1)Что понимают под элементарным исходом (элементарным событием)? Что такое случайное событие?

Элементарный исход – любой простейший исход испытания. Множество всех ЭИ образуют пространство элементарных исходов и обозначается Ω

Случайное событие –любой набор элементарных исходов, или, иными словами, произвольное подмножество пространства элементарных исходов.

2)Что понимают под условной вероятностью реализации случайного события? Свойства условной вероятности.

Условной вероятностью события А при условии наступления события В называют следующее число: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$

Свойства:

1. $P(A|B) \geq 0$
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. $P(A_1 + \cdots + A_n + \cdots |B) = P(A_1|B) + \cdots + P(A_n|B) + \cdots$

3)Что понимают под независимыми и несовместными случайными событиями? Их связь между собой.

События А и В, имеющие ненулевую вероятность, называют ***независимыми***, если их условные вероятности совпадают с безусловными, т.е. $P(A|B) = P(A)$ или $P * +(B|A) = P(B)$

Связь между совместными и зависимыми событиями:

1) Если А и В несовместные события и $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$, то они зависимые.
2) Если А и В совместные события, то они могут быть и зависимыми, и независимыми.
3) Если А и В зависимые события, то они могут быть и совместными, и несовместными.

4)Что понимают под попарно независимыми и независимыми в совокупности случайными событиями?

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются ***попарно-независимыми***, если:

$P\left(A_iA_j\right) = P(A_i)P\left(A_j\right) \, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$ и ***независимыми в совокупности***, если

$P\left(A_iA_j\right) = P(A_i)P\left(A_j\right) \, \forall i, j = \overline{1, n}$

$P\left(A_iA_jA_k\right) = P(A_i)P\left(A_j\right)P(A_k \, \forall i, j, k = \overline{1, n}, i < j < k$

$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P\left(A_2\right) \dots P(A_n)$

5)Что понимают под попарно несовместными и несовместными в совокупности случайными событиями?

События А и В называются попарно-несовместными $\Leftrightarrow A_i A_j = \emptyset \; \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются несовместные в совокупности $\Leftrightarrow A_1 A_2 \dots A_n = \emptyset$

6)Что понимают под биноминальной схемой испытаний (схемой Бернулли)?

Биноминальной схемой испытаний называют последовательность повторных испытаний, удовлетворяющую условиям:

1. Для каждого испытания возможными являются лишь два исхода: появление некоторого события А («успех»), либо его дополнения $\overline{\mathrm{A}}$ («неудача»)
2. Исход любого испытания не зависит от исходов предшествующих испытаний, т.е. испытания независимы
3. Вероятность успеха во всех испытаниях постоянна и равна P(A)=p

7)Дайте определение вероятности по Лапласу (классическое) и укажите на его недостатки. Укажите свойства вероятности.

Вероятностью события А называют отношение числа N_A благоприятствующих событию А элементарных исходов к общему числу N элементарных исходов в $\Omega, т.е\ P(A) = \frac{N_A}{N}$.

Недостаток- в требовании конечности пространства ЭИ, а так же требование равновозможности элементарных исходов.

Основные свойства вероятности:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subset \mathrm{B} => P(A) \leq P(B)$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$
5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
6. $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots - P(A_{n-1} A_n) + $ $+ P(A_1 A_2 A_3) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$

8)Дайте геометрическое определение вероятности. Каким специфическими особенностями обладает геометрическая вероятность? Укажите свойства вероятности.

Вероятность события $A \subset \Omega$ есть число $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, где $\mu(A)$ и $\mu(B)$ – меры множеств A и Ω соответственно.

1) Если размерность множества А меньше размерности множества Ω, т.е. $\dim A < \dim \Omega$, то $\mu(A) = 0$ и $P(A) = 0$ – проявление парадокса ненулевой вероятности.
2) В данном определении так же присутствует требование «равновероятности», которое проявляется в том что P(A) не зависит ни от «геометрии» мн-ва А, ни от его расположения в Ω.

