1 Что понимают под n-мерным случайным вектором и его функцией распределения (вероятностей)? Сформулируйте основные свойства функции распределения (вероятностей) n-мерного случайного вектора.

1.1 Определение

Совокупность случайных величин $X_1 = X_1(\omega), \ldots, X_n = X_n(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называют многомерной (n-мерной) случайной величиной, или n-мерным случайным вектором. При этом СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — координаты случайного вектора.

1.2 Определение функции распределения

Функцией распределения (вероятностей) $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ (n-мерного) случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ называют функцию, значение которой в точке $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ равно вероятности совместного осуществления событий $\{X_1 < x_1\}, \ldots, \{X_n < x_n\}$, т.е.

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n).$$

Данную функцию также называют совместной (n-мерной) функцией распределения СВ $(X_1, \ldots, X_n)$.

1.3 Свойства функции распределения

Двумерная функция распределения удовлетворяет следующим свойствам:

1. $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$.
2. $F(x_1, x_2)$ — неубывающая функция по каждому из аргументов x_1 и x_2.
3. $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$.
4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.
5. $P\{a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$.
6. $F(x_1, x_2)$ — непрерывная слева в любой точке $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ по каждому из аргументов x_1 и x_2.
7. $F_{X_1,X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x), \quad F_{X_1,X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$.

2 Дайте определение дискретного случайного вектора. Задание закона распределения двумерного случайного вектора и его совместная функция распределения.

2.1 Определение дискретного случайного вектора

n-мерный случайный вектор $\vec{X}(\omega)$, принимающий не более счётного множества возможных значений $\{X_k\}_{k=1}^{N<\infty}$, называют дискретным случайным вектором.

2.2 Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора

Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора может быть задан в виде следующей таблицы:

Здесь $y_1, \ldots, y_m$ — все возможные значения СВ Y, а $x_1, \ldots, x_n$ — все значения СВ X.

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad p_{Xi} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \quad p_{Yj} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},$$

	$Y = y_1$	$Y = y_2$	$\cdots$	$Y = y_m$
$X = x_1$	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
$X = x_2$	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X = x_n$	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,$$

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ y_j \leq y}} p_{ij}.$$

3 Дайте определение непрерывного случайного вектора. Сформулируйте основные свойства плотности распределения вероятностей непрерывного случайного вектора.

3.1 Определение непрерывного случайного вектора

Непрерывным случайным вектором называют n-мерный случайный вектор $\vec{X}(\omega)$, вероятность попадания которого в любую область $\mathbb{R}^n$ бесконечно малого диаметра бесконечно мала и $\forall(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ определена функция:

$$f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{\mu(U(\vec{x})) \to 0} \frac{P\{\vec{X}(\omega) \in U(\vec{x})\}}{\mu(U(\vec{x}))},$$

где $U(\vec{x})$ — окрестность точки $\vec{x}$, $\mu(U(\vec{x}))$ — мера окрестности точки $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ — плотность распределения вероятностей n-мерного случайного вектора.

3.2 Свойства двумерной плотности распределения

1. $f(x, y) \geq 0$.
2. $P\{a_1 \leq X \leq b_1, a_2 \leq Y \leq b_2\} = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy\,dx$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy\,dx = 1$.
4. $P\{x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y\} \approx f(x, y)\Delta x \Delta y$.
5. $P\{X = x, Y = y\} = 0$.
6. $P\{(X, Y) \in D\} = \int\int_D f(x, y)\,dx\,dy$.
7. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx$.

4 Что называют функцией случайной величины?

4.1 Определение

Функцией случайной величины $Y = g(X)$ называется новая случайная величина, полученная путем применения детерминированной функции g к случайной величине X.

Если X — случайная величина, и g — функция, то $Y = g(X)$ также будет случайной величиной. Значение Y в каждом эксперименте определяется значением X в этом эксперименте и функцией g.

4.2 Пример

Если X — случайная величина, $g(X) = X^2$, то $Y = X^2$ — это новая случайная величина, значение которой в каждом эксперименте равно квадрату значения X в этом эксперименте.

