Оглавление

Что называют скалярной случайной величиной?

Определение 5.1 Скалярную функцию $X(\omega)$, заданную на пространстве элементарных исходов, называют ***случайной величиной***, если для любого $x \in \mathrm{R}$ множество исходов, для которых $X(\omega) < x$, т.е. $\{\omega : X(\omega) < x\}$ — является событием.

Дайте определение функции распределения (вероятностей) скалярной случайной величины.

Определение 5.2 ***Функцией распределения*** (***вероятностей***) случайной величины X назы- вают функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $X < x$, т.е. события, состоящего из тех и только тех *элементарных исходов* ω, для которых $X(\omega) < x$:

$$F(x) = \mathrm{P}\{X < x\}.$$

Сформулируйте и докажите свойства функции распределения (вероятностей) скалярной случайной величины.

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
2. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ *при* $x_1 < x_2$, *т.е.* $F(x)$ — *неубывающая функция.*
3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
4. $\mathrm{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.
5. $F(x) = F(x-0)$, *где* $F(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F(y)$, *т.е.* $F(x)$ — *непрерывная слева функция.*

Дайте определение дискретной скалярной случайной величины.

Определение 5.3 *Случайную величину X* называют ***дискретной*** , если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Сформулируйте и докажите теорему о функции распределения (вероятностей) дискретной скалярной случайной величины.

Если X — дискретная скалярная СВ со множеством возможных значений $\{x_k\}_{k=1}^{N\leqslant\infty}$, то ее функция распределения вероятностей $F(x)$ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant x_1,\\ \sum\limits_{x_k<x} P\{X=x_k\} & x_1<x\leqslant x_N,\\ 1 & x>x_N.\end{cases}$$

Дайте определение скалярной случайной величины, имеющей биномиальный закон распределения. Какой вид имеет ее функция распределения вероятностей?

Дискретная случайная величина X распределена по ***биномиальному закону***,если она принимает значения $0,1,2,\ldots,n$ в соответствии с распределением, заданным формулой

X	0	1	$\ldots$	i	$\ldots$	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^i p^i q^{n-i}$	$\ldots$	p^n

Таблица 7.1.

$$\mathsf{P}\{X=i\}=P_n(i)=C_n^i p^i q^{n-i}, i=\overline{0,n},$$

Дайте определение скалярной случайной величины, имеющей распределение Пуассона. Какой вид имеет ее функция распределения вероятностей?

Дискретная случайная величина X распределена по ***закону Пуассона***, если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями

$$\mathsf{P}\{X = i\} = P(i;\lambda) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

Какая логическая проблема возникает при введении понятия непрерывной скалярной случайной величины и какое решение этой проблемы можно предложить? Дайте определение непрерывной скалярной случайной величины.

Если скалярная СВ X может принимать любое значение из интервала $I \subset \mathbb{R}$, то эту СВ естественно назвать непрерывной. При этом возникает логическая проблема при определении $P\{X = x \in I\}$ (парадокс нулевой вероятности):

если $(P\{X = x \in I\}) > 0$ то $P\{X \subset I\} = \sum\limits_{x \in I} P\{X = x\} = \infty$;

если $(P\{X = x \in I\}) = 0$ то $P\{X \subset I\} = \sum\limits_{x \in I} P\{X = x\} = 0$.

Данный парадокс объясняется некорректностью суммирования по несчетному множеству точек $x \in I$.

Определение 5.5 ***Непрерывной*** называют ***случайную величину*** X, *функцию распределения* которой $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(y)\,dy. \tag{5.1}$$

Функцию $p(x)$ называют ***плотностью распределения*** (***вероятностей***) случайной величины X.

Сформулируйте и докажите основные свойства плотности распределения вероятностей скаляр- ной случайной величины.

Теорема 5.2 *Плотность распределения обладает следующими свойствами. 1)* $p(x) \geqslant 0$.

2) $\mathsf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$.

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.

4) $\mathsf{P}\{x \leqslant X < x + \Delta x\} \approx p(x)\Delta x$ *в точках непрерывности плотности распределения.*

5) $\mathsf{P}\{X = x\} = 0$.

Дайте определение скалярной случайной величины, имеющей равномерный закон распределе- ния. Какой вид имеет ее функция распределения?

Случайная величина имеет ***равномерное распределение*** на отрезке $[a, b]$, если ее *плотность распределения* $p(x)$ и *функция распределения* $F(x)$ равны

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & x < a \text{ или } x > b. \end{cases} \quad , \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Дайте определение нормальной случайной величины. Что называют функцией Лапласа? Сформулируйте и докажите ее основные свойства.

Случайная величина ***распределена по нормальному*** (или ***гауссову***) ***закону***, или имеет ***нормальное*** (***гауссово***) ***распределение***, если ее плотность

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < m < +\infty,\ \sigma > 0).$$

Нормальное распределение зависит от двух параметров: m и σ. Всюду в далее запись $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ будет означать, что X — нормальная случайная величина с параметрами μ и σ.

