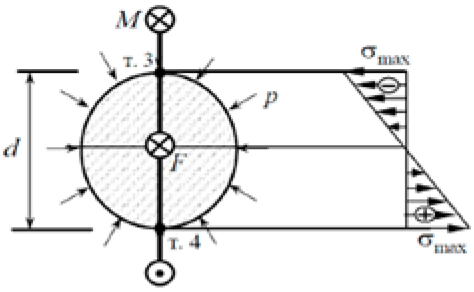
$$\sigma_z = -\sigma_F + \sigma_M = -11 + 44,2 = 33,2 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_1 = 33,2 \text{ МПа}, \ \sigma_2 = 0, \ \sigma_3 = 0.$$



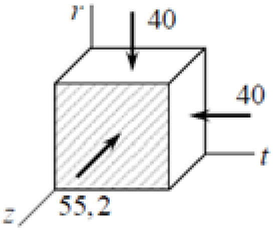
$$\sigma_{\text{экв2}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}}\sigma_3 = 33,2 - \frac{140}{310}\cdot 0 = 33,2 \text{ МПа}$$

Сечение II–II (внутри камеры)



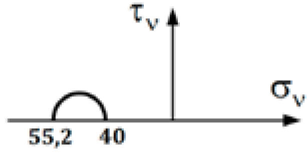
Давление вызывает двухосное равномерное сжатие с компонентами $(-p)$ на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, параллельных оси вала.
Наиболее опасными являются точки 3 и 4.

НС в точке 3



$$\sigma_z = -\sigma_F - \sigma_M = -11 - 44,2 = -55,2 \text{ МПа. (как в т. 1)}$$

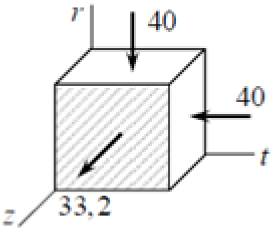
$$\sigma_1 = -40 \text{ МПа}, \; \sigma_2 = -40 \text{ МПа}, \; \sigma_3 = -55,2 \text{ МПа}.$$



$$\sigma_{\text{экв}3} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}}\sigma_3 = -40 - \frac{140}{310}\cdot(-55,2) = -15 \text{ МПа}.$$

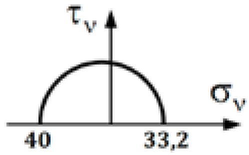
НС менее опасно, чем ненапряженное, считаем $\sigma_{\text{экв}3} = 0$.

НС в точке 4



$$\sigma_z = -\sigma_F + \sigma_M = -11 + 44,2 = 33,2 \text{ МПа. (как в т. 2)}$$

$$\sigma_1 = 33,2 \text{ МПа}, \; \sigma_2 = -40 \text{ МПа}, \; \sigma_3 = -40 \text{ МПа}.$$



$$\sigma_{\text{экв}4} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}}\sigma_3 = 33,2 - \frac{140}{310}\cdot(-40) = 51,3 \text{ МПа}$$

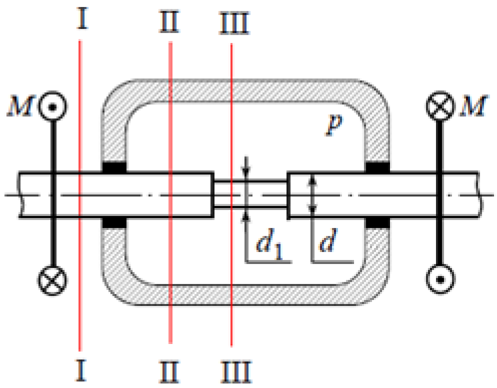
Наиболее опасна точка 4, в которой наибольшее эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}} = \max\{\sigma_{\text{экв}4}\} = 51,3$ МПа.

Коэффициент запаса по пределу прочности

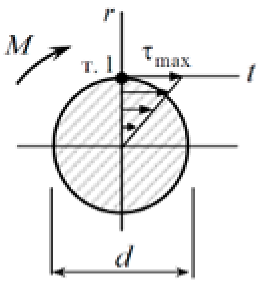
$$n_{\text{в}} = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{экв}}} = \frac{140}{51,3} = 2,73.$$

Пример 5. Валик с проточкой проходит через камеру, в которой поддерживается давление p и закручивается моментами M. Исследовать НС в опасных точках валика и определить $n_{\text{т}}$.

Дано: $p = 20$ МПа, $M = 40$ Нм, $d = 18$ мм, $d_1 = 14$ мм, $\sigma_{\text{т}} = 240$ МПа.



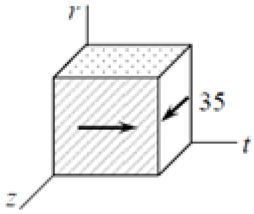
Сечение I–I (вне камеры)



Крутящий момент создает касательные напряжения, которые максимальны в точках, наиболее удаленных от ц.т.

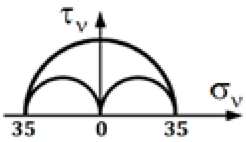
$$\tau_{max} = \frac{M}{W_p} = \frac{16M}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 40}{3{,}14 \cdot 0{,}018^3} = 35\ \text{МПа}.$$

НС в точке 1



НС – чистый сдвиг!

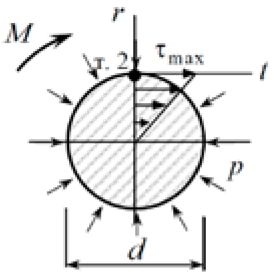
$\sigma_1 = \tau_{max} = 35\ \text{МПа}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau_{max} = -35\ \text{МПа}$.



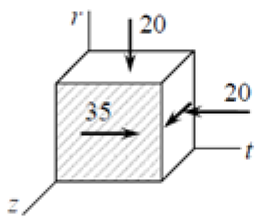
По теории Сен-Венана:

$$\sigma_{экв1} = \sigma_1 - \sigma_3 = 35 - (-35) = 70\ \text{МПа}.$$

Сечение II–II (внутри камеры)



НС в точке 2



Площадка r – главная, $\sigma_{гл} = \sigma_r = -20\ \text{МПа}$.

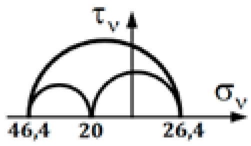
$$\sigma_{гл} = \frac{\sigma_z + \sigma_t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_t}{2}\right)^2 + \tau_{max}^2} = \frac{0 + (-20)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - (-20)}{2}\right)^2 + 35^2} = -10 \pm 36{,}4\ \text{МПа}.$$

$$\sigma_{гл}^{+} = 26{,}4\ \text{МПа}, \quad \sigma_{гл}^{-} = -46{,}4\ \text{МПа}.$$

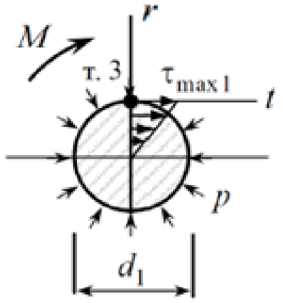
Присвоим индексы:

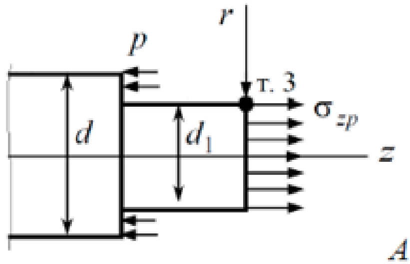
$\sigma_1 = 26{,}4\ \text{МПа}, \quad \sigma_2 = -20\ \text{МПа}, \quad \sigma_3 = -46{,}4\ \text{МПа}.$

$$\sigma_{экв2} = \sigma_1 - \sigma_3 = 26{,}4 - (-46{,}4) = 72{,}8\ \text{МПа}$$



Сечение III–III (внутри камеры, узкая часть вала)





$$A=\frac{\pi d^2}{4},\ A_1=\frac{\pi d_1^2}{4}.$$

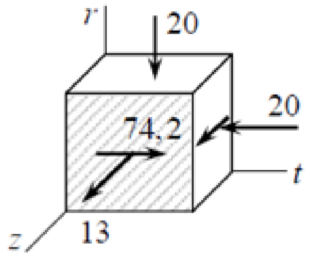
Действуя на уступы, ***давление вызывает растяжение узкого участка вала***.

$$\sum F_z=0,\quad \sigma_{zp}\cdot A_1-p\cdot(A-A_1)=0\ .$$

$$\sigma_{zp}=\frac{p\cdot(A-A_1)}{A_1}=\frac{p\cdot(d^2-d_1^2)}{d_1^2}=\frac{20\cdot(18^2-14^2)}{14^2}=13\ \text{МПа}.$$

От ***крутящего момента:*** $\tau_{\max 1}=\dfrac{M}{W_p}=\dfrac{16M}{\pi d_1^3}=\dfrac{16\cdot 40}{3{,}14\cdot 0{,}014^3}=74{,}2\ \text{МПа}.$

НС в точке 3



Площадка r – главная, $\sigma_{\text{гл}}=\sigma_r=-20$ МПа.

$$\sigma_{\text{гл}}=\frac{\sigma_z+\sigma_t}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_z-\sigma_t}{2}\right)^2+\tau_{\max 1}^2}=$$

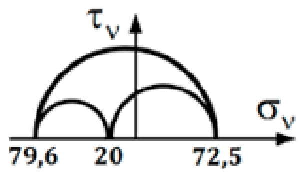
$$=\frac{13+(-20)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{13-(-20)}{2}\right)^2+74{,}2^2}=-3{,}5\pm 76{,}1\ \text{МПа}.$$

$$\sigma_{\text{гл}}^{+}=72{,}5\ \text{МПа},\quad \sigma_{\text{гл}}^{-}=-79{,}6\ \text{МПа}.$$

Присвоим индексы:

$\sigma_1=72{,}5$ МПа, $\sigma_2=-20$ МПа, $\sigma_3=-79{,}6$ МПа.

$\sigma_{\text{экв}3}=\sigma_1-\sigma_3=72{,}5-(-79{,}6)=152{,}1$ МПа .

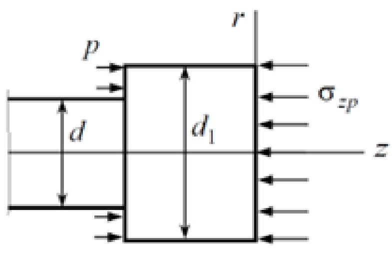


Наиболее опасна точка 3, $\sigma_{\text{экв}}=\max\{\sigma_{\text{экв}3}\}=152{,}1$ МПа.

Коэффициент запаса по пределу текучести $n_{\text{т}}=\dfrac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{экв}}}=\dfrac{240}{152{,}1}=1{,}57$.

Замечание: ***если вал имеет утолщение, то давление действуя на уступы, вызовет сжатие широкого участка вала***

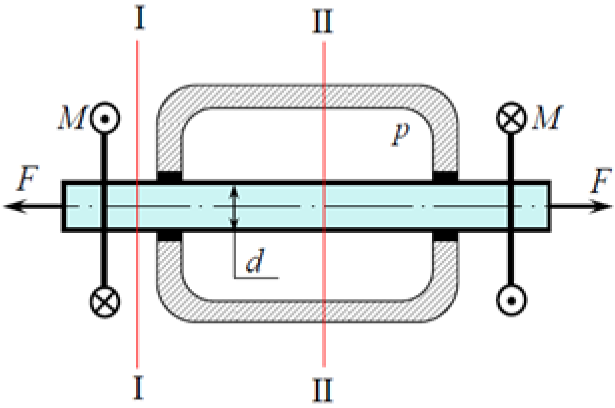
$$\sigma_{zp}=\frac{p\cdot(A_1-A)}{A},\ \text{где}\ \ A=\frac{\pi d^2}{4},\ A_1=\frac{\pi d_1^2}{4}.$$



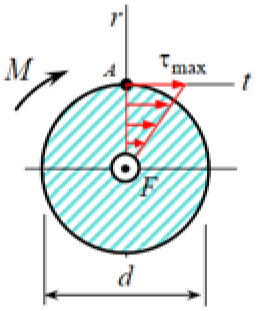
9. Задача Ламе
Частные случаи нагружения толстостенной трубы. Валик, нагруженный внешним давлением

Пример. Валик проходит через камеру, в которой поддерживается давление, а также подвергается действию сосредоточенных сил и моментов. Уплотнения камеры не оказывают влияние на НС валика. Для характерных участков валика исследовать НС в опасных точках. Определить $n_т$ – ?

Дано: d, p, $F = p\dfrac{\pi d^2}{8}$, $M = p\dfrac{\pi d^3}{8}$, $\sigma_{тр} = \dfrac{3}{4}\sigma_{тс}$.

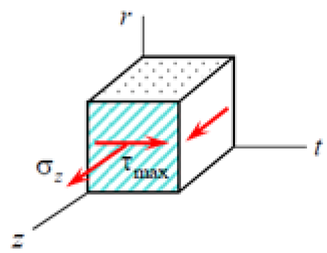


Сечение I-I (вне камеры)



точка *A*

(любая точка на поверхности валика)

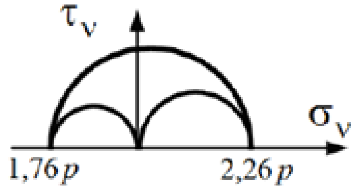


$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{p\pi d^2}{8}\cdot\frac{4}{\pi d^2} = \frac{p}{2}, \qquad \tau_{\max} = \frac{M}{W_p} = \frac{p\pi d^3}{8}\cdot\frac{16}{\pi d^3} = 2p.$$

Площадка r – главная, $\sigma_{\text{гл}} = \sigma_r = 0$.