5 Сформулируйте и решите задачу о нахождении закона распределения функции случайной величины (различные случаи).

5.1 Формулировка задачи

Задача состоит в том, чтобы найти закон распределения случайной величины $Y = g(X)$, где X — случайная величина с известным законом распределения, а g — некоторая функция.

Рассмотрим два случая: X — дискретная случайная величина и X — непрерывная случайная величина.

5.2 Случай 1: X — дискретная случайная величина

Пусть X — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно. Требуется найти закон распределения $Y = g(X)$.

5.2.1 Решение

1. Определим возможные значения $Y = g(X)$:

$$y_i = g(x_i) \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Найдем вероятности значений Y:

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i) = p_i.$$

Если $g(x_i) = g(x_j)$ для некоторых $i \neq j$, то соответствующие вероятности нужно суммировать.

5.2.2 Пример

Пусть X принимает значения $0, 1, 2$ с вероятностями $P(X = 0) = 0.2$, $P(X = 1) = 0.5$, $P(X = 2) = 0.3$. Найдем закон распределения $Y = X^2$.

$$\begin{aligned}
&Y = 0^2, 1^2, 2^2 = 0, 1, 4, \\
&P(Y = 0) = P(X = 0) = 0.2, \\
&P(Y = 1) = P(X = 1) = 0.5, \\
&P(Y = 4) = P(X = 2) = 0.3.
\end{aligned}$$

Таким образом, Y принимает значения $0, 1, 4$ с вероятностями $0.2, 0.5, 0.3$ соответственно.

5.3 Случай 2: X — непрерывная случайная величина

Пусть X — непрерывная случайная величина с функцией плотности распределения $f_X(x)$. Требуется найти закон распределения $Y = g(X)$.

5.3.1 Решение

1. Найдем функцию распределения $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

2. Найдем функцию плотности $f_Y(y)$ путем дифференцирования $F_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y).$$

Если g является монотонной функцией, то:

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)),$$

где g^{-1} — обратная функция к g.

Тогда:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|.$$

5.3.2 Пример

Пусть X имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, то есть $f_X(x) = 1$ для $0 \leq x \leq 1$. Найдем закон распределения $Y = X^2$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \sqrt{y} \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq 1,$$
$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Таким образом, Y имеет функцию плотности распределения $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ для $0 \leq y \leq 1$.

6 Дайте определение независимых случайных величин. Каким основным свойством обладает совместный закон распределения независимых случайных величин?

6.1 Определение

Случайные величины X и Y называются независимыми, если

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

где $F_{X,Y}(x, y)$ — совместная функция распределения случайных величин X и Y, а $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ — их маргинальные функции распределения.

6.2 Основное свойство

Основным свойством совместного закона распределения независимых случайных величин является то, что их совместная плотность распределения равна произведению их маргинальных плотностей:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

где $f_{X,Y}(x, y)$ — совместная плотность распределения случайных величин X и Y, а $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ — их маргинальные плотности распределения.

7 Дайте определение математического ожидания скалярной случайной величины и приведите его содержательную интерпретацию. Сформулируйте основные свойства математического ожидания.

7.1 Определение

Математическим ожиданием (средним значением) $M[X]$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений значений x_i случайной величины и вероятностей $p_i = P\{X =$

$x_i\}$, с которыми случайная величина принимает эти значения:

$$M[X] = \sum_i x_i p_i.$$

Для непрерывной случайной величины X математическое ожидание $M[X]$ определяется как интеграл:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — функция плотности распределения случайной величины X.

7.2 Содержательная интерпретация

Математическое ожидание случайной величины X представляет собой взвешенное среднее всех возможных значений X, где весами служат вероятности этих значений. Это значение можно интерпретировать как центр масс системы материальных точек, расположенных на числовой оси в координатах x_i с массами p_i. Математическое ожидание даёт оценку "среднего"значения случайной величины в долгосрочной перспективе при многократных повторениях эксперимента.

