Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Методические указания

В.В. Дубинин, Ю.Н. Жигулевцев,
В.В. Витушкин

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС «ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИНЕРЦИОННЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ» ТМл-07М

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

В.В. Дубинин, Ю.Н. Жигулевцев,
В.В. Витушкин

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС «ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИНЕРЦИОННЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ» ТМл-07М

Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу «Теоретическая механика»

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2010

УДК 531.3
ББК 22.21
Д79

Р е ц е н з е н т *А.В. Копаев*

Дубинин В.В.

Д79 Автоматизированный лабораторный комплекс «Вынужденные колебания механической системы с инерционным возмущением» ТМл-07М : метод. указания к выполнению лабораторной работы по курсу «Теоретическая механика» / В.В. Дубинин, Ю.Н. Жигулевцев, В.В. Витушкин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 26, [2] с. : ил.

Приведено описание лабораторного комплекса, предназначенного для исследования с применением ПЭВМ колебаний механической системы с инерционным возмущением. Проведен теоретический анализ и экспериментальное исследование работы лабораторной установки, дано описание методики и порядка выполнения лабораторной работы.

Для студентов 2-го курса, обучающихся по машиностроительным и приборостроительным специальностям.

УДК 531.3
ББК 22.21

1. ОПИСАНИЕ КОМПЛЕКСА

Рассматриваемый в данной работе лабораторный комплекс ТМл-07М «Вынужденные колебания механической системы с инерционным возмущением» является оригинальной научно-методической разработкой кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Он позволяет проводить эксперименты по изучению вынужденных колебаний механической системы с инерционным возбуждением. Комплекс состоит из электромеханической установки с блоком управления, аналого-цифрового преобразователя (АЦП), ПЭВМ и программно-методического обеспечения. Общий вид лабораторного комплекса приведен на рис. 1.

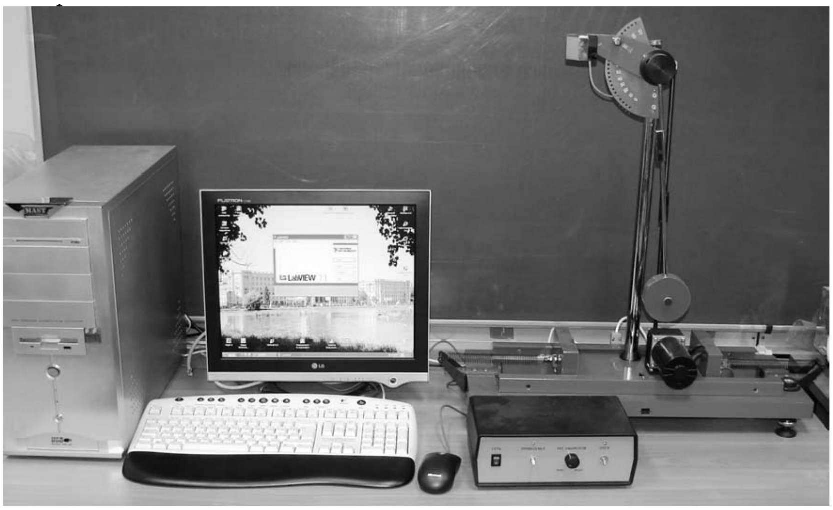


Рис. 1. Общий вид лабораторной установки

Электромеханическая лабораторная установка (рис. 2) представляет собой механическую систему, состоящую из тележки *1*, перемещающейся на неподвижном основании по направляющим (рельсам) *2* в горизонтальном направлении, и установленного на тележке маятника с грузом *9*, который может закрепляться на стержне *8* на различных расстояниях от точки *O*. Маятник может поворачиваться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку *O* и перпендикулярной направлению движения тележки. Установка приводится в движение электродвигателем *4*, закрепленным на

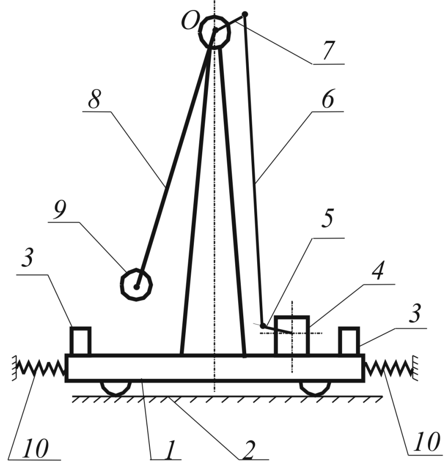


Рис. 2. Схема лабораторной установки:
1 – тележка; *2* – направляющие (рельсы); *3* – груз; *4* – электродвигатель; *5* – кривошип; *6* – тяга; *7* – рычаг; *8* – стержень; *9* – груз; *10* – пружина

тележке. Вращение вала электродвигателя через червячный редуктор и муфту передается кривошипному механизму с регулируемым эксцентриситетом. Кривошип *5* в виде эксцентрика на муфте через тягу *6* соединен с рычагом *7*, закрепленным на общей с маятником оси. Кроме того, на тележке *1* с целью увеличения ее массы могут быть установлены дополнительные грузы *3*. Питание электродвигателя и управление скоростью его вращения осуществляется с помощью блока управления.