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\max}^2} = \frac{p}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 + (2p)^2} = 0{,}25p \pm 2{,}01p$$

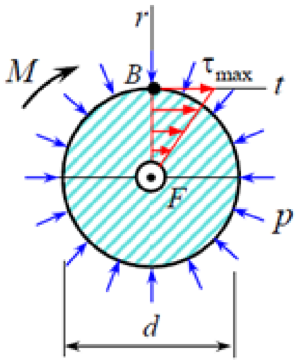
$$\sigma_1 = 2{,}26p,$$
$$\sigma_2 = 0,$$
$$\sigma_3 = -1{,}76p.$$



По теории Мора

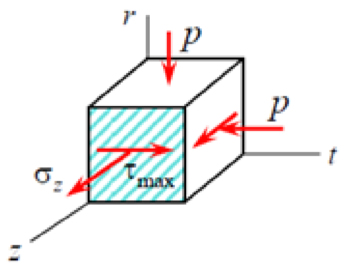
$$\sigma_{\text{экв}}^{A} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}}\sigma_3 = 2{,}26p - \frac{3}{4}\cdot(-1{,}76p) = 3{,}58p.$$

Сечение II-II (внутри камеры)



точка *B*

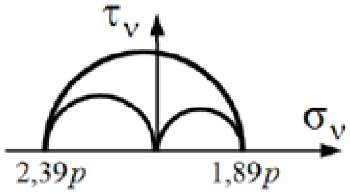
(любая точка на поверхности валика)



Площадка r – главная, $\sigma_{гл} = \sigma_r = -p$.

$$\sigma_{гл} = \frac{\sigma_z + \sigma_t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_t}{2}\right)^2 + \tau_{max}^2} = \frac{0,5p - p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,5p + p}{2}\right)^2 + (2p)^2} =$$
$$= -0,25p \pm 2,14p$$

$$\sigma_1 = 1,89p,$$
$$\sigma_2 = 0,$$
$$\sigma_3 = -2,39p.$$



$$\sigma_{экв}^B = \sigma_1 - \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}}\sigma_3 = 1,89p - \frac{3}{4}\cdot(-2,39p) = 3,68p.$$

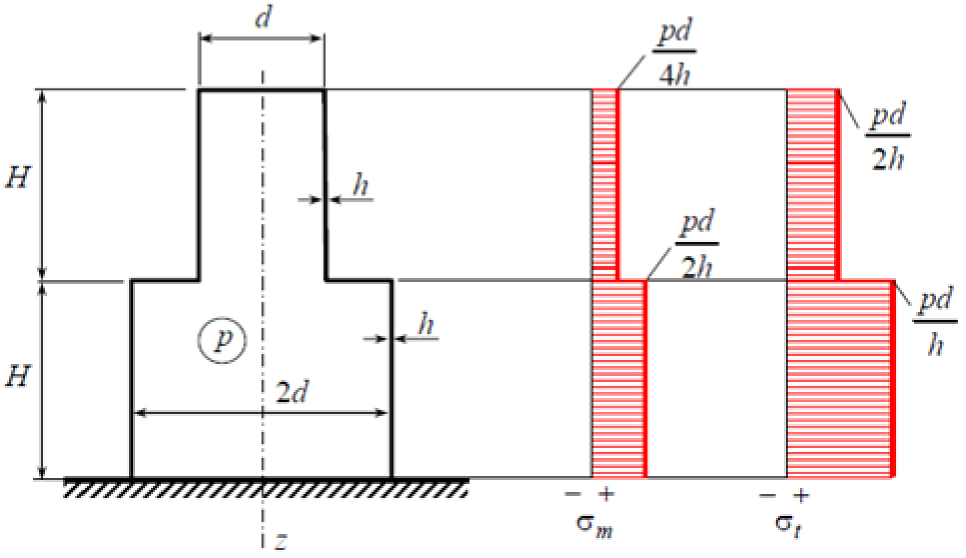
Так как $\sigma_{экв}^A < \sigma_{экв}^B$, наиболее опасной является точка B

$$\sigma_{экв} = \max\left\{\sigma_{экв}^B\right\} = 3,68p \quad \rightarrow \quad n_т = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{экв}} = \frac{\sigma_{тр}}{3,68p}.$$

10. Расчет осесимметричных оболочек по безмоментной теории

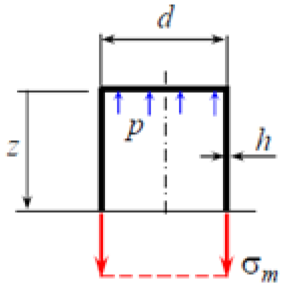
Пример 1. Запаянная тонкостенная цилиндрическая оболочка находится под действием внутреннего давления.

Дано: $H, h, p, d, \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}$. Найти $\sigma_m, \sigma_t, \sigma_{\text{экв}}$.



Оболочка состоит из двух участков. Найдем напряжения на каждом из них, рассекая цилиндры плоскостью, нормальной к оси симметрии и рассматривая часть оболочки свободную от опор.

Участок 1 ($0 \le z \le H$)



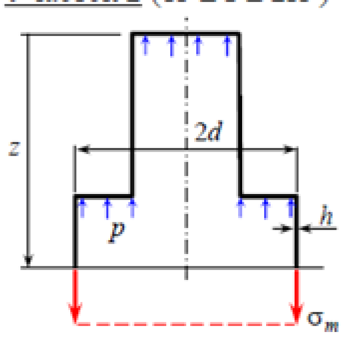
Спроецируем все силы на ось z

$$\sum F_z = 0,\quad \sigma_m \cdot \underbrace{\pi d \cdot h}_{\text{площадь поп. сечения}} = p \cdot \underbrace{\frac{\pi d^2}{4}}_{\text{площадь проекции}} \quad \to \quad \sigma_m = \frac{pd}{4h}.$$

Уравнение Лапласа (при $\rho_t = \dfrac{d}{2}$, $\rho_m = \infty$)

$$\cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h} \quad \to \quad \sigma_t = \frac{p}{h}\rho_t = \frac{pd}{2h}$$

Участок 2 ($H \le z \le 2H$)



$$\sum F_z = 0,\quad \sigma_m \cdot 2\pi d \cdot h = p \cdot \frac{\pi (2d)^2}{4},$$

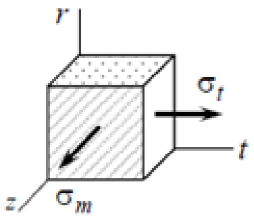
$$\sigma_m = \frac{pd}{2h}.$$

Уравнение Лапласа (при $\rho_t = d$, $\rho_m = \infty$)

$$\cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h} \quad \to \quad \sigma_t = \frac{pd}{h}.$$

Видно, что на участках окружное напряжение вдвое больше меридионального, то есть $\sigma_t = 2\sigma_m$ (как в котельных формулах).

Опасная точка – любая точка на 2-ом участке.

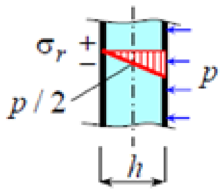


Главные напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{\pi d}{h}, \quad \sigma_2 = \sigma_m = \frac{\pi d}{2h}, \quad \sigma_3 = \sigma_r = 0.$$

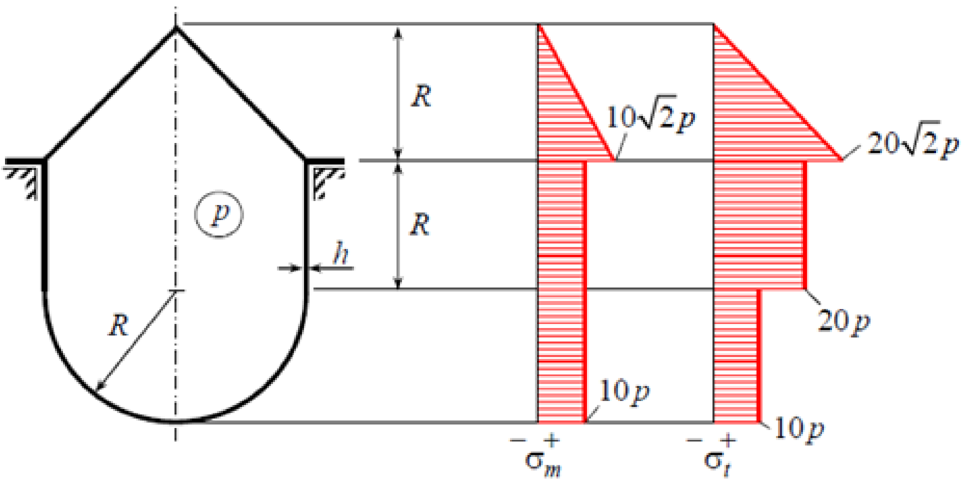
По теории Сен-Венана

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pd}{h} - 0 = \frac{pd}{h}.$$



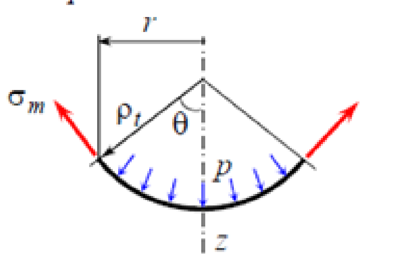
Замечание: напряжение надавливания между слоями оболочки σ_r (третье главное напряжение) значительно меньше двух других ($\sigma_r << \sigma_t, \sigma_t$), его полагают равным нулю.

Пример 2. Тонкостенный резервуар находится под действием внутреннего давления. Дано: $R, h = \dfrac{R}{20}, p, \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}$. Найти $\sigma_m, \sigma_t, \sigma_{\text{экв}}$.



<u>Сферическая часть</u>: $\rho_m = \rho_t = R$.

Нормальное коническое сечение



$$\sum F_z = 0, \quad \sigma_m \cdot \underbrace{2\pi r \cdot h}_{\text{площадь сечения}} \cdot \sin\theta = p \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{площадь проекции}}$$

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\rho_t \sin\theta}_{r} \cdot h \cdot \sin\theta = p \cdot \pi \cdot \underbrace{(\rho_t \sin\theta)}_{r}{}^2$$

$$\sigma_m \cdot 2h = p \cdot \rho_t$$

$$\sigma_m = \frac{p}{2h}\rho_t = \frac{pR}{2h} = \frac{p \cdot 20h}{2h} = 10p.$$

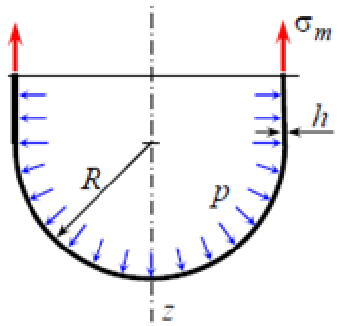
Из уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma_m}{R}+\frac{\sigma_t}{R}=\frac{p}{h} \quad \rightarrow \quad \sigma_t=\frac{pR}{h}-\frac{pR}{2h}=\frac{pR}{2h}=10p.$$

Для сферы под давлением: $\boxed{\sigma_m=\sigma_t=\frac{pR}{2h}}$.

Цилиндрическая часть: $\rho_m=\infty, \quad \rho_t=R$.

сечение, перпендикулярное оси z



Из уравнения Лапласа

$$\frac{\cancel{\sigma_m}}{\cancel{\infty}}+\frac{\sigma_t}{R}=\frac{p}{h} \quad \rightarrow \quad \sigma_t=\frac{pR}{h}=\frac{p\cdot 20h}{h}=20p.$$

Так как для цилиндра

$$\sigma_t=2\sigma_m \quad \rightarrow \quad \sigma_m=\frac{\sigma_t}{2}=\frac{pR}{2h}=10p.$$

Также

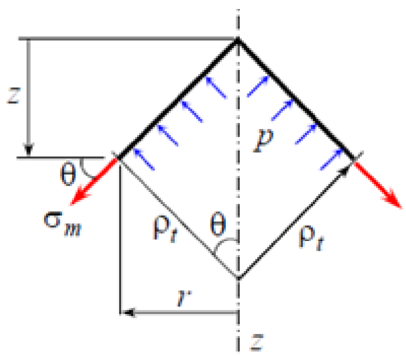
$$\sum F_z=0, \quad \sigma_m\cdot\underbrace{2\pi R\cdot h}_{\text{площадь сечения}}=p\cdot\underbrace{\pi R^2}_{\text{площадь проекции}}$$

$$\sigma_m=\frac{pR}{2h}=\frac{p\cdot 20h}{2h}=10p.$$

Цилиндрическая часть более опасна, чем сферическая!

Коническая часть: $\theta=45^\circ$, $r=z\cdot\mathrm{ctg}\theta$, $\rho_m=\infty$, $\quad \rho_t=\frac{r}{\sin\theta}=\frac{z\cdot\mathrm{ctg}\theta}{\sin\theta}=z\sqrt{2}$

Нормальное коническое сечение



$$\sum F_z=0, \quad \sigma_m\cdot\underbrace{2\pi r\cdot h}_{\text{площадь сечения}}\cdot\sin\theta=p\cdot\underbrace{\pi r^2}_{\text{площадь проекции}}$$

$$\sigma_m=\frac{pr}{2h\sin\theta}=\frac{p\cdot z\,\mathrm{ctg}\theta}{2h\sin\theta}=\frac{p}{\sqrt{2}h}z.$$

Из уравнения Лапласа

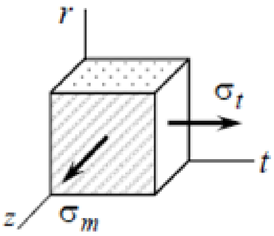
$$\frac{\sigma_m}{\infty}+\frac{\sigma_t}{\rho_t}=\frac{p}{h} \quad \rightarrow \quad \sigma_t=\frac{p}{h}\rho_t=\frac{\sqrt{2}p}{h}z.$$

Заметим, что от давления в конусе $\boxed{\sigma_t=2\sigma_m}$ (как и в цилиндре).

При $z=0$, $\sigma_m=0$, $\sigma_t=0$;

при $z=R$, $\sigma_m=\frac{pR}{\sqrt{2}h}=\frac{p\cdot 20h}{\sqrt{2}h}=10\sqrt{2}p$, $\sigma_t=\frac{\sqrt{2}pR}{h}=\frac{\sqrt{2}p\cdot 20h}{h}=20\sqrt{2}p$.

Из анализа эпюр, видно, что наиболее опасная точка у основания конуса



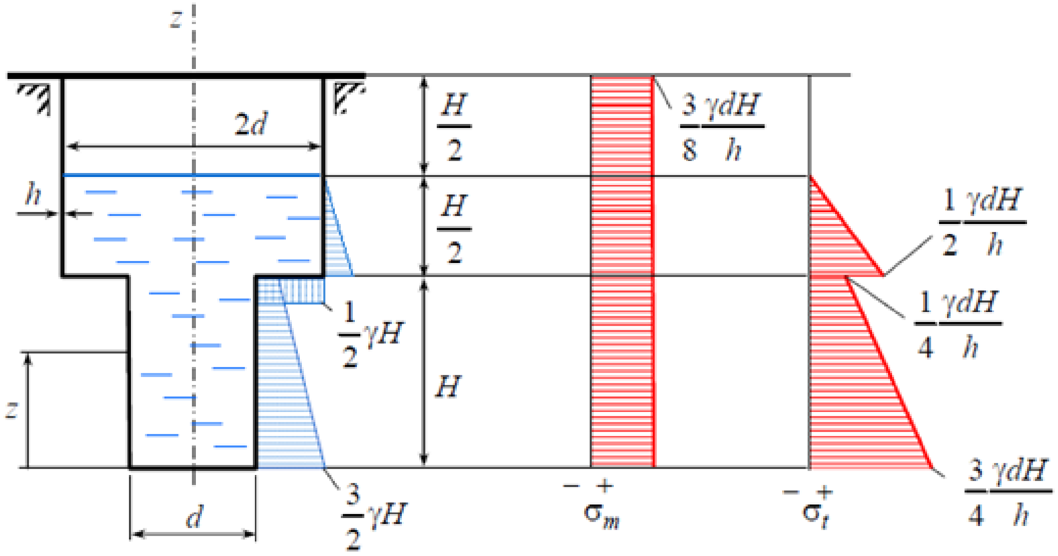
Главные напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma_t = 20\sqrt{2}\,p, \quad \sigma_2 = \sigma_m = 10\sqrt{2}\,p, \quad \sigma_3 = \sigma_r = 0.$$

По теории Сен-Венана

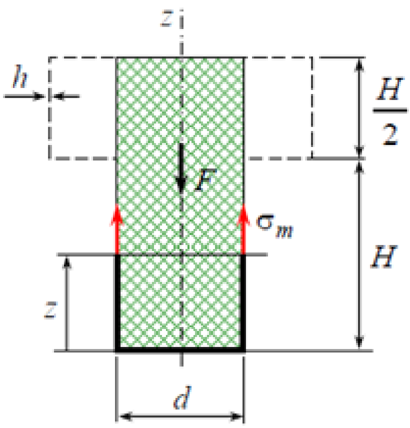
$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 20\sqrt{2}\,p - 0 = 20\sqrt{2}\,p.$$

Пример 3. Цилиндрическая оболочка наполнена жидкостью с удельным весом γ. Дано: $H, h, \gamma, d, \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}$. Найти $\sigma_m, \sigma_t, \sigma_{\text{экв}}$.



В отличие от газа давление жидкости (гидростатическое давление) изменяется по высоте по линейному закону.

