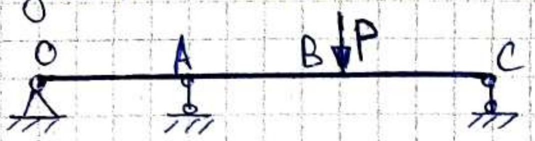
1. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил. Вывод канонических уравнений.

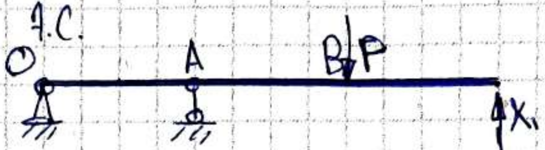
Метод сил - последовательность действий, позволяющая определить из дополнительных условий столько реакций связи сколько нужно для превращения системы в статически определимую.

Расчет статически неопределимых стержневых систем методам сил

Возьмем статически неопределимую балку:



$n = 4 - 3 = 1$



Значение реакции X_1 находим исходя из того, что перемещение точки C под действием внешней нагрузки Δ_p равно по модулю и противоположно по знаку перемещению этой точки под действием реакции X_1

$$\Delta_p + \Delta_{x_1} = 0$$

Заметим, что эпюра M^{x_1} в X_1 раз больше эпюры M^1:

$$\Delta_{x_1} = \frac{M^{x_1} \cdot M^1}{EJ_x} = X_1 \frac{M^1 \cdot M^1}{EJ_x} = X_1 \delta_{11}$$

$$\Delta_p = \frac{M^P \cdot M^1}{EJ_x} = \delta_{1p}$$

Получим каноническое уравнение: $X_1 \delta_{11} + \delta_{1p} = 0$.

1е слагаемое: перемещение точки C от самой реакции X_1,
2е слагаемое: перемещение точки C от нагрузки P
В сумме ноль, т.к. точка C не перемещается

Аналогично, можно получить канонические уравнения для больших степеней статической неопределимости.

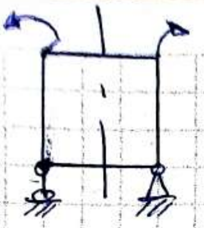
Учет симметрий

учет симметрии при расчете статически неопределимых стержневых систем

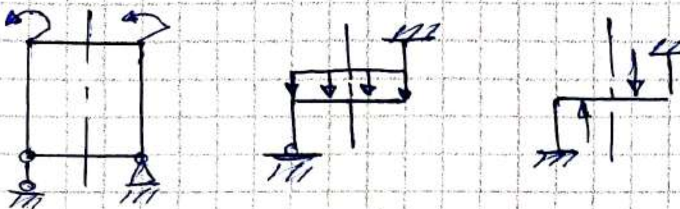
2. Учет симметрии при расчете статически неопределимых стержневых систем

Симметричными называют системы, образованные симметричными стержневыми системами, к которым приложена симметричная нагрузка

Кососимметричными называют системы, образованные симметричными стержневыми системами, к которым приложена кососимметричная нагрузка, либо кососимметричными системами, к которым приложена симметричная либо кососимметричная нагрузка

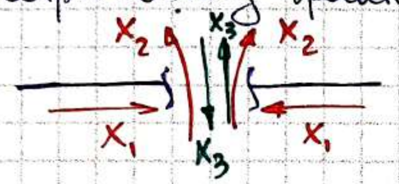


симметрия



косая симметрия

Внутренние силовые факторы в разрезе контура подразделяют на симметричные и кососимметричные. Симметричные стрелки соответствуют симметричным факторам, кососимметричные стрелки соответствуют кососимметричному фактору:



X_1, X_2 - симметричные

X_3 - кососимметричный

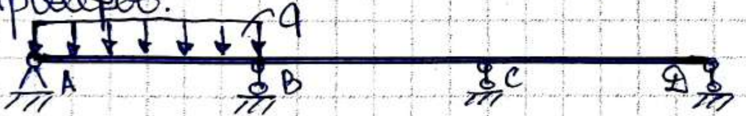
Особенностью симметричных и кососимметричных систем является обнуление „чужих“ (противоположных силовых факторов в разрезе, совпадающих с осью симметрии.

Особенности расчета статических

№3. Особенности расчета статически неопределимых многоопорных балок.

особенности расчета статически неопределимых многоопорных балок

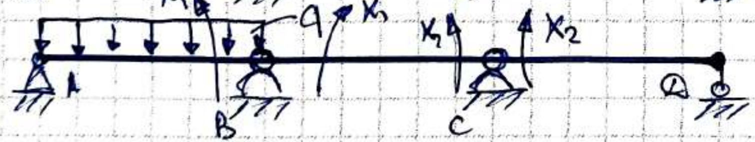
Многопролетными называют балки, лежащие более чем на двух шарнирных опорах и не имеющих промежуточных шарниров.



| 3 пролета

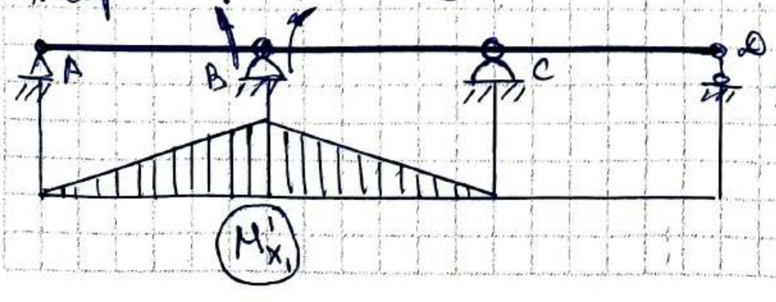
ОС:

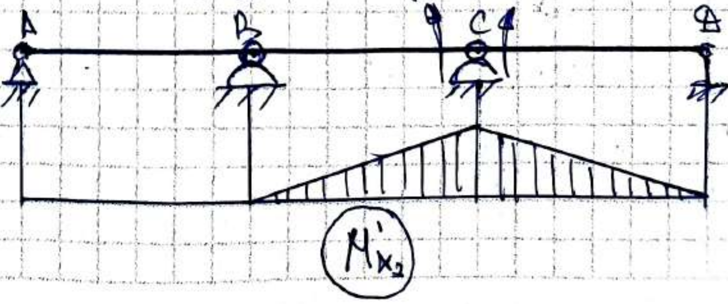
ЭС:



Многоопорные балки решаются путем выбора основной системы с врезанием шарнира (шарнир с опорой)

Тем самым мы упрощаем решение задачи построения эпюр





Особенности расчета плосокрострaнственных рам

№4. Особенности расчета плоскопространственных рам

особенности расчета плоскопространственных рам

Если в конструкции присутствует замкнутый контур, то для раскрытия статической неопределимости избыточными назначают связи внутренние (между частями самого контура), а их реакциями считаются внутренние силовые факторы, с которыми части рамы действуют друг на друга. Поскольку у плоских рам и балок при прямом изгибе из шести ВСФ будут только 3 (N, Q, M_z), то в общем случае на плоскости замкнутый контур будет статически неопределим три раза по причине 3ех внутренних связей.

Используется один из двух расчетных приемов: рассечение или врезка нескольких или одного шарниров.

Определение перемещений в статически

№5. Определение перемещений в статически неопределимых стержневых системах.

определение перемещений в статически неопределимых стержневых системах

Для того чтобы найти перемещение (или угол поворота) точки упругой оси статически неопределимой системы (рамы или балки) нужно перемножить итоговую эпюру на эпюру от единичной обобщенной силы, приложенной к интересующей нас точке в интересующем нас направлении в любой основной системе.

Методы проверки расчета статически

методы проверки расчета статически неопределимых стержневых систем

№6. Методы проверки расчета статически неопределимых стержневых систем.

Правильность полученного решения можно проверить 3мя способами

1) Вычислить какое-либо обобщенное перемещение заведомо равное нулю
2) Вычислить обобщенное перемещение какого-либо сечения дважды используя разные основные системы.
3) Решить задачу повторно, используя для решения другую основную систему.

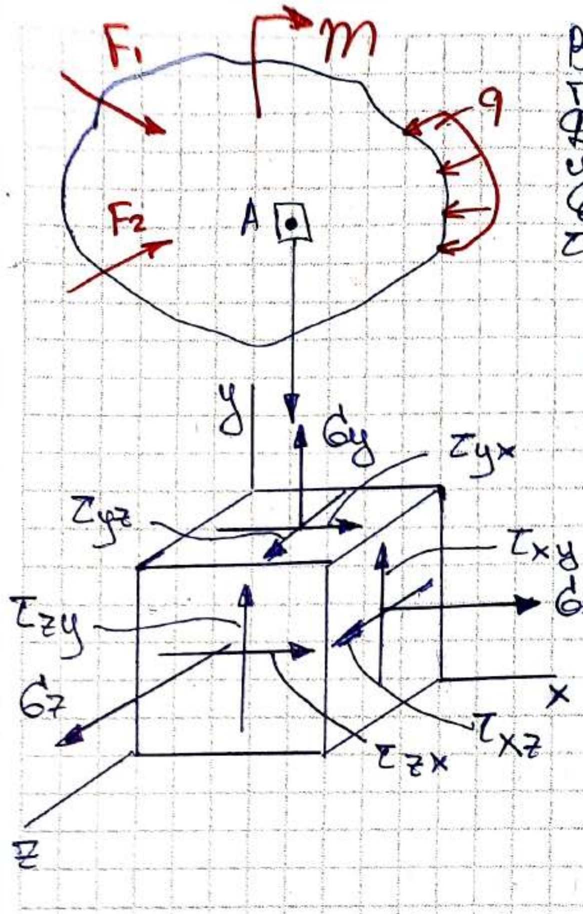
Теория напряженного состояния.Определение напряжений в произвольной площадке

№7. Теория напряженного состояния. Определение напряжений в произвольной площадке, проходящей через заданную точку. Понятие о тензоре напряжений.

Понятие о тензоре напряжений

Совокупность напряжений для всего множества площадок, проходящих через точку тела, образует <u>напряженное состояние</u> (Н.С.) в этой точке.

В окрестности точки А напряженного тела выделим параллелепипед. Действующие на гранях напряжения указаны в положительных направлениях:
σ - растягивающие
τ - по направлению осей:



<u>Тензор напряжений</u>

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

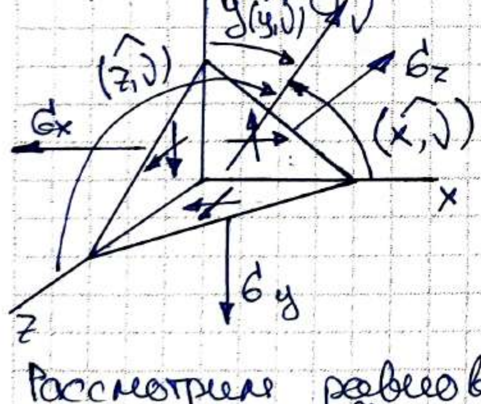
- матрица, объединяющая в себе напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку. Симметрична относительно главной диагонали (по закону парности касательных напряжений)

Напряжения входящие в тензор называются компонентами. В зависимости от ориентации площадок компоненты меняются.

<u>Основная теорема напряженного состояния</u>

Если заданы компоненты НС, то НС полностью определено.

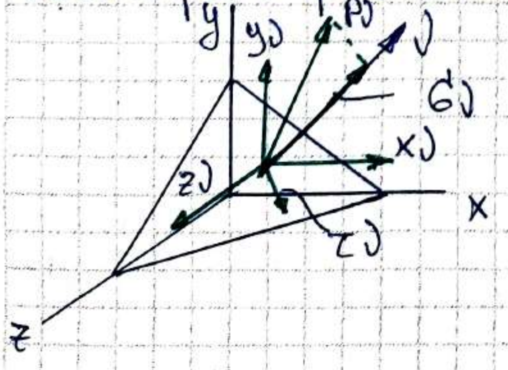
Вырежем из нашего куба тетраэдр: с нормалью ν:



$\cos(x,\nu) = l$
$\cos(z,\nu) = n$
$\cos(y,\nu) = m$

$l^2 + n^2 + m^2 = 1$

Рассмотрим равновесие тетраэдра:

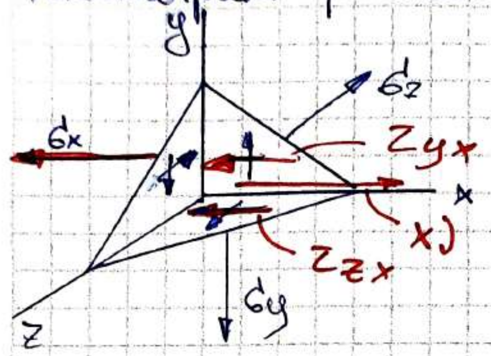


Необходимо определить:

$P_\nu, \sigma_\nu, \tau_\nu$

Площадка	Площадь площадки
ν	dA
x	$dA \cdot l$
y	$dA \cdot m$
z	$dA \cdot n$

Рассмотрим равновесия (для примера, вдоль x)



$$x_\nu dA = \sigma_x dA \cdot l + \tau_{yx} \cdot dA \cdot m + \tau_{zx} \cdot dA \cdot n$$

$$x_\nu = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} \cdot n$$

Аналогично получаем:

$$y_\nu = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n$$

$$z_\nu = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n$$

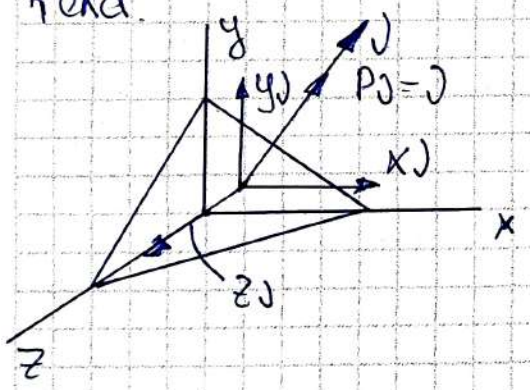
Тогда: $P_\nu = \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2}$, $\tau_\nu = \sqrt{P_\nu^2 - \sigma_\nu^2}$ } таким образом НС полностью определено

Теория напряженного состояния.Определение главных напряжений в общем случае

№8. Теория напряженного состояния. Определение главных напряжений в общем случае НС.

В общем случае вектор полного напряжения P_ν в площадке, проходящей через точку тела, не совпадает по направлению с нормалью ν к этой площадке и раскладывается на две составляющие: σ_ν и τ_ν.
Можно добиться такой ориентации при которой все касательные напряжения будут равны нулю, и останутся только нормальные напряжения - они называются главными напряжениями, а площадки - главными площадками

Определим главные напряжения, как и прежде рассмотрев равновесие элементарного объема в окрестности точки тела.



Площадка главная: $P_\nu = \sigma$ ($\uparrow\uparrow \nu$)

$$x_\nu = \sigma l = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n$$

$$(\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} \cdot n = 0 \qquad (1)$$

Аналогично получаем:

$$\tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} \cdot n = 0 \qquad (2)$$

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n \qquad (3)$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad (4)$$

Система (1)-(4) имеет решение. Тогда определитель этой системы равен нулю и мы имеем действительные корни:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, мы получим кубическое уравнение относительно главных напряжений:

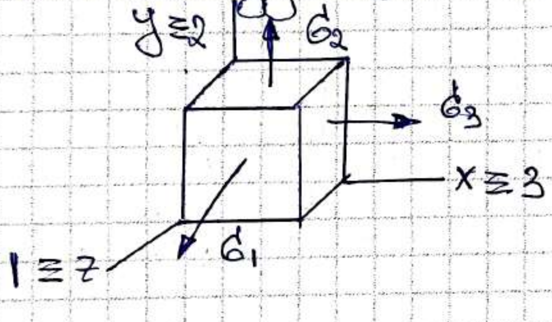
$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (*)$$

где коэффициенты (всегда вещественные)

- $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$
- $J_2 = -(\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$
- $$J_3 = |T_\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

не зависят от ориентации в пространстве элементарного объема и связанной с ним системы координат и, поэтому, называются <u>инвариантами Н.С</u>

Корнями уравнения (*) являются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которые располагают в следующем порядке $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.