Графики плотности $\varphi_{m,\sigma}(x)$ и функции

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

В ряде справочников приводятся значение интеграла Лапласа:

$\Phi_0(x) = \int\limits_0^x \varphi(y)dy$, обладающего следующими свойствами:

1. $\Phi_0(-\infty) = -0.5$, $\Phi_0(+\infty) = 0.5$.
2. $\Phi_0(0) = 0$.
3. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.
4. $\Phi_0(x) = P\{0 \leqslant X < x\}$ где $X \sim N(0, 1)$.

Что понимают под n-мерным случайным вектором и его функцией распределения (вероятностей)?

Определение

Совокупность случайных величин $X_1 = X_1(\omega), \ldots, X_n = X_n(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$, называют многомерной (n-мерной) случайной величиной, или n-мерным случайным вектором.
При этом СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — координаты случайного вектора.

Функцией распределения (вероятностей) $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ (n-мерного) случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ называют функцию, значение которой в точке $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ равно вероятности совместного осуществления событий $\{X_1 < x_1\}, \ldots, \{X_n < x_n\}$, т.е.
$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$.
Данную функцию также называют совместной (n-мерной) функцией распределения СВ $(X_1, \ldots, X_n)$.

Сформулируйте и докажите основные свойства функции распределения (вероятностей) n-мерного случайного вектора.

1. $0 \leqslant F(x_1, x_2) \leqslant 1.$
2. $F(x_1, x_2)$ — *неубывающая функция по каждому из аргументов* x_1 *и* x_2.
3. $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0.$
4. $F(+\infty, +\infty) = 1.$
5. $P\{a_1 \leqslant X_1 < b_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\} = = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$
6. $F(x_1, x_2)$ — *непрерывная слева в любой точке* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *по каждому из аргументов* x_1 *и* x_2 *функция.*
7. $F_{X_1,X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x), \quad F_{X_1,X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x).$

Дайте определение дискретного случайного вектора.

Двумерную случайную величину X, Y *называют дискретной, если каждая из случайных величин* X *и* Y *является дискретной.*

Сформулируйте и докажите теорему о функции распределения (вероятностей) дискретного случайного вектора.

X	Y				
	y_1	y_2	$\ldots$	y_m	P_X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1m}	p_{X1}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2m}	p_{X2}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\ldots$	p_{nm}	p_{Xn}
P_Y	p_{Y1}	p_{Y2}	$\ldots$	p_{Ym}	

Что понимают под обобщенной плотностью распределения вероятностей и какими основными свойствами она обладает?

Дайте определение непрерывного случайного вектора.

Непрерывным случайным вектором называют n-мерный случайный вектор $\vec{X}(\omega)$, вероятность попадания которого в любую область $\mathbb{R}^n$ бесконечно малого диаметра – бесконечно мала и $\forall(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ определена функция:

$$f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \lim \frac{P\{\vec{X}(\omega) \subset U(\vec{x})\}}{\mu(U(\vec{x}))},$$

где $U(\vec{x})$ – окрестность точки $\vec{x}$, $\mu(U(\vec{x}))$ – мера окрестности точки $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ – плотность распределения вероятностей n-мерного случайного вектора.

Сформулируйте и докажите, основные свойства плотности распределения вероятностей непрерывного случайного вектора.

1. $f(x, y) \geqslant 0.$
2. $P\{a_1 \leqslant X < b_1, a_2 \leqslant Y < b_2\} = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy.$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$
4. $$P\{x < X < x + \Delta x,\ y < Y < y + \Delta y\} \approx \approx f(x, y)\Delta x \Delta y.$$
5. $P\{X = x, Y = y\} = 0.$
6. $P\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy.$
7. $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy, \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx.$

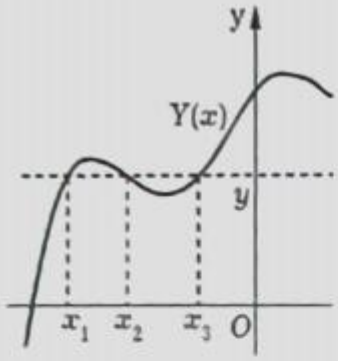
Что называют функцией случайной величины?

Определение 5.6 Случайную величину Y, которая каждому *элементарному исходу* ω ставит в соответствие число $Y(\omega) = \varphi(X(\omega))$, называют ***функцией*** $\varphi(X)$ ***(скалярной) от скалярной случайной величины*** X.

Сформулируйте и решите задачу о нахождении закона распределения функции случайной величины (различные случаи).

Нахождение функции распределения

Рассмотрим, как найти $F_Y(y)$, если известна $f_X(x)$.
По определению $F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{Y(X(\omega)) < y\}$.
Событие $\{Y(X\omega)) < y\}$ эквивалентно событию
$\bigcup\limits_k \{X(\omega) \in \Delta_k\}$, где Δ_k — непересекающиеся промежутки из $\mathbb{R}$
(поскольку на множестве элементарных исходов из $\{Y(X(\omega)) < y\}$ СВ $X(\omega)$ будет принимать свои значения на некоторой совокупности $\{\Delta_k\}$).