Участок 1 ($0 \le z \le H$)



$$\sum F_z = 0,\quad \sigma_m \cdot \pi d \cdot h = F = \gamma \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{3}{2} H,$$

$$\sigma_m = \frac{3}{8}\frac{\gamma d H}{h}.$$

Имеем: $\rho_t = \dfrac{d}{2},\ \rho_m = \infty,\ p = \gamma\left(\dfrac{3}{2}H - z\right).$

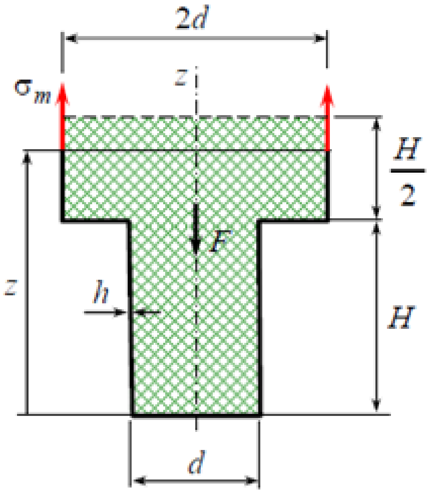
Из уравнения Лапласа

$$\cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h} \quad \to \quad \sigma_t = \frac{p}{h}\rho_t = \frac{\gamma d}{2h}\left(\frac{3}{2}H - z\right).$$

$$\text{При } z = 0,\quad \sigma_t = \frac{3}{4}\frac{\gamma d H}{h};$$

$$z = H,\quad \sigma_t = \frac{1}{4}\frac{\gamma d H}{h}.$$

Участок 2 ($H \le z \le \frac{3}{2}H$)



$$\sum F_z = 0,$$

$$\sigma_m \cdot \pi \cdot 2d \cdot h = F = \gamma\left[\frac{\pi(2d)^2}{4}\cdot\frac{H}{2} + \frac{\pi d^2}{4}\cdot H\right],$$

$$\sigma_m = \frac{3}{4}\frac{\gamma d H}{h}.$$

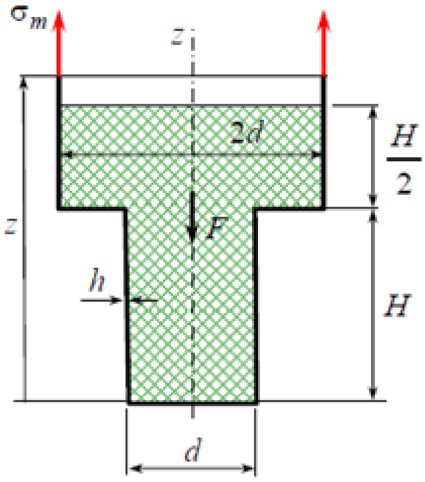
Имеем $\rho_t = d$, $\rho_m = \infty$, $p = \gamma\left(\frac{3}{2}H - z\right)$.

Из уравнения Лапласа

$$\cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h} \quad \rightarrow \quad \sigma_t = \frac{p}{h}\rho_t = \frac{\gamma d}{h}\left(\frac{3}{2}H - z\right).$$

При $z = H$, $\sigma_t = \frac{\gamma d H}{2h}$; $z = \frac{3}{2}H$, $\sigma_t = 0$.

Участок 3 ($\frac{3}{2}H \le z \le 2H$)



$$\sum F_z = 0,$$

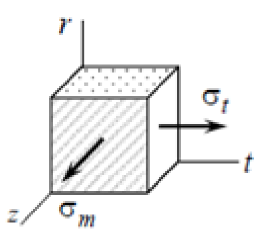
$$\sigma_m \cdot \pi \cdot 2d \cdot h = F = \gamma\left[\frac{\pi(2d)^2}{4}\cdot\frac{H}{2} + \frac{\pi d^2}{4}\cdot H\right],$$

$$\sigma_m = \frac{3}{4}\frac{\gamma d H}{h}.$$

Имеем $\rho_t = d$, $\rho_m = \infty$, $p = 0$ (нет гидростатического давления на стенки сосуда)

Из уравнения Лапласа

$$\cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \cancel{\frac{p}{h}} \quad \rightarrow \quad \sigma_t = 0.$$



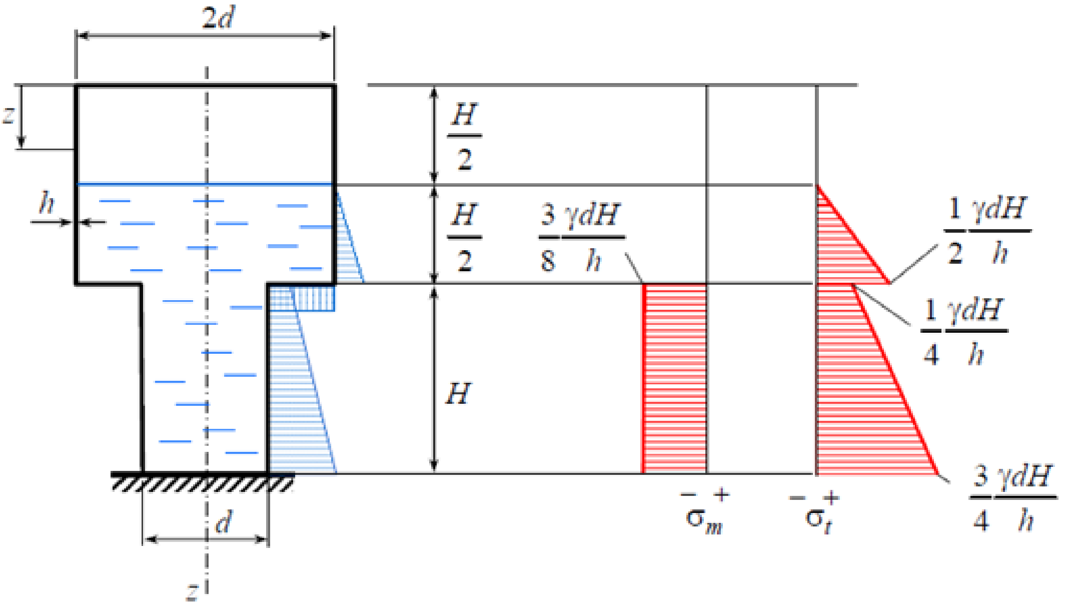
В произвольной точке

$$\sigma_1 = \max(\sigma_m, \sigma_t), \quad \sigma_2 = \min(\sigma_m, \sigma_t), \quad \sigma_3 = 0,$$

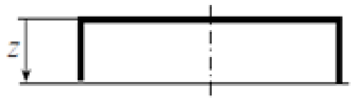
$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \max(\sigma_m, \sigma_t).$$

Опасное сечение при $z = 0$, $\sigma_{экв} = \frac{3}{4}\frac{\gamma d H}{h}.$

Пример 4. Цилиндрическая оболочка наполнена жидкостью с удельным весом γ. Дано: $H, h, \gamma, d, \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}$. Найти $\sigma_m, \sigma_t, \sigma_{\text{экв}}$.



<u>Участок 1</u> $\left(0 \le z \le \dfrac{H}{2}\right)$



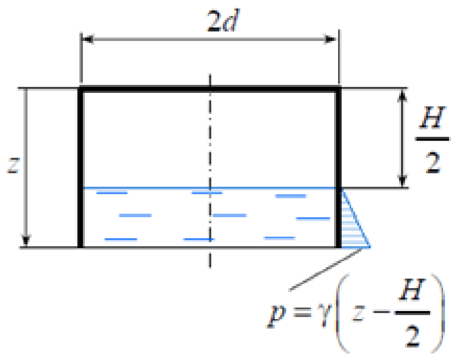
$$V = 0, F = 0 \;\rightarrow\; \sigma_m = 0.$$

Имеем: $\rho_t = d,\; \rho_m = \infty,\; p = 0$.

Из уравнения Лапласа

$$\cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \cancel{\frac{p}{h}} \quad \rightarrow \quad \sigma_t = 0.$$

<u>Участок 2</u> $\left(\dfrac{H}{2} \le z \le H\right)$



$$V = 0, F = 0 \;\rightarrow\; \sigma_m = 0.$$

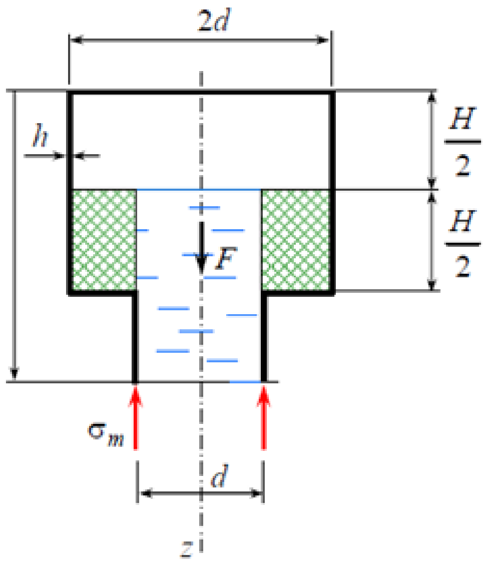
Имеем $\rho_t = d,\; \rho_m = \infty,\; p = \gamma\left(z - \dfrac{H}{2}\right)$.

Из уравнения Лапласа

$$\cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h} \quad \rightarrow \quad \sigma_t = \frac{p}{h}\rho_t = \frac{\gamma d}{h}\left(z - \frac{H}{2}\right).$$

При $z = \dfrac{H}{2}$, $\sigma_t = 0$; $\quad z = H$, $\sigma_t = \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma d H}{h}$.

Участок 3 ($H \le z \le 2H$)



$$\sum F_z = 0,$$

$$\sigma_m \cdot \pi d \cdot h = F = \gamma\left[\frac{\pi(2d)^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right]\cdot\frac{H}{2},$$

$$\sigma_m = \frac{3}{8}\frac{\gamma d H}{h} \quad (\textit{сжатие}).$$

Имеем $\rho_t = \dfrac{d}{2}$, $\rho_m = \infty$, $p = \gamma\left(z - \dfrac{H}{2}\right)$.

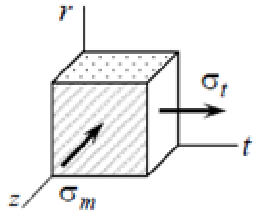
Из уравнения Лапласа

$$\cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h} \quad \to \quad \sigma_t = \frac{p}{h}\rho_t = \frac{\gamma d}{2h}\left(z - \frac{H}{2}\right).$$

$$\text{При } z = H, \quad \sigma_t = \frac{\gamma d H}{4h};$$

$$z = 2H, \quad \sigma_t = \frac{3}{4}\frac{\gamma d H}{h}.$$

Опасная точка в сечении при $z = 2H$



$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{3}{4}\frac{\gamma d H}{h}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_m = -\frac{3}{8}\frac{\gamma d H}{h}.$$

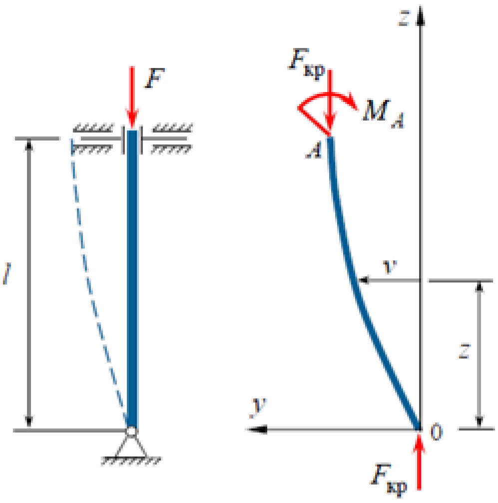
$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3}{4}\frac{\gamma d H}{h} - \frac{3}{8}\frac{\gamma d H}{h} = \frac{9}{8}\frac{\gamma d H}{h}.$$

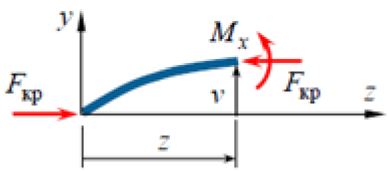
11. Устойчивость. Статический (точный) метод

11.1. Определение критической силы точным методом

Пример 1. Найти $F_{кр}$, μ – ?

Начало координат (точка 0) расположим на шарнирной опоре, где нет неизвестных реакций. Ось z направим вверх, ось y – влево. Получили первую четверть, положительный прогиб будет влево. Изгибающий момент M_x определяем методом сечений. Для удобства разворачиваем отсеченную часть, направляя ось y вверх и показываем ***положительный изгибающий момент, сжимающий верхние слои.***





$$EJ_{min} v'' = M_x ,$$
$$M_x = -F_{кр} v ,$$
$$EJ_{min} v'' = -F_{кр} v ,$$
$$EJ_{min} v'' + F_{кр} v = 0 .$$

Обозначим $k^2 = \dfrac{F_{кр}}{EJ_{min}}$ $\rightarrow$ $v'' + k^2 v = 0$, имеем однородное ДУ второго порядка.

Его решение:

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz , \quad v' = C_1 k \cos kz - C_2 k \sin kz .$$

Константы C_1, C_2 определяем из ГУ:

1) при $z = 0$, $v = 0$; $\rightarrow$ $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0$ $\rightarrow$ $C_2 = 0$;
2) при $z = l$, $v' = 0$; $\rightarrow$ $C_1 k \cdot \cos kl = 0$.

Константа $C_1 \neq 0$, иначе $v \equiv 0$, то есть нет изгиба, а мы рассматриваем криволинейную форму равновесия. Также $k \neq 0$, так как при $k = 0$ имеем либо $F_{кр} = 0$, либо $EJ_{min} = \infty$ (абсолютно жесткий стержень). Значит

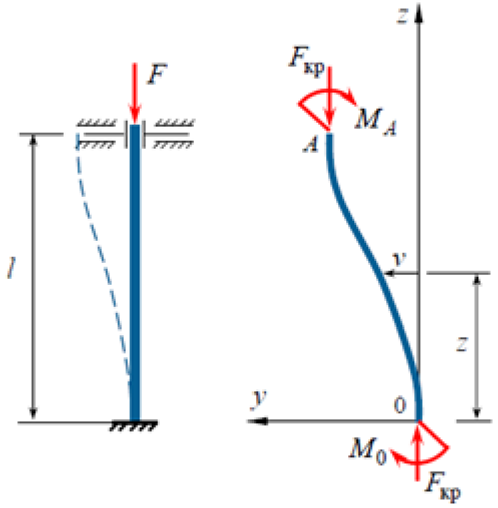
$$\cos kl = 0 \quad \rightarrow \quad kl = \frac{\pi}{2} \quad \textit{(наименьший корень)}$$

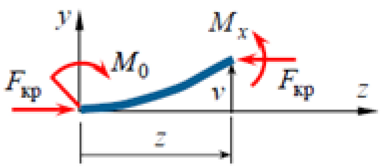
$$k^2 = \frac{\pi^2}{(2l)^2} = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} \quad \rightarrow F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(2l)^2} ,$$

откуда следует $\mu = 2$.

Пример 2. Найти $F_{кр}$, μ – ?