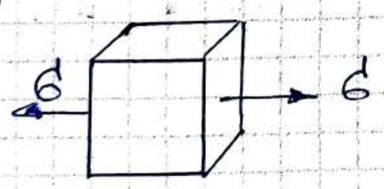
Выводы формулы определения главных напряжений.если известно

вывод формулы определения главных напряжений, в случае если одно главное напряжение известно

9. Вывод формулы определения главных напряжений, в случае если одно главное напряжение известно.

<u>Типы напряженных состояний:</u>

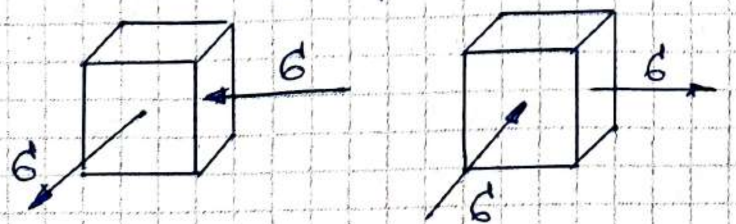
- Одноосное Н.С. (например, растяжение/сжатие) Признак: $J_2 = 0$ и $J_3 = 0$



$\sigma_1 = \sigma$

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

- Плоское Н.С. - одно из главных напряжений известно (например, чистый сдвиг) Признак $J_3 = 0$

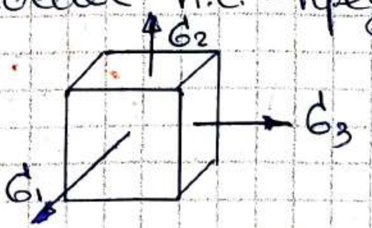


$\sigma_1 = \sigma$

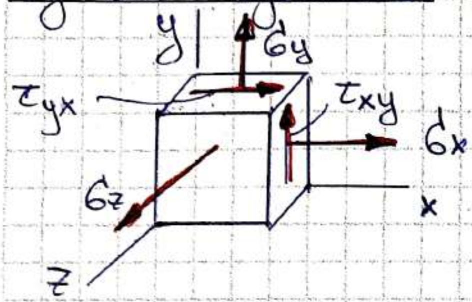
$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -\sigma$

3) Трехосное Н.С. - представлены в виде главных напряжений



Определение главных напряжений в случае, когда одно из трех известно:



Одна главная площадка (например, z) известна:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(\sigma_z - \sigma)}\underbrace{\left((\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{yx}\cdot\tau_{xy}\right)} = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sigma_z - \sigma = 0 \qquad \sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sigma^{I} = \sigma_z \qquad \sigma^{II,III} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2}$$

$$\sigma^{II,III} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

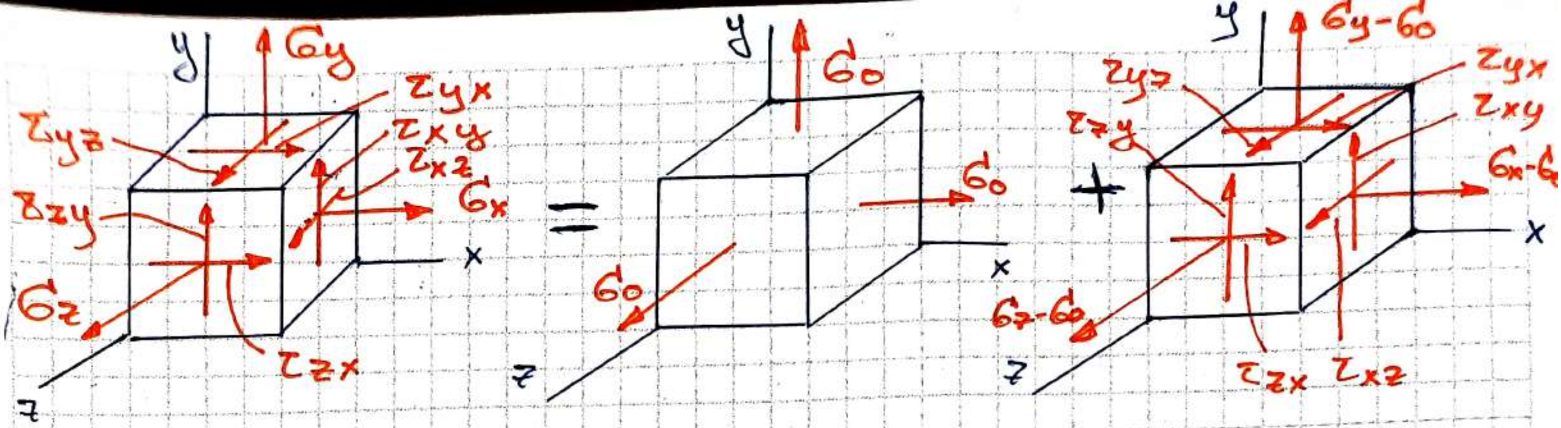
Итак: если одна из главных площадок известна (на ней нет касательных напряжений, а есть только нормальные или вообще никаких), то одно из главных напряжений известно, а 2 остальных вычисляются по формуле.

Деление тензора напряжений

№11. **Деление тензора напряжений на шаровую и девиаторную составляющие.**

Тензор напряжений T_σ в точке тела можно разложить на две составляющие:

- шаровой тензор $T_{\sigma 0}$ - компоненты которого вызывают только упругое изменение объема материала в окрестности точки.
- девиатор D_σ - компоненты которого искажают окрестность точки, не меняя объем этой окрестности.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}}_{T_\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}}_{T_{\sigma_0}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x-\sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_0 \end{bmatrix}}_{D_\sigma}$$

$$T_\sigma = T_{\sigma_0} + D_\sigma$$

Девиатор это Н.С. у него есть свои главные напряжения и инварианты:

- $J_{1D_\sigma} = (\sigma_x-\sigma_0)+(\sigma_y-\sigma_0)+(\sigma_z-\sigma_0)=0$

  $J_{1D_\sigma}=0$, т.к. нет изменения объема $\Rightarrow \sigma_0 = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}$

- $J_{2D_\sigma} = -(\sigma_x-\sigma_0)(\sigma_y-\sigma_0)-(\sigma_y-\sigma_0)(\sigma_z-\sigma_0)-(\sigma_z-\sigma_0)(\sigma_x-\sigma_0)+$

  $+\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2 =$

  $=\frac{1}{6}\Big[(\sigma_x-\sigma_y)(\sigma_y-\sigma_z)+(\sigma_y-\sigma_z)(\sigma_z-\sigma_x)+(\sigma_z-\sigma_y)(\sigma_y-\sigma_x)+$

  $+6(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)$

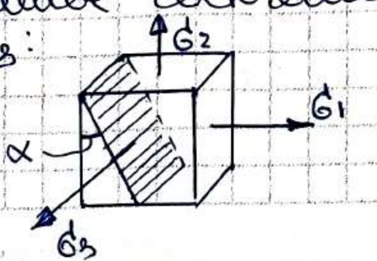
- $$J_{3D_\sigma}=|D_\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_0 \end{vmatrix}$$

Теория напряжений.Мора

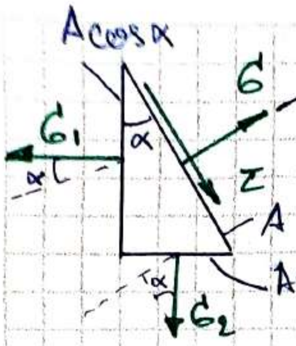
круговая диаграмма О. Мора

№12. Теория напряжений. Круговая диаграмма О. Мора

Напряженное состояние задано главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3:



Рассмотрим семейство площадок, параллельных главному напряжению σ_3.



Найдем нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения на этих площадках:

$$\nu:\quad \sigma \cdot A - \sigma_1 \cdot (A\cos\alpha)\cos\alpha - \sigma_2 (A\sin\alpha)\sin\alpha = 0$$

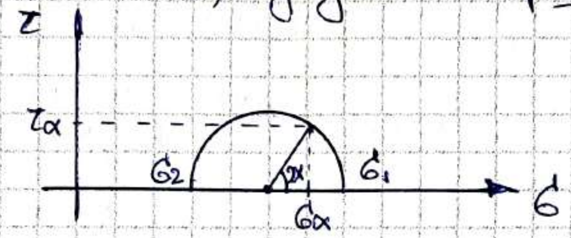
$$\sigma = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2\alpha = \sigma_1\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + \sigma_2\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha \quad (1)$$

$$\perp\nu:\quad \tau \cdot A + \sigma_2 \cdot (A\sin\alpha\cos\alpha) - \sigma_1 \cdot (A\cos\alpha)\sin\alpha = 0$$

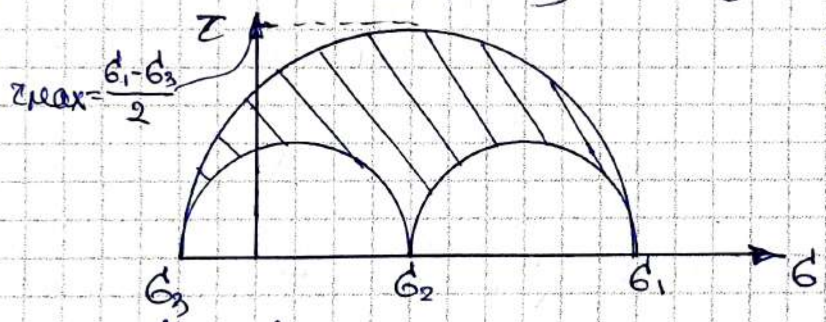
$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2)\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) задают окружность в координатах (σ, τ):



$\tau_\alpha, \sigma_\alpha$ - напряжение в площадке

Рассмотрев семейство площадок, параллельных главным напряжениям σ_2, получим два других круга:



Знак касательного напряжения в расчете на прочность не влияет, поэтому рассматривают обычно только верхнюю половину окружности.

Точки, соответствующие площадкам, параллельным трем главным напряжениям, располагаются на трех соответствующих окружностях.

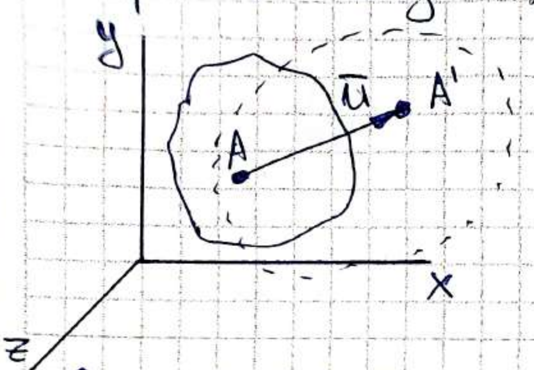
Точки, соответствующие произвольно ориентированным площадкам, точно найдены по диаграмме Мора не могут быть. Однако, все они находятся в пределах заштрихованной области.

Теория деформаций.Деформированное состояние в точке.деформация НЕ БЫЛО

№12 Теория деформаций. Деформированное состояние в точке. Главные деформации. Объемная деформация.

Совокупность линейных деформаций ε по всем направлениям, проходящим через точку тела и угловых деформаций γ во всех площадках, проходящих через нее, образуют деформированное состояние в этой точке.

Для определения деформированного состояния достаточно знать линейные деформации по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям и угловые деформации в трёх площадках, перпендикулярных этим направлениям.

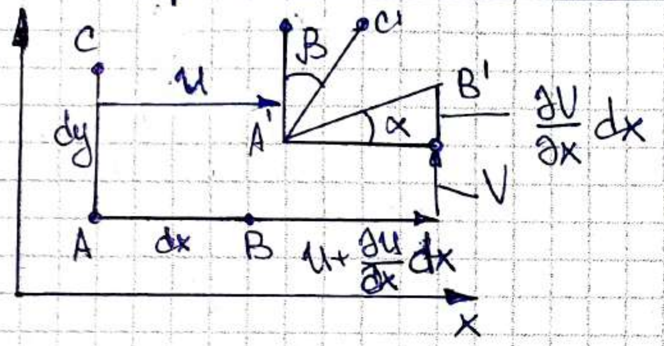


$\bar{u}(x,y,z)$ - перемещение

$u(x,y,z)$ - проекция на ось x;
$v(x,y,z)$ - проекция на ось y;
$w(x,y,z)$ - проекция на ось z.

$\bar{u} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$

<u>Дифференциальная зависимость между деформацией и перемещением. Соотношение Коши.</u>



Рассмотрим на примере деформации в плоскости xy.

В пределах упругости перемещения малы ⇒ деформации малы ⇒

$\sin\alpha \approx \alpha$; $\cos\alpha \approx 1$; $tg\,\alpha \approx \alpha$

Точка A перемещается в точку A' (перемещение u)
Точка B перемещается в точку B' (перемещение $u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$; $\frac{\partial u}{\partial x}dx$ - удлинение отрезка AB). Тогда

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx) - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Аналогично, получаем: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

$$tg\,\alpha \approx \alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$tg\,\beta \approx \beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ - изменение прямого угла $\angle BAC$, т.е. угол сдвига в плоскости xOy.

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{Соотношения Коши.}$$

Деформированное состояние полностью определяется тензором деформаций (из теории упругости)

Проведем следующую замену:

$\sigma_x \to \varepsilon_x$
$\sigma_y \to \varepsilon_y$
$\sigma_z \to \varepsilon_z$
$\tau_{xy} \to \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
$\tau_{xz} \to \frac{1}{2}\gamma_{xz}$
$\tau_{yz} \to \frac{1}{2}\gamma_{yz}$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$ - тензор деформаций

т.е. полная аналогия с тензором Н.С.

Компоненты тензора могут меняться в зависимости от ориентации площадки. Можно добиться такого положения площадки при котором угловые деформации равны нулю. При этом оставшиеся деформации будут главными, а соответствующие им оси - главные оси.

Проводя аналогичные действия мы получим:

$$\varepsilon^3 - J_{1\varepsilon}\varepsilon^2 - J_{2\varepsilon}\varepsilon - J_{3\varepsilon} = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

- $J_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$
- $J_{2\varepsilon} = -(\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x) + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2$
- $$J_{3\varepsilon} = |T_\varepsilon| = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\tau_{yx} & \frac{1}{2}\tau_{zx} \\ \frac{1}{2}\tau_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\tau_{zy} \\ \frac{1}{2}\tau_{xz} & \frac{1}{2}\tau_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

При изменении осей координат компоненты Д.С. изменяются, а $J_{1\varepsilon}, J_{2\varepsilon}, J_{3\varepsilon}$ - нет. Поэтому их называют <u>инвариантами Д.С.</u>

Разложение тензора деформаций на шаровой и девиатор.

Опыты Бриджмена показали, что всестороннее сжатие не приводит к остаточным деформациям. Поэтому напряженное состояние можно представить как сумму изменения объема + изменение формы (сдвиг).

- Шаровой тензор - изменение объема;
- девиатор - изменение формы.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{T_\varepsilon} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}}_{\substack{T_{\varepsilon_0} \\ \text{(шаровой)}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix}}_{\substack{D_\varepsilon \\ \text{(девиатор)}}}$$

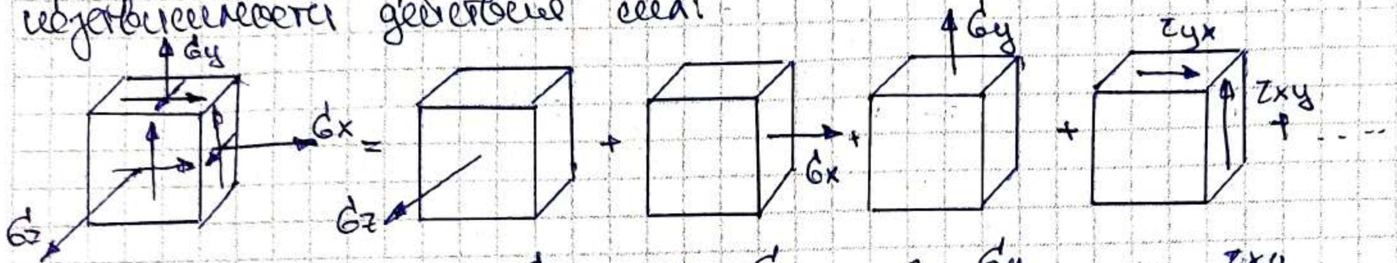
Для деления Д.С. исходим из условия, что первый инварианта девиатора деформаций равна нулю (т.к. нет изменения объема)

$$J_{1D_\varepsilon} = (\varepsilon_x-\varepsilon_0)+(\varepsilon_y-\varepsilon_0)+(\varepsilon_z-\varepsilon_0)=0 \Rightarrow \varepsilon_0=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3}$$

Обобщенный закон Гука для изотропного материала

№13. Обобщенный закон Гука для изотропного материала

Представим напряженное состояние используя принцип независимости действия сил:



$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E} \qquad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_x=-\nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y=-\nu\frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_x=-\nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \gamma_{xz}=\frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_y=-\nu\frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_z=-\nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_z=-\nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}$$

В общем случае нагружения в пределах малых деформаций получаем обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]$$
$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right]$$
$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{xy}&=\frac{\tau_{xy}}{G}\\ \gamma_{xz}&=\frac{\tau_{xz}}{G}\\ \gamma_{zx}&=\frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\right\} \quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

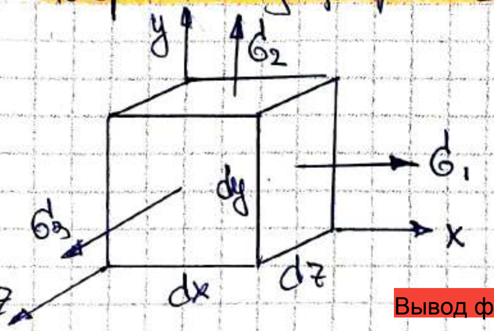
Обьемная деформация

№14. Объемная деформация

$$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]+\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right]+\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]$$

$$\theta=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

№15. Вывод формулы определения удельной потенциальной энергии деформации в общем случае Н.С.