Тогда по расширенной аксиоме сложения
$F_Y(y) = P\{Y(X(\omega)) < y\} = \sum\limits_k P\{X(\omega_k) \in \Delta_k\} =$
$= \sum\limits_k \int\limits_{\Delta_k} f_X(x)dx = \int\limits_{\Delta} f_X(x)dx$, где $\Delta = \bigcup\limits_k \Delta_k$.
Т.к. $\bigcup\limits_k \Delta_k$ определено как множество тех значений $X(\omega)$, для которых $Y(X(\omega)) < y$, то получаем

$$F_Y(y) = \int\limits_{Y(x)<y} f_X(x)dx.$$

Рассмотрим частный случай, предположив, что $Y(x)$ является непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.

Теорема

Пусть СВ X имеет плотность распределения $f_X(x)$, функция $y = Y(x) = \varphi(x)$ является монотонной и непрерывно–дифференцируемой. Тогда функция плотности СВ $Y = Y(X)$ может быть найдена по следующей формуле: $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$, где $x = \psi(y)$ функция, обратная к $y = \varphi(x)$

Если $\varphi(x)$ является непрерывной кусочно-монотонной функцией, то $f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X(\psi_i(y))|\psi_i'(y)|$,
где k – количество участков монотонности, $\psi_i'(y)$ — обратная функция на i-ом участке монотонности.

Рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ двумерный случайный вектор (X_1, X_2) и числовую функцию $\varphi(x_1, x_2)$.

Дайте определение независимых случайных величин. Каким основным свойством обладает совместный закон распределения независимых случайный величин?

Определение

Случайные величины X и Y называются независимыми, если $F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. В противном случае случайные величины называют зависимыми.

Дайте определение математического ожидания скалярной случайной величины и приведите его содержательную интерпретацию.

Математическим ожиданием (средним значением) $\mathsf{M}X$ дискретной случайной величины X *называют сумму произведений значений x_i случайной величины и вероятностей $p_i = \mathsf{P}\{X = x_i\}$, с которыми случайная величина принимает эти значения:*

$$\mathsf{M}X = \sum_i x_i p_i.$$

При этом, если множество возможных значений случайной величины X счетно, предполагается, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty,$$

т. е. ряд, определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно; в противном случае говорят, что математическое ожидание случайной величины X не существует.

Математическим ожиданием (средним значением) $\mathsf{M}X$ непрерывной случайной величины X *называют интеграл*

$$\mathsf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

При этом предполагается, что $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx < +\infty$, т.е. несобственный интеграл, определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно.

Пусть на прямой расположена система материальных точек с массами p_i $\left(\sum_i p_i = 1\right)$ и пусть x_i — координата i-й точки.

Тогда центр масс системы будет иметь координату

$$\overline{X} = \frac{\sum_i x_i p_i}{\sum_i p_i} = \frac{\sum_i x_i p_i}{1} = \sum_i x_i p_i,$$

совпадающую с математическим ожиданием $\mathsf{M}X$ случайной величины X.

Сформулируйте и докажите основные свойства математического ожидания.

Математическое ожидание удовлетворяет следующим свойствам.

1. Если случайная величина X принимает всего одно значение C с вероятностью единица (т.е., по сути дела, не является случайной величиной), то $\mathrm{M}\,C = C$.
2. $\mathrm{M}(aX + b) = a\,\mathrm{M}\,X + b$, где a, b — постоянные.
3. $\mathrm{M}(X_1 + X_2) = \mathrm{M}\,X_1 + \mathrm{M}\,X_2$.
4. $\mathrm{M}(X_1 X_2) = \mathrm{M}\,X_1 \cdot \mathrm{M}\,X_2$ для независимых случайных величин X_1 и X_2.

Дайте определение дисперсии скалярной случайной величины.

Дисперсией $\mathrm{D}\,X$ случайной величины X *называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее среднего значения, т.е.* $\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X)^2$.

Полагая $Y(x) = (x - \mathrm{M}\,X)^2$ и используя формулы для вычисления математического ожидания функции от СВ, получаем:

$$\mathrm{D}\,X = \sum_i (x_i - \mathrm{M}\,X)^2 p_i \text{ и } \mathrm{D}\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\,X)^2 f(x)\,dx.$$

Сформулируйте и докажите основные свойства дисперсии.

Дисперсия удовлетворяет следующим свойствам.

1. *Если случайная величина X принимает всего одно значение C с вероятностью единица, то* $\mathrm{D}\,C = 0$.
2. $\mathrm{D}(aX + b) = a^2\,\mathrm{D}\,X$.
3. $\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}\,X^2 - (\mathrm{M}\,X)^2$.
4. $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}\,X + \mathrm{D}\,Y$ *для независимых случайных величин X и Y.*

Что называют ковариацией двух скалярных случайных величин?