Начало координат в заделке, ось z – вверх, ось y – влево. Опорные моменты направляем в соответствии со сжатыми слоями изогнутой оси стержня (в верхней опоре сжаты слои справа, в нижней – слои слева). В методе сечений показываем положительный изгибающий момент, сжимающий верхние слои.





$$EJ_{\min}v'' = M_x,$$
$$M_x = M_0 - F_{кр}v,$$
$$EJ_{\min}v'' = M_0 - F_{кр}v,$$
$$EJ_{\min}v'' + F_{кр}v = M_0.$$

Обозначим $k^2 = \dfrac{F_{кр}}{EJ_{\min}}$ $\rightarrow$ $v'' + k^2 v = \dfrac{M_0}{EJ_{\min}} \cdot \dfrac{F_{кр}}{F_{кр}} = k^2 \dfrac{M_0}{F_{кр}}$ – *неоднородное ДУ.*

Решение этого неоднородного ДУ второго порядка состоит из общего решения и частного. Частное решение можно выбрать в виде правой части уравнения, деленной на коэффициент при v в левой части, то есть на k^2. Тогда

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + \underbrace{\frac{M_0}{F_{кр}}}_{v^*\text{–частное решение}}, \qquad v' = C_1 k \cos kz - C_2 k \sin kz.$$

Для определения констант C_1, C_2, M_0 запишем ГУ:

1) при $z = 0$, $v = 0$; $\rightarrow$ $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \dfrac{M_0}{F_{кр}}$ $\rightarrow$ $C_2 = -\dfrac{M_0}{F_{кр}}$;

2) при $z = 0$, $v' = 0$; $\rightarrow$ $C_1 k \cdot 1 - C_2 k \cdot 0 = 0$ $\rightarrow$ $C_1 = 0$;

3) при $z = l$, $v' = 0$; $\rightarrow$ $-C_2 k \sin kl = 0$.

Очевидно, что

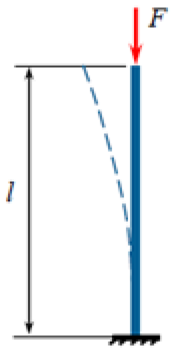
$$\sin kl = 0 \quad \rightarrow \quad kl = \pi \quad \textit{(наименьший корень)}$$

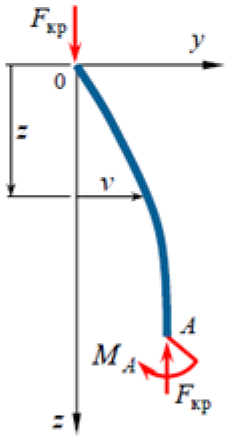
$$k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} \quad \rightarrow F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2},$$

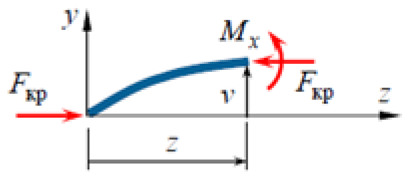
откуда следует $\mu = 1$.

<u>Пример 3.</u> Найти $F_{кр}$, μ – ?

Начало координат – на свободном конце, ось z – вниз, ось y – вправо. Получили первую четверть, положительный прогиб будет вправо.







$$EJ_{min}v'' = M_x,$$
$$M_x = -F_{кр}v,$$
$$EJ_{min}v'' = -F_{кр}v,$$
$$EJ_{min}v'' + F_{кр}v = 0.$$

$$k^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} \quad \rightarrow \quad v'' + k^2 v = 0,$$ *однородное ДУ второго порядка.*

Его решение:

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz, \quad v' = C_1 k \cos kz - C_2 k \sin kz.$$

ГУ:

1) при $z = 0$, $v = 0$; $\rightarrow$ $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0$ $\rightarrow$ $C_2 = 0$;
2) при $z = l$, $v' = 0$; $\rightarrow$ $C_1 k \cdot \cos kl = 0$.

Так как $C_1 \neq 0$, $k \neq 0$, значит

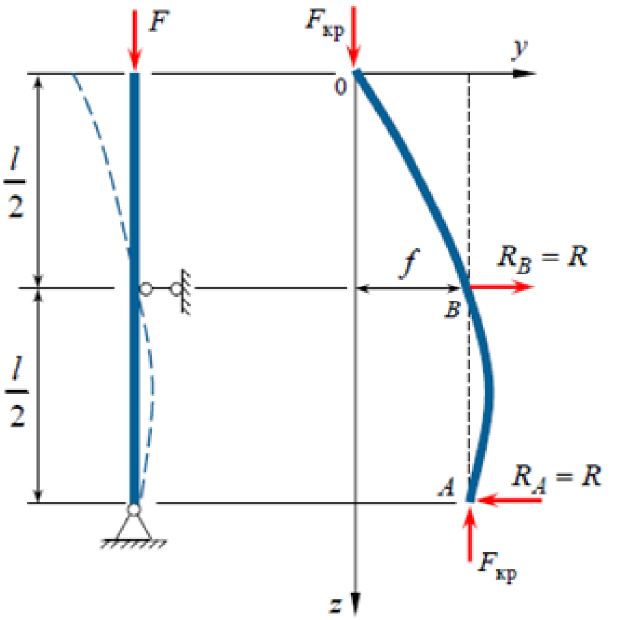
$$\cos kl = 0 \quad \rightarrow \quad kl = \frac{\pi}{2}$$ *(наименьший корень)*

$$k^2 = \frac{\pi^2}{(2l)^2} = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} \quad \rightarrow F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(2l)^2},$$

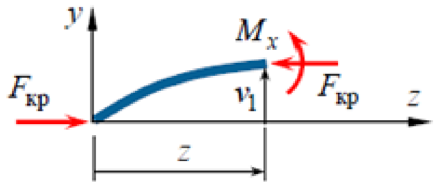
откуда следует $\mu = 2$.

<u>Пример 4.</u> Найти $F_{кр}$, μ – ?

Начало координат – на свободном конце, ось z – вниз, ось y – вправо. Стержень имеет два участка.



Участок 1 ($0 \le z \le \frac{l}{2}$)



$$EJ_{\min} v_1'' = M_x ,$$

$$M_x = -F_{кр} v_1 ,$$

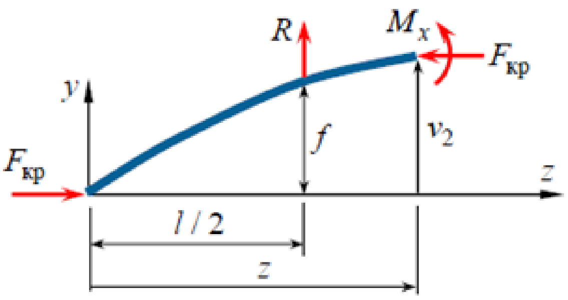
$$EJ_{\min} v_1'' + F_{кр} v_1 = 0 .$$

$$k^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} \quad \to \quad v_1'' + k^2 v_1 = 0 ,$$

Решение однородного ДУ

$$v_1 = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz , \quad v_1' = C_1 k \cos kz - C_2 k \sin kz .$$

Участок 2 ($\frac{l}{2} \le z \le l$)



$$EJ_{\min} v_2'' = M_x ,$$

$$M_x = R\left(z - \frac{l}{2}\right) - F_{кр} v_2 ,$$

$$EJ_{\min} v_1'' + F_{кр} v_1 = R\left(z - \frac{l}{2}\right).$$

$$v_2'' + \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} v_2 = \frac{R}{EJ_{\min}}\left(z - \frac{l}{2}\right).$$

Определим R из условия равновесия всего стержня в изогнутом состоянии

$$\sum m_A = 0, \quad F_{кр} f - R\frac{l}{2} = 0 \quad \to \quad R = \frac{2f}{l} F_{кр} ,$$

тогда правая часть уравнения примет вид

$$\frac{R}{EJ_{\min}}\left(z - \frac{l}{2}\right) = \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} \frac{2f}{l}\left(z - \frac{l}{2}\right) = k^2 f\left(\frac{2z}{l} - 1\right)$$

Таким образом

$$v_2'' + k^2 v_2 = k^2 f\left(\frac{2z}{l} - 1\right).$$

Решение неоднородного ДУ

$$v_2 = C_3 \sin kz + C_4 \cos kz + \underbrace{f\left(\frac{2z}{l} - 1\right)}_{v^*\text{–частное решение}}, \qquad v_2' = C_3 k \cos kz - C_4 k \sin kz + \frac{2f}{l}.$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4, f необходимо записать пять ГУ.

Это будут кинематические ГУ в опорах, а также ***условия стыковки участков*** стержня при $z = \frac{l}{2}$, так как в этой точке упругая линия должна быть гладкой:

1) при $z = 0$, $v_1 = 0$; $\rightarrow$ $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0$ $\rightarrow$ $C_2 = 0$;

2) при $z = \frac{l}{2}$, $v_1 = f$; $\rightarrow$ $C_1 \sin\frac{kl}{2} = f$;

3) при $z = \frac{l}{2}$, $v_2 = f$; $\rightarrow$ $C_3 \sin\frac{kl}{2} + C_4 \cos\frac{kl}{2} + \cancel{f\left(\frac{2}{l}\cdot\frac{l}{2} - 1\right)} = f$;

4) при $z = l$, $v_2 = f$; $\rightarrow$ $C_3 \sin kl + C_4 \cos kl + f\left(\frac{2}{l} l - 1\right) = f$,

$$C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0;$$

5) при $z = \frac{l}{2}$, $v_1' = v_2'$; $\rightarrow$ $C_1 k \cos kl = C_3 k \cos kl - C_4 k \sin kl + \frac{2f}{l}$.

В итоге имеем СЛАУ относительно четырех неизвестных C_1, C_3, C_4, f

$$\begin{pmatrix} \sin\frac{kl}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sin\frac{kl}{2} & \cos\frac{kl}{2} & -1 \\ 0 & \sin kl & \cos kl & 0 \\ k\cos kl & -k\cos kl & k\sin kl & -\frac{2}{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Она имеет отличное от нуля решение, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных равен нулю. Раскрыв определитель, получим ***трансцендентное уравнение***, которое решается только численно.

Наименьший корень этого уравнения будет равен $kl = 2{,}331$, тогда

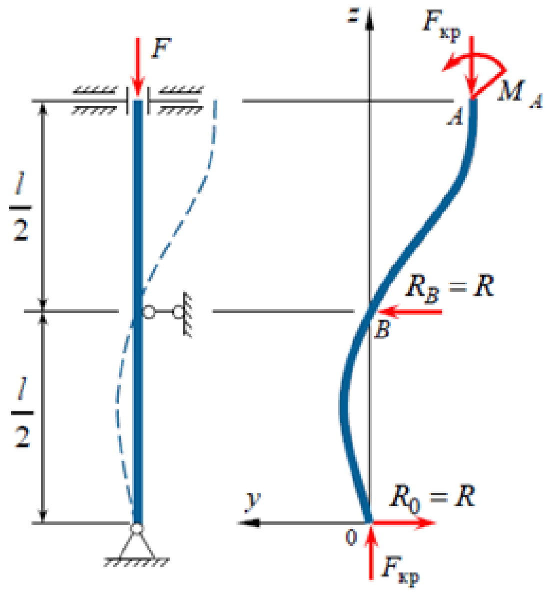
$$k^2 = \frac{2{,}331^2}{l^2} = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} \quad \rightarrow F_{кр} = \frac{2{,}331^2 EJ_{min}}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{\left(\frac{\pi}{2{,}331}\right)^2 l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(1{,}347 l)^2}$$

Таким образом, $\mu = \frac{\pi}{2{,}331} = 1{,}347$.

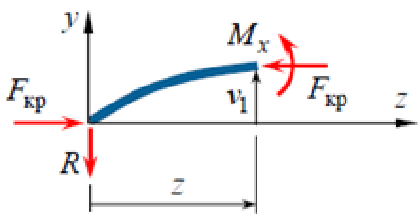
Как видим, определение $F_{кр}$ точным методом достаточно громоздко.

Пример 5. Получить ДУ для определения $F_{кр}$ и записать ГУ к ним.

Начало координат в нижнем шарнире, ось z – вверх, ось y – влево. Так как кривизна на нижнем участке отрицательная, то R_0 должна быть направлена вправо, чтобы давать сжатые слои справа, R_B найдем из условия $\sum F_y = 0$.



Участок 1 $(0 \le z \le \frac{l}{2})$



$$EJ_{\min} v_1'' = M_x,$$

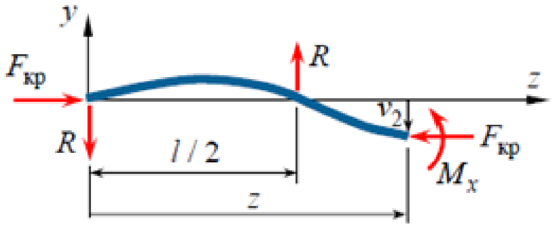
$$M_x = -F_{кр} v_1 - Rz,$$

$$EJ_{\min} v_1'' + F_{кр} v_1 = -Rz.$$

$$v_1'' + \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} v_1 = -\frac{R}{EJ_{\min}} z \cdot \frac{F_{кр}}{F_{кр}}$$

$$k^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} \quad \rightarrow \quad v_1'' + k^2 v_1 = -k^2 \frac{R}{F_{кр}} z. \qquad v_1 = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz \underbrace{- \frac{R}{F_{кр}} z}_{v^*\text{–частное решение}}.$$

Участок 2 $(\frac{l}{2} \le z \le l)$



$$EJ_{\min} v_2'' = M_x,$$

$$M_x = F_{кр} \cdot \underbrace{(-v_2)}_{\text{прогиб имеет знак!}} - Rz + R\left(z - \frac{l}{2}\right) =$$

$$= -F_{кр} v_2 - R\frac{l}{2}$$

$$v_2'' + \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} v_2 = -\frac{R}{EJ_{\min}} \cdot \frac{l}{2} \quad \rightarrow \quad v_1'' + k^2 v_1 = -k^2 \frac{R}{F_{кр}} \cdot \frac{l}{2}$$

$$v_2 = C_3 \sin kz + C_4 \cos kz \underbrace{- \frac{R}{F_{кр}} \cdot \frac{l}{2}}_{v^*\text{–частное решение}}.$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4, R необходимо записать пять ГУ:

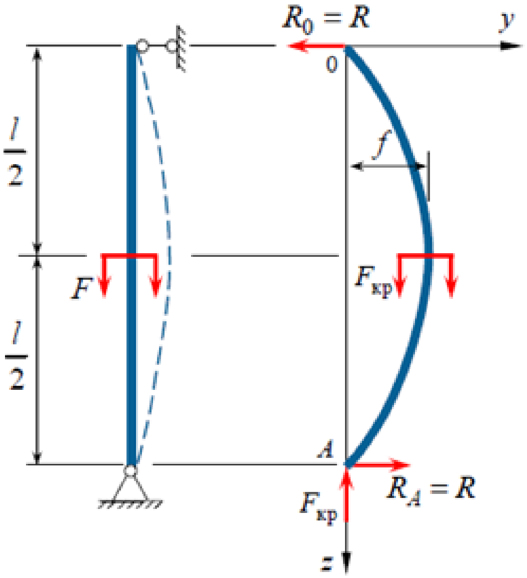
1) при $z = 0$, $v_1 = 0$; 2) при $z = \frac{l}{2}$, $v_1 = 0$; 3) при $z = \frac{l}{2}$, $v_2 = 0$;

4) при $z = \frac{l}{2}$, $v_1' = v_2'$; 5) при $z = l$, $v_2' = 0$.

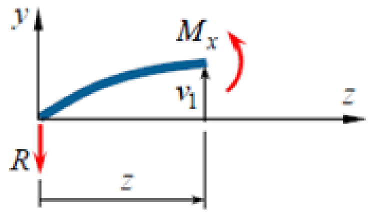
Пример 6. Получить ДУ для определения $F_{кр}$ и записать ГУ к ним.