Напряженное состояние задано в главных напряжениях:

σ_1 соответствует ε_1 (ε_x)

σ_2 соответствует ε_2 (ε_y)

σ_3 соответствует ε_3 (ε_z)

Вывод формулы определения удельной потенциальной энергии деформации в общем случае

При определении потенциальной энергии используем допущение, что каждая сила совершает работу на собственном перемещении.

$dA = dU$ - при статическом напряжении:

$$dU = \frac{1}{2}\underbrace{\sigma_1\, dz\, dy}_{\text{сила}} \cdot \underbrace{\varepsilon_1\, dx}_{\text{перемещение}} + \frac{1}{2}\sigma_2\, dx\, dz\, \varepsilon_2\, dy + \frac{1}{2}\sigma_3\, dx\, dy\, \varepsilon_3\, dz$$

$$a = \frac{dU}{dV} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)\, dx\, dy\, dz}{dx\, dy\, dz} = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$$

Используя закон Гука получим:

$$a = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \sigma_2(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) + \sigma_3(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))\right] =$$

$$= \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 - 2\nu\sigma_2\sigma_3 - 2\nu\sigma_1\sigma_3\right) =$$

$$= \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (2\nu + 2)\left[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right] + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right) =$$

$$= \frac{1}{2E}\left(\underbrace{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}_{J_1}{}^2 - 2(\nu + 1)\underbrace{(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)}_{J_2}\right)$$

$$a = \frac{1}{2E}\left(J_1^2 + 2(\nu + 1)J_2\right)$$

Примечание: Удельная потенциальная энергия девиатора напряжений (энергия изменения формы)

$$J_{1D} = 0 \;;\quad J_{2D} = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

$$a_D = \frac{1}{2E}\left(0 + 2(\nu + 1)\cdot\frac{1}{6}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right)\right)$$

$$a_D = \frac{\nu + 1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема:

$$a_{\sigma_0} = \frac{1}{2E}\left[3\cdot\sigma_0^2 - 2\nu\cdot 3\sigma_0^2\right] = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_0^2$$

$$a_{\sigma_0} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

Эквивалентное напряжение. Коэффициент запаса

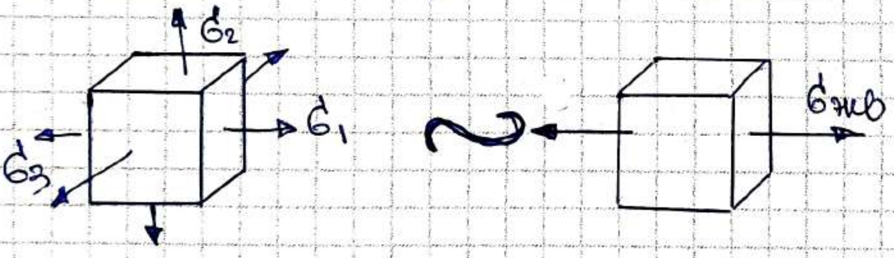
№16. Эквивалентное напряжение. Коэффициент запаса для сложного напряженного состояния.

Предельным Н.С. называют состояние напряженного материала непосредственно предшествующее появлению в нем пластических деформаций (у пластичных материалов) или трещин (у хрупких материалов)

Число n называется коэффициентом запаса прочности в точке тела, если пропорциональное увеличение в n раз всех компонентов напряженного состояния в этой точке приводит к возникновению предельного состояния в ее окрестности.

Для Н.С. вводится эквивалентное Н.С. Два Н.С. являются равноопасными если при пропорциональном увеличении компонентов они одновременно достигают предельного состояния.

Напряжение одноосного растяжения, создающее напряженное состояние, равноопасное заданному, называется эквивалентным напряжением $\sigma_{экв}$.



$$\sigma_{экв} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

При известном эквивалентном напряжении $\sigma_{экв}$ коэффициент запаса прочности для данного напряженного состояния вычисляется по формуле:

$$\underbrace{n = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{экв}}}_{\text{упругий материал}} \quad \text{или} \quad \underbrace{n = \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{экв}}}_{\text{хрупкий материал}}$$

Теория начала текучести.Вывод формулы определения эквивалентного напряжения

№17 Теория начала текучести наибольших касательных напряжений. Вывод формулы определения эквивалентного напряжения.

1) Исследуем материал:

Материал изотропный, сплошной, однородный $\Rightarrow$ функция f симметрична

2) Все металлы работают на растяжение/сжатие одинаково.

$$\sigma_{Тсж} = \sigma_{Тр} \Rightarrow f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$$

3) Функция зависит лишь от разности аргументов, но не зависит от самих аргументов.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(\sigma_1 \pm p, \sigma_2 \pm p, \sigma_3 \pm p)$$

4) Зададим линейную функцию:

$$\sigma_{экв} = A\left[|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1|\right], \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Проводим эксперимент на растяжение/сжатие:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma = \sigma_Т \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Раскроем модули и получим: $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3$

Достоинства: линейная теория $\Rightarrow$ имеет широкое распространение
Недостаток: не учитывается 2е главное напряжение.

Эта теория подтверждена экспериментально для пластичных материалов.

Теория начала текучести энергии изменения формы
вывод формулы определения эквивалентного напряжения

№18. Теория начала текучести энергии изменения формы. Вывод формулы определения эквивалентного напряжения.

Допущения (1)-(3) аналогичны пункту №17

4) Зададим квадратичную функцию:

$$\sigma_{экв} = A\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Проводим эксперимент на растяжение/сжатие:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Получаем энергетическую формулу:

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Эта теория подтверждена экспериментально.

№19 Теория разрушения Мора. Вывод формулы для определения эквивалентного напряжения.

вывод формулы для определения эквивалентного напряжения

Теория разрушения Мора

1) Исследуем материал:

Материал однородный ⇒ функция симметрична ⇒ $\sigma_{экв} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

2) Материал может быть как: $\sigma_{тр} = \sigma_{тсж}$ или $\sigma_{тр} \neq \sigma_{тсж}$

3) Если образование трещин, то $\pm p$ может оказывать влияние (p - всестороннее давление)

4) Используя линейную функцию, получаем:

$$\sigma_{экв} = A(\sigma_1 - \sigma_3) + B \cdot p$$

p - может быть любым (например, $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ - гидростатическое давление) однако мы выбираем наибольшее:

$$\sigma_{экв} = A(\sigma_1 - \sigma_3) + B \cdot \sigma_1$$

Проводим эксперимент и определяем A и B:

а) Растяжение: $\sigma_{экв} = \sigma_{тр}$; $\sigma_1 = \sigma_{тр}$; $\sigma_3 = 0 \Rightarrow A + B = 1$

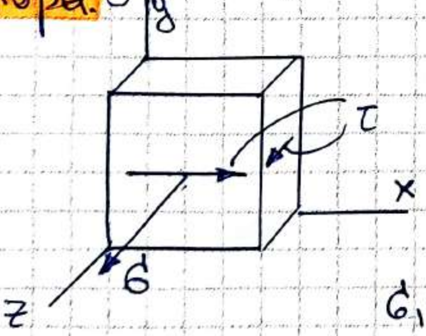
б) Сжатие: $\sigma_{экв} = \sigma_{тсж}$; $\sigma_1 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma_{тсж} \Rightarrow A = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{тсж}}$

Подставляя полученные выражения для A и B получим:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \vartheta_т \sigma_3$$, где

$\vartheta_т = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{тсж}}$ } для упругого материала или $\vartheta_т = \frac{\sigma_{вр\,раст}}{\sigma_{вр\,сжат}}$ } для хрупкого материала

№20. Вывод формул для вычисления эквивалентного напряжения в случае плоского упрощенного напряженного состояния по двум теориям начала текучести и теории разрушения Мора.



$$\sigma' = 0$$

$$\sigma^{'', '''} = \frac{0 + \sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - \sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

НЕ БЫЛО

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

- $\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
- $\sigma_2 = 0$
- $\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

Вывод формул для вычисления эквивалентного напряжения в случае упрощенного напряженного состояния.Мора

НЕ БЫЛО

• Подставим полученные напряжения в теорию начала текучести наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right) - \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)$$

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

• Подставим полученные напряжения в теорию начала текучести энергии изменения формы:

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)^2+\left(-\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)^2+\left(-\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\sigma}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}+\frac{1}{4}(\sigma^2+4\tau^2)+\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2-2\,\frac{\sigma}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}+\frac{1}{4}(\sigma^2+4\tau^2)+\sigma^2+4\tau^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\frac{6}{4}(\sigma^2+4\tau^2)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\frac{3}{4}\sigma^2+\frac{3}{4}\cdot 4\tau^2}$$

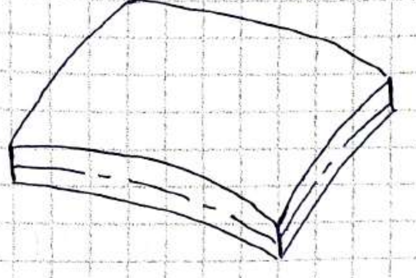
$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$$

• Подставим полученные напряжения в теорию разрушения Мора:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \nu_т\sigma_3 = \left(\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right) - \nu_т\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)$$

$$\sigma_{экв} = \frac{1-\nu_т}{2}\sigma + \frac{1+\nu_т}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

№21. Безмоментная теория расчета оболочек вращения. Вывод уравнения Лапласа



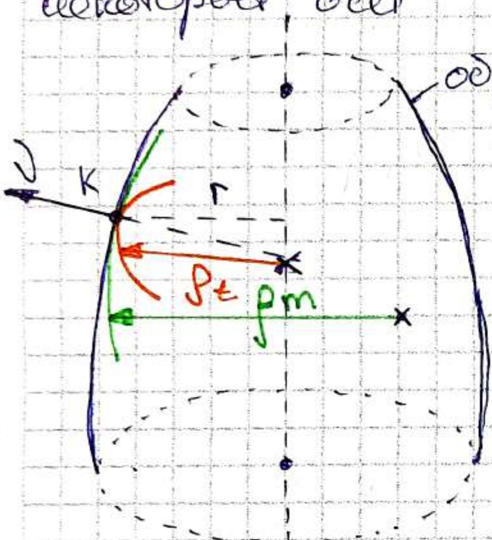
<u>Оболочка</u> - тело, образованное двумя близкими поверхностями, у которого один размер (толщина) много меньше двух других.

Поверхность, равноотстоящая от образующих поверхностей, называется <u>срединной поверхностью</u>

<u>Оболочка вращения</u> - оболочка, срединная поверхность которой получена вращением образующей вокруг некоторой оси

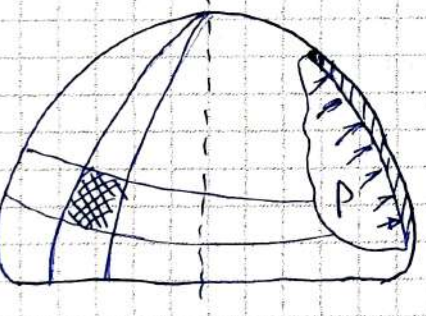
Теория расчета оболочек вращения.Вывод уравнения Лапласа

безмоментная теория расчета



В любой точке срединной поверхности оболочки вращения можно выделить два направления: меридиональное (вдоль образующей) и окружное или тангенциальное (перпендикулярно меридиональному)

- ρ_m - радиус кривизны меридионального направления в рассматриваемой точке (т.е. радиус кривизны образующей в этой точке)
- ρ_t - радиус кривизны окружного направления в рассматриваемой точке.



Выделим элемент двумя меридиональными и двумя тангенциальными сечениями

σ_m - меридиональные напряжения

σ_t - тангенциальное напряжение

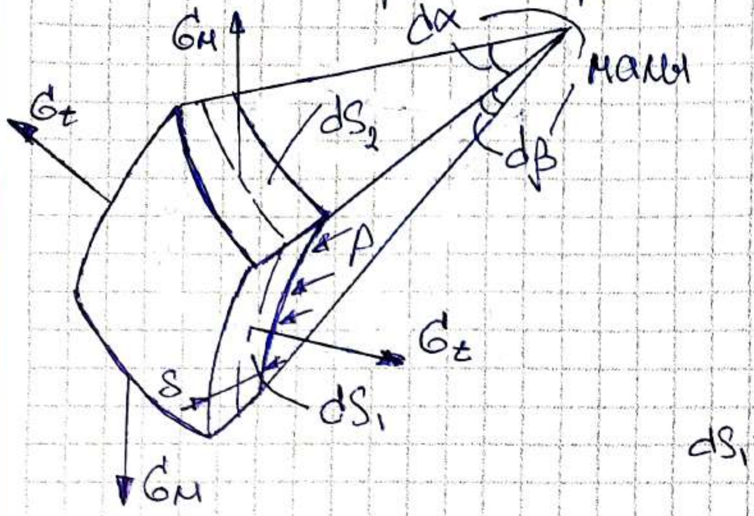
В безмоментной теории оболочек напряжения по толщине распределяются равномерно. В силу симметрии касательные напряжения отсутствуют.

<u>Основные допущения:</u>

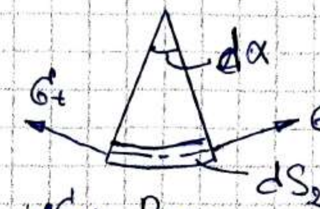
1) Оболочка осесимметричная, нагруженная распределенной нагрузкой
2) Отсутствуют сосредоточенные нагрузки
3) Отсутствуют резкие переходы в самой оболочке
4) гипотеза о ненадавливании слоев: слои оболочки при её деформировании друг на друга не влияют.

