

ДЗ-?

Т₀-?

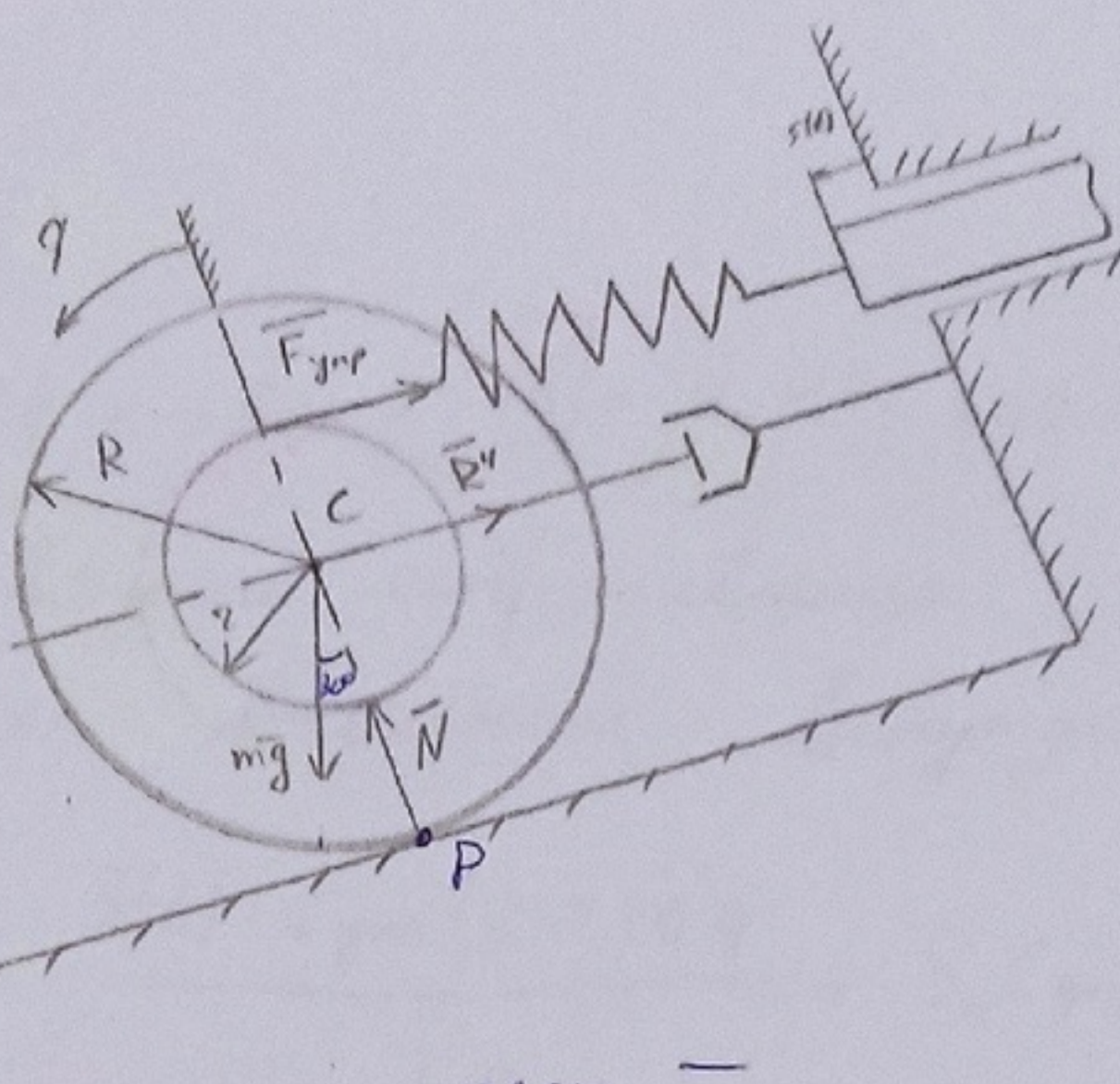
Δ-?

Т₁-?

δ-?

τ₀-?