В ряде задач сила может быть приложена в промежуточном сечении. Начало координат – на верхнем конце, ось z – вниз, ось y – вправо. Из условия равновесия всего стержня в изогнутом состоянии

$$\sum m_A = 0, \quad Rl - F_{кр} f = 0 \quad \rightarrow \quad R = F_{кр}\frac{f}{l},$$



Участок 1 $\left(0 \le z \le \frac{l}{2}\right)$



$$EJ_{min} v_1'' = M_x,$$

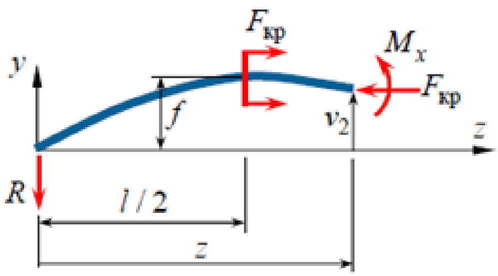
$$M_x = -Rz = -F_{кр}\frac{f}{l}z,$$

$$EJ_{min} v_1'' = -F_{кр}\frac{f}{l}z$$

$$v_1'' = -\frac{F_{кр}}{EJ_{min}}\frac{f}{l}z \quad \rightarrow \quad k^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} \quad \rightarrow \quad v_1'' = -k^2\frac{f}{l}z.$$

$$v_1' = C_1 - k^2\frac{f}{l}\cdot\frac{z^2}{2}, \quad v_1 = C_1 z + C_2 - k^2\frac{f}{l}\cdot\frac{z^3}{6}$$

Участок 2 $\left(\frac{l}{2} \le z \le l\right)$



$$EJ_{min} v_2'' = M_x,$$

$$M_x = F_{кр}(f - v_2) - Rz = F_{кр}(f - v_2) - F_{кр}\frac{f}{l}z =$$

$$= F_{кр} f\left(1 - \frac{z}{l}\right) - F_{кр} v_2$$

$$v_2'' + \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} v_2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} f\left(1 - \frac{z}{l}\right) \quad \rightarrow \quad v_1'' + k^2 v_1 = -k^2 f\left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

$$v_2 = C_3 \sin kz + C_4 \cos kz + \underbrace{f\left(1 - \frac{z}{l}\right)}_{v^*\text{–частное решение}}.$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4, f необходимо записать пять ГУ:

$$1)\ \text{при}\ z=0,\ v_1=0;\quad 2)\ \text{при}\ z=\frac{l}{2},\ v_1=f;\quad 3)\ \text{при}\ z=\frac{l}{2},\ v_2=f;$$

$$4)\ \text{при}\ z=\frac{l}{2},\ v_1'=v_2';\quad 5)\ \text{при}\ z=l,\ v_2=0.$$

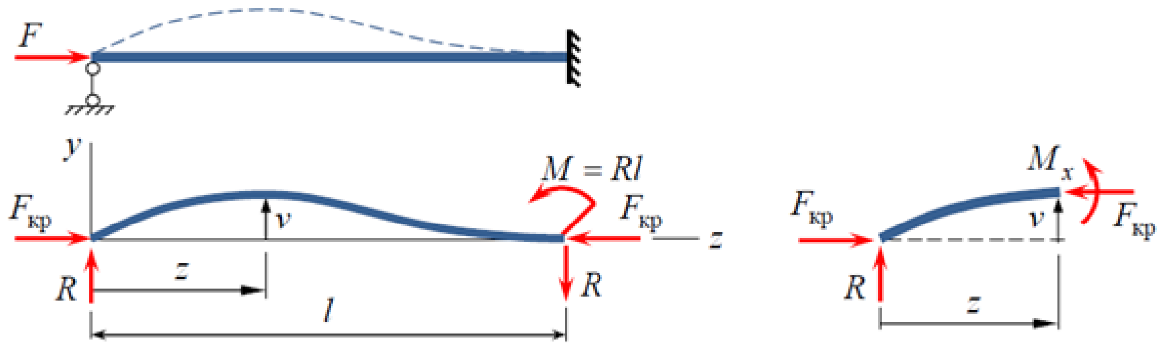
Точное решение данной задачи $kl=4,32$ (наименьший корень), тогда

$$k^2=\frac{4,32^2}{l^2}=\frac{F_{\text{кр}}}{EJ_{\min}}\quad\rightarrow F_{\text{кр}}=\frac{4,32^2 EJ_{\min}}{l^2}=\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\left(\frac{\pi}{4,32}\right)^2 l^2}=\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(0,726l)^2}$$

Таким образом, $\mu=\dfrac{\pi}{4,32}=0,726.$

11.2. Устойчивость равновесия сжатых стержней. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня

Пример. Найти $F_{кр}$, μ – ?



$$EJ_{\min} v'' = M_x = -F_{кр} v + R z \qquad v'' + \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} v = \frac{R}{EJ_{\min}} z \cdot \frac{F_{кр}}{F_{кр}}.$$

$$k^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} \quad \to \quad v'' + k^2 v = k^2 \frac{R}{F_{кр}} z .$$

Решение: $v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + \underbrace{\frac{R}{F_{кр}} z}_{v^*\text{–частное решение}}, \qquad v' = C_1 k \cos kz - C_2 k \sin kz + \frac{R}{F_{кр}}$

Имеем три неизвестные величины: C_1, C_2 и R. Для их определения имеем три ГУ: *в шарнире отсутствует прогиб, в заделке – прогиб и угол поворота.*

1) при $z = 0,\ v = 0;\ \to\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{R}{F_{кр}} \cdot 0 = 0\ \to\ C_2 = 0.$

$$\left.\begin{aligned} &2)\ \text{при } z = l,\ v = 0;\ \to\ C_1 \cdot \sin kl + \frac{R}{F_{кр}} l = 0. \\ &3)\ \text{при } z = l,\ v' = 0;\ \to\ C_1 k \cdot \cos kl + \frac{R}{F_{кр}} = 0. \end{aligned}\right\} (*)$$

Система однородных уравнений (*) имеет отличное от нуля решение, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных равен нулю

$$\sin kl \cdot \frac{1}{F_{кр}} - \frac{kl}{F_{кр}} \cdot \cos kl = 0,$$

$$F_{кр} \neq 0, \quad \to \quad \sin kl - kl \cdot \cos kl = 0 \quad \to \quad \mathrm{tg} kl = kl .$$

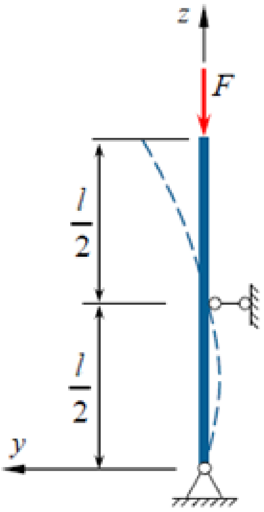
Получили ***трансцендентное уравнение***, которое решается численно. ***Наименьший корень*** этого уравнения равен $kl = 4,49$, тогда

$$k^2 = \frac{4,49^2}{l^2} = \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} \quad \to F_{кр} = \frac{4,49^2 EJ_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\left(\frac{\pi}{4,49}\right)^2 l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(0,7l)^2}$$

Таким образом, $\mu = \dfrac{\pi}{4,49} \approx 0,7$.

11.3. Устойчивость. Энергетический метод определения критической нагрузки

Пример 1. Найти $F_{кр}$, μ.



ГУ:

1) при $z=0$, $v=0$;
2) при $z=0$, $v''=0$,
3) при $z=l/2$, $v=0$,
4) при $z=l$, $v''=0$.

Имеем **четыре** ГУ, берем функцию прогибов в виде полинома ***четвёртой*** степени

$$v(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4,$$

$$v'=a_1+2a_2z+3a_3z^2+4a_4z^3,$$

$$v''=2a_2+6a_3z+12a_4z^2$$

Из 1) $\rightarrow$ $a_0=0$,

Из 2) $\rightarrow$ $a_2=0$,

Из 4) $\rightarrow$ $0=6a_3l+12a_4l^2$ $\rightarrow$ $a_3=-2a_4l$.

Из 3) $\rightarrow$ $0=a_1\cdot\dfrac{l}{2}+a_3\cdot\dfrac{l^3}{8}+a_4\cdot\dfrac{l^4}{16}$ $\rightarrow$ $a_1=-a_3\dfrac{l^2}{4}-a_4\cdot\dfrac{l^3}{8}=a_4l^3\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{3}{8}a_4l^3.$

Тогда функция, удовлетворяющая ГУ, имеет вид

$$v=a_4\left(\frac{3}{8}l^3z-2lz^3+z^4\right),$$

$$v'=a_4\left(\frac{3}{8}l^3-6lz^2+4z^3\right),$$

$$v''=a_4(-12lz+12z^2)=12a_4(z^2-lz).$$

Интеграл в числителе

$$\int_0^l EJ_{\min}(v'')^2dz = EJ_{\min}\int_0^l \left(12a_4(z^2-lz)\right)^2dz = EJ_{\min}\int_0^l 144a_4^2\left(z^4-2lz^3+l^2z^2\right)dz =$$

$$=144EJ_{\min}a_4^2\left(\frac{z^5}{5}-2l\frac{z^4}{4}+l^2\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^l = 144EJ_{\min}a_4^2l^5\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=144EJ_{\min}a_4^2l^5\cdot\frac{1}{30}=4{,}8EJ_{\min}a_4^2l^5$$

Интеграл в знаменателе

$$\int_0^l (v')^2dz = \int_0^l\left[a_4\left(\frac{3}{8}l^3-6lz^2+4z^3\right)\right]^2dz =$$

$$=\int_0^l a_4^2\left(\frac{9}{64}l^6+36l^2z^4+16z^6-\frac{9}{2}l^4z^2+3l^3z^3-48lz^5\right)dz =$$

$$=a_4^2\left(\frac{9}{64}l^6z+36l^2\frac{z^5}{5}+16\frac{z^7}{7}-\frac{9}{2}l^4\frac{z^3}{3}+3l^3\frac{z^4}{4}-48l\frac{z^6}{6}\right)\Bigg|_0^l =$$

$$=a_4^2\cdot l^7\left(\frac{9}{64}+\frac{36}{5}+\frac{16}{7}-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-8\right)=0{,}8767a_4^2l^7$$

Критическая нагрузка

$$F_{\text{кр}}=\frac{4{,}8EJ_{\min}a_4^2l^5}{0{,}8767a_4^2l^7}=5{,}475\frac{EJ_{\min}}{l^2}.$$

Приводя к формуле Эйлера

$$F_{\text{кр}}=5{,}475\frac{EJ_{\min}}{l^2}\cdot\frac{\pi^2}{\pi^2}=\frac{\pi^2EJ_{\min}}{\left(\frac{\pi}{\sqrt{5{,}475}}l\right)^2},$$

получим

$$\mu=\frac{\pi}{\sqrt{5{,}475}}\approx 1{,}34.$$

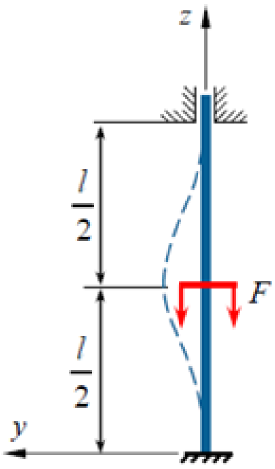
Точный результат для данной задачи (смотри предыдущий семинар)

$$F_{\text{кр}}=\frac{2{,}331^2EJ_{\min}}{l^2}=\frac{5{,}434EJ_{\min}}{l^2},\ \ \mu=1{,}347,$$

погрешность составила 0,7 %.

Энергетический метод дает завышенное значение $F_{\text{кр}}$ и заниженное значение μ по сравнению с точным методом.

Пример 2. Найти $F_{кр}$, μ.



ГУ:

1) при $z = 0$, $v = 0$,
2) при $z = 0$, $v' = 0$,
3) при $z = l$, $v = 0$,
4) при $z = l$, $v' = 0$.

Берем полином четвёртой степени

$$v(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4,$$

$$v' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3,$$

$$v'' = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2.$$

Из 1) $\rightarrow$ $a_0 = 0$,

Из 2) $\rightarrow$ $a_1 = 0$.

Из 3) $\rightarrow$ $0 = a_2 l^2 + a_3 l^3 + a_4 l^4$,

Из 4) $\rightarrow$ $0 = 2a_2 l + 3a_3 l^2 + 4a_4 l^3$.

Последние два уравнения содержат три неизвестных a_2, a_3, a_4. Найти их нельзя, но можно выразить a_2, a_3 через a_4.

Из 3) поделив на l^2: $a_2 = -a_3 l - a_4 l^2$,

из 4) поделив на $2l$: $a_2 = -\dfrac{3}{2} a_3 l - 2a_4 l^2$,

приравнивая, получим

$$a_3 l + a_4 l^2 - \frac{3}{2} a_3 l - 2a_4 l^2 = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} a_3 l = a_4 l^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = -2a_4 l,$$

$$a_2 = 2a_4 l^2 - a_4 l^2 = a_4 l^2.$$

Функция прогибов, удовлетворяющая ГУ, примет вид

$$v = a_4 \left(l^2 z^2 - 2lz^3 + z^4 \right),$$

$$v' = a_4 \left(2l^2 z - 6lz^2 + 4z^3 \right) = 2a_4 \left(l^2 z - 3lz^2 + 2z^3 \right),$$

$$v'' = 2a_4 \left(l^2 - 6lz + 6z^2 \right),$$

Интеграл в числителе

$$\int_0^l EJ_{\min} (v'')^2 dz = EJ_{\min} \int_0^l \left[2a_4 \left(l^2 - 6lz + 6z^2 \right) \right]^2 dz =$$

$$= 4EJ_{\min} a_4^2 \int_0^l \left(l^2 - 6lz + 6z^2 \right)^2 dz =$$

$$= 4EJ_{\min} a_4^2 \int_0^l \left(l^4 + 36l^2z^2 + 36z^4 - 12l^3z + 12l^2z^2 - 72lz^3 \right) dz =$$

$$= 4EJ_{\min} a_4^2 \left(l^4 z + 36l^2 \frac{z^3}{3} + 36\frac{z^5}{5} - 12l^3 \frac{z^2}{2} + 12l^2 \frac{z^3}{3} - 72l \frac{z^4}{4} \right) \Bigg|_0^l =$$

$$= 4EJ_{\min} a_4^2 l^5 \left(1 + 12 + \frac{36}{5} - 6 + 4 - 18 \right) = 0{,}8EJ_{\min} a_4^2 l^5.$$

Интеграл в знаменателе

$$\int_0^{\overbrace{l/2}^{\text{длина участка стержня, сжимаемого силой}}} (v')^2 dz = \int_0^{l/2} \left[2a_4 \left(l^2z - 3lz^2 + 2z^3 \right) \right]^2 dz = 4a_4^2 \int_0^{l/2} \left(l^2z - 3lz^2 + 2z^3 \right)^2 dz =$$

$$= 4a_4^2 \int_0^{l/2} \left(l^4z^2 + 9l^2z^4 + 4z^6 - 6l^3z^3 + 4l^2z^4 - 12lz^5 \right) dz =$$

$$= 4a_4^2 \left(l^4 \frac{z^3}{3} + 9l^2 \frac{z^5}{5} + 4\frac{z^7}{7} - 6l^3 \frac{z^4}{4} + 4l^2 \frac{z^5}{5} - 12l \frac{z^6}{6} \right) \Bigg|_0^{l/2} =$$

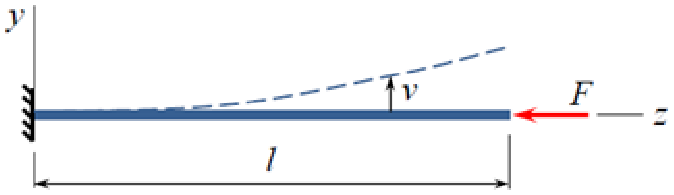
$$= 4a_4^2 l^7 \left(\frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{9}{5 \cdot 32} + \frac{4}{7 \cdot 128} - \frac{6}{4 \cdot 16} + \frac{4}{5 \cdot 32} - \frac{12}{6 \cdot 64} \right) = 9{,}5238 \cdot 10^{-3} a_4^2 l^7$$

Критическая нагрузка

$$F_{\text{кр}} = \frac{0{,}8 a_4^2 l^5 EJ_{\min}}{9{,}5238 \cdot 10^{-3} a_4^2 l^7} \approx 84 \frac{EJ_{\min}}{l^2} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\left(\frac{\pi}{\sqrt{84}} l \right)^2},$$

где $\mu = \frac{\pi}{\sqrt{84}} \approx 0{,}343$.