Таким образом, маятник совершает вынужденные колебания по закону, близкому к синусоидальному. Эти колебания и обеспечивают формирование возмущающего воздействия на тележку. Угловые отклонения маятника измеряются с помощью потенциометрического датчика, установленного на его оси. Для измерения перемещений тележки на ней установлен индуктивный датчик. Сигналы датчиков поступают через усилитель блока управления на аналого-цифровой преобразователь. Установка позволяет регистрировать колебательные движения тележки и маятника и получать амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную (ФЧХ) характеристики вынужденных колебаний тележки.

Установка может быть использована для выполнения лабораторных работ в различных вариантах. Здесь представлена лабораторная работа, которая проводится при полном оснащении установки: тележка соединена с неподвижным основанием двумя пружинами, а маятнику сообщается от электродвигателя принудительное колебательное движение. В этом случае изучают установившееся колебательное движение тележки.

Лабораторная работа проводится по принципу сравнения экспериментальных и теоретических данных.

Для вынужденных колебаний тележки, вызванных возмущением инерционного типа, при изменении частоты вынужденных колебаний строят теоретические АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний тележки.

Экспериментальные данные отображаются в виде совокупности точек, соответствующих оценкам параметров (частота, амплитуда и фаза) каждого периода вынужденных колебаний при изменении частоты возмущения в некотором диапазоне частот.

Вычисление амплитуды и фазы осуществляется на основе анализа сигналов, снимаемых с датчиков угла отклонения маятника и линейного перемещения тележки, т. е. сигналов возмущения и вынужденных колебаний.

Запись сигналов и их обработку, получение параметров вынужденных колебаний тележки проводят с помощью аппаратно-программного комплекса ПЭВМ.

Пары измерений «частота – амплитуда», «частота – фаза» отображаются в виде точек на экране дисплея, и при постепенном изменении частоты возмущения они сливаются в размытые линии, которые отображают реальные АЧХ и ФЧХ соответственно.

Программное обеспечение рассматриваемого комплекса реализовано в среде системы LabVIEW 7.0 (Laboratory Virtual Instruments Engineering Workbench – среда разработки лабораторных виртуальных приборов) фирмы National Instruments в виде виртуального прибора ТМл-07М.vi, реализующего алгоритм выполнения лабораторной работы.

Система LabVIEW представляет собой интегрированную среду графического программирования и выполнения задач автоматизации измерений и экспериментов, обеспечивающую ввод и обработку экспериментальных данных с отображением результатов обработки в реальном масштабе времени. Экспериментальные данные вместе с указанной теоретической зависимостью выводятся на экран виртуального прибора в виде массива точек.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим линеаризованную математическую модель движения тележки. Расчетная схема установки представлена на рис. 3. Здесь условно электродвигатель и механизм привода маятника не показаны.

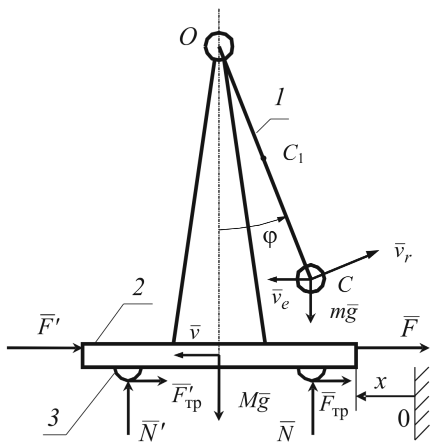


Рис. 3. Расчетная схема установки:
1 – маятник; *2* – тележка; *3* – колеса

Маятник *1* приводится в колебательное движение с помощью двигателя, установленного на тележке *2*. Масса тележки M. Масса маятника сосредоточена в точке C. Длина маятника $OC = l$. Колеса *3* совершают плоское движение, но в силу малой массы будем учитывать их массу в общей массе M тележки при ее поступательном прямолинейном движении (вращение колес не учитывается).

Система имеет две степени свободы, введены две обобщенные координаты: x — линейное перемещение тележки и φ — угловое отклонение маятника. Изменение координаты φ задано, а уравнение $x = x(t)$ необходимо определить.

Примем, что колеса катятся без скольжения, поэтому работа сил $\bar{N}$, $\bar{N}'$, $\bar{F}_{\text{тр}}$, $\bar{F}'_{\text{тр}}$ на перемещении тележки равна нулю.

Для составления дифференциального уравнения движения тележки используем уравнение Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

где кинетическая энергия системы

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2}.$$

Возможен более точный учет распределения массы маятника, совершающего плоское движение. Например, можно отдельно учитывать массу стержня маятника, считая его однородным стержнем с силой тяжести, приложенной в точке C_1 (при $OC_1 = l/2$).