Пусть $(X_1; X_2)$ — *двумерный случайный вектор.*

Определение

Ковариацией (корреляционным моментом) $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$ *случайных величин X_1 и X_2 называют математическое ожидание произведения случайных величин* $\overset{\circ}{X}_1 = X_1 - \mathrm{M}\,X_1$ *и* $\overset{\circ}{X}_2 = X_2 - \mathrm{M}\,X_2$*:*

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathrm{M}(\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_2) = \mathrm{M}\big((X_1 - \mathrm{M}\,X_1)(X_2 - \mathrm{M}\,X_2)\big).$$

Для дискретных случайных величин X_1 и X_2

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \sum_{i,j} (x_i - \mathrm{M}\,X_1)(x_j - \mathrm{M}\,X_2)p_{ij},$$

для непрерывных случайных величин X_1 и X_2

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mathrm{M}\,X_1)(x_2 - \mathrm{M}\,X_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Сформулируйте и докажите основные свойства ковариации.

Ковариация имеет следующие свойства

1. $\operatorname{cov}(X, X) = \mathrm{D}X$.
2. $\operatorname{cov}(X_1, X_2)^{\mathrm{I}} = 0$ *для независимых случайных величин* X_1 *и* X_2.
3. *Если* $Y_1 = a_1X_1 + b_1$, *и* $Y_2 = a_2X_2 + b_2$, *то* $\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = a_1a_2 \operatorname{cov}(X_1, X_2)$.
4. $-\sqrt{\mathrm{D}X_1\,\mathrm{D}X_2} \leqslant \operatorname{cov}(X_1, X_2) \leqslant \sqrt{\mathrm{D}X_1\,\mathrm{D}X_2}$.
5. $|\operatorname{cov}(X_1, X_2)| = \sqrt{\mathrm{D}X_1\,\mathrm{D}X_2}$ *тогда и только тогда, когда случайные величины* X_1 *и* X_2 *связаны линейной зависимостью, т.е. существуют такие числа* a *и* b, *при которых* $X_2 = aX_1 - b$.
6. $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \mathrm{M}(X_1X_2) - MX_1MX_2$.

Дайте определение коэффициента корреляции двух скалярных случайных величин.

Коэффициентом корреляции *случайных величин* X *и* Y *называют число* $\rho = \rho(X, Y)$, *определяемое равенством (предполагается, что* $\mathrm{D}X > 0$ *и* $\mathrm{D}Y > 0$*)* $\rho = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X \cdot \mathrm{D}Y}}$.

Сформулируйте и докажите основные свойства коэффициента корреляции. Приведите возможную интерпретацию значения коэффициента корреляции.

Коэффициент корреляции имеет следующие свойства.

1. $\rho(X, X) = 1$.
2. *Если случайные величины X и Y являются независимыми (и существуют $\mathrm{D}\,X > 0$ и $\mathrm{D}\,Y > 0$), то $\rho(X, Y) = 0$.*
3. $\rho(a_1X_1 + b_1,\ a_2X_2 + b_2) = \pm\rho(X_1, X_2)$. *При этом знак плюс нужно брать в том случае, когда a_1 и a_2 имеют одинаковые знаки, и минус — в противном случае.*
4. $-1 \leqslant \rho(X,\ Y) \leqslant 1$.
5. $|\rho(X,\ Y)| = 1$ *тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью.*

Коэффициент корреляции (также как и ковариация) отражают "степень линейной близости" случайных величин. При $\rho > 0$ говорят о *положительной корреляционной зависимости* X и Y, при $\rho < 0$ — об *отрицательной*.
Однако, коэффициент корреляции (ковариация) может не улавливать "степень нелинейной близости" случайных величин. Для этой цели служат другие характеристики.
По аналогии с ковариационной матрицей для случайного вектора $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ можно ввести корреляционную матрицу.

Что понимают под ковариационной матрицей n-мерного случайного вектора?

Матрицей ковариаций (ковариационной матрицей) *случайного вектора $\vec{X}$ называют матрицу $\Sigma = (\sigma_{ij}) = (\mathrm{cov}(X_i, X_j))$, состоящую из ковариаций случайных величин X_i и X_j.*

Сформулируйте основные свойства ковариационной матрицы.

Ковариационная матрица обладает следующими свойствами.

1. *Матрица ковариаций* Σ *является симметрической.*
2. *Если случайный вектор* $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, *то* $\Sigma_{\vec{Y}} = B^T \Sigma_{\vec{X}} B$, *где* $\Sigma_{\vec{Y}}$ *и* $\Sigma_{\vec{X}}$ *матрицы ковариаций случайных векторов* $\vec{Y}$ *и* $\vec{X}$ *соответственно.*
3. *Матрица ковариаций* Σ *является неотрицательно определенной.*

Что понимаю под законом больших чисел и что является его основным содержанием?

Последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *случайных величин удовлетворяет* **закону больших чисел** (**слабому**), *если для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Иными словами, выполнение закона больших чисел отражает предельную устойчивость средних арифметических случайных величин: при большом числе испытаний они практически перестают быть случайными и совпадают со своими средними значениями.

Сформулируйте и докажите I-ое неравенство Чебышева.

Для каждой неотрицательной случайной величины X, имеющей математическое ожидание $\mathsf{M}\,X$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\mathsf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{M}\,X}{\varepsilon},$$

называемое **первым неравенством Чебышева**.

Сформулируйте и докажите II-ое неравенство Чебышева.

Для каждой случайной величины X, имеющей дисперсию $\mathsf{D}\,X = \sigma^2$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо **второе неравенство Чебышева**

$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{M}\,X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Сформулируйте и докажите теорему Чебышева.

Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин такова, что существуют $\mathsf{M}\,X_i = m_i$ и $\mathsf{D}\,X_i = \sigma_i^2$, причем дисперсии σ_i^2 ограничены в совокупности (т.е. $\sigma_i^2 \leqslant C < +\infty$), то для последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ выполнен закон больших чисел.

При этом говорят также, что к последовательности X_1, X_2, ..., X_n, ... случайных величин применим **закон больших чисел в форме Чебышева**.

Сформулируйте и докажите теорему Бернулли.

Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюдаемая частота успехов $r_n = \frac{Y_n}{n}$ сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|r_n - p| \geqslant \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Данную теорему называют также **теоремой Бернулли**, или **законом больших чисел в форме Бернулли**. Закон больших чисел в форме Бернулли является частным случаем закона больших чисел в форме Чебышева.

Сформулируйте центральную предельную теорему (частный случай).

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{M}\,X_n = m$, $\mathbf{D}\,X_n = \sigma^2$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Сформулируйте и докажите теорему Муавра-Лапласа.

Пусть S_n — суммарное число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$. Тогда с ростом n последовательность функций распределения случайных величин $(S_n - np)/\sqrt{npq}$ сходится к функции стандартного нормального распределения, т.е.

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x).$$

Сформулируйте основную задачу математической статистики

Основная задача МС — разработка методов получения научно обоснованных методов о массовых явлениях и процессах по данным наблюдений или экспериментов. Эти выводы относятся не к отдельным экспериментам, а представляют собой утверждения о вероятностных характеристиках изучаемого процесса.

Что называют (а): случайной выборкой; (б) выборкой?

1. *Совокупность независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых имеет то же распределение, что и случайная величина X, будем называть* **случайной выборкой** *из генеральной совокупности X и записывать $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ (иногда просто $X_1, \ldots, X_n$). При этом число n называют* **объемом случайной выборки**, *а случайные величины X_i —***элементами случайной выборки**.

2. *Любое возможное значение $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ случайной выборки $\vec{X}_n$ будем называть* **выборкой** *из генеральной совокупности X (также* **реализацией случайной выборки** *$\vec{X}_n$). Число n характеризует* **объем выборки**, *а числа x_i, $i = \overline{1, n}$, представляют собой* **элементы выборки** *$\vec{x}_n$.*

   Выборку $\vec{x}_n$ можно интерпретировать как совокупность n чисел $x_1, \ldots, x_n$, полученных в результате проведения n повторных независимых наблюдений над случайной величиной X.

Дайте определение выборочного пространства

Множество возможных значений $\mathcal{X}_n \in \mathbb{R}^n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ называют **выборочным пространством**.

Что называют (а) статистикой; (б) выборочным законом распределения?

Любую функцию $g(\vec{X}_n)$ *от случайной выборки* $\vec{X}_n$ *называют* **статистикой** *или* **выборочной характеристикой**, *а ее закон распределения — выборочным законом распределения.*

Дайте определение выборочного начального момента k-го порядка. Как принято называть начальный момент первого порядка?

Пусть $\vec{X}_n$ — случайная выборка из генеральной совокупности X с функцией распределения $F(x)$ (и плотностью распределения $f(x)$ в случае непрерывной статистической модели). Выборочную характеристику

$$\hat{\mu}_k(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

называют **выборочным начальным моментом k-го порядка**. Выборочный начальный момент 1-го порядка называют так же **выборочным средним** и обозначают $\bar{X} = \hat{\mu}_1(\vec{X}_n)$.

Дайте определение выборочного центрального момента k-го порядка. Как принято называть центральный момент второго порядка?

Выборочную характеристику

$$\hat{\nu}_k(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k$$

называют **выборочным центральным моментом k-го порядка**. Выборочный центральный момент 2-го порядка называют так же **выборочной дисперсией** и обозначают $\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \hat{\nu}_2(\vec{X}_n)$.

Сформулируйте задачу точечного оценивания. Какая основная проблема возникает при ее решении?

