



Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

**В.В. Дубинин, Ю.Н. Жигулёвцев,
В.В. Витушкин**

**АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ
ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС
«ДВУХСТЕПЕННОЙ ГИРОСКОП» ТМл-09М**

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

В.В. Дубинин, Ю.Н. Жигулёвцев,
В.В. Витушкин

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ
ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС
«ДВУХСТЕПЕННОЙ ГИРОСКОП» ТМл-09М

*Методические указания к выполнению лабораторной работы
по курсу «Теоретическая механика»*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2011

УДК 521.3
ББК 22.213
Д79

Рецензент *A.B. Копаев*

- Дубинин В.В.
Д79 Автоматизированный лабораторный комплекс «Двухстепенной гироскоп» ТМл-09М : метод. указания / В.В. Дубинин, Ю.Н. Жигулёвцев, В.В. Витушкин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 21, [3] с.: ил.

Приведено описание лабораторного комплекса, предназначенного для исследования с применением ПЭВМ гироскопических сил и моментов. Лабораторная установка комплекса позволяет демонстрировать гироскопический момент на гироскопе с тремя степенями свободы, а также проводить измерения угловой скорости прецессии при двух степенях свободы гироскопа, т. е. при использовании установки в качестве измерителя угловой скорости (датчика угловой скорости, гиротахометра). Представлены результаты теоретического анализа и экспериментального исследования работы лабораторной установки, дано описание методики и порядка выполнения лабораторной работы.

Для студентов второго курса МГТУ им. Н.Э. Баумана, обучающихся по машиностроительным и приборостроительным специальностям.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией факультета ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 521.3
ББК 22.213

1. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОГО КОМПЛЕКСА ТМл-09М

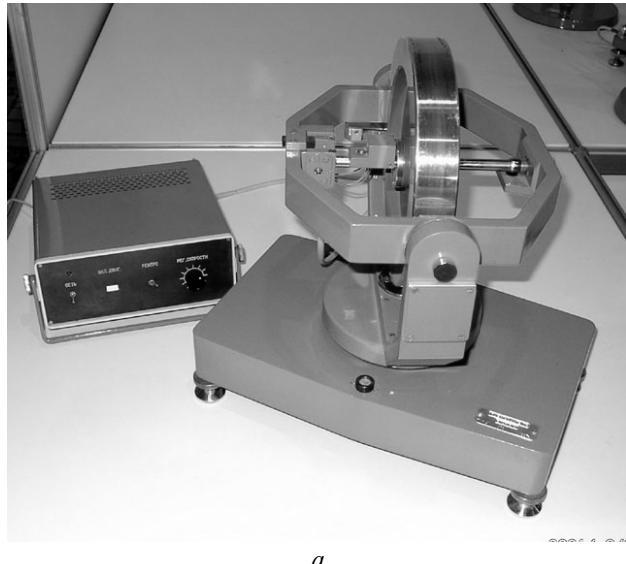
Автоматизированный лабораторный комплекс «Двухстепенной гироскоп» ТМл-09М является оригинальной научно-методической разработкой кафедры «Георетическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, позволяющей проводить эксперименты по изучению гироскопических сил и моментов. Комплекс состоит из экспериментальной лабораторной установки, блока питания и управления, аналого-цифрового преобразователя (АЦП), ПЭВМ и программно-методического обеспечения (рис. 1).



Рис. 1. Общий вид лабораторного комплекса ТМл-09М

Экспериментальная лабораторная установка изготовлена в двух конструктивных вариантах: 1) с отдельно выполненным блоком питания и управления (рис. 2, а); 2) с блоком, встроенным в основание установки (рис. 2, б).

Реализованная в лабораторной установке модель гироскопа позволяет демонстрировать действие гироскопического момента на гироскоп с тремя степенями свободы (см. рис. 2, б), а при двух степенях свободы гироскопа (см. рис. 2, а) лабораторная установка может



a



b

Рис. 2. Общий вид экспериментальной лабораторной установки:
a – с отдельно выполненным блоком питания и управления; *b* – со встроенным
блоком

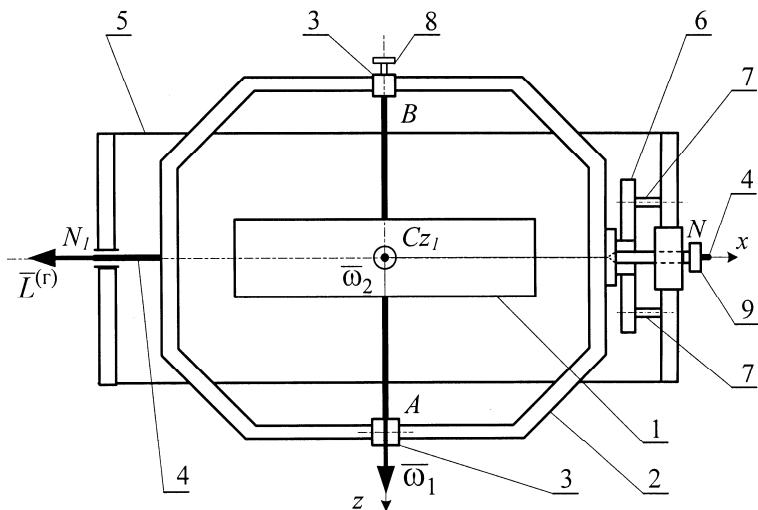


Рис. 3. Схема экспериментальной лабораторной установки (вид сверху):
1 – ротор; 2 – внутренняя рамка; 3 – опоры; 4 – полуоси; 5 – внешняя рамка;
6 – пружина; 7 – упоры; 8, 9 – винты

быть использована в качестве измерителя угловой скорости (датчика угловой скорости, гиротахометра) при проведении лабораторных работ. Схема установки показана на рис. 3.