Скорость тележки

$$\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y,$$

где $v_x = \dot{x}$ и $v_y = 0$.

Скорость точки C

$$\bar{v}_C = \bar{v}_e + \bar{v}_r,$$

где $\bar{v}_{\text{e}} = \bar{v}$, а $v_{\text{r}} = OC \cdot \dot{\varphi} = l\dot{\varphi}$.

Тогда

$$v_C^2 = (\bar{v}_e + \bar{v}_r)^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi}\cos(\pi - \varphi) = \\ = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Обобщенная сила

$$Q_x = \frac{[-c(x_0 + x) - c(x - x_0)]\,\delta x}{\delta x} = -2cx.$$

Здесь c – жесткость пружин; x_0 — начальная деформация пружин.

Запишем уравнение для кинетической энергии:

$$T = \frac{(M+m)\,\dot{x}^2}{2} - m\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Тогда уравнение Лагранжа II рода примет вид

$$(M+m)\,\ddot{x} - ml\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = -2cx,$$

или

$$(M+m)\,\ddot{x} + 2cx = ml\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right). \tag{1}$$

В правой части дифференциального уравнения (1) вынужденных движений находится нелинейная обобщенная возмущающая сила.

При малом значении φ правая часть уравнения (1) приближенно равна

$$ml\left(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2\varphi\right).$$

Здесь $\ddot{\varphi}$ — величина первого порядка малости, а $\dot{\varphi}^2\varphi$ — величина третьего порядка.

Угол φ задается принудительно, и $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \delta)$, где φ_0 и ω – амплитуда и частота кинематического параметра возмущения φ. Амплитуда φ_0 фиксируется датчиком. Определим первую и вторую производные по времени параметра φ:

$$\dot{\varphi} = \varphi_0\,\omega \cos(\omega t + \delta); \quad \ddot{\varphi} = -\varphi_0\,\omega^2 \sin(\omega t + \delta).$$

В силу предположения того, что φ – малая величина, линейное дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$(M+m)\,\ddot{x} + 2cx = ml\ddot{\varphi} = -ml\varphi_0\,\omega^2 \sin(\omega t + \delta),$$

или

$$\ddot{x} + K^2 x = -h \sin(\omega t + \delta), \tag{1a}$$

где

$$K = \sqrt{\frac{2c}{M+m}}; \quad h = \frac{ml\varphi_0\,\omega^2}{M+m}.$$

Здесь K – частота свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления (по координате x).

Нас интересуют лишь вынужденные колебания тележки (системы). Решение будем искать в виде

$$x = a_{\text{в}} \sin(\omega t + \delta),$$

где $a_{\text{в}}$ согласно уравнению (1a) определяется соотношением

$$-a_{\text{в}}\,\omega^2 + a_{\text{в}} K^2 = -h,$$

откуда

$$a_{\text{в}} = \frac{h}{\omega^2 - K^2}.$$

Окончательно получим

$$x = \frac{h}{\omega^2 - K^2} \sin(\omega t + \delta).$$

Амплитудное значение x

$$a_{\text{в}} = \frac{ml\varphi_0\omega^2}{(M+m)\,(\omega^2 - K^2)} = \frac{ml\varphi_0 Z^2}{(M+m)\,(Z^2-1)},$$

здесь $Z = \omega/K$ — коэффициент расстройки; ω — круговая частота вынужденных колебаний.

Если не учитывать сопротивление, то разность фаз ε составит 0, $\pi/2$, π в зависимости от соотношения ω и K.

Необходимо определить параметры установки: c – жесткость пружин; M, m – массы тележки и маятника с грузом C; l — длину маятника.

Найдем также φ_0 — максимальное значение угла отклонения маятника от вертикали. Величина $a_{\text{в}} = |x_m|$. Для эксперимента необходимо определить $K = \sqrt{\dfrac{2c}{M+m}}$. При проведении эксперимента устанавливают (задают) частоту возмущающего воздействия ω и фиксируют величину x_m — максимальное смещение тележки.

Введем величину $\lambda = \dfrac{a_{\text{в}}}{l\varphi_0}$ — коэффициент динамичности, тогда

$$\lambda = \frac{a_{\text{в}}}{l\varphi_0} = \frac{m}{M+m}\frac{Z^2}{|Z^2-1|}. \tag{2}$$

Теоретическая кривая $\lambda = \lambda(Z)$ (рис. 4) строится по формуле (2). Экспериментальные точки, задаваемые координатами x_{m_i} и ω_i, наносятся на график и сравниваются с теоретической кривой.