Пример. Найти $F_{кр}$, μ.



При использовании энергетического метода ***начало координат всегда помещается в закрепленном сечении***.

<u>1 вариант. Учтем только кинематические ГУ (условия закрепления)</u>

ГУ: 1) при $z=0$, $v=0$; 2) при $z=0$, $v'=0$,

их два, значит берем полином второй степени

$$v(z)=a_0+a_1z+a_2z^2, \quad v'=a_1+2a_2z.$$

Из 1) $\rightarrow$ $0=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0$ $\rightarrow$ $a_0=0$,

Из 2) $\rightarrow$ $0=a_1+2a_2\cdot 0$ $\rightarrow$ $a_1=0$.

Значит функция, удовлетворяющая кинематическим ГУ

$$v=a_2z^2, \quad v'=2a_2z, \quad v''=2a_2.$$

Числитель

$$\int_0^l EJ_{\min}(v'')^2dz=EJ_{\min}\int_0^l(2a_2)^2dz=EJ_{\min}\cdot 4a_2^2\cdot z\Big|_0^l=4a_2^2 l\,EJ_{\min}.$$

Знаменатель

$$\int_0^l(v')^2dz=\int_0^l(2a_2z)^2dz=\cdot 4a_2^2\cdot\frac{z^3}{3}\Bigg|_0^l=\frac{4}{3}a_2^2l^3$$

Критическая нагрузка

$$F_{кр}=\frac{4\cancel{a_2^2}\,l\,EJ_{\min}}{\frac{4}{3}\cancel{a_2^2}\,l^3}=\frac{3EJ_{\min}}{l^2}=\frac{\pi^2EJ_{\min}}{\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}l\right)^2},$$

где $\mu=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\approx 1{,}813$.

Точное решение при $\mu=2$: $F_{кр}=\frac{\pi^2EJ_{\min}}{(2l)^2}\approx\frac{2{,}465EJ_{\min}}{l^2}$.

Отличие от точного значения критической нагрузки составляет 21,7 %. Расхождение большое. Полученный результат можно улучшить, если учесть статическое (силовое) ГУ на свободном конце при $z=l$, где равен нулю изгибающий момент $M_x=EJ_{\min}v''=0$.

2 вариант. Учтем кинематические и статические ГУ.

Имеем три ГУ, значит берем полином третьей степени

$$v(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3, \quad v' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2, \quad v'' = 2a_2 + 6a_3 z.$$

ГУ: 1) при $z = 0$, $v = 0 \quad \to \quad a_0 = 0$,

2) при $z = 0$, $v' = 0 \quad \to \quad a_1 = 0$,

3) при $z = l$, $v'' = 0 \quad \to \quad 0 = 2a_2 + 6a_3 l \quad \to \quad a_2 = -3a_3 l$.

Функция, удовлетворяющая всем ГУ

$$v = a_3\left(-3lz^2 + z^3\right), \qquad v' = a_3\left(-6lz + 3z^2\right), \qquad v'' = a_3\left(-6l + 6z\right).$$

Числитель

$$\int_0^l EJ_{\min}(v'')^2 dz = EJ_{\min} a_3^2 \int_0^l (-6l + 6z)^2 dz = EJ_{\min} a_3^2 \int_0^l (36l^2 - 72lz + 36z^2)\, dz =$$

$$= EJ_{\min} a_3^2 \left(36l^2 z - 72l\frac{z^2}{2} + 36\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^l = EJ_{\min} a_3^2\left(36l^3 - 36l^3 + 12l^3\right) = 12l^3 a_3^2 EJ_{\min}.$$

Знаменатель

$$\int_0^l (v')^2 dz = a_3^2 \int_0^l (-6lz + 3z^2)^2 dz = a_3^2\left(36l^2 z^2 - 36lz^3 + 9z^4\right)dz =$$

$$= a_3^2\left(36l^2\frac{z^3}{3} - 36l\frac{z^4}{4} + 9\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_0^l = a_3^2\left(12l^5 - 9l^5 + 1{,}8l^5\right) = 4{,}8l^5 a_3^2.$$

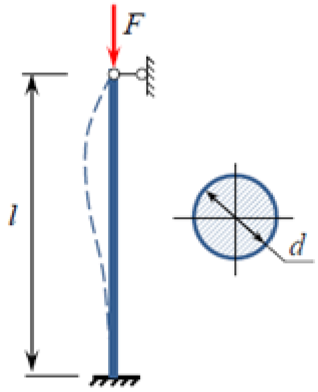
Критическая нагрузка

$$F_{\text{кр}} = \frac{12l^3 \cancel{a_3^2} EJ_{\min}}{4{,}8l^5 \cancel{a_3^2}} = \frac{2{,}5EJ_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2{,}5}}l\right)^2}, \quad \text{где } \mu = \frac{\pi}{\sqrt{2{,}5}} \approx 1{,}986.$$

Отличие от точного значения критической нагрузки составляет всего 1,42 %, что более чем приемлемо для практических расчетов. **Таким образом, для получения приемлемого результата по энергетическому методу следует удовлетворять всем ГУ (кинематическим и статическим).**

Замена реальной функции прогибов некоторой другой, удовлетворяющей ГУ, равносильно наложению на систему дополнительных связей, то есть система становится более жесткой. **Поэтому энергетический метод дает завышенное значение $F_{\text{кр}}$ и заниженное значение μ по сравнению с точным методом.**

12. Пределы применимости формулы Эйлера



Пример 1. Найти критическую нагрузку $F_{кр}$ и коэффициент запаса по устойчивости n_y.

Дано: $l = 4$ м, $d = 0{,}1$ м, $F = 500$ кН, сталь Ст3, $\sigma_{пц} = 200$ МПа, $\sigma_{тс} = 240$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение:

1. Найдем минимальный радиус инерции поперечного сечения

Для круга $J_{\min} = J_x = J_y = \dfrac{\pi d^4}{64}$, $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$, тогда

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{0{,}1}{4} = 0{,}025 \text{ м}.$$

2. Найдем гибкость стержня.

С учетом закрепления стержня $\mu = 0{,}7$, тогда

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0{,}7 \cdot 4}{0{,}025} = 112$$ *(гибкость – величина безразмерная)*

3. Найдем предельную гибкость для материала стержня

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \cong 100.$$

4. Сравним λ и $\lambda_{пред}$.

Так как $\lambda > \lambda_{пред}$ $(112 > 100)$, то **формула Эйлера применима**.

5. Критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{112^2} = 157{,}2 \text{ МПа}.$$

6. Критическая сила

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 157{,}2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} = 1{,}234 \cdot 10^6 \text{ Н} = 1234 \text{ кН}$$

или

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot \dfrac{\pi \cdot 0{,}1^4}{64}}{(0{,}7 \cdot 4)^2} = 1234 \text{ кН}.$$

7. Коэффициент запаса по устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1234}{500} = 2,47.$$

Пример 2. Решим предыдущий пример с длиной стержня $l = 2$ м.

Гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2}{0,025} = 56$$

Так как $\lambda < \lambda_{пред}$ $(56 < 100)$, то **формула Эйлера НЕ применима**.

Критическое напряжение определяем по эмпирической зависимости

$$\sigma_{кр} = \sigma_{тс} - \left(\sigma_{тс} - \sigma_{пц}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{пред}}\right)^2 = 240 - (240 - 200) \cdot \left(\frac{56}{100}\right)^2 = 227,46 \text{ МПа}$$

Критическая сила

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 227,46 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 1,785 \cdot 10^6 \text{ Н} = 1785 \text{ кН}$$

Коэффициент запаса по устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1785}{500} = 3,57.$$

13. Расчет продольно-сжатых стержней по коэффициенту снижения допускаемых напряжений

Два вида расчета на устойчивость:

1. **Поверочный расчет**

Дано: l, μ, материал, форма и размеры поперечного сечения стержня. **Требуется:** найди допускаемую нагрузку $F_{доп} = ?$

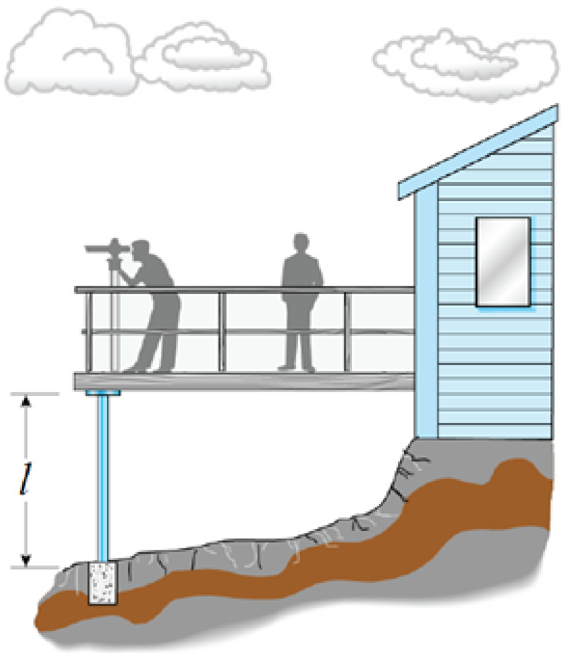
$$\left.\begin{matrix} \mu, l \\ i_{\min} = \sqrt{\dfrac{J_{\min}}{F}} \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} \quad \rightarrow \quad \varphi \quad \rightarrow \quad F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A$$

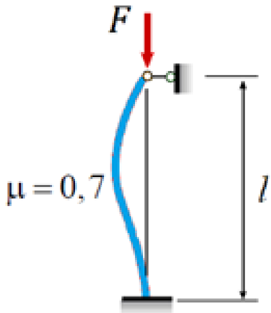
2. **Проектировочный расчет**

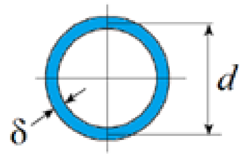
Дано: l, μ, F, материал, **форма** поперечного сечения стержня.

Требуется: определить размеры сечения таким образом, чтобы $F_{доп} \cong F$, то есть действующая на стержень сжимающая сила F была примерно равна допускаемой нагрузке $F_{доп}$.

Пример (поверочный расчет).







Дано: l, $d = 6$ см, $\delta = 0,3$ см, Ст3,

$[\sigma]_c = 160$МПа, $E = 2 \cdot 10^5$МПа,

$\sigma_{пц} = 200$ МПа, $\sigma_{тс} = 240$ МПа.

Определить: $F_{доп}$, $F_{кр}$, $n_y - ?$

Геометрические характеристики тонкостенного сечения:

$$A = \pi d\delta = 3{,}14 \cdot 6 \cdot 0{,}3 = 5{,}65 \text{ см}^2$$

$$J_{\min} = \frac{\pi d^3 \delta}{8}, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^3 \delta}{8 \cdot \pi d \delta}} = \frac{d}{2\sqrt{2}} = 2{,}12 \text{ см}.$$

а) Решение с длиной стержня $l = 4$ м

1. Гибкость стержня: $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}} = \dfrac{0,7 \cdot 4}{2,12 \cdot 10^{-2}} = 132$

2. Из таблицы коэффициентов φ имеем

$$\lambda_1 = 130, \quad \varphi_1 = 0,4; \qquad \lambda_2 = 140, \quad \varphi_2 = 0,36$$

$$\varphi = \varphi_2 + 0,1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)(\lambda_2 - \lambda) = 0,36 + 0,1 \cdot 0,04 \cdot 8 = 0,392$$

3. Допускаемое значение силы

$$F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A = 0,392 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 5,65 \cdot 10^{-4} = 35,4 \text{ кН}.$$

4. Определим критическое значение силы. Так как $\lambda > \lambda_{пред}$ $(132 > 100)$, то критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{132^2} = 113,1 \text{ МПа}$$

Критическая сила

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 113,1 \cdot 10^6 \cdot 5,65 \cdot 10^{-4} = 63,9 \text{ кН}.$$

5. Коэффициент запаса по устойчивости: $n_y = \dfrac{F_{кр}}{F_{доп}} = \dfrac{63,9}{35,4} = 1,8$

б) Решение с длиной стержня $l = 2$ м

1. Гибкость стержня: $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}} = \dfrac{0,7 \cdot 4}{2,12 \cdot 10^{-2}} = 66$

2. Из таблицы коэффициентов φ

$$\lambda_1 = 60, \quad \varphi_1 = 0,86; \qquad \lambda_2 = 70, \quad \varphi_2 = 0,81$$

Интерполируя, получаем

$$\varphi = \varphi_2 + 0,1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)(\lambda_2 - \lambda) = 0,81 + 0,1 \cdot 0,05 \cdot 4 = 0,83$$

3. Допускаемое значение силы

$$F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A = 0,83 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 5,65 \cdot 10^{-4} = 75 \text{ кН}.$$

4. Так как $\lambda < \lambda_{пред}$ $(66 < 100)$, то критическое напряжение определим по эмпирической зависимости

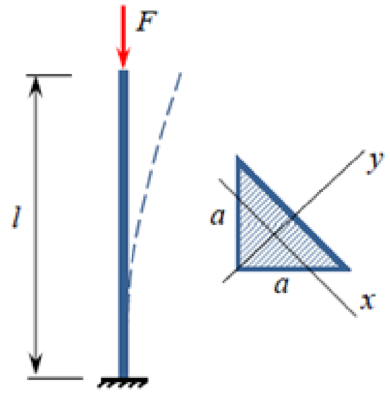
$$\sigma_{кр} = \sigma_{тс} - (\sigma_{тс} - \sigma_{пц})\left(\frac{\lambda}{\lambda_{пред}}\right)^2 = 240 - (240 - 200) \cdot \left(\frac{66}{100}\right)^2 = 222,5 \text{ МПа}$$

Критическая сила

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 222,5 \cdot 10^6 \cdot 5,65 \cdot 10^{-4} = 125,7 \text{ кН}.$$

5. Коэффициент запаса по устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F_{доп}} = \frac{125,7}{75} = 1,67.$$



Пример 3. Найти $F_{доп}$, $F_{кр}$ и n_y – ?

Дано: $l = 1$ м, $a = 0{,}06$ м, сталь Ст3, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma]_c = 160$ МПа.

Это поверочный расчет.

1. Найдем минимальный радиус инерции поперечного сечения

Для треугольника $J_{\min} = J_x = \dfrac{a^4}{72}$, $J_y = \dfrac{a^4}{24}$, $A = \dfrac{a^2}{2}$, тогда

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{72} \cdot \frac{2}{a^2}} = \frac{a}{6} = \frac{0{,}06}{6} = 0{,}01 \text{ м}.$$

2. Гибкость стержня при $\mu = 2$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1}{0{,}01} = 200.$$

3. Из таблицы для Ст3 при $\lambda = 200$ имеем $\varphi = 0{,}19$.