Лабораторная установка содержит массивный ротор 1, который посредством шарикоподшипников смонтирован на оси AB, закрепленной во внутренней рамке 2 с помощью опор 3. Одна из опор ротора (опора A) выполнена в виде цилиндрического шарнира, обеспечивающего поворот оси AB в вертикальной плоскости, а вторая (опора B) – в виде винта, фиксирующего ось AB относительно рамки 2. Внутренняя рамка 2, в свою очередь, посредством полуосей 4 установлена в подшипниках N₁ и N в внешней рамке 5. Рамка 5 закреплена на выходном валу расположенного в корпусе установки привода, включающего электродвигатель с регулируемой угловой скоростью вращения, и может поворачиваться вокруг вертикальной оси Cz₁ с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. На внутренней рамке 2 жестко закреплена пружина 6 в виде упругой пластины, свободные концы которой опираются на упоры 7, выполненные в виде роликов, закрепленных на внешней рамке 5. Расстояние между осями роликов $l = 100$ мм. Рамка 2 снабжена винтом 8 фиксации относительно нее опоры B ротора, а рамка 5 – винтом 9 закрепления рамки 2 относительно рамки 5.

На рис. 4 схематично показаны узел крепления пружины 6 на рамке 2 и упоры 7 рамки 5. При повороте рамки 2 относительно рамки 5 пружина 6 опирается одним из своих плеч на соответствующий упор 7. Работающие в этом случае на изгиб плечи $L = l/2$ пружины 6 (расстояния между узлом ее крепления на рамке 2 и линиями контакта с роликами) равны 50 мм каждое.

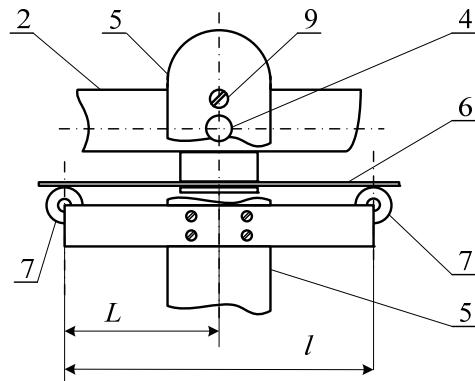


Рис. 4. Схема узла крепления пружины
(вид сбоку; номера позиций соответствуют номерам позиций на рис. 3)

Лабораторная установка снабжена измерителями угловых скоростей вращения ротора 1 (см. рис. 3) и рамки 5, выполненными в виде датчиков Холла. Кроме того, на рамке 5 установлен потенциометр – измеритель угла поворота рамки 2 относительно рамки 5. При этом ввиду малости углов поворота рамки 2, определяемых деформациями пружины, движок потенциометра соединен с рамкой 2 посредством двухступенчатого повышающего зубчатого редуктора. Питание датчиков и управление электроприводом рамки 5 (регулирование скорости и направления вращения) осуществляются от блока питания и управления.

С помощью устройства запуска гироскопов (ТМд-01М) ротору 1 сообщается угловая скорость $\bar{\omega}_1$ собственного вращения вокруг оси Cz , а рамка 5 посредством электропривода установки приводится во вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ прецессии относительно вертикальной оси Cz_1 . Абсолютная скорость $\bar{\omega}$ ротора будет равна

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2.$$

На рамке 2 (см. рис. 3) показан вектор гироскопического момента $\bar{L}^{(r)}$ ротора.

Лабораторная установка может работать в двух режимах. В одном из них, если в одной из опор 3 (в опоре B) ось AB не будет закреплена, то гироскоп (ротор) будет иметь три степени свободы (см. рис. 2, б). В другом режиме (см. рис. 2, а), при закреплении оси AB в обеих опорах 3, гироскоп будет иметь две степени свободы (ввиду малости угла поворота рамки 2).

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В соответствии с отмеченными выше двумя режимами работы лабораторной установки комплекса ТМл-09М – с закреплением оси AB (см. рис. 3) в опорах 3 внутренней рамки 2 (двухстепенной гироскоп) и с освобождением одной из указанных опор этой оси (трехстепенной гироскоп) – проанализируем два варианта уравнений движения гироскопа.

Двухстепенной гироскоп

Рассмотрим модель двухстепенного гироскопа (рис. 5). В этом случае лабораторная установка может быть использована в качестве измерителя угловой скорости (датчика угловой скорости, гироахрометра).

При вращении ротора 1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ и рамки 5 с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ на роторе 1 возникает гироскопический момент и рамка 2 поворачивается на полуоси 4 вокруг оси NN_1 на небольшой угол, деформируя пружину 6. В повернутом положении рамка 2 вращается вокруг вертикальной оси Cz_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$.

Составим уравнения движения ротора, пренебрегая отмеченным выше незначительным поворотом рамки 2 вокруг оси NN_1 .