Решение:



1) Способ возмущения - кинематический

$$\bar{R}_y = -M_y \ddot{\varphi}$$

$$\text{Кин. энергия системы: } T = \frac{m_1 \dot{v}_c^2}{2} + \frac{I_{cz} \omega^2}{2}$$

$$\omega^2 = \dot{q}^2$$

$$v_c = \omega R = \dot{q} R$$

$$I_{cz} = m_1 r^2 = m_1 (2r)^2 = 4m_1 r^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{m_1 (\dot{q} R)^2}{2} + \frac{4m_1 r^2 \dot{q}^2}{2} = \frac{m_1 \dot{q}^2 R^2}{2} + 2m_1 r^2 \dot{q}^2 = \frac{\dot{q}^2}{2} (m_1 R^2 + 4m_1 r^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{a} = m_1 R^2 + 4m_1 r^2 = 100 \cdot 1^2 + 4 \cdot 100 \cdot 0,25^2 = 125 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - \text{обобщ. инерционный коэф.}$$

Найдем жесткость пружины: $\sum_{k=1}^n M(\bar{F}_k) = 0$:

$$x: F_{\text{уп}} (R+r) = m_1 g R \sin 30^\circ$$

$$F_{\text{уп}} = C_{\text{уп}} \Delta_{\text{см}}$$

$$\Rightarrow C_{\text{уп}} \Delta_{\text{см}} (R+r) = m_1 g R \sin 30^\circ, \text{ откуда } C_{\text{уп}} = \frac{m_1 g R \sin 30^\circ}{\Delta_{\text{см}} (R+r)} = \frac{100 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{52 \cdot 0,1} = 3924 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

2) Найдем обобщенные силы:

$$Q = Q'' + Q' + Q^0(t)$$

$$Q'' = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

$$\Pi = \Pi^{\text{уп}} + \Pi^{\text{г}} = \frac{C_{\text{уп}} (\Delta_{\text{см}} + (R+r)q)^2 - \Delta_{\text{см}}^2}{2} - m_1 g R q \sin 30^\circ$$

$$\Pi = \frac{1}{2} q^2 \cdot (C_{\text{уп}} (R+r)^2)$$

$$\boxed{c} = C_{\text{уп}} (R+r)^2 = 3924 (1+0,25)^2 = 6131 \text{ Н} \cdot \text{м} - \text{обобщенный коэф. жесткости}$$

3) Диссипативная функция Рэлея

$$Q^p = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b \dot{q}$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mu_k \dot{v}_k^2 = \frac{1}{2} \mu_4 \dot{v}_n^2$$

$$\dot{v}_n = \dot{q} R \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2} \mu_4 R^2 \dot{q}^2$$

$$Q^p = - \frac{\partial (\frac{1}{2} \mu_4 R^2 \dot{q}^2)}{\partial \dot{q}} = - \mu_4 R^2 \dot{q} = -b \dot{q} \Rightarrow \boxed{b} = \mu_4 R^2 = 500 \cdot 1^2 = 500 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} - \text{обоб-}$$

щённый коэф. линейно-вязкого сопротивления

4) Обобщённая сила от внешних вынуждающих воздейст-вий:

$$Q^b(t) = \frac{\sum_{k=1}^n (\delta A_k(\bar{F}_k))_q}{\delta q} = \frac{S(t) \cdot c_{\text{упр}} (R+z) \delta q}{\delta q} = S_0 c_{\text{упр}} (R+z) \sin p t$$

$$\boxed{H} = c_{\text{упр}} \cdot S_0 (R+z) = 3924 \cdot 0,1 \cdot 1,25 = 490 \text{ Н} \cdot \text{м} - \text{амплитуда обобщённой силы}$$

5) Общий вид ДУ колебаний: $a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H \sin p t$

Приведём к каноническому виду: $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin p t$

$$[2n = \frac{b}{a} = \frac{500}{125} = 4 \text{ рад/с}]$$

$$[k^2 = \frac{c}{a} = \frac{6131}{125} \approx 49 \text{ рад/с}]$$

$$[h = \frac{H}{a} = \frac{490}{125} \approx 3,92 \text{ рад/с}]$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{q} + 4\dot{q} + 49q = 3,92 \sin 10 t} - \text{ДУ малых колебаний системы}$$

6) Найдём решение данного ДУ:

$n < k \Rightarrow$ у нас случай малого вязкого сопротивления

Решение ДУ имеет вид:

$$q(t) = q_{00}(t) + q_{\text{чн}}(t)$$

$$\text{где } q_{00}(t) = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{49 - 4} \approx 6,7 \text{ рад/с}$$

$$\Rightarrow q_{00}(t) = e^{-2t} (C_1 \cos 6,7 t + C_2 \sin 6,7 t)$$

$$q_{\text{чн}}(t) = \frac{D}{h} \sin(p t - \varepsilon)$$

$$\text{где } D = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{3,92}{\sqrt{(49 - 100)^2 + 4 \cdot 4 \cdot 100}} \approx 0,0605 \text{ рад} - \text{амплитуда}$$

вынужденных колебаний

$$\left[\varepsilon = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2} = \arctg \frac{2 \cdot 2 \cdot 10}{49 - 100} = 2,47 \text{ рад} - \text{сдвин фаз} \right]$$

$$\Rightarrow q_{\text{вн}}(t) = 0,0605 \sin(10t - 2,47)$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} q(0) = 0,1 \text{ рад} \\ \dot{q}(0) = -1 \text{ рад/с} \end{cases}$$

$$q(t) = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + D \sin(pt - \varepsilon)$$

$$\dot{q}(t) = -ne^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt} (-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t) + Dp \cos(pt - \varepsilon)$$

$$q(0) = C_1 + D \sin(-\varepsilon) = 0,1$$

$$\dot{q}(0) = -nC_1 + k_1 C_2 + Dp \cos \varepsilon = -1$$

$$\Rightarrow C_1 = 0,1 + 0,0605 \sin(141,89^\circ) \approx 0,1376$$

$$C_2 = \frac{n(0,1 + D \sin \varepsilon) - 1 - Dp \cos \varepsilon}{k_1} = \frac{2(0,1 + 0,0605 \sin(141,89^\circ)) - 1 - 0,0605 \cos(141,89^\circ)}{6,7}$$

$$= -0,0375$$

Тогда решение ДУ примет вид:

$$q(t) = e^{-2t} (0,1376 \cos(6,7t) - 0,0375 \sin(6,7t)) + 0,0605 \sin(10t - 2,476)$$

7) Период установившихся вынужденных колебаний:

$$T_0 = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{10} = 0,628 \text{ с}$$

$$\text{Добротность: } Q = \frac{k}{2n} = \frac{7}{4} = 1,75$$

Условный период затухающих колебаний:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{6,7} = 0,938 \text{ с}$$

Логарифмический декремент колебаний: $\delta = n T_1 = 2 \cdot 0,938 = 1,876$

Постоянная времени затухающих колебаний:

$$\tau_0 = \frac{1}{n} = 0,5 \text{ с}$$

2 ЧАСТЬ:

1) Движение на интервале от начального возмущения до момента времени $t^* = 4T_0 + 3T_0 = 4 \cdot 0,628 + 3 \cdot 0,5 = 4,012$ с определяется выражением:

$$q(t) = e^{-2t} (0,1375 \cos(6,7t) - 0,0375 \sin(6,7t)) + 0,0605 \sin(10t - 2,476)$$

При $t = t^*$:

$$q(t^*) = e^{-2 \cdot 4,012} (0,1375 \cos(6,7 \cdot 4,012) - 0,0375 \sin(6,7 \cdot 4,012)) + 0,0605 \sin(40,12 - 2,476)$$

Перепишем решение ДУ в амплитудной форме:

$$q_0 = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$$

$$\text{где } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{0,1375^2 + (-0,0375)^2} \approx 0,143 \text{ м}$$

$$\alpha = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{0,1375}{-0,0375} \approx -1,305 \text{ рад}$$

$$\Rightarrow q(t) = 0,143 e^{-2t} \sin(6,7t - 1,305) + 0,0605 \sin(10t - 2,476) \text{ рад}$$

При $t = t^* = 4,012$ с:

$$q(t^*) = 0,143 e^{-2 \cdot 4,012} \sin(6,7 \cdot 4,012 - 1,305) + 0,0605 \sin(10 \cdot 4,012 - 2,476) \approx -0,003 \text{ рад}$$

$$\dot{q}(t) = 0,605 \cos(10t - 2,476) - 0,2858 e^{-2t} \sin(6,7t - 1,305) + 0,95743 e^{-2t} \cos(6,7t - 1,305)$$

$$\dot{q}(t^*) = 0,6 \text{ рад/с}$$

Введем время $t_1 = t - t^*$. Тогда на втором интервале движение мы можем использовать решение вида:

$$q(t_1) = e^{-nt_1} (C_{12} \cos k_1 t_1 + C_{22} \sin k_1 t_1) + 2D \sin(pt_1 - \varepsilon) \quad (\text{т.к. } n < k)$$