7.3 Основные свойства математического ожидания

1. Линейность:
   $$M[aX + bY] = aM[X] + bM[Y],$$
   где a и b — константы, X и Y — случайные величины.
2. Математическое ожидание константы:
   $$M[C] = C,$$
   где C — константа.
3. Для независимых случайных величин X и Y:
   $$M[XY] = M[X]M[Y].$$
4. Монотонность:
   $$X \leq Y \Rightarrow M[X] \leq M[Y].$$
5. Если X — случайная величина и $g(X)$ — функция, тогда:
   $$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx,$$
   где $f(x)$ — функция плотности распределения случайной величины X.

8 Дайте определение дисперсии случайной величины. Сформулируйте основные свойства дисперсии.

8.1 Определение

Дисперсией $D[X]$ случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от её среднего значения $M[X]$:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2].$$

Для дискретной случайной величины X дисперсия определяется как:

$$D[X] = \sum_i (x_i - M[X])^2 p_i,$$

где x_i — возможные значения случайной величины, $p_i = P\{X = x_i\}$ — вероятности этих значений.

Для непрерывной случайной величины X дисперсия определяется как:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — функция плотности распределения случайной величины X.

8.2 Основные свойства дисперсии

1. Дисперсия константы равна нулю:
$$D[C] = 0,$$
где C — константа.

2. Для любой случайной величины X и константы a:
$$D[aX] = a^2 D[X].$$

3. Линейность дисперсии относительно независимых случайных величин X и Y:
$$D[X + Y] = D[X] + D[Y],$$
если X и Y — независимые случайные величины.

4. Дисперсия суммы случайной величины X и константы a:
$$D[X + a] = D[X].$$

5. Дисперсию можно выразить через математическое ожидание квадрата случайной величины:
$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

9 Дайте определение ковариации двух скалярных случайных величин. Сформулируйте основные свойства ковариации.

9.1 Определение

Ковариацией (корреляционным моментом) двух случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их средних значений:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = M[(X - M[X])(Y - M[Y])].$$

Если X и Y — дискретные случайные величины с вероятностями $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, то ковариация вычисляется по формуле:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - M[X])(y_j - M[Y]) p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин X и Y с функцией плотности совместного распределения $f(x, y)$, ковариация вычисляется по формуле:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])(y - M[Y]) f(x, y)\, dx\, dy.$$

9.2 Основные свойства ковариации

1. Ковариация константы и случайной величины равна нулю:

$$\mathrm{Cov}(C, X) = 0,$$

где C — константа.

2. Ковариация линейной комбинации случайных величин:

$$\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathrm{Cov}(X, Z) + b\mathrm{Cov}(Y, Z),$$

где a и b — константы.

3. Ковариация двух одинаковых случайных величин равна дисперсии этой величины:

$$\mathrm{Cov}(X, X) = D[X].$$

4. Если случайные величины X и Y независимы, то их ковариация равна нулю:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0,$$

если X и Y независимы.

5. Симметричность ковариации:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X).$$

6. Ковариация суммы случайных величин:

$$\mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z).$$

10 Дайте определение коэффициента корреляции двух скалярных случайных величин. Сформулируйте основные свойства коэффициента корреляции. Приведите возможную интерпретацию значения коэффициента корреляции.

10.1 Определение

Коэффициентом корреляции $\rho(X, Y)$ случайных величин X и Y называется величина, определяемая следующим образом:

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D[X] \cdot D[Y]}},$$

где $\mathrm{Cov}(X, Y)$ — ковариация X и Y, $D[X]$ и $D[Y]$ — дисперсии X и Y соответственно.

10.2 Основные свойства коэффициента корреляции

1. Коэффициент корреляции принимает значения в интервале от -1 до 1:

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

2. Если случайные величины X и Y независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю:

$$\rho(X, Y) = 0.$$

Однако, обратное утверждение не всегда верно — коэффициент корреляции равный нулю не обязательно означает независимость случайных величин.

3. Коэффициент корреляции симметричен:

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X).$$

4. Коэффициент корреляции двух одинаковых случайных величин равен единице:
$$\rho(X, X) = 1.$$
5. Линейность коэффициента корреляции:
$$\rho(aX + b, cY + d) = \text{sign}(ac) \cdot \rho(X, Y),$$
где $a, b, c,$ и d — константы, $\text{sign}(ac)$ — знак произведения a и c.