Угловая скорость $\bar{\omega}_2$ маховика является также угловой скоростью вращения системы скрепленных с рамкой 2 осей системы координат $Cxyz$. Проекции угловых скоростей системы координат $Cxyz$ и ротора 1 на подвижные оси системы координат $Cxyz$ соответственно равны

$$\omega_{2x} = 0, \quad |\bar{\omega}_2|_y = \omega_{2y}, \quad \omega_{2z} = 0;$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega_{2y}, \quad \omega_z = \omega_{1z}.$$

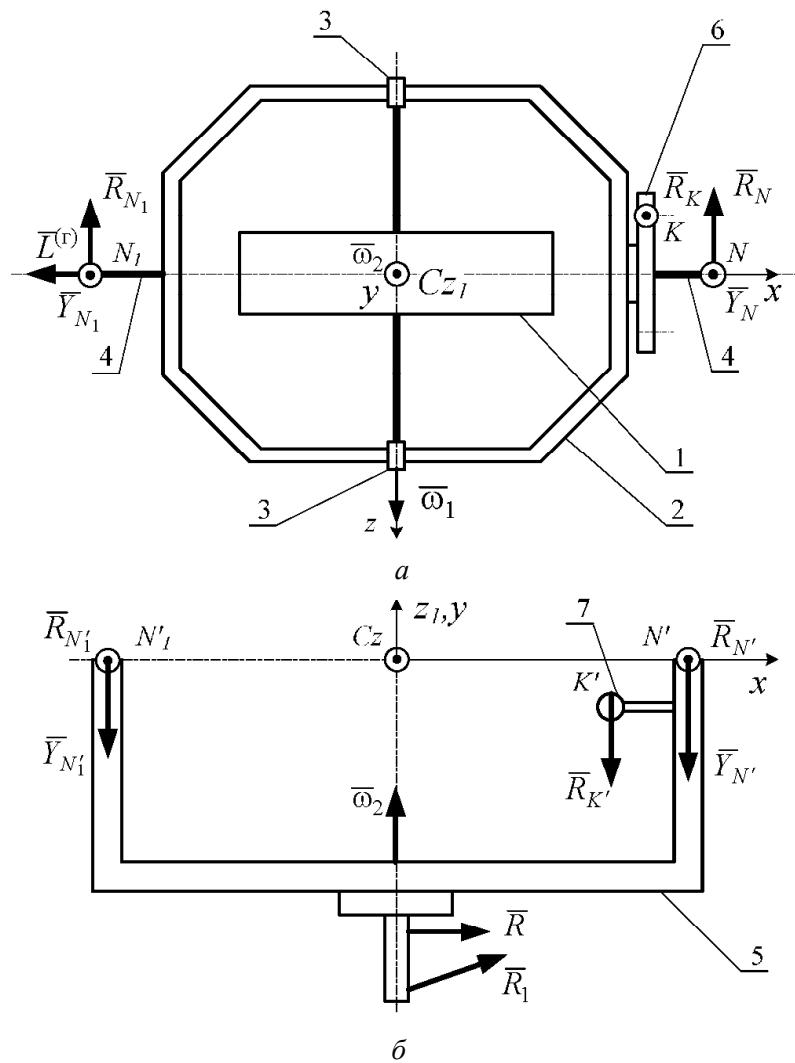


Рис. 5. Расчетные схемы осей координат, угловых скоростей, реакций связи, действующих на внутреннюю (*а*, вид сверху) и внешнюю (*б*, вид сбоку) рамки устройства, и гироскопического момента $\bar{L}^{(r)}$ (номера позиций соответствуют номерам позиций на рис. 3)

Поскольку оси системы координат $Cxyz$ для ротора *1* являются главными центральными осями инерции, то кинетические моменты относительно этих осей запишем следующим образом:

$$K_x = J_x \omega_x = 0, \quad K_y = J_y \omega_y = J_y \omega_{2y}, \quad K_z = J_z \omega_z = J_z \omega_{1z}.$$

При этом момент внешних сил $\bar{L}^{(e)}$ имеет только одну проекцию $L_x^{(e)}$ – момент относительно оси Cx :

$$L_x^{(e)} = R_K \frac{l}{2},$$

где $R_K = c\lambda$ – реакция в точке K контакта пружины 6 и упора 7; c и λ – соответственно коэффициент жесткости и деформация изгиба пружины.

Составим для ротора динамическое уравнение Эйлера относительно оси Cx :

$$\frac{dK_x}{dt} + \omega_{2y} K_z - \omega_{2z} K_y = L_x^{(e)}.$$

Подставив найденные выше выражения для входящих в это уравнение величин K_x, K_y, K_z и $L_x^{(e)}$, получим

$$\omega_{2y} K_z = R_K \frac{l}{2},$$

окончательно будем иметь

$$J_z \omega_{1z} \omega_{2y} = c\lambda \frac{l}{2},$$

где J_z – момент инерции ротора 1 относительно собственной оси вращения Cz .

Относительно оси Cy динамическое уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{dK_y}{dt} + \omega_{2z} K_x - \omega_{2x} K_z = L_y^{(e)} = 0,$$

так как $\frac{dK_y}{dt} = 0, K_x = 0, \omega_{2x} = 0$.

Кинетические моменты внутренней рамки 2 (см. рис. 3) относительно осей системы координат $Cxyz$ равны:

$$K_x^{(2)} = J_x^{(2)} \omega_{2x} = 0, \quad K_y^{(2)} = J_y^{(2)} \omega_{2y}, \quad K_z^{(2)} = J_z^{(2)} \omega_{2z} = 0.$$

При этом применительно к рамке 2 уравнение Эйлера для оси Cx обращается в тождество.