Найдем константы интегрирования, заменив q_0 и $\dot{q}_0$ на $q(t^*)$ и $\dot{q}(t^*)$ и D на $2D$:

$$[C_{12} = q(t^*) + 2D \sin \varepsilon = -0,003 + 2 \cdot 0,0605 \cdot \sin(2,47) \approx 0,072 \text{ рад}$$

$$[C_{22} = \frac{1}{k_1} (\dot{q}(t^*) + n q(t^*) + 2D(n \sin \varepsilon - p \cos \varepsilon)) = \frac{1}{6,7} (0,6 + 2 \cdot (-0,003) + 2 \cdot 0,0605 (2 \sin(2,47) - 10 \cos 2,47)) \approx 0,253 \text{ рад/с}$$

Следовательно:

$$q(t_1) = e^{-2t_1} (0,072 \cos(6,7t_1) + 0,253 \sin(6,7t_1)) + 0,121 \sin(10t_1 - 2,47) \text{ рад}$$

В конце второго интервала, при $t_1 = t^* (t - 2t^*)$:

$$q(t^*) = e^{-2 \cdot 4,012} (0,072 \cos(6,7 \cdot 4,012) + 0,253 \sin(6,7 \cdot 4,012)) + 0,121 \sin(40,12 - 2,47) \approx -0,006 \text{ рад}$$

$$\dot{q}(t_1) = -2e^{-2t_1} (0,072 \cos(6,7t_1) + 0,253 \sin(6,7t_1)) + e^{-2t_1} (-0,4824 \sin(6,7t_1) + 1,6951 \cos(6,7t_1)) + 1,21 \cos(10t_1 - 2,47)$$

$$\dot{q}(t^*) = -2e^{-2 \cdot 4,012} (0,072 \cos(26,8804) + 0,253 \sin(26,8804)) + e^{-2 \cdot 4,012} (-0,4824 \sin(26,8804) + 1,6951 \cos(26,8804)) + 1,21 \cos(40,12 - 2,47)$$

$$\dot{q}(t_1) = 1,21 \cos(10t_1 - 2,47) - 0,9884 e^{-2t_1} \sin(6,7t_1) + 1,5511 e^{-2t_1} \cos(6,7t_1)$$

$$\dot{q}(t^*) \approx 1,21 \text{ рад/с}$$

Третий участок:

Введём время $t_2 = t_1 - t^*$

Решение в виде:

$$q(t_2) = e^{-nt_2} (C_{13} \cos k \cdot t_2 + C_{23} \sin k \cdot t_2) \quad (\text{т.к. } n < k)$$

Найдём константы интегрирования:

$$C_{13} = q(t^*) = -0,006 \text{ рад}$$

$$C_{23} = \frac{1}{k_1} (\dot{q}(t^*) + n q(t^*)) = \frac{1}{6,7} (1,21 + 2 \cdot (-0,006)) \approx 0,179 \text{ рад/с}$$

Следовательно:

$$q(t_2) = e^{-2t_2} (-0,006 \cdot \cos(6,7t_2) + 0,179 \sin(6,7t_2))$$

2) Исследование колебательного процесса:

Приведём D и ε к безразмерному виду:

λ - коэф. демпфирования

$z = \frac{p}{k}$ - коэф. расстройки

$d = \frac{2\eta n}{k}$ - безразмерный коэф. сопротивления (обратен D_1)

$$z = \frac{p}{k} = \frac{10}{7} \approx 1,429$$

$$d = \frac{2\eta}{k} = \frac{2 \cdot 2}{7} \approx 0,571$$

$$\lambda = \frac{D}{D_{\text{см}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + d^2 z^2}}$$