10.3 Интерпретация значения коэффициента корреляции

- $\rho(X, Y) = 1$: Случайные величины X и Y имеют полную положительную линейную зависимость. Если X увеличивается, Y также увеличивается.
- $\rho(X, Y) = -1$: Случайные величины X и Y имеют полную отрицательную линейную зависимость. Если X увеличивается, Y уменьшается.
- $\rho(X, Y) = 0$: Случайные величины X и Y не имеют линейной зависимости. Это не означает, что они независимы, так как могут быть другие (нелинейные) зависимости.
- $0 < \rho(X, Y) < 1$: Случайные величины X и Y имеют положительную линейную зависимость. Чем ближе ρ к 1, тем сильнее положительная зависимость.
- $-1 < \rho(X, Y) < 0$: Случайные величины X и Y имеют отрицательную линейную зависимость. Чем ближе ρ к -1, тем сильнее отрицательная зависимость.

11 Что понимают под ковариационной матрицей n-мерного случайного вектора? Сформулируйте основные свойства ковариационной матрицы.

11.1 Определение

Матрицей ковариаций (ковариационной матрицей) случайного вектора $\vec{X}$ называют матрицу $\Sigma = (\sigma_{ij})$, состоящую из ковариаций случайных величин X_i и X_j.

11.2 Свойства ковариационной матрицы

Ковариационная матрица обладает следующими свойствами:

1. Матрица ковариаций Σ является симметрической.
2. Если случайный вектор $\vec{Y} = \vec{X} + \vec{c}$, то $\Sigma_{\vec{Y}} = B^T \Sigma_{\vec{X}} B$, где $\Sigma_{\vec{Y}}$ и $\Sigma_{\vec{X}}$ — матрицы ковариаций случайных векторов $\vec{Y}$ и $\vec{X}$ соответственно.
3. Матрица ковариаций Σ является неотрицательно определённой.

12 Сходимость последовательности случайных величин

12.1 Определение

Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ случайных величин для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию
$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0,$$
то говорят о сходимости этой последовательности к X по вероятности и обозначают $X_n \xrightarrow{P} X$.

12.2 Определение сходимости к нулю по вероятности

Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ случайных величин удовлетворяет условию

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 1,$$

то говорят о сходимости этой последовательности к 0 с вероятностью 1 или почти наверное и обозначают

$$X_n \xrightarrow{a.s.} 0.$$

12.3 Определение слабой сходимости

Последовательность функций распределений $F_1(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ сходится к предельной функции распределения $F(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

для любых x, являющихся точками непрерывности $F(x)$. Такую сходимость называют слабой сходимостью последовательности функций распределения и обозначают

$$F_n(x) \xrightarrow{w} F(x).$$

13 Что понимают под законом больших чисел и что является его основным содержанием?

13.1 Теорема (Закон больших чисел)

Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин такова, что существуют $MX_i = m_i$ и $DX_i = \sigma_i^2$, причём дисперсии σ_i^2 ограничены в совокупности (т.е. $\sigma_i^2 \leq C < +\infty$), то для последовательности

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

выполнен закон больших чисел. При этом говорят также, что к последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ случайных величин применим закон больших чисел в форме Чебышева.

13.2 Определение закона больших чисел

Последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ случайных величин удовлетворяет закону больших чисел (слабому), если для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Иными словами, выполнение закона больших чисел отражает предельную устойчивость средних арифметических случайных величин: при большом числе испытаний они практически перестают быть случайными и совпадают со своими средними значениями.

14 Сформулируйте теоремы о I-ом и II-ом неравенстве Чебышева.

14.1 Первое неравенство Чебышева

Для каждой неотрицательной случайной величины X, имеющей математическое ожидание MX, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon},$$

называемое первым неравенством Чебышева.

14.2 Второе неравенство Чебышева

Для каждой случайной величины X, имеющей дисперсию $DX = \sigma^2$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо второе неравенство Чебышева

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

15 Сформулируйте теорему Чебышева и Бернулли.