Одной из задач математической статистики является *оценка* неизвестных параметров выбранной *параметрической модели.*

Предположим, что закон распределения *генеральной совокупности* принадлежит множеству $\{F(x;\vec{\theta}):\vec{\theta}\in\Theta\}$, где вид функции распределения задан, а вектор параметров $\vec{\theta}=(\theta_1;\ldots;\theta_r)$ неизвестен. Требуется найти оценку для $\vec{\theta}$ или некоторой функции от него (например, математического ожидания, дисперсии) по *случайной выборке* $(X_1;\ldots;X_n)$ из генеральной совокупности X.

Дайте определение несмещенной статистики и докажите, что выборочная дисперсия - смещенная оценка дисперсии.

Определение 15.3 Статистику $\widehat{\theta}(\vec{X}_n)$ называют ***несмещенной оценкой*** параметра θ, если ее математическое ожидание совпадает с θ, т.е. $\mathsf{M}\widehat{\theta}(\vec{X}_n)=\theta$ для любого фиксированного n.

Дайте определение эффективной статистики и докажите, что выборочное среднее - эффективная оценка в классе линейных несмещенных оценок.

Несмещенная статистическая оценка, дисперсия которой совпадает с нижней гранью в неравенстве Крамера-Рао.

Дайте определение состоятельной статистики и докажите, что выборочное среднее - состоятельная оценка математического ожидания.

Определение 15.2 Статистику $\widehat{\theta}(\vec{X}_n)$ называют ***состоятельной оценкой*** параметра $\theta\in\Theta$, если с ростом *объема выборки* n она сходится по вероятности к оцениваемому параметру θ, т.е.

$$\widehat{\theta}(\vec{X}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}}\theta.$$

Сформулируйте и докажите теорему Рао (скалярный случай).

Теорема (неравенство Рао-Крамера)

Пусть рассматриваемая параметрическая модель является регулярной, т.е. ее можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла, зависящего от параметра, и $\widehat{\theta}(\vec{X}_n)$ — несмещенная оценка неизвестного параметра θ. Тогда имеет место неравенство

$$\mathsf{D}\,\widehat{\theta}(\vec{X}_n) \geqslant \frac{1}{nI(\theta)},$$

где

$$I(\theta) = \mathsf{M}\left(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2.$$

Здесь $I(\theta)$ — **количество информации по Фишеру** *в одном наблюдении, а $f(t,\theta)$ — плотность распределения генеральной совокупности X в случае непрерывной статистической модели и вероятность события $\{X = t\}$ в случае дискретной статистической модели.*

Изложите идею метода максимального правдоподобия построения точечных оценок параметров законов распределения дискретных случайных величин.

Метод максимального правдоподобия - состоит он в том, что в качестве «наиболее правдоподобного» значения параметра берут значение θ, максимизирующее вероятность получить при n опытах данную выборку $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Это значение параметра θ зависит от выборки и является искомой оценкой.

Сформулируйте и приведите обоснования следствий из теоремы Рао.

Величину

$$e(\theta) = \frac{1}{nI(n)\,\mathsf{D}\,\widehat{\theta}(\vec{X}_n)}$$

называют показателем эффективности по Рао (Рао-Крамеру).

Из $\mathsf{D}\,\widehat{\theta}(\vec{X}_n) \geqslant \dfrac{1}{nI(\theta)}$ следует, что для любой несмещенной оценки $\widehat{\theta}(\vec{X}_n)$ параметра θ выполняется неравенство $0 \leqslant e(\theta) \leqslant 1$.

Определение

Несмещенную оценку $\widehat{\theta}(\vec{X}_n)$ параметра $\theta \in \Theta$ называют эффективной по Рао-Крамеру, если ее показатель эффективности $e(\theta) = 1$.

Что называют интервальной оценкой и с чем связана необходимость ее построения?

Пусть $\vec{X}_n$ — *случайная выборка объема n из генеральной совокупности* X с функцией распределения $F(x;\theta)$, зависящей от параметра θ, значение которого неизвестно. Предположим, что для параметра θ построен интервал $\left(\underline{\theta}(\vec{X}_n),\, \overline{\theta}(\vec{X}_n)\right)$, где $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ являются функциями случайной выборки $\vec{X}_n$, такими, что выполняется равенство

$$\mathsf{P}\left\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X}_n)\right\} = \gamma. \tag{16.1}$$

В этом случае интервал $\left(\underline{\theta}(\vec{X}_n),\, \overline{\theta}(\vec{X}_n)\right)$ называют ***интервальной оценкой*** для параметра θ с ***коэффициентом доверия*** γ (или, сокращенно, γ***-доверительной интервальной оценкой***), а $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ соответственно ***нижней*** и ***верхней границами*** интервальной оценки.

Как определяется вероятность совершения ошибки при построении γ-доверительного интервала и что представляет собой вероятностные характеристики качества интервальной оценки?

Вероятностной характеристикой точности оценивания параметра θ является случайная величина

$$l(\vec{X}_n) = \overline{\theta}(\vec{X}_n) - \underline{\theta}(\vec{X}_n),$$

которая для любой реализации $\vec{x}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ есть длина интервала $\left(\underline{\theta}(\vec{x}_n),\, \overline{\theta}(\vec{x}_n)\right)$.