$$\varepsilon = \arctg \frac{d \cdot z}{1 - z^2}$$

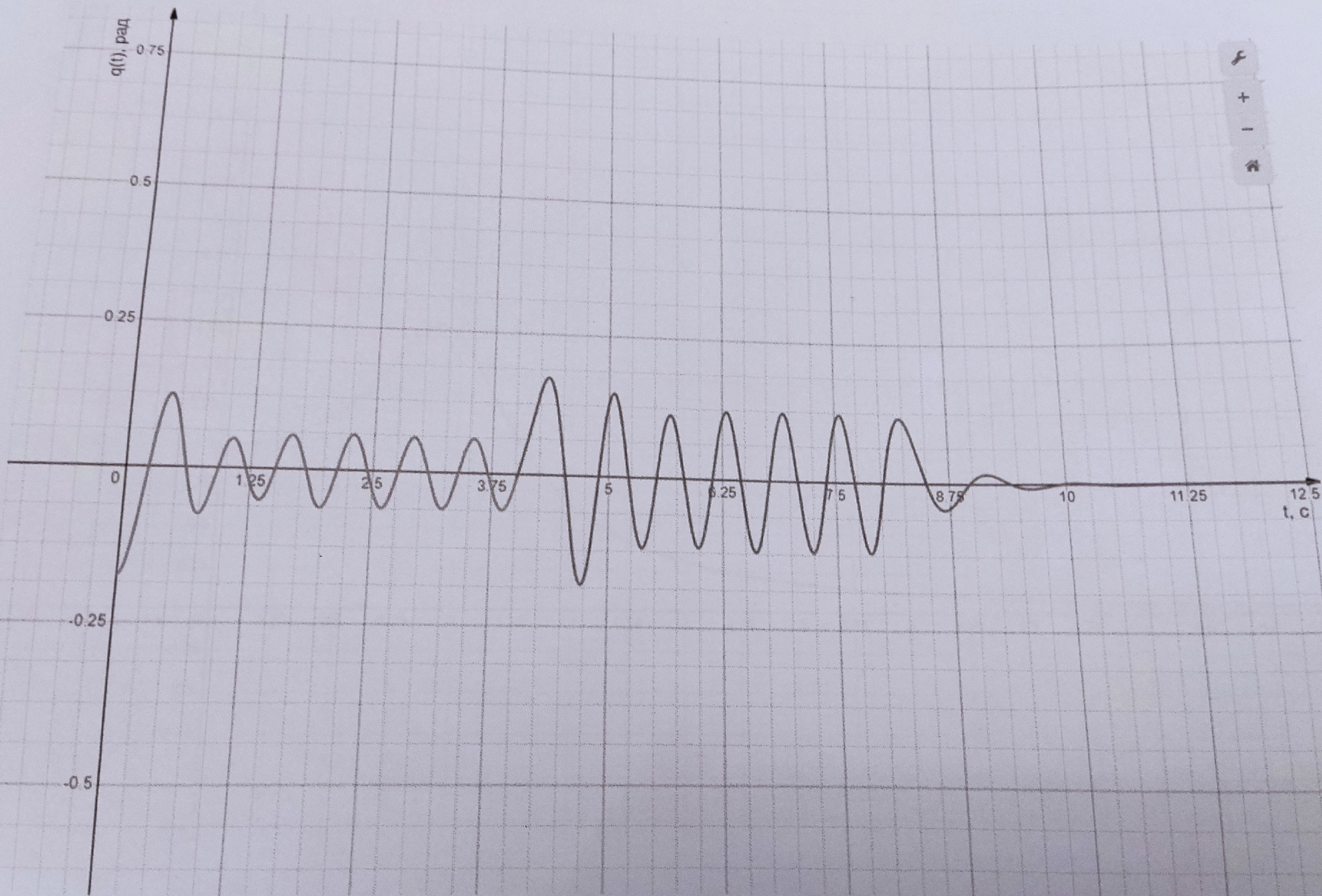
$$\Pi = \frac{1}{2} q^2 \cdot (C_{\text{уп}} (R+z)^2) - m_1 g R q \sin 30^\circ$$

$$C = C_{\text{уп}} (R+z)^2 = 3924 (1+0,25)^2 = 6131 \text{ Н}\cdot\text{м} - \text{обобщенный коэф. жесткости}$$