Оболочка считается тонкостенной, если $\frac{\rho_м}{\delta} > 7$

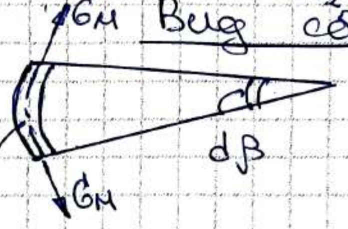
Вырезаем элемент двумя меридиональными и тангенциальными сечениями и рассматриваем уравнение равновесия



Вид сверху:



Вид сбоку



Спроектируем силы на направление радиусов:

$$P\,dS_1\,dS_2 = \sigma_t\,dS_1\,\delta\,\frac{d\alpha}{2}\cdot 2 + 2\,\sigma_м\,dS_2\,\delta\,\frac{d\beta}{2}$$

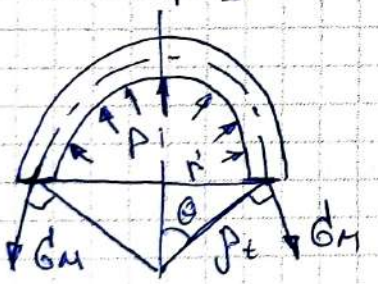
$$dS_1 = d\beta\cdot\rho_м;\qquad dS_2 = d\alpha\cdot\rho_t$$

$$P\,d\beta\,\rho_м\,d\alpha\,\rho_t = \sigma_t\,d\beta\,\rho_м\,\delta\cdot d\alpha + \sigma_м\,d\alpha\,\rho_t\,\delta\,d\beta$$

$$P\rho_м\rho_t = \sigma_t\rho_м\delta + \sigma_м\rho_t\delta$$

$$\frac{\sigma_м}{\rho_м} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{P}{\delta}$$ | Формула Лапласа

$\sigma_м$ определяется из условия равновесия



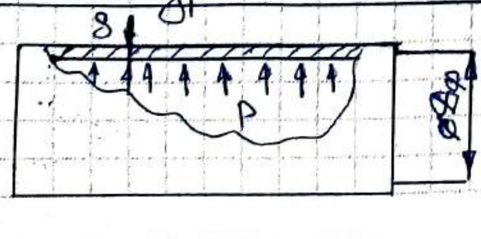
$$p\cdot\pi r^2 - \sigma_м\cdot\delta\cdot 2\pi r\sin\theta = 0$$

$$\sigma_м = \frac{p\cdot\rho_t}{2\delta}$$

Определение напряжений в цилиндрической и сферической оболочках

№22. Определение напряжений в цилиндрической и сферической оболочках, нагруженных равномерным внутренним давлением по безмоментной теории

• Цилиндрическая оболочка:



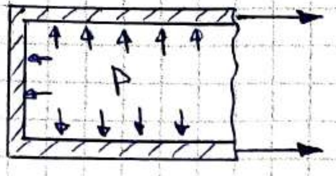
$$\rho_м = \infty$$

$$\rho_t = \frac{D_{ср}}{2}$$

Из уравнения Лапласа: определим σ_t:

$$\frac{\sigma_м}{\cancel{\rho_м}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \Rightarrow \sigma_t = p\cdot\frac{\rho_t}{\delta} \Rightarrow \sigma_t = \frac{pD_{ср}}{2\delta}$$

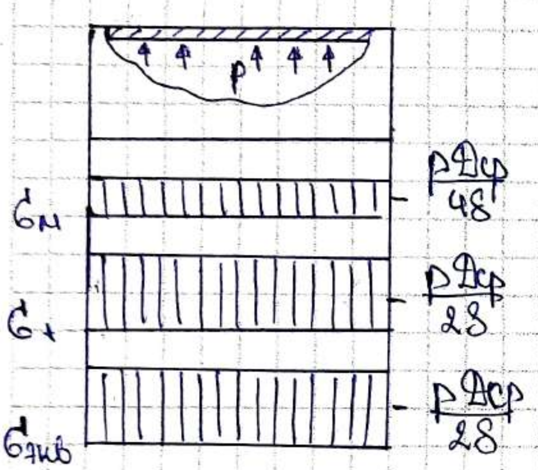
Из условия равновесия определим $\sigma_м$:



$$\sigma_м\cdot\pi D_{ср}\delta = p\cdot\frac{\pi D_{ср}^2}{4}$$

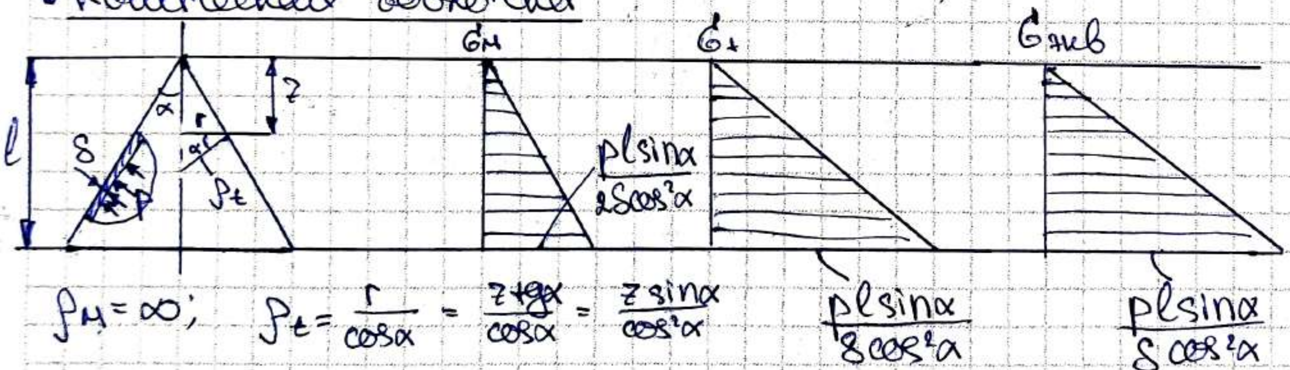
$$\sigma_м = \frac{pD_{ср}}{4\delta}$$

Получили: $\sigma_м = \dfrac{pD_{ср}}{4\delta}$ и $\sigma_t = \dfrac{pD_{ср}}{2\delta}$ | котельные формулы



P.S. Тангенциальное напряжение σ_t вдвое больше меридиального $\sigma_м$. Поэтому трубопроводы, садовые шланги, длинные узкие воздушные шарики от давления лопаются вдоль, а не поперёк.

• Коническая оболочка

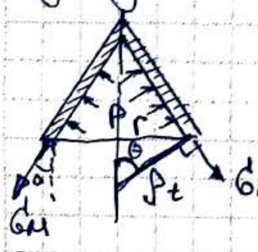


$$\rho_м = \infty;\quad \rho_t = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{z\,tg\alpha}{\cos\alpha} = \frac{z\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Из уравнения Лапласа определим σ_t:

$$\frac{\sigma_м}{\cancel{\rho_м}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \Rightarrow \sigma_t = \frac{p\rho_t}{\delta} = \frac{pz\sin\alpha}{\delta\cos^2\alpha} \quad \Big|\ \begin{aligned} &z=0:\ \sigma_t = 0 \\ &z=l:\ \sigma_t = \frac{pl\sin\alpha}{\delta\cos^2\alpha}\end{aligned}$$

Из условия равновесия определим $\sigma_м$:

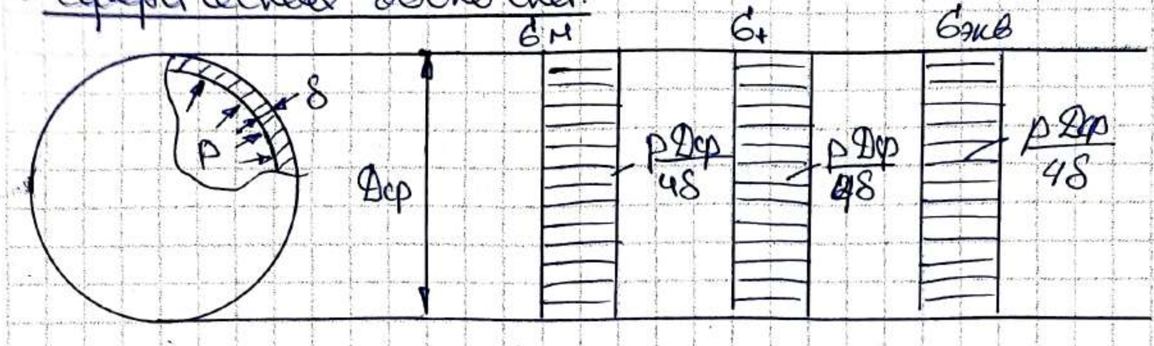


$$\sigma_м\cdot(2\pi r\delta)\cdot\cos\alpha = p\cdot\pi r^2$$

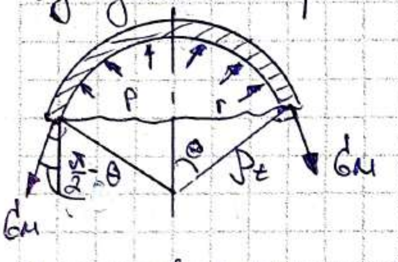
$$2\sigma_м\,\delta\cos\alpha = p\cdot r$$

$$\sigma_м = \frac{p\cdot r}{2\delta\cos\alpha} = \frac{p\cdot z\,tg\alpha}{2\delta\cos\alpha} = \frac{pz\sin\alpha}{2\delta\cos^2\alpha} \quad \Big|\ \begin{aligned} &z=0:\ \sigma_м = 0 \\ &z=l:\ \sigma_м = \frac{pl\sin\alpha}{2\delta\cos^2\alpha}\end{aligned}$$

• сферическая оболочка:



Из условия равновесия определим $\sigma_м$:



$$\sigma_м \cdot (2\pi r \cdot \delta) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = p \cdot \pi r^2$$

$$2\sigma_м \cdot r \delta \sin\theta = pr^2$$

$$\sigma_м = \frac{pr}{2\delta \sin\theta} = p\frac{r\sin\theta}{2\delta\sin\theta} = \frac{p\rho_t}{2\delta} = \frac{pD_{ср}}{4\delta}$$

Из уравнения Лапласа определим σ_t:

$$\frac{\sigma_м}{\rho_м} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \Rightarrow \sigma_t = \frac{p\rho_t}{\delta} - \sigma_м = \frac{pD_{ср}}{2\delta} - \frac{pD_{ср}}{4\delta} = \frac{pD_{ср}}{4\delta}$$

Расчет толстостенных труб.Вывод дифференциального уравнения равновесия трубы

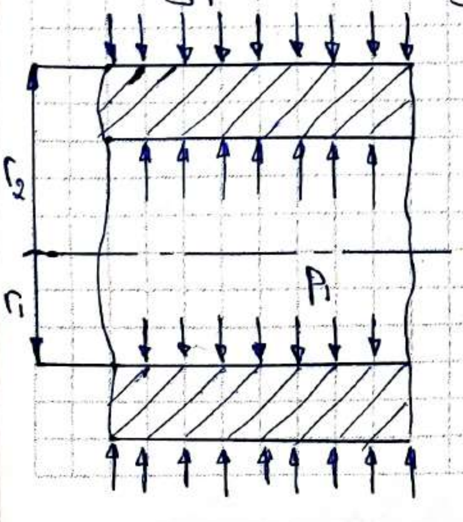
№23 Расчет толстостенных труб. Постановка задачи. Вывод дифференциального уравнения равновесия элемента трубы.

Рассчитывать напряженное состояние толстостенного цилиндра по уравнению Лапласа нельзя по двум причинам:

1) Нельзя пренебрегать неравномерностью распределения окружного напряжения σ_t по высоте стенки толстостенного цилиндра

2). Окружное σ_t и радиальное σ_r напряжения в толстостенном цилиндре есть величины одного порядка, оба эти напряжения должны быть учтены в расчетных формулах.

Рассмотрим толстостенную трубу, нагруженную внешним и внутренним давлением



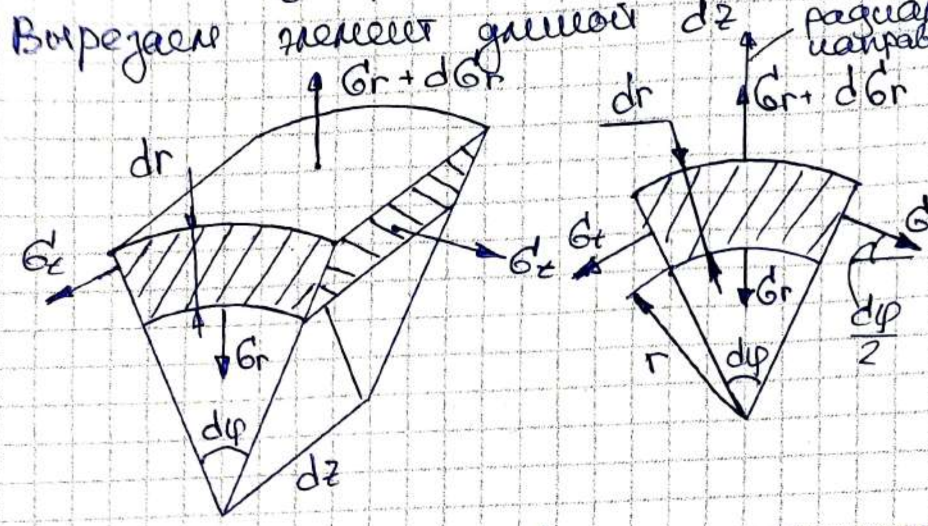
r_1 - внутренний радиус
r_2 - внешний радиус.

Основное допущение: труба бесконечная, а ось z вдоль трубы $\Rightarrow$ $\sigma_z = const$

Труба бесконечная $\Rightarrow \sigma_z = 0$ либо определяется из уравнения равновесия, если труба конечной длины.

Запишем дифференциальное уравнение равновесия

Вырезаем элемент длиной dz



В силу симметрии касательные напряжения равны нулю.

$$\sin\frac{d\varphi}{2}\approx\frac{d\varphi}{2}$$

Запишем проекцию всех сил на радиальное направление:

$$-\sigma_r\cdot r\,d\varphi\,dz-2\sigma_t\,dr\,dz\,\frac{d\varphi}{2}+(\sigma_r+d\sigma_r)(r+dr)\,d\varphi=0$$

$$-\sigma_r\cdot r-\sigma_t\,dr+\sigma_r\cdot r+\sigma_r\,dr+d\sigma_r\cdot r+\cancel{d\sigma_r\,dr}=0$$

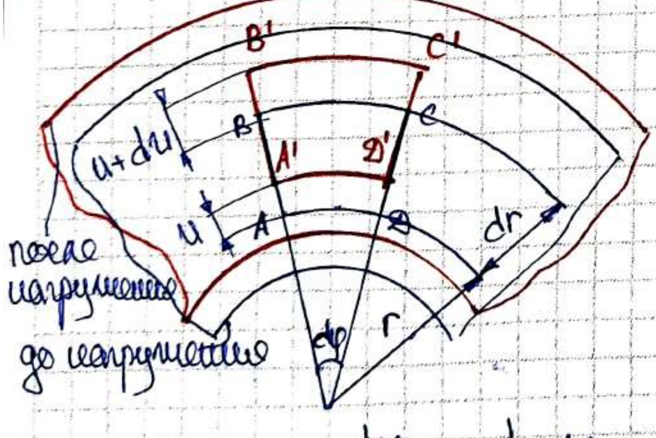
$$-\sigma_t\,dr+\sigma_r\,dr+d\sigma_r\cdot r=0$$

$$r\cdot\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_t=0$$

$$\frac{d}{dr}(r\cdot\sigma_r)-\sigma_t=0$$ | уравнение равновесия

Условие совместности деформации

№24. Расчет толстостенных труб. Постановка задачи. Условие совместности деформаций.