Основные свойства вероятности:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subset \mathrm{B} => P(A) \leq P(B)$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$
5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
6. $P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) +$ $+P(A_1A_2A_3) + \cdots + (-1)^{n+1}P(A_1A_2 \ldots A_n)$

9)Дайте определение вероятности по Колмогорову (аксиоматическое) и сформулируйте три её основных свойства (аксиомы). Основные свойства вероятности.

Пусть каждому событию A поставлено в соответствие число P(A). Числовую функцию P заданную на $\sigma - \text{алгебре B}$, называют ***вероятностью***, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $P(A) \geq 0$ *(аксиома неотрицательности);*
2) $P(\Omega) = 1$*(аксиома нормированности);*
3) Для любых попарно несовместных событий $A_1, \ldots\ , A_n, \ldots : P(A_1 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) + \cdots$ (*Расширенная аксиома сложения*)

Основные свойства вероятности:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subset \mathrm{B} => P(A) \leq P(B)$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$
5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
6. $P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) +$ $+P(A_1A_2A_3) + \cdots + (-1)^{n+1}P(A_1A_2 \ldots A_n)$

10)Дать определение σ -алгебры событий и алгебры событий.

Сигма-алгеброй B называют непустую систему подмножеств множества U, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Если подмножество $A \in B =>\ \bar{A} \in B$
2. Если подмножества $A_1, A_2, \ldots\ , A_n, \ldots \in B => A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \in B \text{ и } A_1A_2 \ldots A_n \ldots \in B$

Элементы сигма-алгебры B, заданной на пространстве ЭИ Ω называют событиями, а саму сигма-алгебру B называют ***сигма-алгеброй событий***

11)Перечислить операции, определенные для случайных событий.

1)Пересечением 2х событий A и B называется событие $C = A \cap B = AB = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$

2)Объединением 2х событий A и B называется событие $C = A \cup B = A + B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$

3)Разностью событий A и B называется событие $C = A\backslash B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ и } \omega \notin B\}$

4)Дополнение события A: $\bar{A} = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$

5)$A \subset \mathrm{B} \Leftrightarrow \omega \in A => \omega \in B$

12) Формула произведения вероятностей и формула суммы вероятностей (для 2х и n-событий)

Формула умножения вероятностей:

Пусть событие $A = A_1 A_2 \dots A_n$ и P(A)>0. Тогда справедливо равенство: $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$

Сумма:

Вероятность объединения двух событий:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Вероятность объединения n-событий:

$P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + .. + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - .. - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + .. + (-1)^{n+1}P(A_1A_2 \dots A_n)$

13) Дайте определение гипотез и запишите формулу полной вероятности (сформулировать теорему).

Совокупность случайных событий $H_1, H_2 \dots H_n$ называют ***гипотезами***, если они удовлетворяют следующим условиям:

- $H_i \neq \emptyset \ \forall i = \overline{1, n}$;
- $H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Теорема:

Пусть событие A и гипотезы $H_1, H_2 \dots H_n$ заданы на одном и том же вероятностном пространстве и известны:

1) $P(H_1) > 0, .., P(H_n) > 0$;

2) $P(A|H_1), \dots, P(A|H_n)$

Тогда вероятность $P(A)$ можно определить по формуле:

$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$*,* называемой ***формулой полной вероятности***.

14) Дайте определение гипотез и запишите формулу Байеса (сформулировать теорему).