Трехстепенной гироскоп

Для решения задачи движения этого гироскопа сначала рассмотрим случай, когда при незакрепленной опоре B ось ротора находится в горизонтальном положении, т. е. угол нутации $\theta = 90^\circ$ (рис. 6).

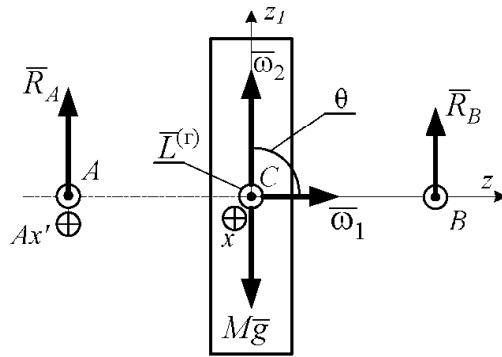


Рис. 6. Схема сил гироскопа при незакрепленной опоре B

В этом случае в момент отрыва вала ротора от рамки в точке B имеем $\bar{R}_B = 0$. Используя принцип Даламбера, составим уравнение моментов сил относительно оси Ax' :

$$-L^{(r)} + Mg l_2 = 0,$$

где Mg – сила тяжести ротора; $L^{(r)}$ – гироскопический момент,

$$L^{(r)} = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta;$$

$\theta = 90^\circ$ – угол нутации ($l_2 = AC$).

Отсюда получаем соотношение для определения угловой скорости собственного вращения ротора:

$$\omega_1 = \frac{M g l_2}{J_z \omega_2}.$$

Значение ω_2 невелико и может быть измерено с помощью простых средств (например, секундомера). По последнему уравнению можно рассчитать собственную угловую скорость ротора ω_1 в момент отрыва опоры от рамки. Учитывая при заданных значениях ω_1 и ω_2 направление вектора гирокопического момента $\bar{L}^{(r)}$, устанавливаем, что вал ротора отрывается именно в опоре B . Если происходит отрыв в опоре B , то у гирокопа появляется третья степень свободы. В дальнейшем при увеличении значения ω_2 изменяется (уменьшается) угол θ . Поворот собственной оси вращения гирокопа для такой модели лабораторной установки приводит к тому, что оси z и z_1 могут совместиться и векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ будут направлены в одну сторону.

В лабораторной установке имеется возможность осуществлять реверс угловой скорости ω_2 , при этом направления векторов $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ выбирают независимо друг от друга. Мгновенную угловую скорость $\bar{\omega}$ определяют по формуле $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$, где значения $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ задают в эксперименте произвольно. В связи с этим свободная опора в зависимости от направления гирокопического момента $\bar{L}^{(r)}$ может не отрываться от рамки, а, наоборот, прижиматься к ней. Если целью эксперимента является демонстрация отрыва опоры B от рамки и изменения угла θ , то в случае неотрыва необходимо осуществить реверс угловой скорости ω_2 .

В первой задаче освобождается винт фиксации опоры B , рамка 2 винтом 9 фиксируется относительно рамки 5 (см. рис. 3). В этом случае ротор движется следующим образом:

- вращается вокруг своей оси Cz с собственной угловой скоростью $\bar{\omega}_1$;
- ось ротора поворачивается вокруг оси Cz_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$, которая сообщается рамке 2 с помощью электродвигателя привода;
- наконец, ось ротора поворачивается вокруг оси Ax' (см. рис. 6).

Вторая задача ставится в лабораторной работе при условии, что опора B (см. рис. 3) закреплена на рамке 2 специальным винтом и ось ротора не имеет возможности поворачиваться вокруг оси Ax' . В этом случае при освобожденном винте фиксации рамки 2 относительно рамки 5 рамка 2 может поворачиваться вокруг оси Cx (см. рис. 5). При этом ротор, как и ранее, разгоняется до угловой скорости $\bar{\omega}_1$, а рамке 5 с помощью электродвигателя сообщается угловая скорость $\bar{\omega}_2$ вращения вокруг оси Cz_1 , соответственно рамка 2 и ротор 1 приобретают угловую скорость $\bar{\omega}_2$.

Используя принцип Даламбера, составим уравнение движения системы рамка 2 – ротор 1 (см. рис. 5).

Гироскоп в этом случае имеет три независимых движения – вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$, вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ и поворот рамки 2 вокруг оси Cx – и также может быть назван трехстепенным. Это название условное, так как возможность движения по третьей координате есть, но оно не рассматривается в полном объеме. Динамика системы в рассматриваемом случае предполагается стационарной, т. е. принимается, что $\omega_1 = \text{const}$ и $\omega_2 = \text{const}$. Конечно, реально угловая скорость ω_1 непостоянна, но в нашем случае мы полагаем, что уменьшение ее значения после разгона ротора невелико, т. е. процесс движения рассматривается в течение небольшого промежутка времени. Кроме того, хотя угол нутации θ – величина переменная, мы рассматриваем динамику системы при заданных фиксированных значениях угла нутации $\theta = \theta_0$, где $\theta_0 = \text{const}$.

Составим уравнение моментов сил относительно оси Cx (принцип Даламбера). Отметим, что рамка 2 имеет постоянную угловую скорость ($\omega_2 = \text{const}$) при вращении вокруг оси Cz_1 (см. рис. 5). Уравнение $\Sigma M_{Cx}(\bar{F}_K) = 0$ примет вид

$$-J_z\omega_1\omega_2 + R_K \frac{l}{2} = 0.$$

Рассмотрим более сложный случай движения гироскопа (первая задача), когда опора B освобождена от фиксации относительно рамки 2, а сама эта рамка зафиксирована относительно рамки 5 (рис. 7).