Деформация элемента в радиальном направлении:

$$\varepsilon_r=\frac{A'B'-AB}{AB}=\frac{(dr+u+du-u)-dr}{dr}=\frac{du}{dr}$$

Деформация элемента в окружном направлении:

$$\varepsilon_t=\frac{A'D'-AD}{AD}=\frac{(r+u)\,d\varphi-d\varphi\cdot r}{d\varphi\cdot r}=\frac{u}{r}$$

$$u=\varepsilon_t\cdot r,\quad \varepsilon_r=\frac{du}{dr}\ \Rightarrow\ \frac{du}{dr}=\frac{d}{dr}(\varepsilon_t\cdot r),\quad \varepsilon_r=\frac{du}{dr}\ \Rightarrow\ \frac{d}{dr}(\varepsilon_t\cdot r)-\varepsilon_r=0$$ | уравнение совместности деформаций

Вывод формул Ломе Ламе Леме и определение констатн интегрирования

НЕ БЫЛО ВООБЩЕ БРЕД

№25. Расчет толстостенных труб. Вывод формул Леме и определение констант интегрирования. Перемещения

Обобщение уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\cdot\sigma_r) - \sigma_t = 0 \\ \frac{d}{dr}(\varepsilon_t\cdot r) - \varepsilon_r = 0 \end{cases}$$

Для пересчета уравнения деформаций воспользуемся обобщенным законом Гука:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t) \text{ и } \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\cdot\sigma_r) - \sigma_t = 0 \\ \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r)\right) - \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\cdot\sigma_r) - \sigma_t = 0 \\ \frac{d}{dr}(r(\sigma_t - \nu\sigma_r)) - (\sigma_r - \nu\sigma_t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\cdot\sigma_r) - \sigma_t = 0 \\ \frac{d}{dr}(\sigma_t\cdot r) - \nu\frac{d}{dr}(\sigma_r\cdot r) - (\sigma_r - \nu\sigma_t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t = 0 \\ \frac{d}{dr}(r\cdot\sigma_t) - \nu\sigma_t - \sigma_r + \nu\sigma_t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t = 0 \quad (1) \\ \frac{d}{dr}(r\sigma_t) - \sigma_r = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Решение системы (1)-(2)

(1) + (2):

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t + \frac{d}{dr}(r\sigma_t) - \sigma_r = 0$$

$$\frac{d}{dr}(r(\sigma_t + \sigma_r)) = 0$$

$$\sigma_t + \sigma_r = 2A = const$$

(1) − (2):

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t - \frac{d}{dr}(r\sigma_t) + \sigma_r = 0$$

$$\frac{d}{dr}(r(\sigma_t - \sigma_r)) = 0$$

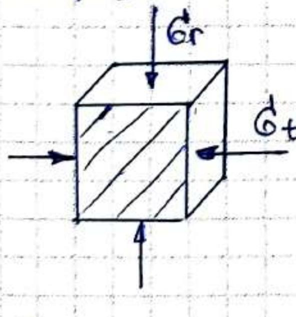
$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{2B}{r^2} = const$$

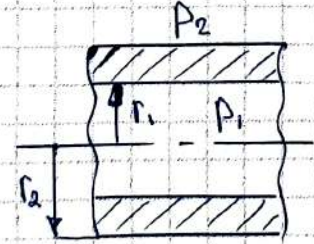
Решение данной системы:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_r &= \frac{2B}{r^2} \\ \sigma_t + \sigma_r &= 2A \end{aligned}\right| \Rightarrow \sigma_{\substack{r\\t}} = A \mp \frac{B}{r^2}$$

A, B - определяются из граничных условий.

Определение констант интегрирования



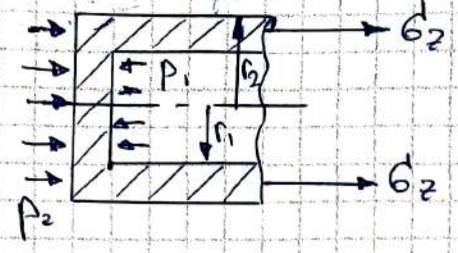


$$\sigma_{\substack{r\\t}} = A \mp \frac{B}{r^2}$$

При $r = r_1$: $\sigma_r = -p_1$;
$r = r_2$: $\sigma_r = -p_2$;

$$\left.\begin{cases} A - \frac{B}{r_1^2} = -p_1 \\ A - \frac{B}{r_2^2} = -p_2 \end{cases}\right| \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ B &= \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned}$$

Если труба имеет дно, то возникает осевое напряжение σ_z. σ_z определяют из условия равновесия:



$$\sum z_i = 0: \quad \sigma_z \pi (r_2^2 - r_1^2) = p_1 \pi r_1^2 - p_2 \pi r_2^2$$

$$\sigma_z = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Перемещение

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} \Rightarrow u = \varepsilon_t \cdot r \Rightarrow u = \frac{r}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_r)$$

обобщенный закон Гука

Используем формулы σ_r и σ_t, получим:

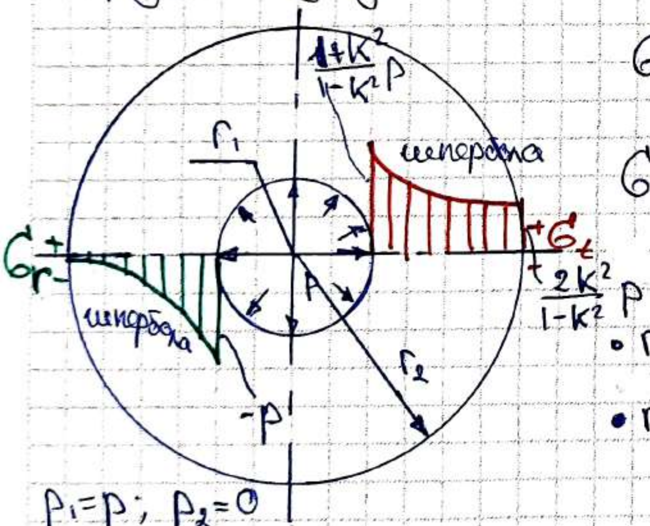
$$u = \frac{r}{E}\left(A - \frac{B}{r^2} + \nu\left(A - \frac{B}{r^2}\right)\right) \Rightarrow u = \frac{1-\nu}{E} A r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{B}{r}$$

Задача Ломе. Частные случаи

Задача Ламе. Распределение окружных и радиальных напряжений в толстостенной трубе, нагруженной внутренним давлением

№26. Задача Ламе. Частные случаи

- Труба под действием внутреннего давления: НАДО



$$\sigma_{r,t} = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp \frac{p \cdot r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}; \quad k = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\sigma_{r,t} = \frac{p k^2}{1-k^2} \mp \frac{p \cdot r_1^2}{1-k^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

- $r = r_1: \quad \sigma_r = -p; \quad \sigma_t = \frac{1+k^2}{1-k^2} p$
- $r = r_2: \quad \sigma_r = 0; \quad \sigma_t = \frac{2k^2}{1-k^2} p$

$p_1 = p; \; p_2 = 0$

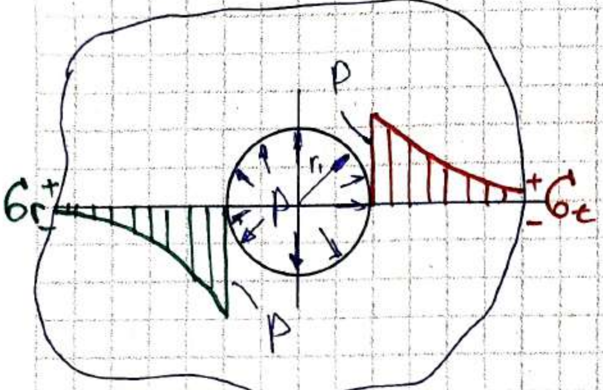
Наиболее опасной является точка на внутренней поверхности. Покажем, что увеличение толщины приводит к повышению давления. Для этого воспользуемся теорией Треска-Сен-Венана:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_r = \frac{p(1+k^2)}{1-k^2} + p = \frac{2p}{1-k^2}$$

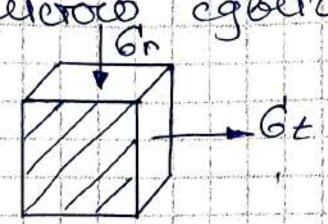
$$\sigma_{экв} = \frac{\sigma_T}{[n]} \Rightarrow [p] = \frac{\sigma_t}{[n]} \cdot \frac{1-k^2}{2} \Rightarrow$$ увеличение размеров (толщины) приводит к повышению давления.

НЕ НАДО

• Плита с отверстием нагруженная внутренним давлением.



Точки плиты с отверстием пребывают в состоянии чистого сдвига:

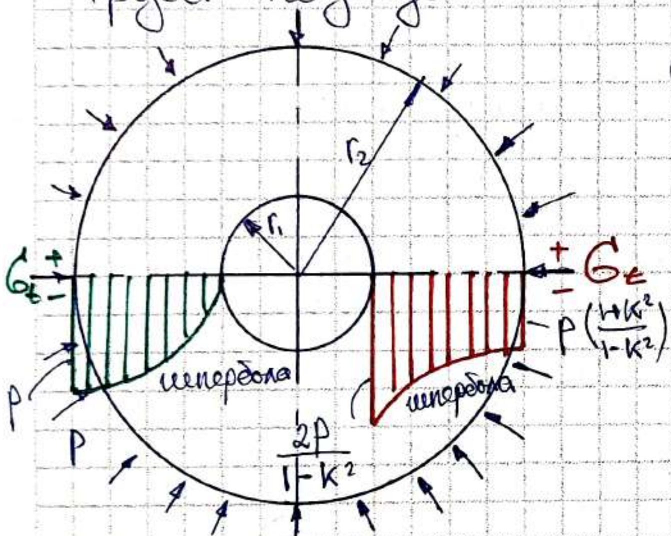


Наиболее опасной являются точки на внутренней поверхности.

$r_2 \to \infty$: $k=0$

Задача Ламе. Распределение окружных и радиальных напряжений в толстостенной трубе, нагруженной внутренним давлением

• Труба под действием внешнего давления НАДО



$$\sigma_{r,t} = \frac{-p r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp \frac{(-p)\cdot r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\cdot\frac{1}{r^2}\ ;\ k=\frac{r_1}{r_2}$$

$$\sigma_{r,t} = -\frac{p}{1-k^2} \mp \frac{(-p)\, r_1^2}{1-k^2}\cdot\frac{1}{r^2}$$

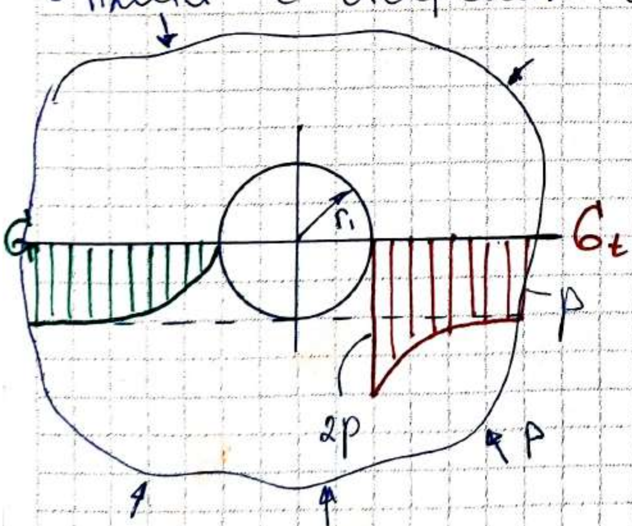
• $r=r_1$: $\sigma_r = 0$; $\sigma_t = \frac{-2p}{1-k^2}$

• $r=r_2$: $\sigma_r = -p$; $\sigma_t = \frac{-p(1+k^2)}{1-k^2}$

$p_1 = 0$; $p_2 = p$

• Плита с отверстием нагруженная внешним давление

НЕ НАДО



Нарушение сплошности (отверстие) - приводит к скачку напряжения

Отверстие является концентратором напряжения

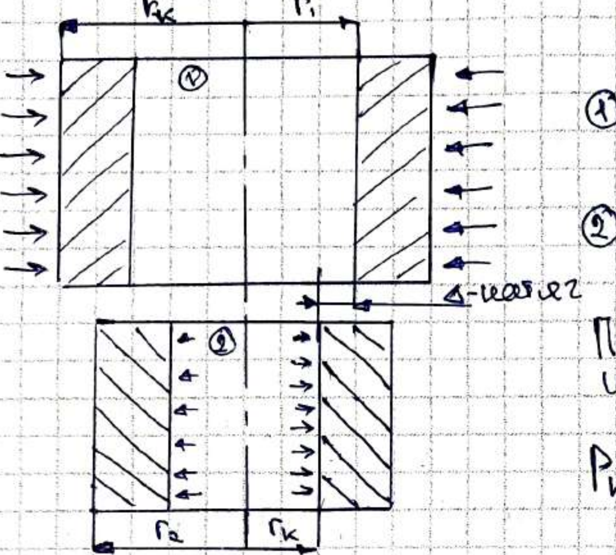
$r_2 \to \infty$; $k=0$

№27. Составные трубы

Составные трубы

НЕ БЫЛО

- запрессовываем одну трубу в другую ⇒ появляется контактное напряжение p_k. Когда подается рабочее давление, оно будет равномерно распределять окружное напряжение по продольным сечениям, тем самым уменьшая опасное напряжение.



Натяг: $\Delta = u_2 - u_1$

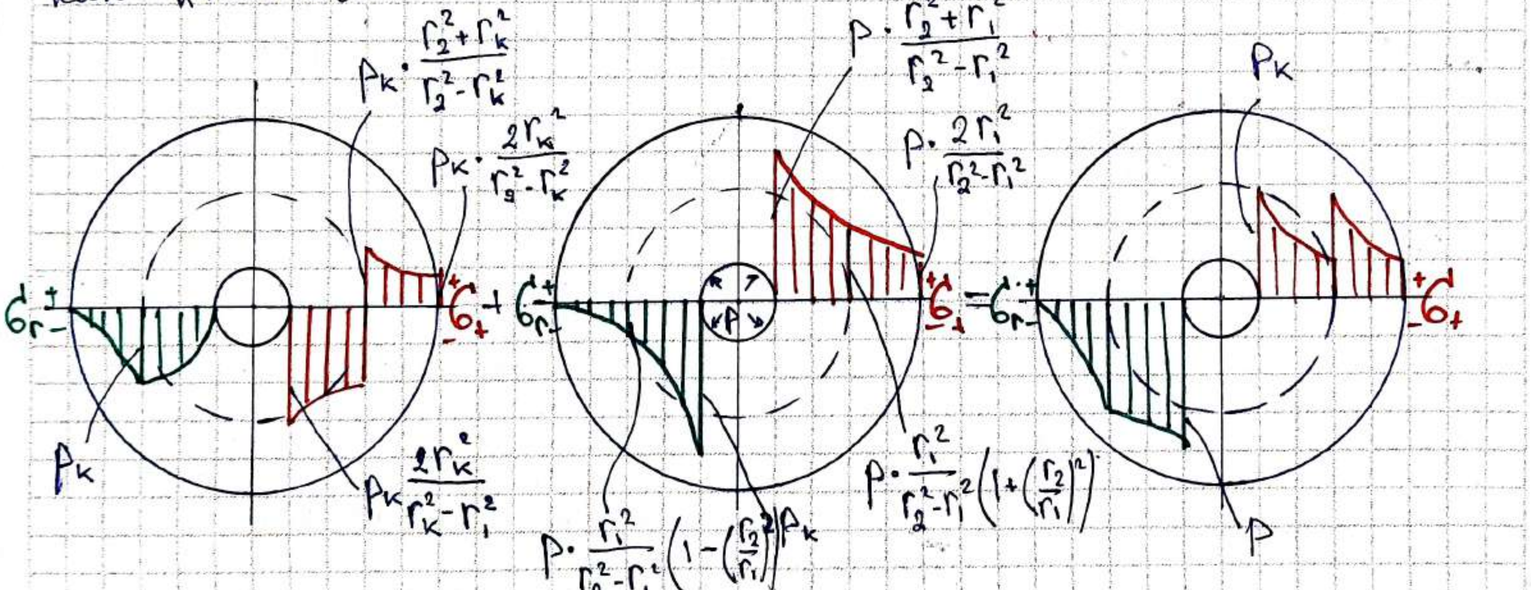
① $u_1 = \frac{1-\nu}{E} r_k \cdot \left(\frac{-p_k r_k^2}{r_k^2 - r_1^2}\right) + \frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{1}{r_k}\left(\frac{-p_k r_1^2 r_k^2}{r_k^2 - r_1^2}\right)$

② $u_2 = \frac{1-\nu}{E} r_k \frac{p_k r_k^2}{r_k^2 - r_1^2} + \frac{1+\nu}{E}\frac{1}{r_k}\left(\frac{p_k r_k^2 r_2^2}{r_2^2 - r_k^2}\right)$

Подставим в выражение для Δ и получим:

$$p_k = \frac{\Delta E}{2 r_k^3}\cdot\frac{(r_2^2 - r_k^2)(r_k^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}$$

Найдя контактное давление, рассмотрим задачу как „монолит“



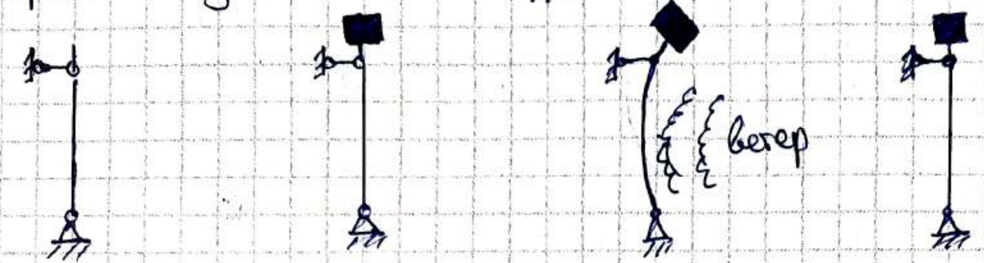
В результате наложения двух напряжений уменьшаются растягивающие напряжения на внутренней поверхности ⇒ выравнивание напряжений ⇒ повышение прочности (Автофретирование - обжатие)

Устойчивость продольно сжатых стержней.бифурнация форм равновесия.критическая сила

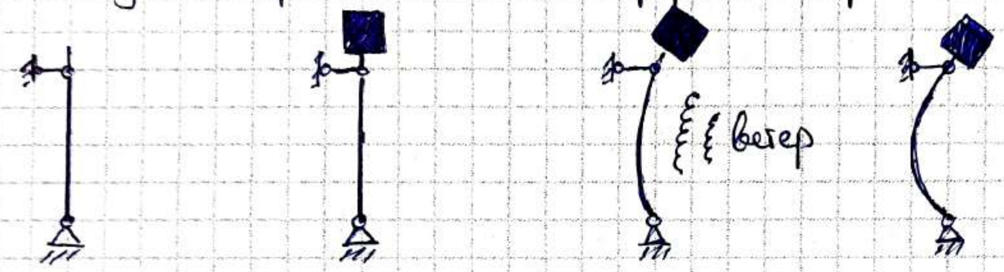
примеры потери устойчивости

№28. Устойчивость продольно сжатых стержней. Определение основных понятий: устойчивость, бифуркация форм равновесия, критическая сила.