Замечание: *в том случае если гибкость стержня больше значений, представленных в таблице, то берется значение φ соответствующее максимальной гибкости (например, при $\lambda = 240$ также берем $\varphi = 0{,}19$).*

4. Допускаемее значение силы

$$F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A = 0{,}19 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}06^2}{2} = 54{,}72 \text{ кН}.$$

5. Так как $\lambda > \lambda_{пред}$ $(200 > 100)$, то критическое напряжение

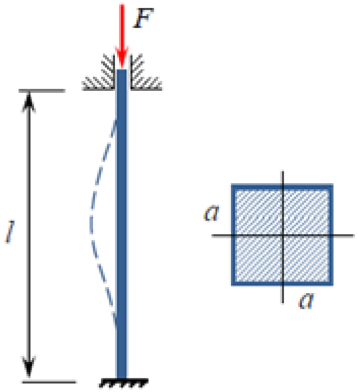
$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200^2} = 49{,}3 \text{ МПа},$$

а критическая сила

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 49{,}3 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}06^2}{2} = 88{,}74 \text{ кН}.$$

6. Коэффициент запаса по устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F_{доп}} = \frac{88{,}74}{54{,}72} = 1{,}62.$$



Пример 4. Найти размер сечения a – ?

Дано: $l = 1$ м, $F = 20$ кН, сталь Ст3, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma]_c = 200$ МПа.

Это проектировочный расчет, его ведем методом последовательных приближений

$$A = \frac{F}{\varphi[\sigma]_c}.$$

Для квадратного сечения $J_{\min} = J_x = J_y = \frac{a^4}{12}$, $A = a^2$, тогда

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Гибкость стержня при $\mu = 0,5$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{a}.$$

С чего начать? Какой размер выбрать в качестве первого приближения?

В первом приближении берут $\varphi = 1$, то есть размер сечения определяют из условия прочности

I приближение.

$$A = \frac{F}{[\sigma]_c} = \frac{20 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 0,1 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{A} = 0,01\ \text{м} = 1\ \text{см}.$$

Этот размер определен без учета гибкости, то есть если бы стержень был совсем коротким. Поэтому должно быть $a > 1$ см.

II приближение.

Увеличиваем размер сечения. Пусть $a = 1,5$ см.

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{0,015} = 115,5.$$

Из таблицы коэффициентов φ для стали Ст3 имеем

$$\lambda_1 = 110, \quad \varphi_1 = 0,52; \qquad \lambda_2 = 120, \quad \varphi_2 = 0,45$$

Интерполируя, получаем

$$\varphi = \varphi_2 + 0,1(\varphi_1 - \varphi_2)(\lambda_2 - \lambda) = 0,45 + 0,1 \cdot 0,07 \cdot (120 - 115,5) = 0,482.$$

$$F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A = 0,482 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,015^2 = 21,69\ \text{кН}.$$ *(много)*

Так как $F_{доп} > F$, то уменьшаем размер сечения (если $F_{доп} < F$, то размер сечения нужно увеличить).

III приближение.

Уменьшаем размер сечения. Пусть $a = 1,4$ см.

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{0,014} = 123,7.$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 120, & \varphi_1 = 0,45 \\ \lambda_2 = 130, & \varphi_2 = 0,40 \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \varphi = 0,40 + 0,1 \cdot 0,05 \cdot (130 - 123,7) = 0,431.$$

$$F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A = 0,431 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,014^2 = 16,9 \text{ кН.} \quad \textit{(мало)}$$

IV приближение.

Нужно найти значение a, при котором $F_{доп} \cong F$ (желательно чуть больше), очевидно, что мы попали в «вилку» $1,4 \text{ см} < a < 1,5 \text{ см}$.

Пусть $a = 1,47$ см.

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{0,0147} = 117,8.$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 110, & \varphi_1 = 0,52 \\ \lambda_2 = 120, & \varphi_2 = 0,45 \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \varphi = 0,45 + 0,1 \cdot 0,07 \cdot (120 - 117,8) = 0,465.$$

$$F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A = 0,465 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,0147^2 = 20,1 \text{ кН.} \quad \textit{(успех!)}$$

$$\Delta = \frac{20,1 - 20}{20} \cdot 100\% = +0,5\%.$$

Итак, принимаем $a = 1,47$ см. При этом $F_{доп} = 20,1$ кН немного превышает заданную нагрузку. Это не страшно, главное, что при нагрузках меньших $F_{доп}$ стойка с таким размером сечения будет устойчива.

Так как $\lambda > \lambda_{пред}$ $(117,8 > 100)$, то критическое напряжение

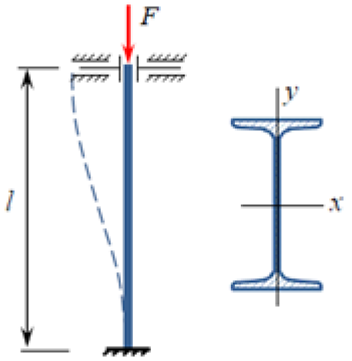
$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{117,8^2} = 142 \text{ МПа},$$

а критическая сила

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 142 \cdot 10^6 \cdot 0,0147^2 = 30,68 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса по устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{30,68}{20} = 1,53.$$



Пример 5. Подбор сечения по ГОСТ.

Определить № двутавра по ГОСТ 8239-89.

Дано: $l = 2$ м, $F = 200$ кН, сталь Ст3, $[\sigma]_c = 120$ МПа.

I приближение. Задаемся $\varphi = 1$,

$$A = \frac{F}{[\sigma]_c} = \frac{200 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 1,667 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 16,67\ \text{см}^2$$

Из сортамента выбираем профиль с площадью сечения $A > 16,67\ \text{см}^2$.

Ближайший такой профиль № 14: $A = 17,4\ \text{см}^2$, $i_{\min} = i_y = 1,55$ см. Гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2}{1,55 \cdot 10^{-2}} = 129.$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 120, & \varphi_1 = 0,45 \\ \lambda_2 = 130, & \varphi_2 = 0,40 \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \varphi = 0,40 + 0,1 \cdot 0,05 \cdot (130 - 129) = 0,405.$$

$$F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A = 0,405 \cdot 120 \cdot 10^6 \cdot 17,4 \cdot 10^{-4} = 84,56\ \text{кН}. \quad \textit{(мало)}$$

II приближение.

Берем профиль № 18: $A = 23,4\ \text{см}^2$, $i_{\min} = i_y = 1,88$ см. Гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2}{1,88 \cdot 10^{-2}} = 106,4.$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 100, & \varphi_1 = 0,60 \\ \lambda_2 = 110, & \varphi_2 = 0,52 \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \varphi = 0,52 + 0,1 \cdot 0,08 \cdot (110 - 106,4) = 0,549.$$

$$F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A = 0,549 \cdot 120 \cdot 10^6 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4} = 154,2\ \text{кН}. \quad \textit{(мало)}$$

III приближение.

Берем профиль № 20: $A = 26,8\ \text{см}^2$, $i_{\min} = i_y = 2,07$ см. Гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2}{2,07 \cdot 10^{-2}} = 96,6.$$

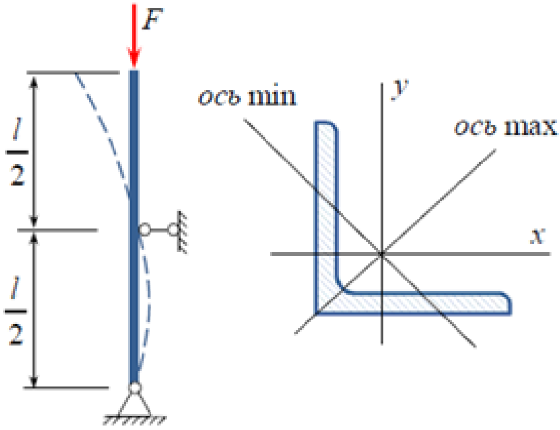
$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 90, & \varphi_1 = 0,69 \\ \lambda_2 = 100, & \varphi_2 = 0,60 \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \varphi = 0,60 + 0,1 \cdot 0,09 \cdot (100 - 96,6) = 0,631.$$

$$F_{доп} = \varphi[\sigma]_c A = 0,631 \cdot 120 \cdot 10^6 \cdot 26,8 \cdot 10^{-4} = 202,8 \text{ кН.} \quad \textit{(успех!)}$$

Оценим погрешность

$$\Delta = \frac{202,8 - 200}{200} \cdot 100\% = +1,4\%$$

Принимаем двутавр № 20.



Пример 6. Определить № уголка по ГОСТ 8509-93.

Дано: $F = 100$ кН, $l = 2$ м, сталь Ст3, $[\sigma]_c = 200$ МПа, $\mu = 1,347$ (см. предыдущий семинар).

Задаемся $\varphi = 1$,

$$A = \frac{F}{[\sigma]_c} = \frac{100 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 5 \text{ см}^2$$

Из сортамента выбираем профиль с площадью сечения $A > 5 \text{ см}^2$, и вычисления для удобства заносим в таблицу. Расчеты продолжаем до тех пор, пока погрешность не будет превышать $\pm 5\%$. Для прокатных сечений по ГОСТ положительная разница может достигать до 10 % из-за большого шага сортамента.

№ профиля	A, см^2	$i_{\min}$, см	$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$	φ	$F_{доп}$, кН	Δ, %
63×5	6,13	1,25	$215,5 > 200$	*Слишком гибкая конструкция*		
75×9	12,83	1,46	184,5	0,221	56,7 *(мало)*	–43,3
90×8	13,93	1,77	152,2	0,313	87,3 *(мало)*	–12,7
100×8	15,6	1,98	136	0,376	117,3 *(много)*	+17,3
100×7	13,75	1,98	136	0,376	103,4 *(успех!)*	+3,4

Принимаем равнополочный уголок 100×7.

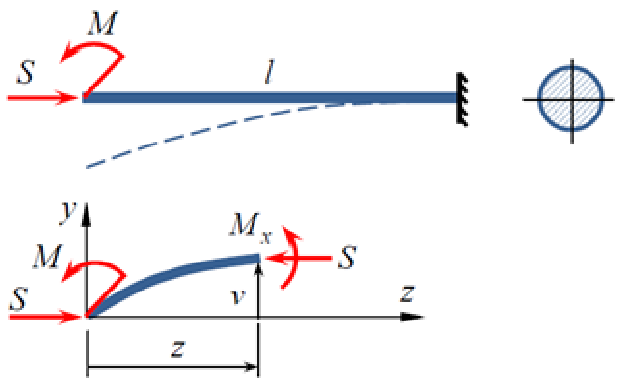
14. Продольно-поперечный изгиб

14.1. Точный метод

Пример 1. Дано: $M, S, l,$ поперечное сечение.

Найти: максимальный прогиб $v_{\max}$ – ?

максимальное напряжение $\sigma_{\max}$ – ?



Имеем

$$M_x = EJ_x v'' = -M - Sv$$

$$k^2 = \frac{S}{EJ_x} \quad \rightarrow \quad v'' + k^2 v = -\frac{M}{EJ_x} \cdot \frac{S}{S},$$

$$v'' + k^2 v = -k^2 \frac{M}{S}.$$

Решение

$$v = \underbrace{C_1 \sin kz + C_2 \cos kz}_{\text{общее решение}} - \underbrace{\frac{M}{S}}_{\text{частное решение}}$$

$$v' = C_1 k \cos kz - C_2 k \sin kz.$$

Для определения констант C_1, C_2 запишем ГУ:

1) при $z = 0$, $v = 0$; $\rightarrow$ $0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 - \dfrac{M}{S}$ $\rightarrow$ $C_2 = \dfrac{M}{S}$;

2) при $z = l$, $v' = 0$; $\rightarrow$ $C_1 k \cos kl - \underbrace{\dfrac{M}{S}}_{C_2} k \sin kl = 0$ $\rightarrow$ $C_1 = \dfrac{M}{S} \operatorname{tg} kl$.

Окончательно уравнение прогибов

$$v = \frac{M}{S} \operatorname{tg} kl \sin kz + \frac{M}{S} \cos kz - \frac{M}{S} = \frac{M}{S} (\operatorname{tg} kl \sin kz + \cos kz - 1)$$

Максимальный прогиб будет при $z = l$

$$v_{\max} = v(l) = \frac{M}{S} (\operatorname{tg} kl \sin kl + \cos kl - 1) = \frac{M}{S} \left(\frac{\sin^2 kl}{\cos kl} + \cos kl - 1 \right) =$$

$$= \frac{M}{S \cos kl} \left(\underbrace{\sin^2 kl + \cos^2 kl}_{1} - \cos kl \right) = \frac{M(1 - \cos kl)}{S \cos kl}.$$

Максимальный изгибающий момент

$$M_{x\max} = -M - S\,v_{\max},$$

а максимальное напряжение (напряжение сжатия) по абсолютному значению

$$|\sigma_{\max}| = \frac{S}{A} + \frac{M_{x\max}}{W_x} = \frac{S}{A} + \frac{M}{W_x} + \frac{S v_{\max}}{W_x}.$$

Из этого выражения видно, что при увеличении всех нагрузок в n раз напряжение увеличится больше чем в n раз, поскольку в третьем члене этого выражения увеличение нагрузок скажется на каждом из сомножителей S и $v_{\max}$. Таким образом, между нагрузками и напряжениями здесь нет прямой пропорциональности, что резко отличает продольно-поперечный изгиб от других видов нагружения.

Характерно, что как следствие ***нелинейности*** задачи, отпадает возможность применения принципа независимости действия сил: при раздельном (независимом) учете продольной и поперечной нагрузок напряжения были бы определены неверно, так как третий член выражения бы отсутствовал.

Изгибающий момент с учетом значения $v_{\max}$ можно преобразовать

$$M_{x\max} = -M - \cancel{S} \cdot \frac{M(1-\cos kl)}{\cancel{S}\cos kl} = -\frac{M}{\cos kl}$$

Рассмотрим два частных случая:

1) Если $S = 0$, то $k = \sqrt{\dfrac{S}{EJ_x}} = 0$, тогда $M_{x\max} = -M$, что соответствует действию только поперечной нагрузки;

2) Если $kl = \dfrac{\pi}{2}$, то $M_{x\max} = \infty$ независимо от значения внешнего момента M. Значит $Sv_{\max} = \infty$, то есть $v_{\max} = \infty$, что характерно для ***потери устойчивости.***

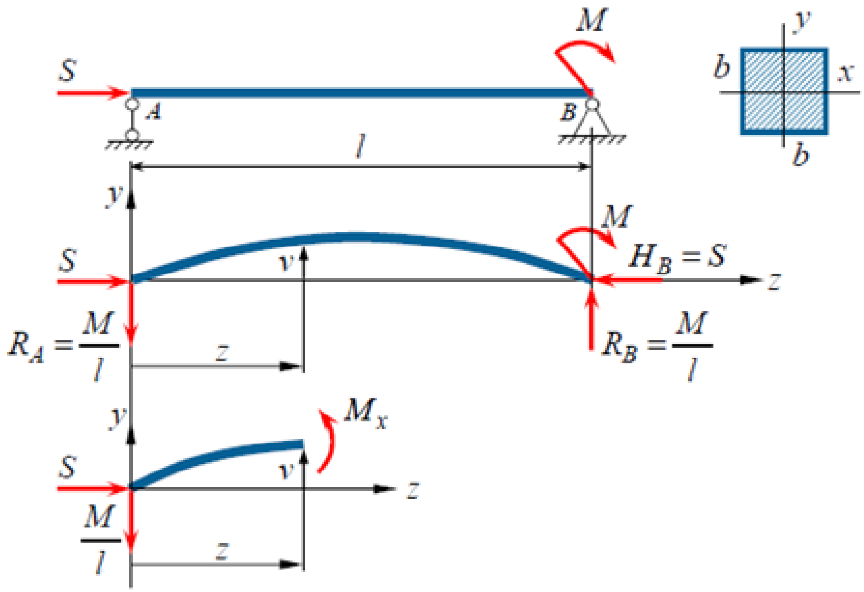
Действительно, если $kl = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$S = k^2 EJ_x = \frac{\pi^2 EJ_x}{(2l)^2},$$

что является критической силой Эйлера для рассмотренного стержня (жестко защемленного на одном конце и свободного на другом) при потере устойчивости (изгибе) относительно оси x.