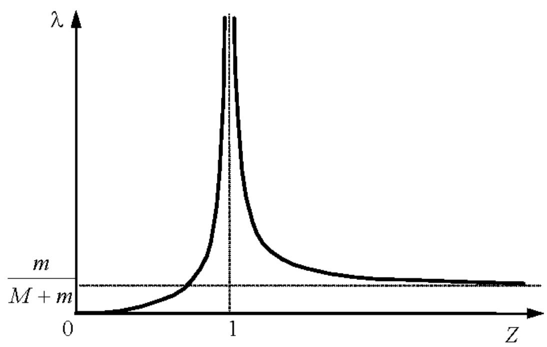


Рис. 4. Теоретическая АЧХ системы без учета сопротивления

Для этого необходимо сначала получить значения

$$Z_i = \frac{\omega_i}{K} \quad \text{и} \quad \lambda_i = \frac{x_{m_i}}{l\varphi_0}.$$

Замечание 1. Можно провести учет сопротивления при колебаниях тележки с маятником (определить обобщенный коэффициент сопротивления n).

Обобщенную силу в этом случае запишем в виде

$$Q_x = -2cx - \mu\dot{x}.$$

Дифференциальное уравнение движения тележки выглядит так:

$$(M+m)\,\ddot{x} + \mu\dot{x} + 2cx = -ml\varphi_0\,\omega^2 \sin(\omega t + \delta),$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + K^2 x = -h\sin(\omega t + \delta), \tag{3}$$

где

$$K = \sqrt{\frac{2c}{M+m}}; \quad 2n = \frac{\mu}{M+m}; \quad h = \frac{ml\varphi_0\,\omega^2}{M+m}.$$

Решение будем искать лишь для вынужденных колебаний тележки в виде

$$x = a_{\text{в}} \sin(\omega t + \delta - \varepsilon). \tag{4}$$

Дифференцируя (4), получим

$$\dot{x} = a_{\text{в}}\,\omega\cos(\omega t + \delta - \varepsilon); \quad \ddot{x} = -a_{\text{в}}\,\omega^2 \sin(\omega t + \delta - \varepsilon). \tag{5}$$

Подставим выражения (4) для $x_{\text{в}}$ и производных $\dot{x}_{\text{в}}$, $\ddot{x}_{\text{в}}$ (см. (5)) в дифференциальное уравнение движения (3), тогда

$$\begin{aligned}
&-a_{\text{в}}\,\omega^2 \sin(\omega t + \delta - \varepsilon) + 2n\,\omega a_{\text{в}} \cos(\omega t + \delta - \varepsilon) + \\
&+K^2 a_{\text{в}} \sin(\omega t + \delta - \varepsilon) = -h\sin[(\omega t + \delta - \varepsilon) + \varepsilon] = \\
&= -h\,[\sin(\omega t + \delta - \varepsilon)\cos\varepsilon + \cos(\omega t + \delta - \varepsilon)\sin\varepsilon].
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&a_{\text{в}}\left(K^2 - \omega^2\right) = -h\cos\varepsilon; \quad a_{\text{в}} 2n\,\omega = -h\sin\varepsilon; \\
&a_{\text{в}} = \frac{h}{\sqrt{\left(K^2-\omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2n\,\omega}{K^2 - \omega^2},
\end{aligned}$$

где ε – разность фаз, $\varepsilon = \psi_{\text{в}} - \psi_{\text{в.к}}$; $\psi_{\text{в}}$ – фаза возмущения; $\psi_{\text{в.к}}$ — фаза вынужденных колебаний тележки.

Далее получим

$$a_{\text{в}} = \frac{ml\varphi_0\omega^2}{(M+m)\sqrt{(K^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}},$$

или, используя обозначение $\lambda = \dfrac{a_{\text{в}}}{l\varphi_0}$ — коэффициент динамичности, запишем

$$\lambda = \frac{m}{M+m}\frac{Z^2}{\sqrt{(1-Z^2)^2+\dfrac{Z^2}{Q^2}}}, \tag{6}$$

где $Q = \dfrac{K}{2n}$ — добротность системы.

Для сдвига фаз ε получим

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{Z}{Q\,(1-Z^2)},$$

откуда

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\left[\frac{Z}{Q\,(1-Z^2)}\right]. \tag{7}$$

Кривые $\lambda = \lambda(Z)$, $\varepsilon = \varepsilon(Z)$ имеют вид, представленный на рис. 5.

Замечание 2. Учтем массу стержня при определении кинетической энергии системы:

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_{C_1Z}\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_1v_{C_1}^2}{2},$$

где $v_{C_1}^2 = \bar{v}_{C_1}^2$, $\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_{e_1} + \bar{v}_{r_1}$; $\bar{v}_{e_1} = \bar{v}$; $v_{r_1} = \dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}$;

$v_{C_1}^2 = (\bar{v}_{e_1} + \bar{v}_{r_1})^2 = \dot{x}^2 + \dfrac{l_1^2}{4}\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}\dfrac{l_1}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi.$

Окончательно получим

$$T = \frac{(M+m+m_1)\,\dot{x}^2}{2} - \left(m + \frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right)\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi + \\ + \left(ml^2 + J_{C_1Z} + m_1\frac{l_1^2}{4}\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