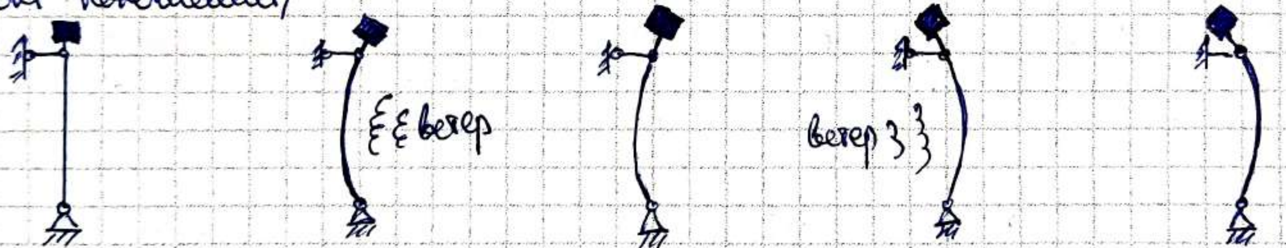
Стержень, оставаясь прямолинейным, удерживает на себе небольшой груз. Если бесконечно малое внешнее воздействие отклонит его и исчезнет, стержень снова вернет себе прямолинейную форму. В этом случае прямолинейная форма стержня <u>устойчива</u>



Большой груз стержень удержит, только будучи прямолинейным. Любое малое отклонение приводит к нарастанию прогибов. В этом случае прямолинейная форма стержня <u>неустойчива</u>



Между устойчивым и неустойчивым состояниями существует также состояние <u>безразличного равновесия</u>: груз можно подобрать таким образом, что при малом отклонении стержень не вернется в прямолинейное состояние, но еще не будет наращивать эти прогибы самопроизвольно (попросту замрет в этом положении)



Продольная нагрузка, приводящая стержень в состояние безразличного равновесия, называется <u>критической.</u>

<u>Потеря устойчивости</u> — это не процесс быстрого развития больших прогибов, а потеря стержнем способности возвращать себе исходную форму после бесконечно малого отклонения внешним воздействием.

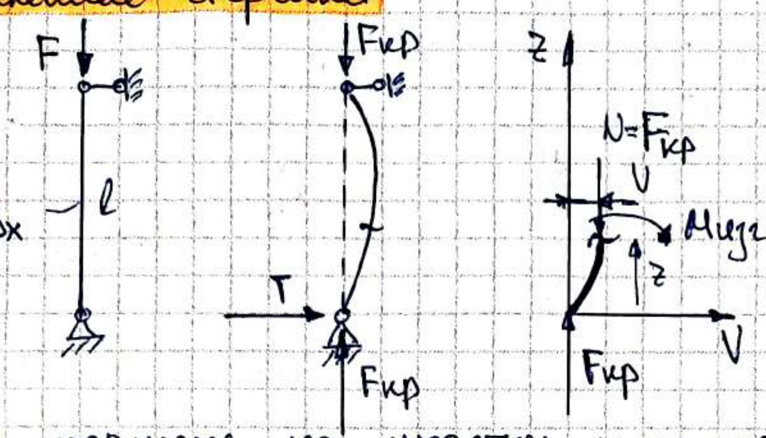
<u>Бифуркация форм равновесия</u> — явление, при котором одной нагрузке соответствует несколько равновесных форм

<u>Основные допущения</u>

1) Стержень идеально прямой;
2) Сила приложена строго по центру сечения;
3) Материал стержня — однородный.

№29. Вывод формулы определения критической силы для шарнирно закрепленного стержня

Пример 1



Координаты выбираем так, чтобы было $-F_{кр} V$

Разбиваем стержень на участки и записываем условие равновесия:

$$-M_{изг} - F_{кр} V = 0$$
$$EJ_{min} V'' + F_{кр} V = 0$$
$$V'' + \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} V = 0$$

Вывод формулы определения критической силы
для шарнирно закрепленного стержня

$$K^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} \Rightarrow V'' + KV = 0 \Rightarrow V = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz$$

Константы C_1 и C_2 определяем из граничных условий:

1) $z = 0$: $V = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$
2) $z = l$: $V = 0 \Rightarrow C_2 \cdot \sin(kl) = 0 \Rightarrow kl = \pi n$, где $n = 1, 2, 3$

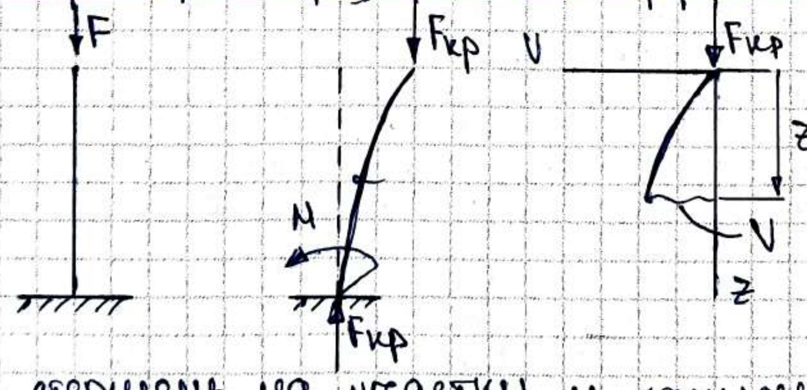
$$k = \frac{\pi n}{l} \Rightarrow \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ_{min}}} = \frac{\pi n}{l} \Rightarrow F_{кр} = \frac{\pi^2 n^2 EJ_{min}}{l^2}$$ | формула Эйлера

Обычно рассматривают первую форму потери устойчивости ($n=1$).

Устойчивость сжатых стрежней.Коэффициент приведения длины

№30. Устойчивость сжатых стержней. Коэффициент приведения длины. Примеры определения коэффициента приведения длины.

Пример 2



Разбиваем стержень на участки и записываем условие равновесия:

$$EJ_{min} V'' = -F_{кр} V \Rightarrow EJ_{min} V'' + F_{кр} V = 0 \Rightarrow V'' + \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} V = 0$$

$$K^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} \Rightarrow V'' + KV = 0 \Rightarrow V = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz$$

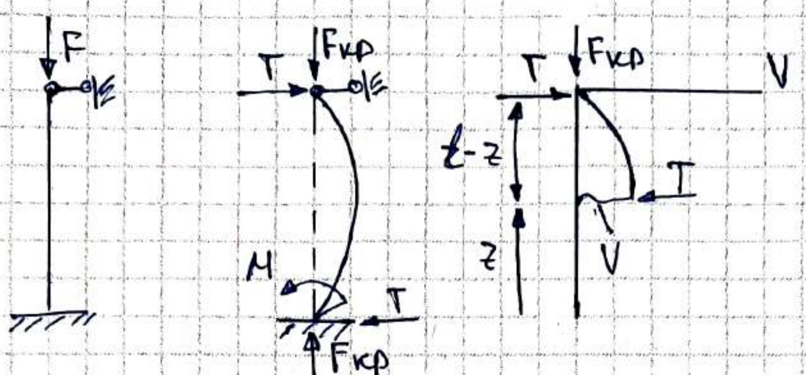
Константы C_1 и C_2 определяем из граничных условий:

1) $z=0$: $V=0 \Rightarrow C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

2) $z=l$: $V'=0 \Rightarrow C_1 k\cos kl - C_2 k\sin kl = 0 \Rightarrow \cos kl = 0 \quad (C_1\neq 0, C_2=0, k\neq 0)$

$$kl = \frac{\pi}{2}n \Rightarrow k = \frac{\pi n}{2l} \Rightarrow \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ_{min}}} = \frac{\pi n}{2l} \Rightarrow F_{кр} = \frac{\pi^2 n^2 EJ_{min}}{(2l)^2}$$

Пример 3



Разбиваем стержень на участки и записываем условие равновесия:

$$EJ_{min}V'' = -F_{кр}V + T(l-z)$$

$$V'' + \frac{F_{кр}}{EJ_{min}}V = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}}\cdot\frac{T(l-z)}{F_{кр}};\quad k^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{min}} \Rightarrow V'' + k^2V = k^2\cdot\frac{T(l-z)}{F_{кр}}$$

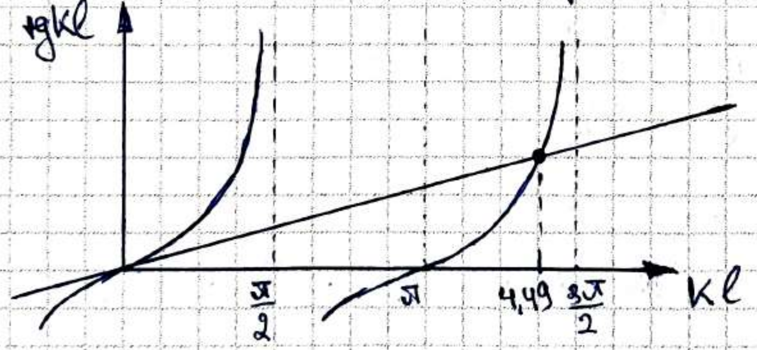
$$V = C_1\sin kz + C_2\cos kz + \frac{T}{F_{кр}}(l-z)$$

Получили 3 неизвестных, запишем 3 граничных условия:

1) $z=0$: $V=0 \Rightarrow C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1 + \frac{T}{F_{кр}}\cdot l = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{Tl}{F_{кр}}$

2) $z=0$: $V'=0 \Rightarrow C_1k\cdot 1 - C_2k\cdot 0 - \frac{T}{F_{кр}} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{T}{F_{кр}\cdot k}$

3) $z=l$: $V=0 \Rightarrow \frac{T}{F_{кр}\cdot k}\sin kl - \frac{Tl}{F_{кр}}\cos kl = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} kl = kl$



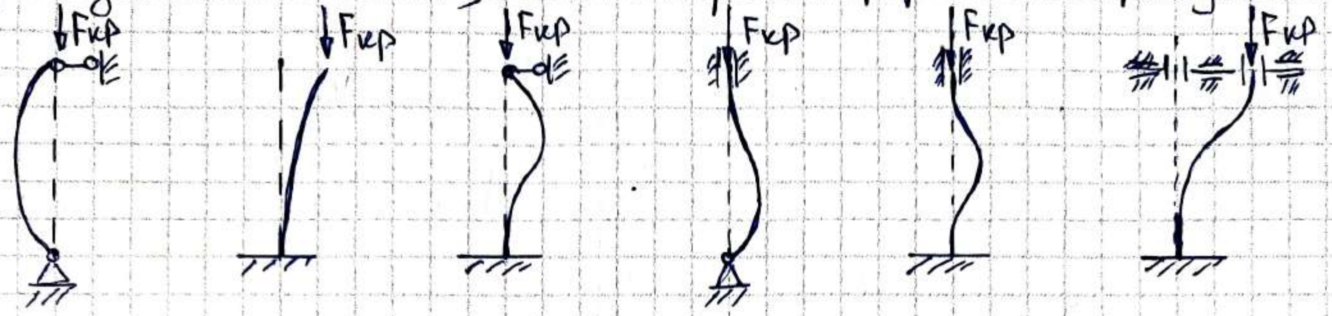
$$kl = 4{,}49 \Rightarrow k = \frac{4{,}49}{l} \Rightarrow \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ_{min}}} = \frac{4{,}49}{l} \Rightarrow F_{кр} = \frac{4{,}49^2 EJ_{min}}{l} \Rightarrow F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(0{,}7l)^2}$$

Проанализируем примеры 1-3:

Мы получили одинаковую структуру для формулы $F_{кр}$ для разных стоек. Расчеты показывают, что критическая сила для любой стойки выражается формулой:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2},$$

где μ - коэффициент приведения длины - показывает во сколько раз нужно изменить длину стойки Эйлера, чтобы $F_{кр}$ была равна заданной для данной стойки. Другая интерпретация: $\mu = \frac{1}{n}$ - где n число полуволн в первой форме потери устойчивости.



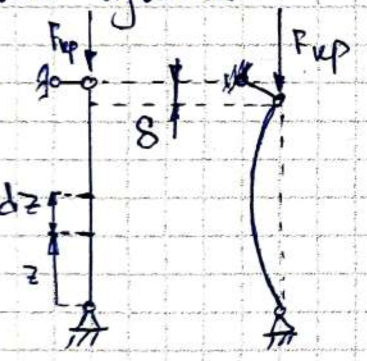
$\mu=1$ $\mu=2$ $\mu=0{,}7$ $\mu=0{,}7$ $\mu=0{,}5$ $\mu=1$

Вывод формулы вычисления критической нагрузки энергетическим методом

устойчивость сжатых стержней

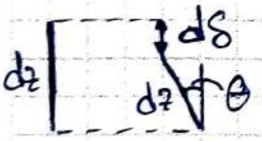
№31. Устойчивость сжатых стержней. Вывод формулы вычисления критической нагрузки энергетическим методом

Энергетический метод основан на принципе возможных перемещений. При $F=F_{кр}$ переход стойки из прямолинейной формы в смежную изогнутую можно рассматривать, как бесконечно малое возможное перемещение в рамках одного и того же состояния безразличного равновесия. При этом работа критической силы в точности должна быть равна работе внутренних сил. А работа внутренних сил - это потенциальная энергия изгиба:



$$U=\int_0^l \frac{M_{изг}^2\,dz}{2EJ_{min}} \qquad M_{изг}=EJ_{min}V'' \;\Rightarrow\; U=\frac{1}{2}\int_0^l (V'')^2 EJ_{min}\,dz$$

(1): $F=F_{кр}$
(2): $W=U$
(3): $W=F\cdot\delta$

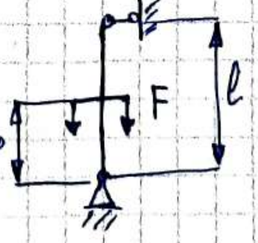


θ - мал ⇒ $\sin\theta\approx\theta$

$$d\delta = dz - dz\cos\theta = dz(1-\cos\theta) = dz\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2} = dz\cdot 2\cdot\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\theta^2 dz$$

$$d\delta = \frac{1}{2}\theta^2 dz \;\Rightarrow\; \delta=\int_0^{l_0}\frac{1}{2}(V')^2 dz$$

$$F_{кр}=\frac{U}{\delta} \;\Rightarrow\; F_{кр}=\frac{\int_0^l (V'')^2 EJ_{min}\,dz}{\int_0^{l_0}(V')\,dz},$$



где l - полная длина стойки,
l_0 - длина участка стойки, сжатого силой

Чем точнее мы зададим форму прогиба, тем точнее получим значение $F_{кр}$. Результат полученный энергетическим методом - завышен.