15.1 Теорема Чебышева

Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин такова, что существуют $MX_i = m_i$ и $DX_i = \sigma_i^2$, причём дисперсии σ_i^2 ограничены в совокупности (т.е. $\sigma_i^2 \leq C < +\infty$), то для последовательности

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

выполнен закон больших чисел.

15.2 Теорема Бернулли

Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюдаемая частота успехов $r_n = \frac{Y_n}{n}$ сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{|r_n - p| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

16 Сформулируйте центральную предельную теорему (частный случай) и теорему Муавра-Лапласа.

16.1 Центральная предельная теорема (частный случай)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $MX_n = m$, $DX_n = \sigma^2$. Тогда

$$P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

16.2 Теорема Муавра-Лапласа

Следствием из центральной предельной теоремы является интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Пусть S_n — суммарное число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1-p$. Тогда с ростом n последовательность функций распределения случайных величин

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

17 Сформулируйте основную задачу математической статистики.

Основная задача математической статистики — разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых явлениях и процессах по данным наблюдений или экспериментов. Эти выводы относятся не к отдельным экспериментам, а представляют собой утверждения о вероятностных характеристиках изучаемого процесса.

18 Что называют (а): случайной выборкой; (б): выборкой? Дайте определение выборочного пространства.

18.1 Определение случайной выборки

Совокупность независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых имеет то же распределение, что и случайная величина X, будем называть случайной выборкой из генеральной совокупности X и записывать $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. При этом число n называют объёмом случайной выборки, а случайные величины X_i — элементами случайной выборки.

18.2 Определение выборки

Любое возможное значение $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ случайной выборки $\vec{X}_n$ будем называть выборкой из генеральной совокупности X (также реализацией случайной выборки $\vec{X}_n$). Число n характеризует объём выборки, а числа x_i, $i = 1, \ldots, n$, представляют собой элементы выборки $\vec{x}_n$.

18.3 Определение выборочного пространства

Множество возможных значений $\vec{X}_n \in \mathbb{R}^n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ называют выборочным пространством.

19 Что называют (а): статистикой; (б): выборочным законом распределения?

19.1 Определение статистики

Любую функцию $g(\vec{X}_n)$ от случайной выборки $\vec{X}_n$ называют статистикой или выборочной характеристикой, а её закон распределения — выборочным законом распределения.

20 Дайте определение выборочного начального момента k-го порядка. Как принято называть начальный момент первого порядка?

20.1 Определение

Пусть $\vec{X}_n$ — случайная выборка из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$ (и плотностью распределения $f(x)$ в случае непрерывной статистической модели). Выборочную характеристику

$$\hat{\mu}_k(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

называют выборочным начальным моментом k-го порядка.

20.2 Начальный момент первого порядка

Выборочный начальный момент 1-го порядка называют также выборочным средним и обозначают $\bar{X} = \hat{\mu}_1(\vec{X}_n)$.

21 Сформулируйте задачу точечного оценивания. Какая основная проблема возникает при её решении?

21.1 Определение

Точечной оценкой параметра $\theta \in \Theta$ назовём любую статистику $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$, выборочное значение которой $\hat{\theta}(\vec{x}_n)$ можно было бы считать приближённым значением параметра θ.

21.2 Пример

В частности, если $\theta = MX$, то в качестве точечной оценки $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ можно предложить выборочное среднее

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

или медиану

$$\tilde{X} = \begin{cases} X_{\frac{n+1}{2}}, & n = 2k+1, \\ \frac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}), & n = 2k. \end{cases}$$

Таким образом, возникает проблема выбора наилучшей в каком-то смысле оценки $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ для параметра θ, построенной по данным случайной выборки $\vec{X}_n$.

22 Дайте определение несмещённой статистики. Примеры смещённых и несмещённых точечных оценок.

22.1 Определение

Статистику $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ называют несмещённой оценкой параметра θ, если её математическое ожидание совпадает с θ, т.е. $M\hat{\theta}(\vec{X}_n) = \theta$ для любого фиксированного n.