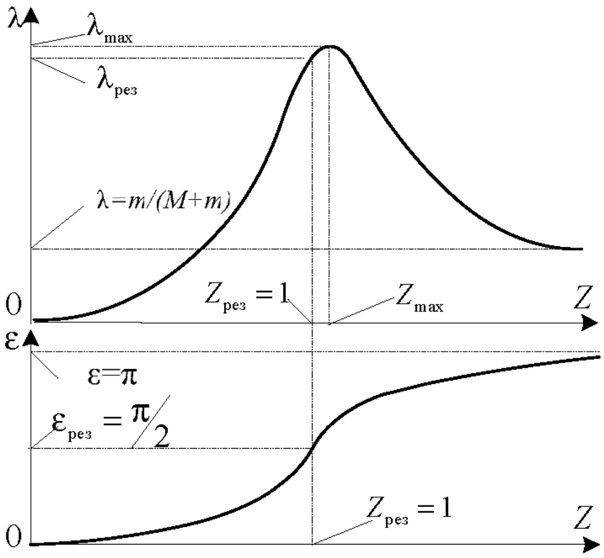


Рис. 5. Теоретические АЧХ и ФЧХ системы с учетом сопротивления

Тогда уравнение движения (3) тележки примет вид

$$(M+m+m_1)\,\ddot{x}+\mu\dot{x}+2cx=\left(m+\frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right)l\ddot{\varphi}=$$
$$=-\left(m+\frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right)l\varphi_0\,\omega^2\sin\left(\omega t+\delta\right),$$

или

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+K^2x=-h\sin\left(\omega t+\delta\right).$$

Здесь

$$K=\sqrt{\frac{2c}{M+m+m_1}};\quad 2n=\frac{\mu}{M+m+m_1};$$
$$h=\frac{\left(m+\dfrac{m_1}{2}\dfrac{l_1}{l}\right)l\varphi_0\,\omega^2}{M+m+m_1}.$$

Таким образом, с учетом массы стержня

$$a_{\text{в}} = \frac{\left(m + \dfrac{m_1}{2}\dfrac{l_1}{l}\right) l\varphi_0\,\omega^2}{(M+m+m_1)\sqrt{\left(K^2-\omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

или

$$\lambda = \frac{a_{\text{в}}}{l\varphi_0} = \frac{m + \dfrac{m_1}{2}\dfrac{l_1}{l}}{M+m+m_1}\,\frac{Z^2}{\sqrt{\left(1-Z^2\right)^2 + \dfrac{Z^2}{Q^2}}},$$

где λ — коэффициент динамичности.

3. ПРОВЕДЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Для установки ТМл-07М масса груза маятника $m = 1{,}056$ кг, масса тележки $M = 5{,}557$ кг (без дополнительных грузов *3* (см. рис. 2), масса каждого груза $m_{\text{гр}} = 1{,}135$ кг). Результаты испытаний получены при снятых с тележки дополнительных грузах и при длине маятника $l = 0{,}196$ м. Данные экспериментального замера жесткости пружин представлены на рис. 6. Среднее значение коэффициента жесткости пружин равно $c_{\text{ср}} = 217{,}8$ Н/м. Частота свободных (собственных) колебаний тележки с маятником, полученная расчетным путем при этом значении $c_{\text{ср}}$, составит $K \approx 8{,}068$ рад/с. Значения K, обусловленные разбросом значений жесткости c, лежат в диапазоне $K \approx 7{,}88 \ldots 8{,}20$ рад/с.

Непосредственно определить величину n (или μ) — обобщенный коэффициент сопротивления системы — весьма трудно, поэтому определяем n с помощью эксперимента.

Оценить параметры K и n можно, записав собственные затухающие колебания системы «тележка — маятник». Маятник необходимо скрепить с тележкой, этой системе сообщить толчок или отклонение от положения равновесия и по схеме на рис. 7 определить K и n.

Отклоняем систему (тележку с маятником) в крайнее конструктивно допустимое положение и отпускаем без начальной скорости.