Способы задания прогиба:

1) С помощью тригонометрической функции
2) С помощью поперечного изгиба
3) С помощью полинома n-й степени: задача Эйлера гугли дружок

$$V = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

Степень полинома определяется из граничных условий

Граничные условия → геометрические (условия закрепления)
→ силовые

Эйлера.Определения значения стрежня.График зависимости критических напряжений от гибкости

задача Эйлера

№32 Пределы применимости формулы Эйлера. Определение значения гибкости стержня. График зависимости критических напряжений от гибкости

Сила, выводящая длинный стержень из состояния устойчивого равновесия, относительно невелика, поэтому сжимающим действием на стержень можно пренебречь и учитывать только действие внутреннего изгибающего момента.

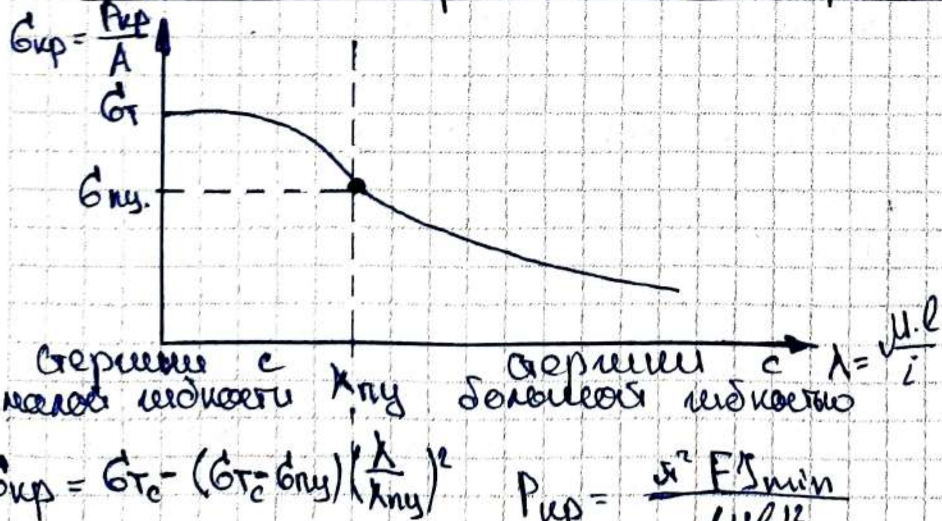
Для приведения короткого стержня в состояние безразличного равновесия, требуется большая продольная сила. Сила может быть настолько большой, что сжатый материал стержня может „выйти“ за пределы упругости.

Для того чтобы отличить „длинные“ и „короткие“ стержни вводят понятие гибкости:

$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$, где
- λ – гибкость стержня (безразмерная величина);
- μ – коэффициент приведенной длины (безразмерный);
- l – длина стержня (м)
- i – радиус инерции поперечного сечения (м)
- J_x – момент инерции поперечного сечения ($м^4$)
- A – площадь поперечного сечения ($м^2$)

$i = \sqrt{\frac{J_x}{A}}$

Зависимость критического напряжения от гибкости



$\lambda_{пц}$ – гибкость стержня, в котором потеря устойчивости ($P = P_{кр}$) происходит одновременно с выходом материала за пределы линейной упругости ($\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E J_x}{(\mu l)^2 A} = \sigma_{пц}$$

$$\sigma_{кр} = \sigma_{т_с} - (\sigma_{т_с} - \sigma_{пц})\left(\frac{\lambda}{\lambda_{пц}}\right)^2$$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2}$$

$$\lambda_{пц} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$$

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$$

№33. Расчет на устойчивость по коэффициенту понижения допускаемых напряжений.

$$\underbrace{[\sigma]_{доп}}_{\text{допустимое напряжение при потере устойчивости}} = \varphi(\lambda)[\sigma]_{сж}$$

Расчет на устойчивость по коэффициенту

$\varphi(\lambda)$ - коэффициент понижения допускаемых напряжений (получен через отношение критической силы к допускаемой).

Проверочный расчет: знаем размеры сечения и знаем l => определяем $P_{кр}$

Проектировочный расчет: длина стержня l неизменна => определяем размеры сечения так, чтобы $[P]_{кр}$ для него была немного меньше или равна действующей на стержень силе P.

Расчеты на прочность при циклически изменяющихся напряжениях.Характеристики цикла.Кривая усталости и определения предела выносливости

НЕ БЫЛО

№34. Расчеты на прочность при циклически изменяющихся напряжениях. Основные понятия об усталости материалов. Характеристики цикла. Кривая усталости и определение предела выносливости

Усталость - накопление необратимых изменений при действии переменных нагрузок.

Усталостное разрушение - разрушение за счет постепенного развития трещин.

Выносливость - способность материала противостоять усталости

Усталостные трещины зарождаются в местах изменения формы детали или изменения поверхности.

На сопротивление усталости влияют абсолютные размеры поперечного сечения, качество обработки поверхности, и состояние поверхностного слоя.

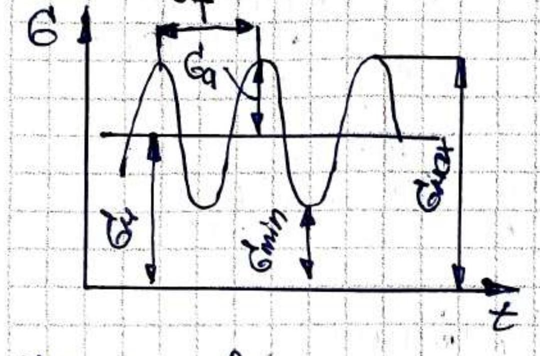
Механизм и особенности усталостного разрушения

Конструкционные материалы имеют кристаллическую структуру. Кристаллы расположены хаотично. При деформировании в наиболее неблагоприятно ориентированных кристаллах могут появиться пластические деформации, что ведет к появлению линии скольжения, по мере накопления числа циклов, количество линий скольжения увеличивается, сливаясь они образуют полосы скольжения, где и появляются микроскопические трещины.

Образование трещин занимает 30% времени;
рост усталостного разрушения ~ 60% времени;
Разрушение ~ 10-20% времени.

Напряжение при котором разрушается образец при переменных во времени нагружениях ниже чем при статическом нагружении

<u>Типы циклов</u>



• период T - время между 2 соседними экстремумами

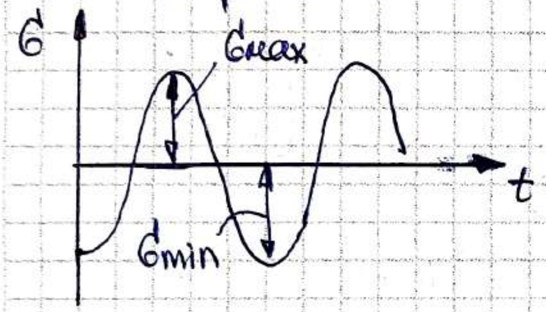
• $\sigma_m = \frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}$ - среднее напряжение цикла

• $\sigma_a = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}$ - амплитуда цикла

• $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ - коэффициент асимметрии цикла

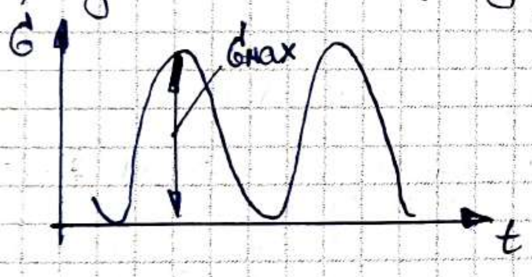
Цикл - совокупность напряжений за период их изменения.

1) <u>Симметричный цикл</u>



$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = -1$

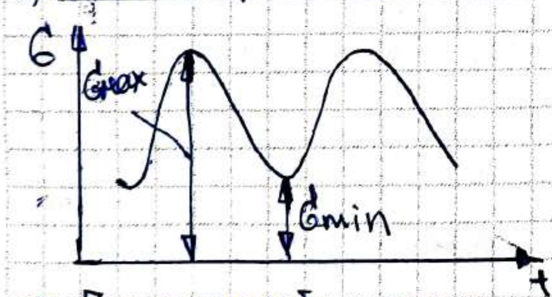
2) <u>Пульсационный (отнулевой) цикл</u>



$\sigma_{min} = 0$

$R = 0$

3) <u>Ассиметричный цикл</u>

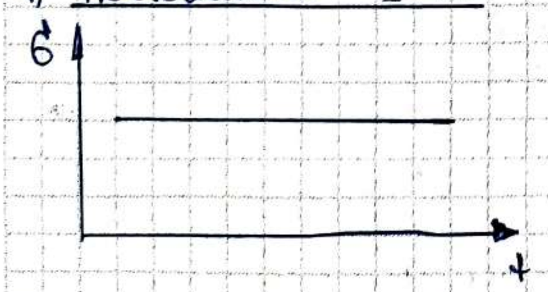


$R \neq -1$

$R \neq 0$

$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$

4) <u>Постоянный цикл</u>



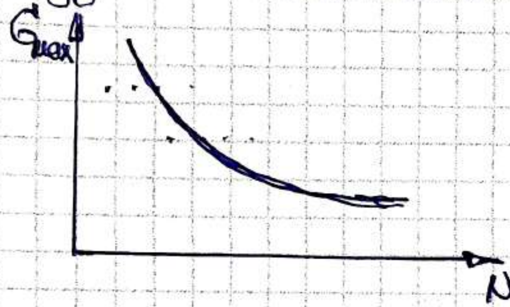
Циклы с одинаковым коэффициентом асимметрии называются <u>подобными</u>.

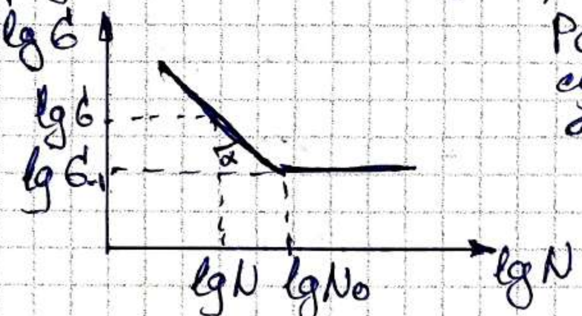
Кривая усталости и предел выносливости

Между max. напряжением цикла и числом циклов до разрушения существует зависимость определяемая кривой усталости. Проводят эксперимент на образцах диаметром 7.5 мм. Испытания проводят при различных асимметричных циклах, наиболее распространено при симметричных.
Испытания начинают от $0{,}7\sigma_{вр}$. По счетчику устанавливают сколько циклов на каждом уровне напряжений. Испытывают от 10 до 30 образцов. Далее напряжение уменьшается до тех пор пока образец не выдержит 10^7 циклов.

10^7 циклов - число принятое за базу испытаний. Для цветных металлов и сплавов принимают $5\cdot10^7 \div 10^8$

Результаты испытаний представляют в виде графиков.





Разброс более существен с $\downarrow\sigma$

Кривая, построенная по усредненным данным, называется кривой усталости или кривая Велера.

Имеется пороговое значение σ_R, что при $|\sigma_{max}| < \sigma_R$ $N\to\infty$.

Поскольку испытания ведут не до ∞, а лишь до базы, то пределом выносливости называют наибольшее значение max напряжения цикла при котором стандартный образец выдерживает базовое число циклов с малой вероятностью разрушения.

Предел выносливости обозначается σ_R, где R-коэффициент асимметрии:
- $R=-1$ σ_{-1} - при симметричном цикле
- $R=0$ σ_0 - при пульсационном цикле.

В логарифмических координатах левая ветвь представляет собой прямую:

$$tg\alpha = \frac{\lg N_0 - \lg N}{\lg\sigma - \lg\sigma_{-1}} = m$$ - показатель кривой усталости

$$\frac{\lg\frac{N_0}{N}}{\lg\frac{\sigma}{\sigma_{-1}}} = m \Rightarrow \frac{N_0}{N} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}}\right)^m \to \underbrace{N_0\sigma_{-1}^m = N\sigma^m = const}_{\text{уравнение наклонной ветви кривой усталости}}$$

$$N = N_0\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma}\right)^m$$ - ограниченное число циклов при $\sigma > \sigma_R$

Экспериментально найдены корреляционные зависимости между пределами выносливости и другими характеристиками:

$$\sigma_{-1} = (0{,}4 \div 0{,}5)\,\sigma_{вр}$$

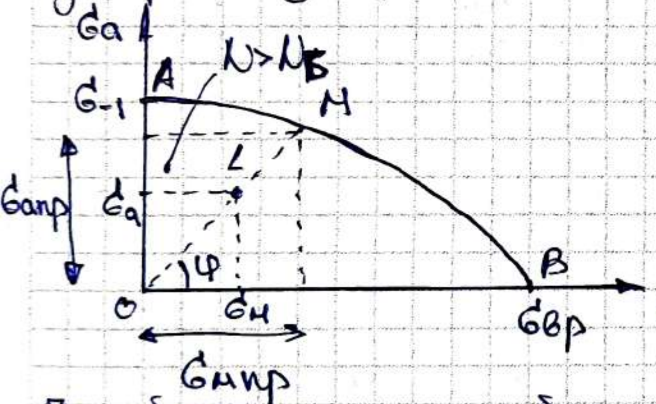
$$\sigma_{-1} = 1{,}65\,HB \quad (HB - \text{твердость материала})$$

Предел выносливости нельзя рассматривать только как характеристику материала т.к. σ_R зависит еще и от способа испытания. Например, при одноосном напряженном состоянии растяжение меньше, чем σ_R, полученное при изгибе

Усталостная прочность .Схематизация диаграммы предельных амплитуд

№35. Усталостная прочность. Схематизация диаграммы предельных амплитуд.

При эксплуатации в деталях машин могут действовать различные напряжения с различной асимметрией цикла, поэтому необходимо располагать данными о сопротивляемости материалов при действии внешних напряжений с различной асимметрией цикла. С этой целью строят диаграмму предельных амплитуд.



Точкам, лежащим на кривой AMB, соответствуют циклы при которых образец разрушается, выдержав базовое число циклов.

Точкам внутри области AMB соответствует число циклов N: $N > N_Б$

Подобные циклы изображаются точками точками, лежащими на одном луче:

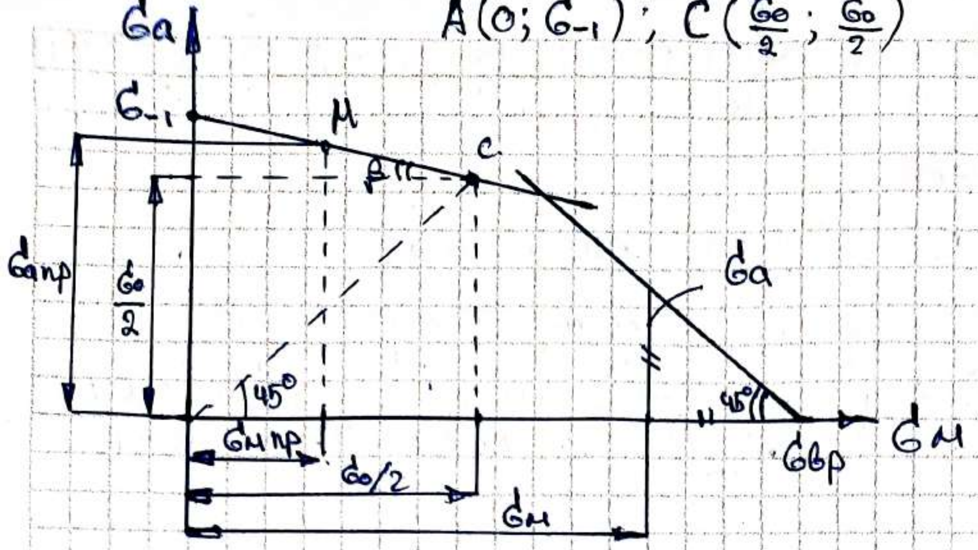
$$tg\,\varphi = \frac{\sigma_a}{\sigma_м} = \frac{\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}}{\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1-R}{1+R}$$

n_B - коэффициент запаса по выносливости:

$$n_B = \frac{OM}{OL} = \frac{\sigma_{m\,кр}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{a\,пр}}{\sigma_a}$$

Построение диаграммы предельных амплитуд также весьма трудоемко, поэтому расчеты проводят с использованием схематизации диаграммы предельных амплитуд.