Интервал $\left(\underline{\theta}(\vec{x}_n),\, \overline{\theta}(\vec{x}_n)\right)$ называют ***доверительным интервалом*** для параметра θ с коэффициентом доверия γ или γ***-доверительным интервалом***.

Наряду с термином "коэффициент доверия" широко используют также термины ***доверительная вероятность*** и ***уровень доверия***. При этом коэффициент доверия γ чаще всего выбирают равным 0,9, 0,95 или 0,99, т.е. близким к 1.

Дайте определение центральной статистики.

Центральной статистикой случайной выборки $X_1,\ldots,X_n$ называется любая статистика $Z = Z(X_1,\ldots,X_n;\theta)$, зависящая от неизвестного параметра θ, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. закон распределения $F_Z(z)$ статистики Z известен и не зависит от θ;

2. статистика Z непрерывна и строго монотонна по θ.

Сформулируйте задачу построения интервальной оценки и изложите принципиальную схему ее решения.

Постановка задачи интервальной оценки параметров заключается в следующем.

Имеется: выборка наблюдений (x_1, x_2, …, x_n) за случайной величиной X. Объем выборки n фиксирован.

Необходимо с доверительной вероятностью g=1–a определить интервал

$\theta_0 - \theta_1$ ($\theta_0 < \theta_1$),

который накрывает истинное значение неизвестного скалярного параметра Θ (здесь, как и ранее, величина Θ является постоянной, поэтому некорректно говорить, что значение Θ попадает в заданный интервал).

Ограничения: выборка представительная, ее объем достаточен для оценки границ интервала.

Эта задача решается путем построения доверительного утверждения, которое состоит в том, что интервал от θ_0 до θ_1 накрывает истинное значение параметра Θ с доверительной вероятностью не менее g. Величины θ_0 и θ_1 называются нижней и верхней доверительными границами (НДГ и ВДГ соответственно). Доверительные границы интервала выбирают так, чтобы выполнялось условие $P(\theta_0 \le \Theta^* \le \theta_1) = g$.

Пусть X(ω) ≡ N (m, σ2). Сформулируйте и решите задачу построения интервальной оценки для параметра m при известном значении параметра σ2.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2, σ^2 известна.

В данном случае статистика

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Поэтому

$$\mathsf{P}\left\{-u_{1-\alpha} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\alpha}\right\} = 1 - 2\alpha,$$

где $u_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного нормального распределения. Умножая все части двойного неравенства на $-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, а затем прибавляя $\overline{X}$, получим

$$\mathsf{P}\left\{\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha} < \mu < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\right\} = 1 - 2\alpha,$$

т.е. случайный интервал $\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\right)$ накрывает неизвестное математическое ожидание μ с необходимой доверительной вероятностью $1-2\alpha$.

Пусть X(ω) ≡ N (m, σ2). Сформулируйте и решите задачу построения интервальной оценки для параметра m при неизвестном значении параметра σ2.

При неизвестной дисперсии σ^2 статистика

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}$$

имеет *распределение Стьюдента* с $n-1$ степенями свободы. Поэтому

$$\mathsf{P}\left\{t_\alpha(n-1) < \frac{\overline{X} - \mu}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n} < t_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1 - 2\alpha,$$

где $t_q(n-1)$ — квантиль уровня q распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Поскольку плотность распределения Стьюдента — четная функция, то $t_q(n-1) = -t_{1-q}(n-1)$. Умножая все части двойного неравенства на $-\dfrac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}$, а затем прибавляя $\overline{X}$, заключаем, что нижняя и верхняя границы интервальной оценки с коэффициентом доверия $\gamma = 1-2\alpha$ для параметра μ в случае с неизвестной дисперсией можно определить по формулам

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1), \quad \overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1).$$

Что представляет собой статистическая гипотеза? В каких случаях статистическую гипотезу называют параметрической?

Определение 17.1 ***Статистической гипотезой*** называют любое утверждение о функции распределения случайной величины X, при этом слово “статистическая” для краткости обычно опускают. ***Параметрической гипотезой*** называют любое утверждение о параметре θ функции распределения $F(t;\theta)$ случайной величины X. При этом если θ — скаляр, то речь идет об ***однопараметрических гипотезах***, а если вектор, — то о ***многопараметрических гипотезах***. ***Статистическую гипотезу*** H называют ***простой***, если она имеет вид $H: \ \vec{\theta} = \vec{\theta_0}$, где $\vec{\theta_0}$ — некоторое заданное значение параметра. ***Статистическую гипотезу*** называют ***сложной***, если она имеет вид $H: \ \vec{\theta} \in D$, где D — некоторое множество значений параметра θ, состоящее более чем из одного элемента.

Дайте определение простой и сложной статистических гипотез.