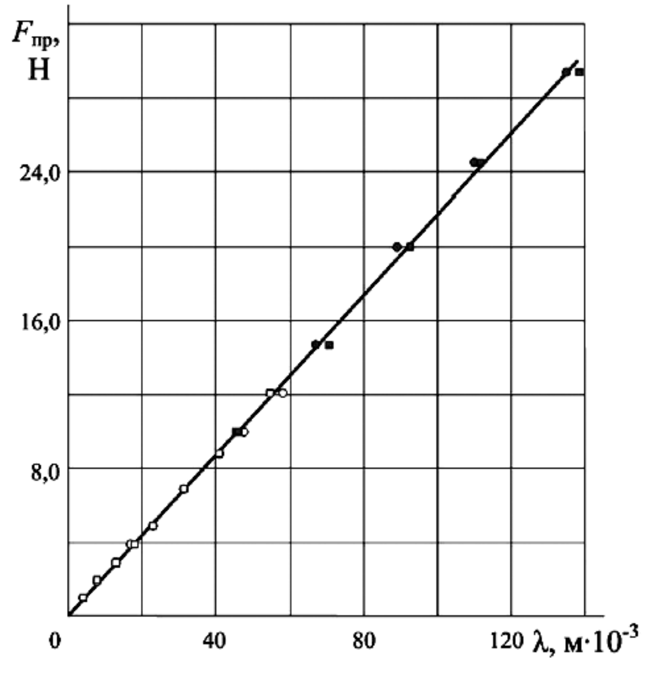


Рис. 6. Тарировка пружин

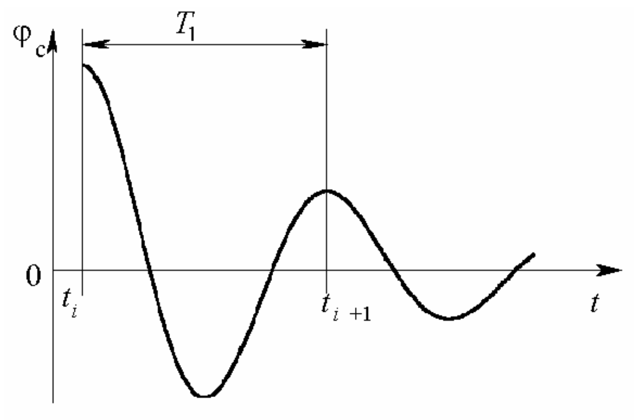


Рис. 7. Схема свободных колебаний тележки

Определяем $K_1 = 2\pi/T_1$ (где T_1 — условный период затухающих колебаний системы) — круговую частоту затухающих колебаний, а также $K = \sqrt{K_1^2 + n^2}$ — круговую частоту свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления.

Декремент колебаний системы и ее логарифмический декремент колебаний имеют вид

$$D = \frac{q_i}{q_{i+1}} = e^{nT_1}; \quad \ln D = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}} = nT_1,$$

откуда $n = \dfrac{1}{T_1} \ln \dfrac{q_i}{q_{i+1}}$.

В качестве примера на рис. 8 приведен фрагмент записи на экране виртуального прибора свободных колебаний данной системы.

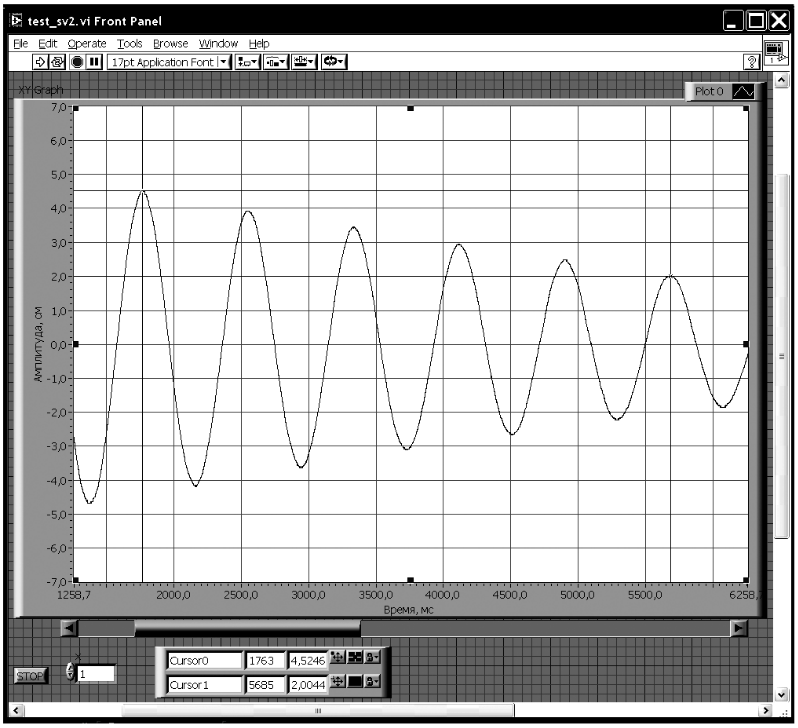


Рис. 8. Запись свободных колебаний системы

По записи затухающих колебаний рассчитываем величины K и n, а также $Q = K/(2n)$ — добротность системы. Замеры K и n проводятся при выключенном электродвигателе. Значения круговой частоты свободных (собственных) колебаний системы, определенные таким способом, хорошо совпадают со значениями, полученными расчетным путем по формуле