Совокупность случайных событий $H_1, H_2 \dots H_n$ называют ***гипотезами,*** если они удовлетворяют следующим условиям:

- $H_i \neq \emptyset \ \forall i = \overline{1, n}$;

- $H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Теорема:

Пусть для некоторого события А, Р(А)>0, и гипотез $H_1, \dots, H_n$ известны $P(H_i)$ $(P(H_i) > 0)$ и $P(A|H_i)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $P(H_i|\text{A}) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$

15) Сформулируйте теорему Бернулли и следствия из нее.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдет ровно k «успехов» (событие А наступит ровно k раз) равна: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = \overline{0,n}$

Следствия:

1. $P\{k_1 \leq k \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$
2. $P\{k \geq 1\} = 1 - q^n$

16) Что называют скалярной случайной величиной? Дайте определение функции распределения (вероятностей) скалярной случайной величины.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ – вероятностное пространство. Скалярную функцию $X(w)$, заданную на Ω , называют ***случайной величиной*** (СВ), если $\forall x \in \mathbb{R}$ множество $\{w: X(w) < x\}$ есть множество элементарных исходов, для которых $X(w) < x$ является событием

Функцией распределения (вероятностей) СВ X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X < x\}$ т.е. события, состоящего из тех элементарнх исходов w, для которых $X(w) < x$: $F(x) = P\{X < x\}$

17) Сформулируйте свойства функции распределения (вероятностей) скалярной случайной величины.

Функция распределения вероятностей удовлетворяет следующим свойствам:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x_1) \leq F(x_2)\ \forall\ x_1 < x_2$ (т.е. F(x) – неубывающая функция)
3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$
5. $F(x) = F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F(y)$ (то есть F(x) – непрерывная слева функция)

18) Дайте определение дискретной скалярной случайной величины.

Случайную величину X называют ***дискретной***, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

19) Сформулируйте теорему о функции распределения (вероятностей) дискретной скалярной случайной величины.

Если X – дискретная скалярная СВ со множеством возможных значений $\{x_k\}_{k=1}^{N \leq \infty}$, то ее функция распределения вероятностей $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le x_1 \\ \sum_{x_k < x} P\{X = x_k\}, x_1 < x \le x_N \\ 1, x > x_N \end{cases}$$

20) Дайте определение скалярной случайной величины, имеющей биноминальный закон распределения. Какой вид имеет её функция распределения вероятностей?

Дискретная СВ X распределена по биноминальному закону, если она принимает значения 0,1,2,…,n с вероятностями $C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, \dots, n$, т.е. её закон распределения имеет вид: $P\{X = k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, \dots, n, q = 1 - p$.

Ряд распределения имеет вид:

X	0	1	…	k	…	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Корректность определения биноминального распределения:

$$P_n(k) > 0 \text{ и } \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

21) Дайте определение скалярной случайной величины, имеющей распределение Пуассона. Какой вид имеет её функция распределения вероятностей?

Дискретная СВ X распределена по закону Пуассона, если она принимает неотрицательные целые значения с вероятностями $P\{X = k\} = P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, k = 0,1, \dots,$ где $\lambda > 0$ $\lambda -$ параметр распределения Пуассона. Ряд распределения имеет вид:

X	0	**1**	**2**	**…**	***n***	**…**
P	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \mathrm{e}^{-\lambda}$	**..**	$\frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda}$	**…**

Корректность определения распределения Пуассона:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i; \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda} = 1$$

22)Какая логическая проблема возникает при введении понятия непрерывной скалярной случайной величины и какое решение этой проблемы можно предложить? Дайте определение непрерывной скалярной случайной величины.

Если скалярная СВ X может принимать любое значение из интервала $I \subset R$, то эту СВ естественно называть непрерывной. При этом возникает логическая проблема при определении $P\{X = x \in I\}$(парадокс нулевой вероятности):

Если $(P\{X = x \in I\}) > 0$, то $P\{X \subset I\} = \sum_{x \in I} P\{X = x\} = \infty$;

Если $(P\{X = x \in I\}) = 0$, то $P\{X \subset I\} = \sum_{x \in I} P\{X = x\} = 0$.

Такой парадокс объясняется некорректностью суммирования по несчётному множеству точек $x \in I$.

Непрерывной называют случайную величину X, функцию распределения которой можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$, функцию f(x) называют плотностью распределения (вероятностей) случайной величины X.