Определение 17.1 ***Статистической гипотезой*** называют любое утверждение о функции распределения случайной величины X, при этом слово “статистическая” для краткости обычно опускают. ***Параметрической гипотезой*** называют любое утверждение о параметре θ функции распределения $F(t;\theta)$ случайной величины X. При этом если θ — скаляр, то речь идет об ***однопараметрических гипотезах***, а если вектор, — то о ***многопараметрических гипотезах***. ***Статистическую гипотезу*** H называют ***простой***, если она имеет вид $H: \ \vec{\theta} = \vec{\theta_0}$, где $\vec{\theta_0}$ — некоторое заданное значение параметра. ***Статистическую гипотезу*** называют ***сложной***, если она имеет вид $H: \ \vec{\theta} \in D$, где D — некоторое множество значений параметра θ, состоящее более чем из одного элемента.

Что называют критерием проверки статистической гипотезы и как его задают? Что представляет собой решающее правило?

Критерием, или ***статистическим критерием***, проверки гипотез называют правило, по которому по данным выборки $\vec{x}_n$ принимается решение о справедливости либо первой, либо второй гипотезы.

Критерий задают с помощью ***критического множества*** $W \in \mathbb{R}^n$, являющегося подмножеством *выборочного пространства* $\mathcal{X}_n$ *случайной выборки* $\vec{X}_n$. Решение принимают следующим образом:

- если выборка $\vec{x}_n$ принадлежит критическому множеству W, то отвергают основную гипотезу H_0 и принимают альтернативную гипотезу H_1;

- если выборка $\vec{x}_n$ не принадлежит критическому множеству W (т.е. принадлежит дополнению $\overline{W}$ множества W до выборочного пространства $\mathcal{X}_n$), то отвергают альтернативную гипотезу H_1 и принимают основную гипотезу H_0. Множество $\overline{W}$ называют ***доверительным множеством***.

Какие ошибки возможны при проверке статистической гипотезы? Что понимают под мощностью и уровнем значимости критерия?

При использовании любого критерия возможны ошибки следующих видов:

- принять гипотезу H_1, когда верна H_0 — ***ошибка первого рода***;
- принять гипотезу H_0, когда верна H_1 — ***ошибка второго рода***.

Вероятности совершения ошибок первого и второго рода обозначают α и β:

$$\alpha = \mathsf{P}\{\vec{X}_n \in W \mid H_0\}, \qquad \beta = \mathsf{P}\{\vec{X}_n \in \overline{W} \mid H_1\}.$$

Здесь $\mathsf{P}\{A \mid H_j\}$ — вероятность события A при условии, что справедлива гипотеза H_j, $j = 0, 1$. Указанные вероятности вычисляют с использованием функции плотности $p(t;\theta)$ распределения случайной выборки $\vec{X}_n$:

$$\alpha = \int\limits_W \ldots \int \prod_{k=1}^{n} p(t_k;\theta_0)\, dt_1 \ldots dt_n, \qquad \beta = \int\limits_{\overline{W}} \ldots \int \prod_{k=1}^{n} p(t_k;\theta_1)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Вероятность совершения ошибки первого рода α называют также ***уровнем значимости критерия***.

Величину $1-\beta$, равную вероятности отвергнуть основную гипотезу H_0, когда она неверна, называют ***мощностью критерия***.

Сформулируйте и решите задачу проверки простых параметрических гипотез (критерий Неймана-Пирсона).

Хз

При построении *критерия* для проверки *статистических гипотез*, как правило, исходят из необходимости максимизации его *мощности* $1-\beta$ (минимизации вероятности совершения *ошибки второго рода*) при фиксированном *уровне значимости* α *критерия* (вероятности совершения *ошибки первого рода*). Для упрощения дальнейших рассуждений будем считать, что $\vec{X}_n$ — *случайная выборка объема* n из *генеральной совокупности* непрерывной случайной величины X, плотность распределения вероятностей которой $p(t;\theta)$ зависит от неизвестного параметра θ, и рассмотрим две *простые гипотезы* H_0: $\theta = \theta_0$ и H_1: $\theta = \theta_1$.

Введем функцию случайной выборки $\vec{X}_n$:

$$\varphi(\vec{X}_n) = \frac{L(\vec{X}_n; \theta_1)}{L(\vec{X}_n; \theta_0)}, \qquad L(\vec{X}_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i; \theta).$$

Статистика $\varphi(\vec{X}_n)$ представляет собой отношение *функций правдоподобия* при истинности *альтернативной* и *основной гипотез* соответственно. Ее называют ***отношением правдоподобия***. Для построения ***оптимального*** (наиболее мощного) при заданном уровне значимости α ***критерия Неймана — Пирсона*** в *критическое множество* W включают те элементы $\vec{x}_n$ *выборочного пространства* $\mathcal{X}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$, для которых выполняется неравенство

$$\varphi(\vec{x}_n) \geqslant C_\varphi,$$

где константу C_φ выбирают из условия

$$\mathsf{P}\{\varphi(\vec{X}_n) \geqslant C_\varphi \mid H_0\} = \alpha,$$