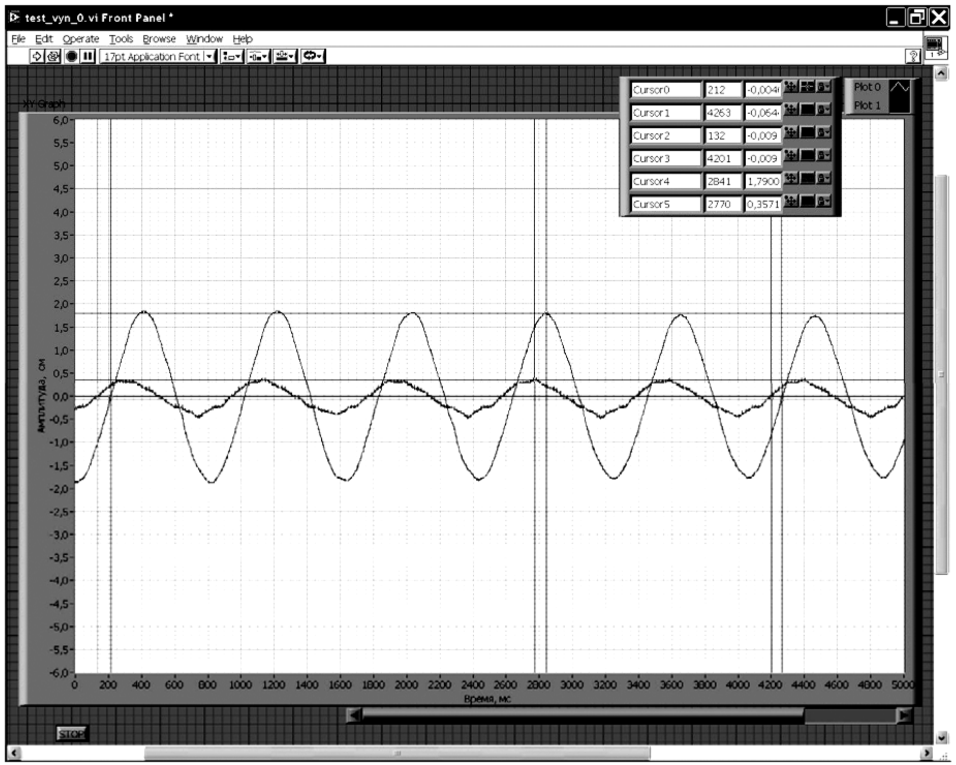
$$K = \sqrt{\frac{2c}{M+m}}.$$

Затем включаем электродвигатель и постепенно увеличиваем частоту возмущения маятника ω (а следовательно, частоту вынужденных колебаний тележки). С помощью датчиков линейных (x) и угловых (φ) отклонений и специальных программ для ЭВМ регистрируем частоту вынужденных колебаний и соответствующее ей значение величины максимального отклонения тележки от положения равновесия $(\omega_i,\ x_{m_i})$. По этим данным получаем записи вынужденных колебаний тележки при различных значениях частоты колебаний маятника (рис. 9—11).

На рис. 12 представлены теоретические кривые АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний тележки, рассчитанные по формулам (6) и (7). Записанные экспериментальные значения приведены на этом рисунке в виде совокупности точек, образующих размытые линии.

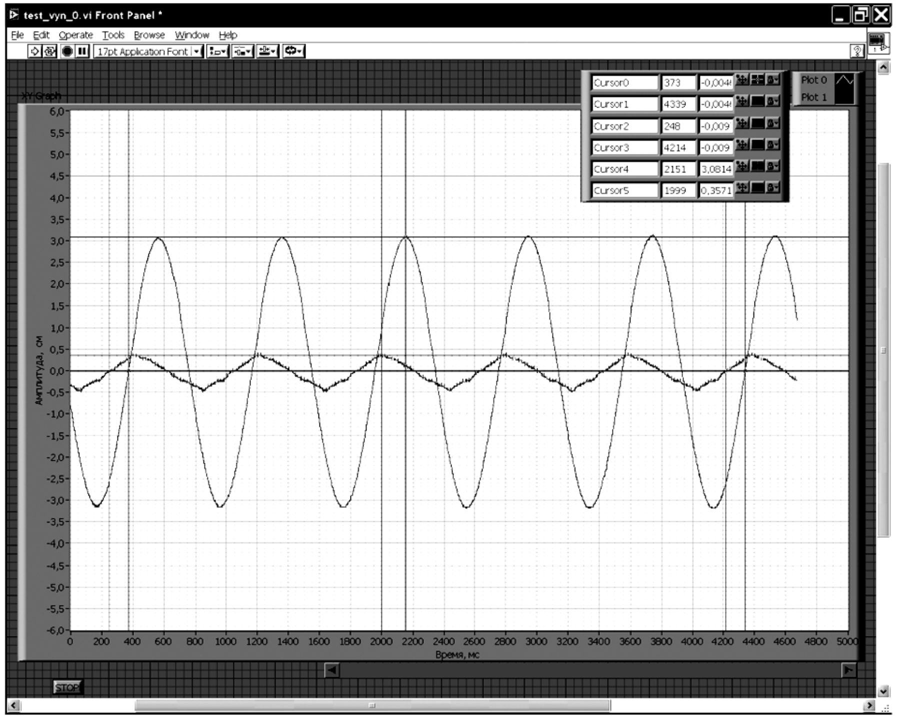
Видно, что значения фазы во всем диапазоне частот практически совпадают с теоретической кривой, в то время как экспериментальные точки для амплитуды в области резонанса имеют большой разброс системы, что отражает влияние нелинейных свойств на АЧХ. Тем не менее частота резонанса по АЧХ и ФЧХ хорошо совпадает с теоретической.