В этом случае собственная ось CZ гироскопа (оси CX , CY и CZ – подвижные оси с началом в центре масс ротора) наклонена по отношению к горизонту, его центр масс смешен на расстояние CK от вертикальной оси C_0z и имеет при вращательном движении вокруг этой оси ускорение

$$\bar{a}_C = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau,$$

где $\bar{a}_C^\tau = 0$, так как $\dot{\omega}_2 = \varepsilon_2 = 0$, а величина $a_C^n = \omega_2^2 \cdot CK$.

Будем считать, что значение $\theta_0 = \text{const}$ и отлично от 90° ($\theta = \theta_0$).

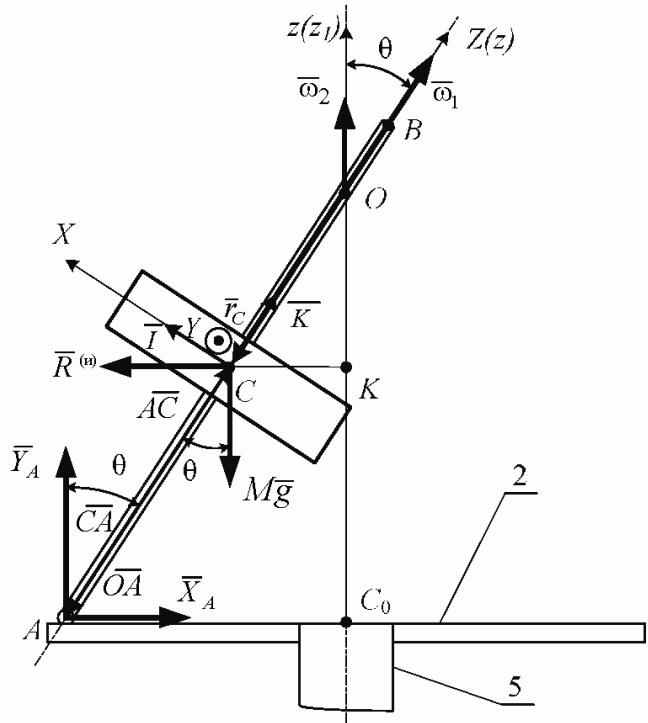


Рис. 7. Схема сил гироскопа при незакрепленной опоре B :
2, 5 – соответственно внутренняя и внешняя рамки

Запишем теорему об изменении кинетического момента \bar{K}_O гироскопа относительно неподвижной точки O пересечения осей C_Oz (C_Oz_1) и CZ (Cz):

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{L}_O^{(e)} = \bar{M}_O(M\bar{g}) + \bar{M}_O(\bar{R}_A),$$

где $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$ – реакция в опоре A . Здесь, согласно теореме Кёнига, кинетический момент

$$\bar{K}_O = \bar{K}_C^{(r)} + \bar{r}_C \times \bar{Q},$$

где $\bar{Q} = M\bar{v}_C$ – главный вектор количеств движения ротора; M – масса ротора; \bar{r}_C и \bar{v}_C – соответственно радиус-вектор и скорость центра масс.

Учитывая, что главный вектор сил инерции ротора

$$\bar{R}^{(u)} = -M \bar{a}_C = -\frac{d\bar{Q}}{dt},$$

получаем для первой производной кинетического момента по времени выражение

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{dK_C^{(r)}}{dt} + \bar{v}_C \times \bar{Q} - \bar{r}_C \times \bar{R}^{(u)},$$

где $\bar{v}_C \times \bar{Q} = 0$, так как $\bar{v}_C \parallel \bar{Q}$.

Запишем теорему об изменении кинетического момента для гироскопа:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} - \bar{r}_C \times \bar{R}^{(u)} = \bar{r}_C \times M \bar{g} + \overline{OA} \times \bar{X}_A + \overline{OA} \times \bar{Y}_A.$$

Принимая во внимание, что $\bar{r}_C = \overline{OA} - \overline{CA}$, $\bar{X}_A = -\bar{R}^{(u)}$, $\bar{Y}_A = -M \bar{g}$ (см. рис. 7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} - \bar{r}_C \times \bar{R}^{(u)} &= (\bar{r}_C - \overline{OA}) \times M \bar{g} - \overline{OA} \times \bar{R}^{(u)} = \\ &= -\overline{CA} \times M \bar{g} - \overline{OA} \times \bar{R}^{(u)} = \overline{AC} \times M \bar{g} - (\overline{CA} + \bar{r}_C) \times \bar{R}^{(u)} = \\ &= \overline{AC} \times (M \bar{g} + \bar{R}^{(u)}) - \bar{r}_C \times \bar{R}^{(u)}. \end{aligned}$$

После сокращения на $\bar{r}_C \times \bar{R}^{(u)}$ окончательно имеем

$$\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \overline{AC} \times (M \bar{g} + \bar{R}^{(u)}).$$

В этом случае кинетический момент ротора в движении по отношению к его центру масс выражается так:

$$\bar{K}_C^{(r)} = J_X \omega_X \bar{I} + J_Z \omega_Z \bar{K},$$

где \bar{I} и \bar{K} – постоянные по модулю направляющие векторы осей CX и CZ (см. рис. 7).