$A(0;\sigma_{-1})$; $C\left(\frac{\sigma_0}{2};\frac{\sigma_0}{2}\right)$



Правая ветвь аппроксимируется прямой, проведенной под углом 45°, для того, чтобы:

$\sigma_m + \sigma_a \le \sigma_{вр}$

$\sigma_{a\,пр} = \sigma_{-1} - tg\beta \cdot \sigma_{m\,пр}$

$tg\beta = \dfrac{\sigma_{-1} - \frac{\sigma_0}{2}}{\frac{\sigma_0}{2}} = \dfrac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} = \psi_\sigma$ | характеризует чувствительность материала к асимметрии цикла

$\sigma_{a\,пр} = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot \sigma_{m\,пр}$

для углеродистых сталей: $\psi_\sigma = 0{,}2 \div 0{,}3$

для легированных сталей $\psi_\sigma = 0{,}1 \div 0{,}15$

Если бы было переменное кручение, то диаграмма получилась такой же. При этом все σ следует заменить на τ, а коэффициент оставить

для углеродистых сталей: $\psi_\tau = 0{,}1 \div 0{,}15$

для легированных сталей: $\psi_\tau = 0{,}05 \div 0{,}07$

Влияние абсолютных размеров поперечных сечений на прочность

№36. Влияние абсолютных размеров поперечных сечений на усталостную прочность

Экспериментально установлено, что усталостная прочность детали значительно меньше усталостной прочности образца, изготовленного из того же материала

Основными факторами снижающие прочность детали по сравнению с образцом являются:

1) Масштабный: влияние размеров поперечн. сечения на предел выносливости
2) Концентратор напряжений
3) Качество обработки поверхности
4) Эксплуатационный: частота нагружения, температура, коррозия.

При расчетах все факторы учитываются коэффициентом выносливости:

$$K_{\sigma дет} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1 дет}}$$

- σ_{-1} – предел выносливости стандартного образца $\varnothing 7{,}5$мм
- $\sigma_{-1 дет}$ – предел выносливости для детали

<u>Влияние абсолютных размеров поперечного сечения</u>

Экспериментально установлено, что с увеличением размера поперечного сечения сопротивление усталости уменьшается, влияние данных незначительно, поскольку переход от одного сечения к другому не дает новой информации о характере распределения дефектов.

Причинами снижения усталостной прочности при увеличении поперечного сечения являются:

1) Металлургический фактор:

При увеличении размеров поперечного сечения увеличивается количество различных включений, что ведет к снижению механических характеристик.

2) Технологический фактор:

При механической обработке деталей малых размеров, пластическое деформирование поверхностного слоя происходит на большую глубину, чем при обработке детали больших размеров. Возникающий при пластических деформациях наклеп благотворно влияет на сопротивление усталости. Появляются остаточные сжимающие напряжения, сдерживающие трещины.

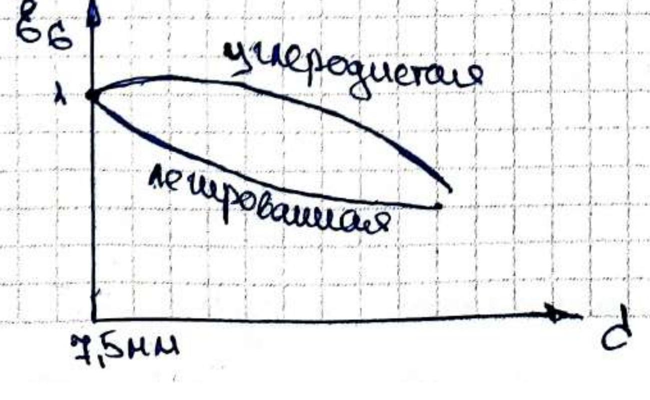
3) Статистический фактор:

При увеличении размера поперечного сечения увеличивается вероятность появления скрытых дефектов, что сказывается отрицательно на пределе усталости

Влияние размеров учитывается масштабным коэффициентом:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}$$

- σ_{-1d} – предел выносливости данного образца диаметром d
- σ_{-1} – предел выносливости стандартного образца



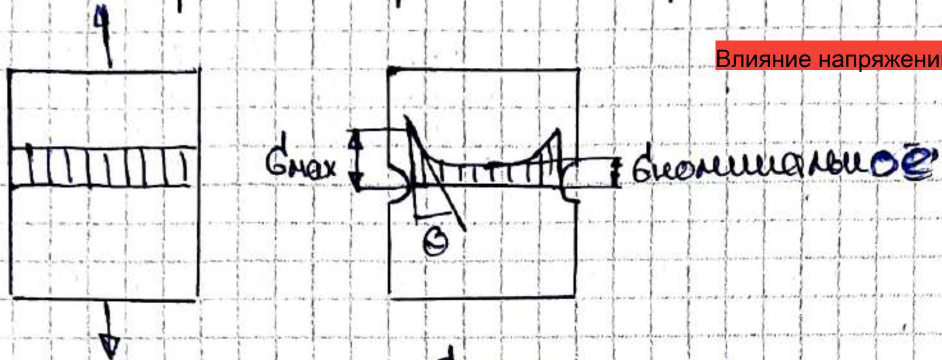
№37. Влияние концентратора напряжений на усталостную прочность

Любое резкое изменение формы детали (проточки, канавки, отверстия) вызывает резкое увеличение местных напряжений

Причина вызывающие местные напряжения - концентратор напряжений

1) Концентратор напряжений при симметричных циклах

Влияние напряжений на усталостную прочность



Отношение $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}}$ называется теоретическим коэффициентом концентрации.

σ_{max} определяется как правило из эксперимента, предполагая, что материал однородный, упругий. В действительности реальные материалы обладают как свойствами упругости, так и пластичности. Поэтому при действии переменных нагрузок в наиболее неблагоприятных кристаллах возникает местная текучесть, что не положительно влияет на σ_R.

$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1кон}}$ | эффективный коэффициент концентраций

- σ_{-1} - предел выносливости образца без концентратора
- $\sigma_{-1кон}$ - предел выносливости с заданным типом концентратора.

Влияние концентратора напряжений зависит не только от величины σ_{max} в зоне концентрации, но и от скорости убывания по мере удаления от зоны концентрации напряжений

При быстром убывании в зоне концентратора напряжений оказывается меньшее число кристаллов, что способствует увеличению сопротивления усталости.

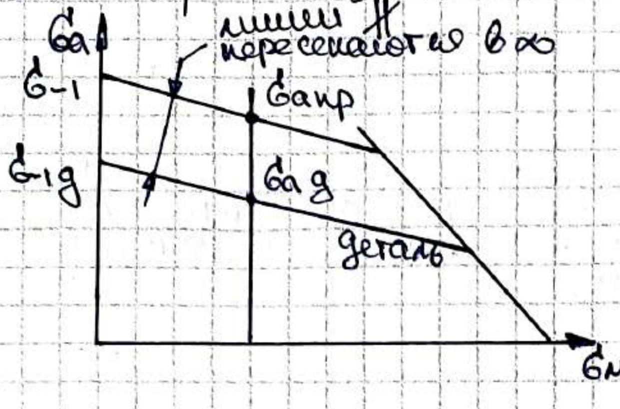
$G = \frac{d\sigma}{dx}\Big|_{x=0} = tg\,\theta$ - градиент (при $G\uparrow$ напряжение $\uparrow$)

$\bar{G} = \frac{1}{\sigma_{max}} \cdot \frac{d\sigma}{dx}\Big|_{x=0}$ - относительный градиент

Чем длиннее концентратор - тем хуже.

2) Влияние концентраторов напряжений при асимметричных циклах

Экспериментально установлено, что отношение предельных амплитуд гладких образцов и образцов с концентратором при одном и том же напряжении не зависит от асимметрии цикла.



- $\sigma_{-1д}$ - для детали
- σ_{-1} - для гладкого образца

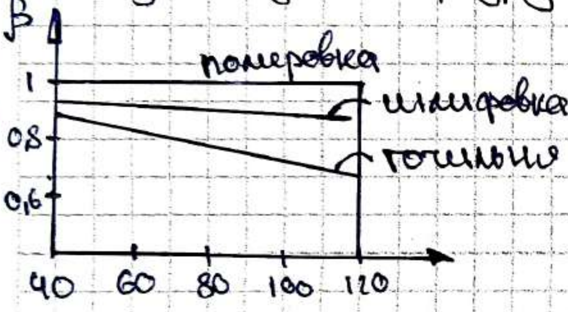
$$\frac{\sigma'_{-1}}{\sigma'_{-1д}} = \frac{\sigma_{aпр}}{\sigma_{aд}}$$

Влияние качества обработки и состояния поверхностного слоя

№38. Влияние качества обработки и состояния поверхностного слоя

В большинстве случаев усталостные трещины зарождаются у поверхности. Это вызвано:

1) Поверхностный слой оказывается наиболее нагруженным
2) При механической обработке детали в поверхностных слоях могут оказаться разрушенные зерна (они же концентраторы



$$\beta = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma'_{-1}}$$ — заданной поверхности / тщательно полированный образец

Чем лучше обработка поверхности тем лучше сопротивляемость усталости.

Влияние состояния поверхностного слоя:

На поверхности находятся сжимающие остаточные напряжения. Наилучшие усталостные показатели наблюдаются у образцов, которые прошли химическую и механическую обработку (обдувка дробью, накатка роликом, азотирование, цементирование)

$$\beta_{упр} = \frac{\sigma'_{-1\,упр}}{\sigma_{-1}}$$ | коэффициент упрочнения

- σ'_{-1} упр - упрочненный образец
- σ_{-1} - неупрочненный.

Влияние эксплутационных факторов

№39. Влияние эксплутационных факторов

- Температура:

При уменьшении температуры предел выносливости увеличивается, но уменьшается предельная ударная вязкость.

При высоких температурах предел выносливости связан с пределом прочности при растяжении до тех пор пока не начинается появляться ползучесть (самопроизвольное изменение напряжений и деформаций)

• Влияние частоты

При низких и при высоких частотах предел усталости может увеличиваться, но при большом интервале частот предел выносливости остается тем же.

• Коррозия

Коррозия значительно снижает сопротивление усталости. - (воздух, влажная среда)

Рассмотренные факторы, влияющие на сопротивление усталости, в расчетах учитываются коэффициентом выносливости:

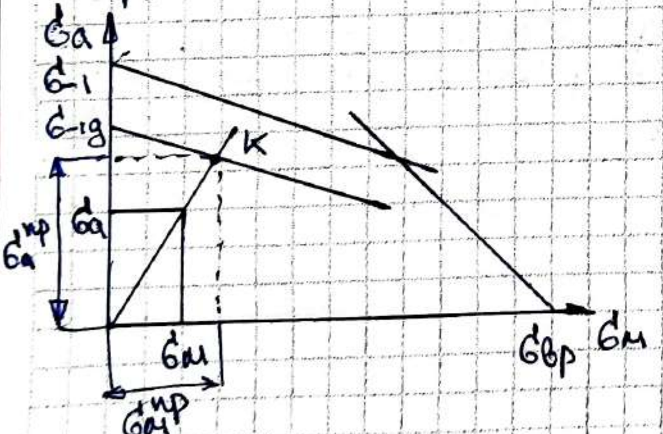
$$K_{\sigma D} = \left[\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma} + \frac{1}{\beta} - 1\right]\frac{1}{\beta_{упр}}$$

$$K_{\tau D} = \left[\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau} + \frac{1}{\beta} - 1\right]\frac{1}{\beta_{упр}}$$

Формула для определения коэффициента запаса усталостной прочности при

№40. Формула для определения коэффициента запаса усталостной прочности при переменных во времени напряжениях

- такие напряжения, при которых амплитуда и среднее напряжение не изменяются



$$\sigma_{-1g} = \frac{1}{K_{\sigma g}}\left(\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_м\right)$$

$$\sigma_{aпр} = \frac{1}{K_{\sigma g}}\left(\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{мпр}\right)$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{мпр}}{\sigma_м} = \frac{\sigma_{aпр}}{\sigma_a}$$ | коэффициент запаса

$\sigma_{м\,пр} = n_\sigma \cdot \sigma_м$ и $\sigma_{aпр} = n_\sigma \cdot \sigma_a$

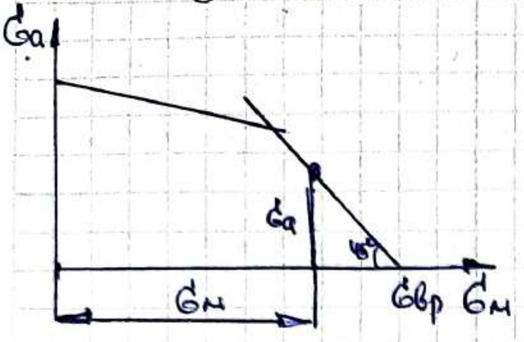
$$n_\sigma \cdot \sigma_a = \frac{1}{K_{\sigma g}}\left(\sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot n_\sigma \sigma_м\right)$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma g}\sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_м}$$

Средние напряжения могут быть <0 → $n_\sigma \uparrow$ → рекомендуется брать в таком случае $\psi_\sigma = 0$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau g}\tau_a + \psi_Б \tau_m}$$

| тут необязательно брать $\psi_Б = 0$, т.к. не важно направление касательных напряжений.

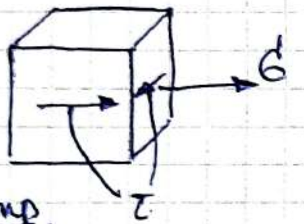


если окажется, что среднее напряжение цикла большое и точка окажется (см. рисунок), то

$$\sigma_{max} = \sigma_м + \sigma_a < \sigma_{вр}$$

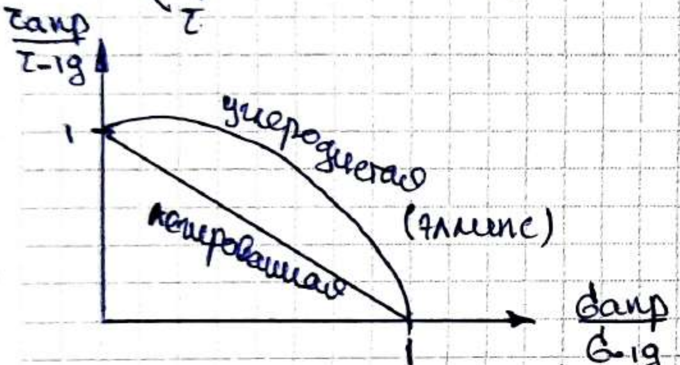
Коэффициент запаса прочности при совметном узгибе и кручении стержня

№41. Коэффициент запаса усталостной прочности при совместном изгибе и кручении стержня



Рассмотрим случай, когда напряженное состояние плоско-упрощенное.

Для симметричных циклов нагружения, когда синфазно изменяются τ и σ.



$$\left(\frac{\sigma_{апр}}{\sigma_{-1g}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{апр}}{\tau_{-1g}}\right)^2 = 1$$

Допущение: $\sigma_{апр} = n\,\sigma_a$, $\tau_{апр} = n\cdot\tau_a$ – одновременно увеличиваются в n раз

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1g}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1g}}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma g}\sigma_a + \underbrace{\psi_Б\sigma_м}_{\to 0}} \; ; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau g}\tau_a + \cancel{\psi_Б\tau_м}}$$

(цикл симметричный)

$$\frac{\sigma_{-1g}}{\sigma_a} = n_\sigma \; ; \quad \frac{\tau_{-1g}}{\tau_a} = n_\tau$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{n_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_\tau}\right)^2 = \frac{1}{n^2}}_{\text{общий коэффициент запаса, когда переменные } \sigma \text{ и } \tau}$$

| ф-ла Гафа и Полларда

Вычисленные коэффициенты запаса должны сравниваться с нормативными:

$n_\sigma \geqslant [n]$

$n_\tau \geqslant [n]$

$n \geqslant [n]$

Нормативные коэффициенты запаса могут колебаться в зависимости от:
- количества экспериментальных данных;
- уровня технологии производства детали.

1) Достаточно высокий уровень технологии с большим количеством экспериментальных данных:

$$[n] = 1{,}2 \div 1{,}5$$

2) Средний уровень технологии и небольшое количество экспериментальных данных

$$[n] = 1{,}5 \div 2{,}0$$

3) Низкий уровень технологии и малое количество экспериментальных данных:

$$[n] = 2{,}0 \div 3{,}0$$