22.2 Пример несмещённой оценки

Выборочное среднее $\bar{X}$ является несмещённой оценкой для математического ожидания случайной величины X. Действительно, согласно определению случайной выборки $MX_k = MX$, $\forall k = 1, \ldots, n$. Тогда, в силу свойств математического ожидания, имеем

$$M\bar{X} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = MX.$$

22.3 Пример смещённой оценки

Можно показать, что выборочная дисперсия является смещённой оценкой дисперсии DX.

23 Дайте определение эффективной статистики. Примеры эффективных оценок.

23.1 Определение

Если в некотором классе несмещённых оценок параметра θ, имеющих конечную дисперсию, существует такая оценка $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$, что для всех остальных оценок $\tilde{\theta}(\vec{X}_n)$ из данного класса выполняется неравенство

$$D\hat{\theta}(\vec{X}_n) < D\tilde{\theta}(\vec{X}_n),$$

то оценку $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ называют эффективной в данном классе оценок.

23.2 Пример эффективной оценки

Эффективную оценку в классе всех несмещённых оценок называют также оптимальной.

24 Дайте определение состоятельной статистики. Примеры состоятельных и несостоятельных оценок.

24.1 Определение

Статистику $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ называют состоятельной оценкой параметра θ, если для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(|\hat{\theta}(\vec{X}_n) - \theta| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

24.2 Пример состоятельной оценки

Выборочное среднее $\bar{X}$ является состоятельной оценкой для математического ожидания случайной величины X.

24.3 Пример несостоятельной оценки

Если выборочное среднее $\bar{X}$ по какой-то причине не сходится к математическому ожиданию X при увеличении объёма выборки n, то оно не является состоятельной оценкой.

25 Сформулируйте теорему Рао (скалярный случай). Показатель эффективности по Рао.

25.1 Теорема Рао (скалярный случай)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из генеральной совокупности с плотностью распределения $f(x;\theta)$, где θ — неизвестный параметр. Тогда информация Фишера $I(\theta)$ определяется как

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta)}{\partial\theta^2}\right].$$

25.2 Показатель эффективности по Рао

Для несмещённой оценки $\hat{\theta}$ параметра θ дисперсия удовлетворяет неравенству Рао-Крамера:

$$D\hat{\theta} \geq \frac{1}{I(\theta)}.$$

Несмещённая оценка, достигающая этого нижнего предела, называется эффективной по Рао-Крамеру.

26 Изложите идею метода максимального правдоподобия построения точечных оценок параметров законов распределения дискретных случайных величин.

26.1 Определение функции правдоподобия

Функцией правдоподобия называют функцию следующего вида

$$L(X_1, \ldots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i, \theta),$$

где $p(X_i, \theta) = P(X_i = x_i)$ если X — дискретная случайная величина и $p(X_i, \theta) = f(X_i, \theta)$ если X — непрерывная случайная величина.

26.2 Определение оценки максимального правдоподобия

Оценкой максимального правдоподобия параметра θ называют статистику $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$, значения $\hat{\theta}$ которой для любой выборки $\vec{x}_n$ удовлетворяют условию

$$L(\vec{x}_n, \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\vec{x}_n, \theta),$$

т.е. функция правдоподобия, как функция аргумента θ, достигает максимума.

26.3 Уравнения правдоподобия

Для нахождения оценки максимального правдоподобия решают уравнения правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X}_n, \theta)}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, r.$$

27 Что называют интервальной оценкой и с чем связана необходимость ее построения?

27.1 Определение

Пусть для параметра θ построен интервал $(\hat{\theta}_1(\vec{X}_n), \hat{\theta}_2(\vec{X}_n))$, где $\hat{\theta}_1(\vec{X}_n)$ и $\hat{\theta}_2(\vec{X}_n)$ — пара статистик случайной выборки $\vec{X}_n$, такой, что выполняется равенство

$$P\{\hat{\theta}_1(\vec{X}_n) < \theta < \hat{\theta}_2(\vec{X}_n)\} = \gamma.$$

Тогда интервал $(\hat{\theta}_1(\vec{X}_n), \hat{\theta}_2(\vec{X}_n))$ называют интервальной оценкой для параметра θ с коэффициентом доверия γ или γ-доверительной интервальной оценкой, а $\hat{\theta}_1(\vec{X}_n)$ и $\hat{\theta}_2(\vec{X}_n)$ — соответственно нижней и верхней границами интервальной оценки.