С учетом последнего уравнения теорема об изменении кинетического момента принимает вид

$$\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = J_X \omega_X (\bar{\omega}_2 \times \bar{I}) + J_Z \omega_Z (\bar{\omega}_2 \times \bar{K}) = \bar{AC} \times (M \bar{g} + \bar{R}^{(u)}).$$

Имея в виду соотношение

$$\bar{R}^{(u)} = -M \bar{a}_C,$$

где

$$a_C = a_C^n = \omega_2^2 \cdot CK; \quad CK = AC_0 - AC \sin \theta$$

и, следовательно,

$$a_C = a_C^n = \omega_2^2 \cdot AC(1 - \sin \theta),$$

а также соотношения

$$|\bar{\omega}_2 \times \bar{I}| = \omega_2 \cos \theta; \quad |\bar{\omega}_2 \times \bar{K}| = \omega_2 \sin \theta,$$

по теореме об изменении кинетического момента получаем выражение

$$J_X \omega_X \omega_2 \cos \theta - J_Z \omega_Z \omega_2 \sin \theta = -AC \sin \theta Mg + AC \cos \theta R^{(u)}$$

или, учитывая зависимости

$$|\bar{R}^{(u)}| = M \omega^2 AC(1 - \sin \theta), \quad \omega_X = \omega_2 \sin \theta, \quad \omega_Z = \omega_1 + \omega_2 \cos \theta,$$

имеем

$$\begin{aligned} & J_X \omega_2^2 \sin \theta \cos \theta - J_Z (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) \omega_2 \sin \theta = \\ & = -J_Z \omega_1 \omega_2 \sin \theta + (J_X - J_Z) \omega_2^2 \sin \theta \cos \theta = \\ & = -AC \sin \theta Mg + M \omega_2^2 AC^2 \cos \theta (1 - \sin \theta). \end{aligned}$$

3. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В соответствии с отмеченными выше двумя возможными режимами работы экспериментальной установки рассматриваемого комплекса ТМл-09М лабораторная работа проводится в два этапа:

1) с закреплением опоры *B* оси *AB* ротора (см. рис. 3) с помощью винта 8 во внутренней рамке 2 при одновременном ее освобождении от крепления винтом 9 в рамке 5 (двухстепенной гирокомпас);

2) с освобождением опоры B оси AB ротора при закреплении рамки 2 в рамке 5 с помощью винта 9 (трехстепенной гироскоп).

Двухстепенной гироскоп

В лабораторной установке ротору 1 (см. рис. 3) с помощью разгонной машинки сообщается собственная угловая скорость $\bar{\omega}_1$. Ввиду малости трения в подшипниках ротора 1 во время эксперимента и малого времени его проведения можно считать, что $|\bar{\omega}_1| = \text{const}$. Скорость вращения основания лабораторной установки $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_5$ задается с пульта управления установкой, начиная с самого малого ее значения.

Таким образом, в этой конструкции ротор 1 совершает вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ вокруг оси собственного вращения Cz и вместе с рамкой 2 вращается вокруг оси Cz_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Возникает гироскопический момент $\bar{L}^{(r)} = J_z \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ ротора 1. Рамка 2 поворачивается на небольшой угол вокруг оси x . В повернутом состоянии рамка 2 продолжает вращаться вокруг оси Cz_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_5$.

При повороте рамки 2 (см. рис. 4) ролик 7 будет оказывать давление на один из концов пружины 6, который будет деформироваться. Возникающая в пружине 6 реакция \bar{R}_K от деформации изгиба пружины λ равна по величине силе упругой деформации $F_{\text{упр}}$ и принимается пропорциональной этой деформации ввиду малости последней:

$$R_K = F_{\text{упр}} = c \lambda,$$

где c – коэффициент жесткости пружины при ее деформации изгиба.

Схема моментов $\bar{L}^{(r)}$ и $\bar{M}_{\text{упр}}$ в установившемся режиме ($|\bar{\omega}_1| = \text{const}$, $|\bar{\omega}_2| = \text{const}$) изображена на рис. 8.

Значение $\bar{L}^{(r)}$ вычисляют по формуле

$$L^{(r)} = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta,$$

где θ – угол между осями Cz и Cz_1 (угол нутации).

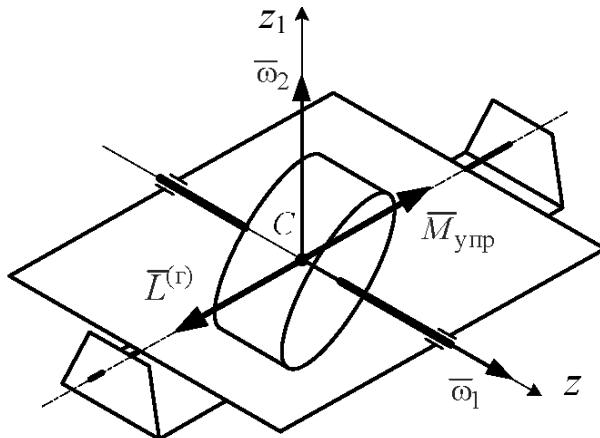


Рис. 8. Схема моментов сил при незакрепленной опоре B

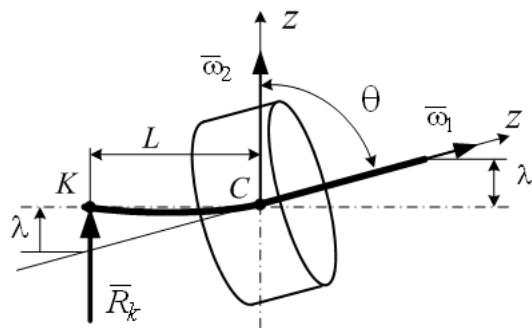


Рис. 9. Схема определения деформации изгиба пружины при вычислении значения $\bar{M}_{\text{упр}}$