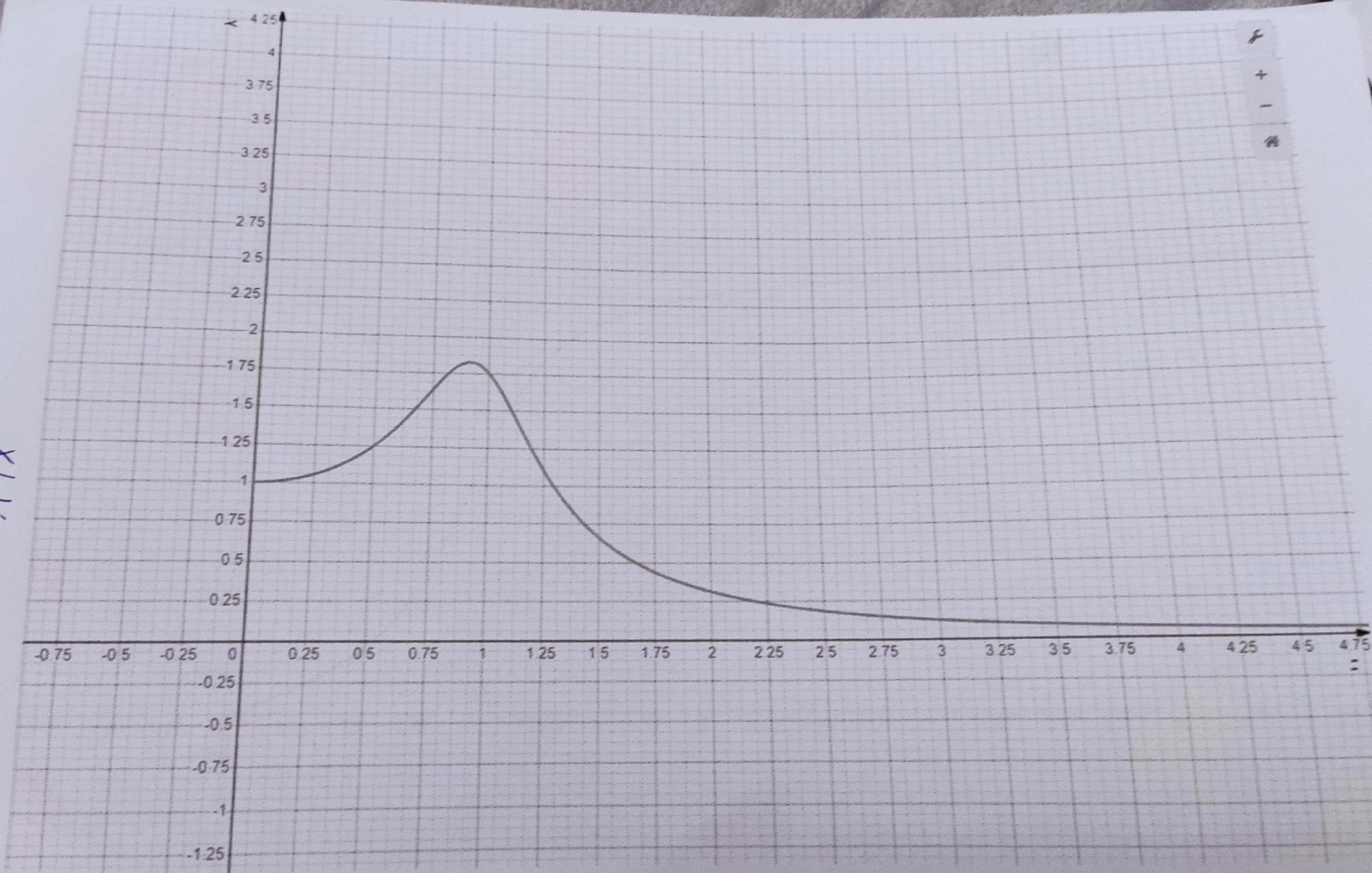
Т.к. $d=0,571 < \sqrt{2}$, то $\lambda = \lambda_{\text{max}}$ при:

$$Z^* = \sqrt{1 - \frac{d^2}{2}} = \sqrt{1 - \frac{0,571^2}{2}} = 0,915$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{max}} = \frac{\frac{\Pi}{Z^*}}{\sqrt{1 - d^2/4}} = \frac{1,75}{\sqrt{1 - 0,571^2/4}} \approx 1,826$$



A4X



Φ_{4X}