28 Как определяется вероятность совершения ошибки при построении γ-доверительного интервала и что представляет собой вероятностные характеристики качества интервальной оценки?

28.1 Определение ошибки

Вероятность α совершения ошибки при нахождении интервальной оценки параметра θ с коэффициентом доверия γ, очевидно, равна $\alpha = 1 - \gamma$, т.е.

$$\alpha = P\{\theta \notin (\hat{\theta}_1(\vec{X}_n), \hat{\theta}_2(\vec{X}_n))\}.$$

28.2 Вероятностные характеристики точности оценивания

Вероятностной характеристикой точности оценивания параметра θ является случайная величина

$$I(\vec{X}_n) = \hat{\theta}_2(\vec{X}_n) - \hat{\theta}_1(\vec{X}_n),$$

которая для любой реализации $\vec{x}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ есть длина интервала $(\hat{\theta}_1(\vec{x}_n), \hat{\theta}_2(\vec{x}_n))$. Если $P\{\hat{\theta}_1(\vec{X}_n) < \theta\} = \gamma$ или $P\{\theta < \hat{\theta}_2(\vec{X}_n)\} = \gamma$, то статистики $\hat{\theta}_1(\vec{X}_n)$ и $\hat{\theta}_2(\vec{X}_n)$ называют соответственно односторонней нижней и односторонней верхней γ-доверительными границами для параметра θ.

29 Дайте определение центральной статистики.

29.1 Определение

Статистику $g(\vec{X}_n, \theta)$ называют центральной, если ее закон распределения не зависит от θ, т.е. функция распределения вероятностей $F_{g(t)} = P\{g(\vec{X}_n, \theta) < t\}$ не зависит от θ.

30 Сформулируйте задачу построения интервальной оценки и изложите принципиальную схему ее решения.

Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что для любой реализации $\vec{x}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ выполнены следующие допущения:

1. Функция распределения $F_g(t)$ центральной статистики $g(\vec{X}_n, \theta)$ является непрерывной и возрастающей.
2. Заданы положительные числа α_1 и α_2 такие, что $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Коэффициент доверия $\gamma = 1 - \alpha = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2)$.
3. Для любой выборки $\vec{X}_n$ из генеральной совокупности X функция $g(\vec{x}_n, \theta)$ является непрерывной и возрастающей (убывающей) функцией по $\theta \in \Theta$.

Согласно допущению 1, для любого $q \in (0, 1)$ существует единственный корень h_q уравнения $F_g(t) = q$, который называется квантилью уровня q функции распределения $F_g(t)$ случайной величины $g(\vec{X}_n, \theta)$.

Таким образом, согласно допущению 2, имеют место равенства $1 - \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma = F_g(h_{1-\alpha_2}) - F_g(h_{\alpha_1}) = P\{h_{\alpha_1} < g(\vec{X}_n, \theta) < h_{1-\alpha_2}\}$, которые справедливы для любых возможных значений параметра θ.

Согласно допущению 3 (для определенности будем считать, что функция $g(\vec{X}_n, \theta)$ является возрастающей) для каждой реализации $\vec{x}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ каждое из уравнений $g(\vec{x}_n, \theta) = h_{\alpha_1}$ и $g(\vec{x}_n, \theta) = h_{1-\alpha_2}$ имеют единственное решение $\hat{\theta}_1(\vec{x}_n)$ и $\hat{\theta}_2(\vec{x}_n)$ соответственно.

При этом $h_{\alpha_1} < g(\vec{X}_n, \theta) < h_{1-\alpha_2} \Leftrightarrow \hat{\theta}_1(\vec{X}_n) < \theta < \hat{\theta}_2(\vec{X}_n)$ для любой реализации $\vec{x}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$.