Деформацию изгиба пружины можно приближенно определить по соотношению (рис. 9)

$$\lambda = L \sin(90^\circ - \theta),$$

где L – плечо силы $\bar{F}_{\text{упр}}$, равное половине расстояния l между осями опор (роликов) (см. рис. 4). Тогда

$$F_{\text{упр}} = cL \sin(90^\circ - \theta) = cL \cos \theta,$$

$$M_{\text{упр}} = F_{\text{упр}} L \cos(90^\circ - \theta) = cL^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Далее получим

$$J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta = c L^2 \cos \theta \sin \theta,$$

откуда найдем выражение для измеряемой угловой скорости $\bar{\omega}_2$ основания лабораторной установки:

$$\omega_2 = \frac{c L^2 \cos \theta}{J_z \omega_1}.$$

В технических приложениях вместо углов Эйлера используют углы Резаля. Так, вместо угла нутации θ введем угол $\beta = 90^\circ - \theta$ – угол поворота рамки 2 относительно рамки 5 (основания). Тогда имеем

$$\omega_2 = \frac{c L^2 \sin \beta}{J_z \omega_1}.$$

В эксперименте заданы (предварительно измерены) значения J_z , c , L . Угол β измеряют с помощью потенциометрического датчика, установленного по оси Cx , а угловую скорость ω_1 – посредством датчика скорости вращения маховика, установленного по оси AB .

Принимая во внимание малость углов отклонения оси Cz маховика от горизонтали, можно считать, что $\sin \beta \approx \beta$, и формулу для угловой скорости прецессии записать следующим образом:

$$\omega_2 \approx \frac{cL^2}{J_z \omega_1} \beta,$$

или, поскольку $\lambda = L \sin \beta \approx L\beta$,

$$\omega_2 \approx \frac{cL}{J_z \omega_1} \lambda.$$

В качестве примера на рис. 10 приведены экспериментальные данные по измерению угловой скорости прецессии в виде зависимости $\lambda(\omega_2)$ при фиксированном значении ω_1 . Здесь же представлена соответствующая расчетная прямая.

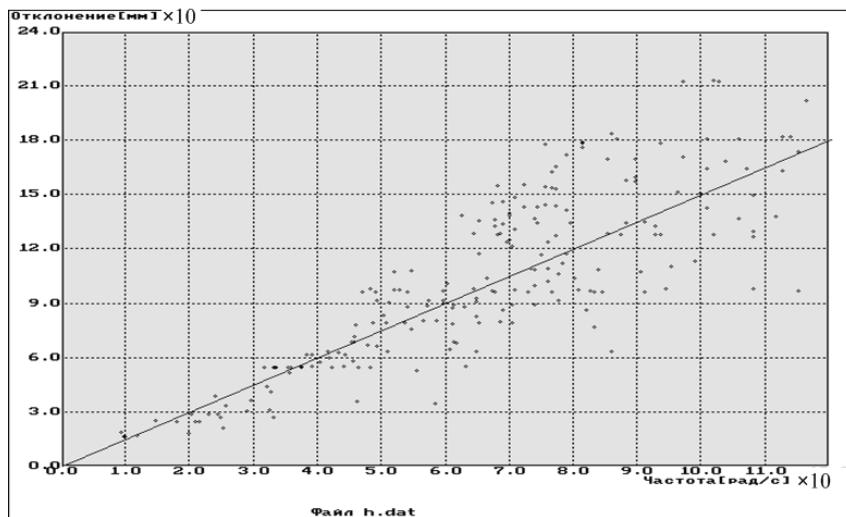


Рис. 10. Зависимость деформации изгиба пружины от угловой скорости прецессии

Трехступенчатый гироскоп

При проведении экспериментов с использованием лабораторной установки, работающей на втором режиме – с освобождением опоры B оси AB ротора при закреплении с помощью винта 9 рамки 2 в рамке 5 (см. рис. 3) – осуществляется наглядная демонстрация гироскопического момента ротора и его соответствия правилу Жуковского.

Правило Жуковского. *Если быстровращающемуся гироскопу сообщают вынужденное прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил, как бы стремящаяся сделать ось гироскопа параллельной оси прецессии, причем так, чтобы после совпадения направлений этих осей оба вращения вокруг них имели одинаковое направление.*

Для проведения эксперимента освобождаем ось вращения ротора – выкручиваем винт 8 (см. рис. 3), а рамку 2 фиксируем относительно рамки 5 (основания), – закручивая винт 9 параллельно оси x вращения рамки 2 . В этом случае ротор по-прежнему имеет

две степени свободы относительно основания. Затем ротору I с помощью разгонной машинки сообщаем угловую скорость $\bar{\omega}_1$, а скорость вращения основания $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_5$ задаем с пульта управления лабораторной установкой, начиная с самого малого значения. Возникает гироскопический момент ротора $\bar{L}^{(r)} = J_z \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ и момент сил, действующий на ось AB со стороны ротора I . Ось AB поворачивается в вертикальной плоскости в шарнире A крепления ротора I (рис. 11).