23)Сформулируйте основные свойства плотности распределения вероятностей скалярной случайной величины.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

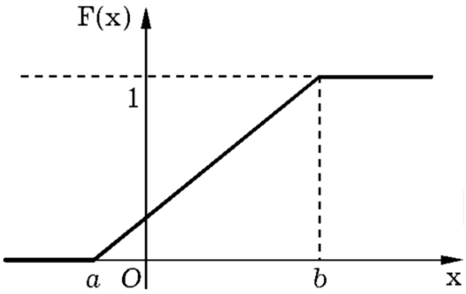
1) $f(x) \geq 0$
2) $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$
3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
4) $P\{x \leq X < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$ в точках непрерывности плотности распределения
5) $P\{X = x\} = 0$

24) Дайте определение скалярной случайной величины, имеющей равномерный закон распределения. Какой вид имеет её функция распределения?

Если $[a, b] \subset R$ множество возможных значений непрерывной СВ X и все они равновероятны, то говорят, что эта СВ распределена на $[a, b]$ равномерно.

Функция распределения F(x) равномерно распределённой СВ X имеет вид:

Вероятность попадания такой СВ в интервал $(x_1; x_2) \subset [a, b]$ равна $P(X \subset [x_1; x_2]) =$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

$F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$ т.е. пропорциональна длине этого интервала.

25)Дайте определение скалярной случайной величины, имеющей экспоненциальный закон распределения. Какой вид имеет её функция распределения?

Случайная величина распределена по ***экспоненциальному(показательному) закону*** с параметром $\lambda > 0$, если её плотность распределения и функция распределения имеют вид:

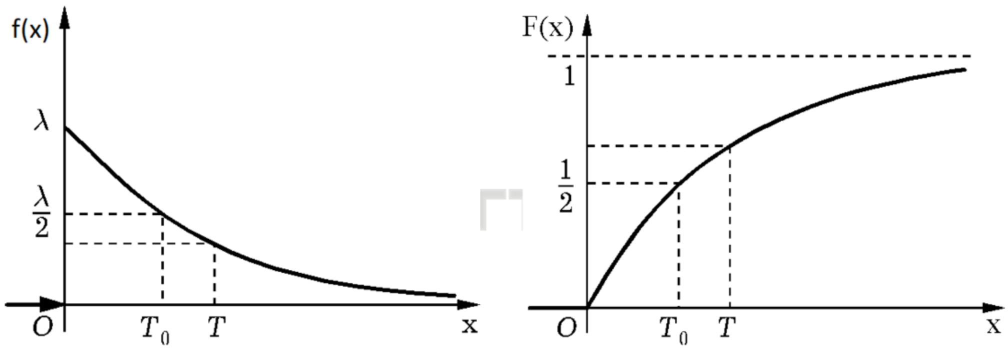
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}}, & x \geq 0 \end{cases}; \quad F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}}, x \geq 0 \end{cases}$$

26) Дайте определение нормальной случайной величины. Вероятность попадания в полуинтервал нормально распределённой величины. Что называют функцией Лапласа? Сформулируйте её основные свойства.

Говорят, что непрерывная случайная величина X ***распределена по нормальному (или гауссову) закону***, или имеет ***нормальное (гауссово) распределение*** с параметрами m и σ^2 и пишут $\mathrm{X} \sim N(m, \sigma^2)$, если её функция плотности распреедeления вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} (-\infty < m < +\infty, \sigma > 0).$$

Графики функции плотности и функции распределения:



Поскольку функция распределения нормального закона представляет собой «неберущийся» интеграл, то используются таблицы значений распределения стандартного нормального распределения.

В ряде справочников приводятся значение интеграла Лапласа: $\Phi_0(\mathrm{x}) = \int_0^{\mathrm{x}} \varphi(y)dy$, обладающего следующими свойствами:

- $\Phi_0(-\infty) = -0.5;\ \Phi_0(+\infty) = 0.5$
- $\Phi_0(0) = 0$
- $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$
- $\Phi_0(x) = P\{0 \leq X < x\}$, где $X \sim N(0,1)$