Таким образом, с учетом сказанного выше, имеем:

$$\gamma = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = P\{h_{\alpha_1} < g(\vec{X}_n, \theta) < h_{1-\alpha_2}\} = P\{\hat{\theta}_1(\vec{X}_n) < \theta < \hat{\theta}_2(\vec{X}_n)\}$$

и $(\hat{\theta}_1(\vec{X}_n), \hat{\theta}_2(\vec{X}_n))$ — искомая интервальная оценка.

31 Пусть $X(\omega) \equiv N(m, \sigma^2)$. Сформулируйте и приведите решение задачи (т.е. укажите вид полученного доверительного интервала) построения интервальной оценки для параметра m при известном значении параметра σ^2.

31.1 Построение доверительного интервала при известном значении σ^2

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами m и σ^2 известна. Рассмотрим статистику

$$g(\vec{X}_n, m) = \frac{m - \bar{X}}{\sigma/\sqrt{n}},$$

которая является неубывающей по параметру m. Согласно определению случайной выборки случайные величины X_k, $k = 1, \ldots, n$, являются независимыми и $X_k \sim N(m, \sigma^2)$. Поэтому

$$Mg(\vec{X}_n, m) = M\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m - \bar{X})\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}M(m - \bar{X}) = 0,$$

$$Dg(\vec{X}_n, m) = \frac{n}{\sigma^2}D(m - \bar{X}) = \frac{n}{\sigma^2}\left(Dm - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} DX_i\right) = 1.$$

Поскольку можно доказать, что линейная комбинация независимых нормально распределенных случайных величин есть нормальная случайная величина, то $g(\vec{X}_n, m) \sim N(0, 1)$ и является центральной.

Тогда

$$u_{\alpha_1} = g(\vec{X}_n, m(\vec{X}_n)) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m(\vec{X}_n) - \bar{X}) \Rightarrow m(\vec{X}_n) = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha_1},$$

$$u_{1-\alpha_2} = g(\vec{X}_n, m(\vec{X}_n)) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m(\vec{X}_n) - \bar{X}) \Rightarrow m(\vec{X}_n) = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha_2},$$

где u_q — квантиль уровня q стандартного нормального распределения.

В практических задачах полезно знать, что $u_q = -u_{1-q}$.

32 Пусть $X(\omega) \equiv N(m, \sigma^2)$. Сформулируйте и приведите решение задачи (т.е. укажите вид полученного доверительного интервала) построения интервальной оценки для параметра m при неизвестном значении параметра σ^2.

32.1 Построение доверительного интервала при неизвестном значении σ^2

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами m и σ^2 неизвестна. Требуется построить доверительный интервал для неизвестного математического ожидания m.

Рассмотрим статистику

$$g(\vec{X}_n, m) = \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X}_n)/\sqrt{n}}.$$

Данная статистика является центральной и распределена по закону Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Аналогично предыдущему случаю получаем следующие выражения для нижней и верхней границ доверительного интервала

$$\hat{m}(\vec{X}_n) = \bar{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha_2}(n-1),$$

$$\hat{m}(\vec{X}_n) = \bar{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{\alpha_1}(n-1),$$

где $t_q(n)$ — квантиль уровня q распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы и учтено, что $t_{\alpha_1}(n) = -t_{1-\alpha_2}(n-1)$.

33 Пусть $X(\omega) \equiv N(m, \sigma^2)$. Сформулируйте и приведите решение задачи (т.е. укажите вид полученного доверительного интервала) построения интервальной оценки для параметра σ^2 при неизвестном значении параметра m.

33.1 Построение доверительного интервала для σ^2

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с неизвестными параметрами m и σ^2. Требуется построить доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения σ.

Рассмотрим статистику

$$g(\vec{X}_n, \sigma) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2}.$$

Данная статистика имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенью свободы и, как следствие, является центральной.

Приведенная статистика является убывающей функцией параметра σ. Поэтому получаем следующее выражение для нижней и верхней границ доверительного интервала:

$$\sigma(\vec{X}_n) = S(\vec{X}_n)\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha_2}(n-1)}},$$

$$\sigma(\vec{X}_n) = S(\vec{X}_n)\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha_1}(n-1)}},$$

где $\chi^2_q(n-1)$ — квантиль уровня q для χ^2-распределения с $n-1$ степенью свободы.