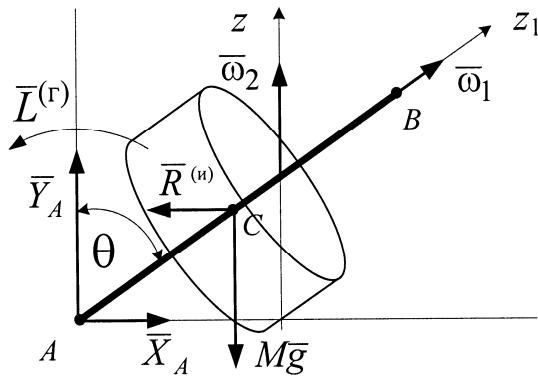


Рис. 11. Схема сил на роторе при освобождении опоры B

При $\theta \approx 90^\circ$ главным вектором сил инерции $\bar{R}^{(u)}$ можно пренебречь, и тогда, приравняв моменты $L^{(r)}$ и $M_A(m\bar{g})$, получим

$$J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta = M g L_1 \sin \theta,$$

где $L_1 = AC$.

Из этого соотношения можно определить, например, угловую скорость собственного вращения ротора:

$$\omega_1 = \frac{M g L_1}{J_z \omega_2}.$$

Замечание. Ротору I сообщена собственная угловая скорость $\bar{\omega}_1$, а рамки 2 и 5, жестко скрепленные, получили угловую скорость $\bar{\omega}_2$ (рис. 12). Ротор I , будучи внутри рамки 2, получил угловую скорость прецессии $\bar{\omega}_2$. Угловая скорость $\bar{\omega}_2$ сообщена с

помощью внешнего воздействия (электродвигателем). Момент внешних сил на роторе 1 по теореме Резаля равен $\bar{L}^{(e)} = \bar{u}_B$, где $\bar{u}_B = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_0 = \bar{\omega}_2 \times J_z \bar{\omega}_1$. Момент $\bar{L}^{(e)}$ изобразим с помощью пары сил (\bar{F}, \bar{F}_1) . Пара сил (\bar{F}, \bar{F}_1) – реакция в подшипниках ротора со стороны рамки 2. Ротор 1, в свою очередь, создает пару сил реакций (\bar{S}, \bar{S}_1) , равную и противоположно направленную паре сил (\bar{F}, \bar{F}_1) . Пара сил (\bar{S}, \bar{S}_1) – реакции рамки 2 со стороны ротора 1 (так действует ротор 1 на рамку 2), причем момент этой пары сил (\bar{S}, \bar{S}_1) равен

$$\bar{L}_1^{(e)} = -\bar{L}^{(e)} = -J_z (\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1),$$

или

$$\bar{L}_1^{(e)} = J_z (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2) = \bar{L}^{(r)}.$$

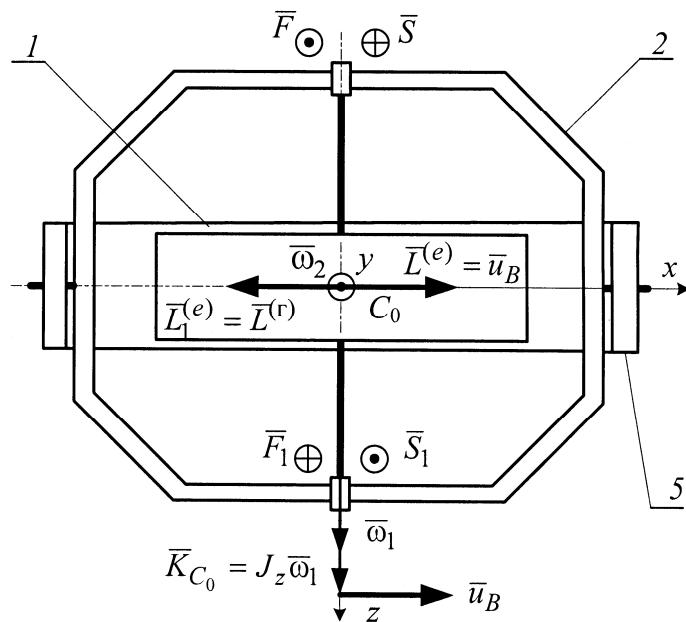


Рис. 12. Схема сил и моментов ротора и рамки;
1 – ротор; 2, 5 – соответственно внутренняя и внешняя рамки

Величина $J_z(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2) = \bar{L}^{(r)}$ – гироскопический момент (ротора).

Момент пары сил $\bar{L}_1^{(e)}$ – это момент пары сил (\bar{S}, \bar{S}_1) , действующих со стороны ротора 1 на рамку 2. В то же время, поскольку $\bar{L}_1^{(e)}$ – момент противодействия ротора внешнему воздействию на него, то и гироскопический момент можно считать моментом противодействия ротора внешнему воздействию. Это противодействие таково, что в случае, если правый подшипник ротора будет освобожден, соответствующий конец оси ротора оторвется от опоры и начнет подниматься (поворачиваться вокруг оси $A'x$ – см. рис. 6).

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Описание лабораторного комплекса ТМл-09М	3
2. Теоретическая часть	7
3. Проведение экспериментов	15

Учебное издание

**Дубинин Владимир Валентинович
Жигулёвцев Юрий Николаевич
Витушкин Вячеслав Валентинович**

**Автоматизированный
лабораторный комплекс
«Двухстепенной гироскоп» ТМл-09М**

Редактор *E.K. Кошелева*
Корректор *E.B. Авалова*
Компьютерная верстка *O.B. Беляевой*

Подписано в печать 15.08.2011. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,4. Тираж 300 экз. Изд. № 6. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.