Пример 1. Дано: $l = 4$ м, $M = 3$ кНм, $S = 65$ кН, $b = 0{,}06$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Найти: σ_{max} – ?



Решение. Используя метод сечений, получаем

$$M_x = EJ_x v'' = -Sv - \frac{M}{l} z,$$

$$k^2 = \frac{S}{EJ_x} \quad \rightarrow \quad v'' + k^2 v = -\frac{M}{EJ_x l} z \cdot \frac{S}{S}, \qquad v'' + k^2 v = -k^2 \frac{M}{Sl} z.$$

Решение неоднородного ДУ

$$v = \underbrace{C_1 \sin kz + C_2 \cos kz}_{\text{общее решение}} \underbrace{- \frac{M}{Sl} z}_{\text{частное решение}}$$

Для определения констант C_1, C_2 запишем ГУ:

1) при $z = 0$, $v = 0$; $\rightarrow$ $0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 - 0$ $\rightarrow$ $C_2 = 0$;

2) при $z = l$, $v = 0$; $\rightarrow$ $C_1 \sin kl - \frac{M}{S \cancel{l}} \cancel{l} = 0$ $\rightarrow$ $C_1 = \frac{M}{S \sin kl}$.

Окончательное уравнение прогибов

$$v = \frac{M \sin kz}{S \sin kl} - \frac{M}{Sl} z = \frac{M}{S} \left(\frac{\sin kz}{\sin kl} - \frac{z}{l} \right)$$

$$v' = \frac{M}{S}\left(\frac{k\cos kz}{\sin kl} - \frac{1}{l}\right); \qquad v'' = -k^2\frac{M}{S}\frac{\sin kz}{\sin kl}$$

Тогда выражение для изгибающего момента

$$M_x = v'' = -k^2 \underbrace{\frac{EJ_x}{S}}_{1/k^2} \frac{M\sin kz}{\sin kl} = -M\frac{\sin kz}{\sin kl}.$$

Поперечная сила : $Q_y = \dfrac{dM_x}{dz} = -M\dfrac{k\cos kz}{\sin kl}$.

Изгибающий момент имеет экстремум, там где $Q_y = 0$, значит

$$\cos kz = 0, \quad kz_* = \frac{\pi}{2}, \quad z_* = \frac{\pi}{2k}.$$

Подставим числовые значения

$$J_x = \frac{b^4}{12} = \frac{(0,06)^4}{12} = 108 \cdot 10^{-8}\ \text{м}^4$$

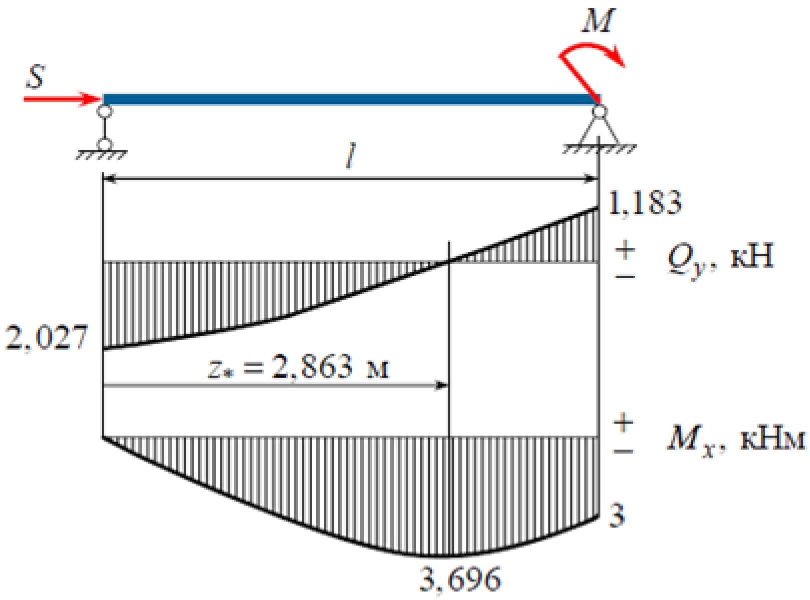
$$k^2 = \frac{S}{EJ_x} = \frac{65 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 108 \cdot 10^{-8}} = 0,3\ \frac{1}{\text{м}^2}, \qquad k = 0,548\ \frac{1}{\text{м}}.$$

При $z = 0$, $Q_y = -3 \cdot \dfrac{0,548}{\sin(0,548 \cdot 4)} = -2,027$ кН ; $M_x = 0$.

При $z = l$, $Q_y = -3 \cdot \dfrac{0,548 \cdot \cos(0,548 \cdot 4)}{\sin(0,548 \cdot 4)} = 1,183$ кН ; $M_x = -M = -3$ кНм .

При $z = z_* = \dfrac{\pi}{2 \cdot 0,548} = 2,863$ м,

$$M_{x\max} = -M \cdot \frac{\sin(0,548 \cdot 2,863)}{\sin(0,548 \cdot 4)} = -1,232M = -3,696\ \text{кНм}.$$



Максимальное напряжение

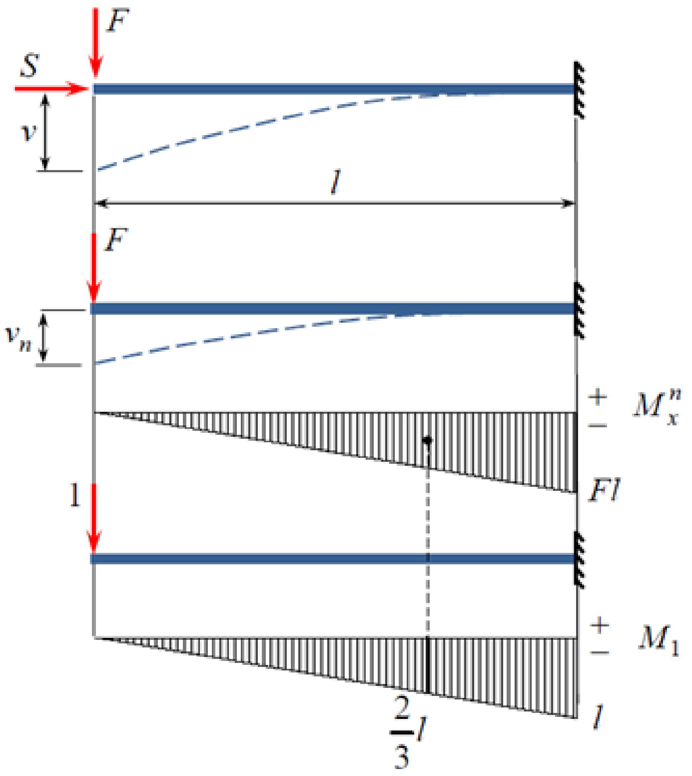
$$\left|\sigma_{\max}\right| = \frac{S}{A} + \frac{M_{x\max}}{W_x} = \frac{S}{b^2} + \frac{6 \cdot M_{x\max}}{b^3} = \frac{65 \cdot 10^3}{0,06^2} + \frac{6 \cdot 3,696 \cdot 10^3}{0,06^3} =$$

$$= (18,06 + 102,66) \cdot 10^6 = 120,7 \text{ МПа}.$$

14.2. Приближенный метод (метод Тимошенко)

Пример. Дано: $S = 0{,}5S_Э$, F, l, EJ_x.

Используя формулу Тимошенко найти прогиб на торце балки.



Решение. Найдем величину прогиба от действия только поперечной нагрузки. По методу Мора и правилу Верещагина

$$v_n = \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{1}{2} Fl \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3}l\right) = \frac{Fl^3}{3EJ_x}.$$

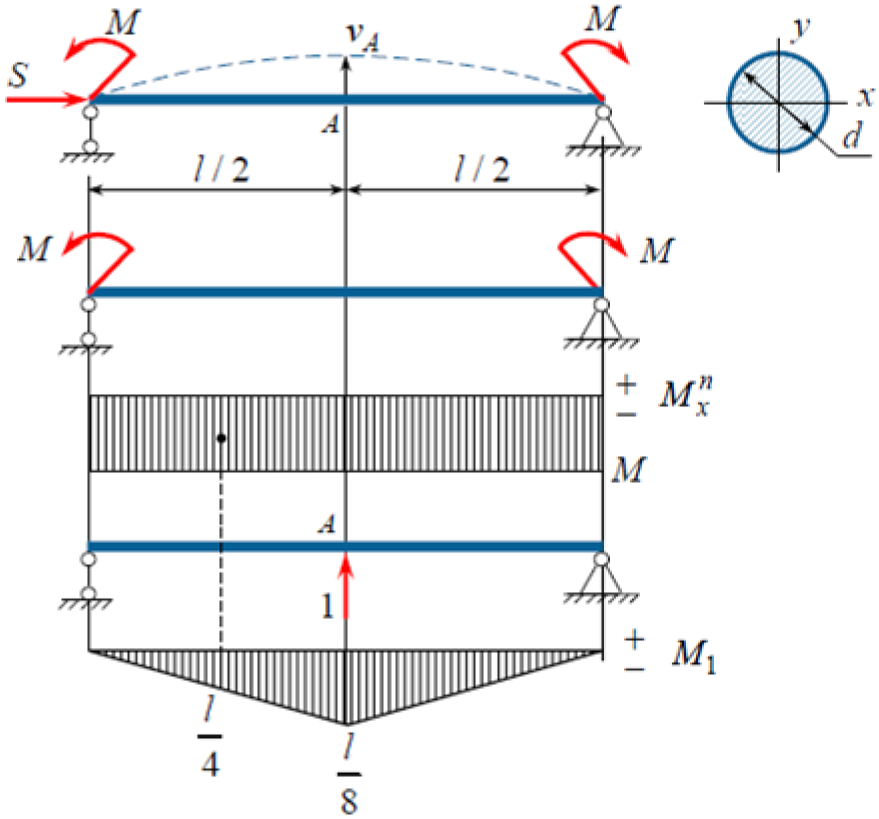
Коэффициент Тимошенко

$$k_T = \frac{1}{1 - \frac{S}{S_Э}} = \frac{1}{1 - 0{,}5} = 2,$$

$$v = k_T \cdot v_n = \frac{2Fl^3}{3EJ_x},$$

то есть при действии продольной нагрузки $S = 0{,}5S_Э$ прогиб увеличится в 2 раза.

Пример 2. Дано: $S = 0{,}3S_Э$, M, l, d. Найти: $v_A - ?$ $\sigma_{\max} - ?$



Решение. Коэффициент Тимошенко

$$k_T = \frac{1}{1 - \frac{S}{S_Э}} = \frac{1}{1 - 0{,}3} = \frac{10}{7}$$

Прогиб точки A от действия поперечной нагрузки

$$v_n = \frac{1}{EJ_x} \cdot \left(M \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{8} \right) \cdot 2 = \frac{Ml^2}{8EJ_x},$$

тогда

$$v_A = k_T \cdot v_n = \frac{10}{7} \cdot \frac{Ml^2}{8EJ_x} = \frac{5Ml^2}{28EJ_x}.$$

Для круглого сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad J_x = \frac{\pi d^4}{64}; \quad W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Сила Эйлера при $\mu = 1$

$$S_Э = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2} = \frac{\pi^3 Ed^4}{64 l^2}.$$

Максимальный момент

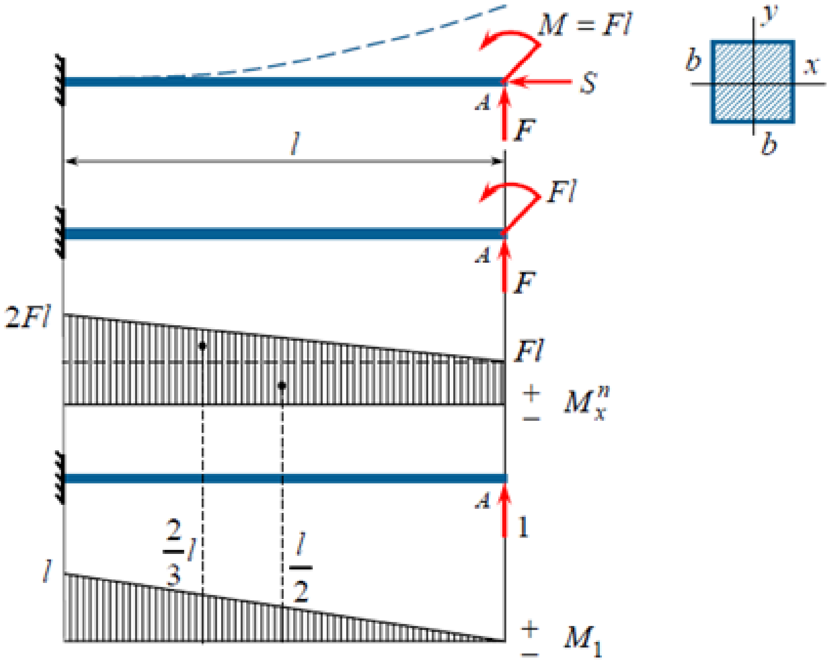
$$M_{x\max} = k_T \cdot M_{x\max}^n = \frac{10}{7} M.$$

Максимальное напряжение

$$\left|\sigma_{\max}\right| = \frac{S}{A} + \frac{M_{x\max}}{W_x} = \frac{0{,}3S_Э}{A} + \frac{M_{x\max}}{W_x} =$$

$$= \frac{0{,}3 \cdot \pi^3 E d^4}{64 l^2} \cdot \frac{4}{\pi d^2} + \frac{10M}{7} \cdot \frac{32}{\pi d^3} = \frac{3\pi^2 E d^2}{160 l^2} + \frac{320M}{7\pi d^3}.$$

Пример 3. Дано: $l = 3$ м, $F = 0{,}5$ кН, $S = 100$ кН, $b = 0{,}08$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Найти: $v_A - ?$ $\sigma_{\max} - ?$



Решение.

Сила Эйлера для стержня при $\mu = 2$, $J_x = \dfrac{b^4}{12} = \dfrac{0{,}08^4}{12} = 341{,}3 \cdot 10^{-8}\text{м}^4$

$$S_Э = \frac{\pi^2 E J_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 341{,}3 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 3)^2} \approx 187 \text{ кН}.$$

Коэффициент Тимошенко

$$k_T = \frac{1}{1 - \dfrac{S}{S_Э}} = \frac{1}{1 - \dfrac{100}{187}} = 2{,}15.$$

Используя метод Мора и правило Верещагина найдем прогиб точки A от действия поперечной нагрузки

$$v_n = \frac{1}{EJ_x} \cdot \left(Fl \cdot l \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{5Fl^3}{6EJ_x} = \frac{5 \cdot 0,5 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 341,3 \cdot 10^{-8}} = 16,5 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

тогда при продольно-поперечном изгибе

$$v_A = k_T \cdot v_n = 2,15 \cdot 16,5 \cdot 10^{-3} \approx 35,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Максимальный момент

$$M_{x\max} = k_T \cdot M_{x\max}^n = 2,15 \cdot 2Fl = 4,3Fl.$$

Максимальное напряжение

$$|\sigma_{\max}| = \frac{S}{A} + \frac{M_{x\max}}{W_x} = \frac{S}{b^2} + \frac{6 \cdot 4,3Fl}{b^3} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,08^2} + \frac{6 \cdot 4,3 \cdot 0,5 \cdot 10^3 \cdot 3}{0,08^3} =$$

$$= (15,63 + 75,59) \cdot 10^6 = 91,22 \text{ МПа}.$$