Таким образом, результаты эксперимента подтверждают допустимость применения линейной модели для анализа работы данной установки.



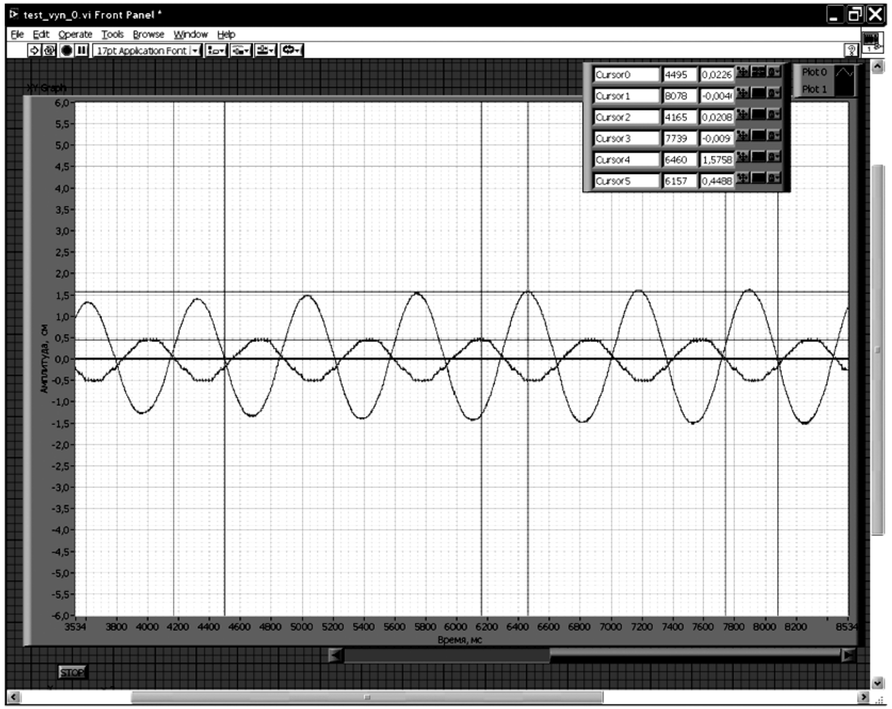
а

Рис. 9 (*начало*). Колебания маятника и тележки при $\omega < K$:
а – $\omega = 7{,}7208$ рад/с;



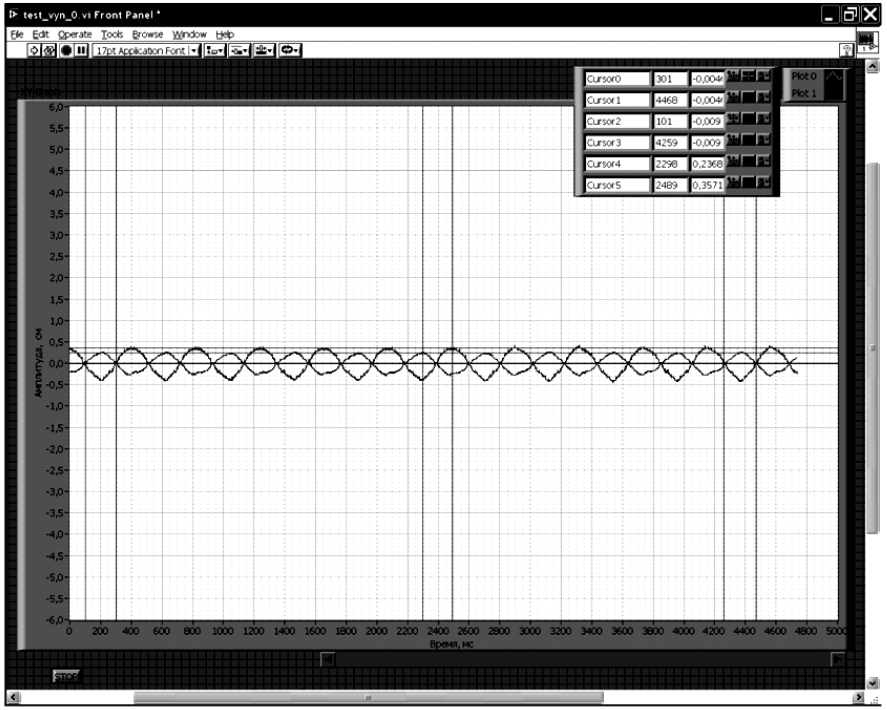
б

Рис. 9 (*окончание*). Колебания маятника и тележки при $\omega < K$:
б – $\omega = 7{,}9213$ рад/с



a

Рис. 10 (*начало*). Колебания маятника и тележки при $\omega > K$:
а – $\omega = 8{,}768$ рад/с



б

Рис. 10 (*окончание*). Колебания маятника и тележки при $\omega > K$:
б – $\omega = 15{,}1$ рад/с

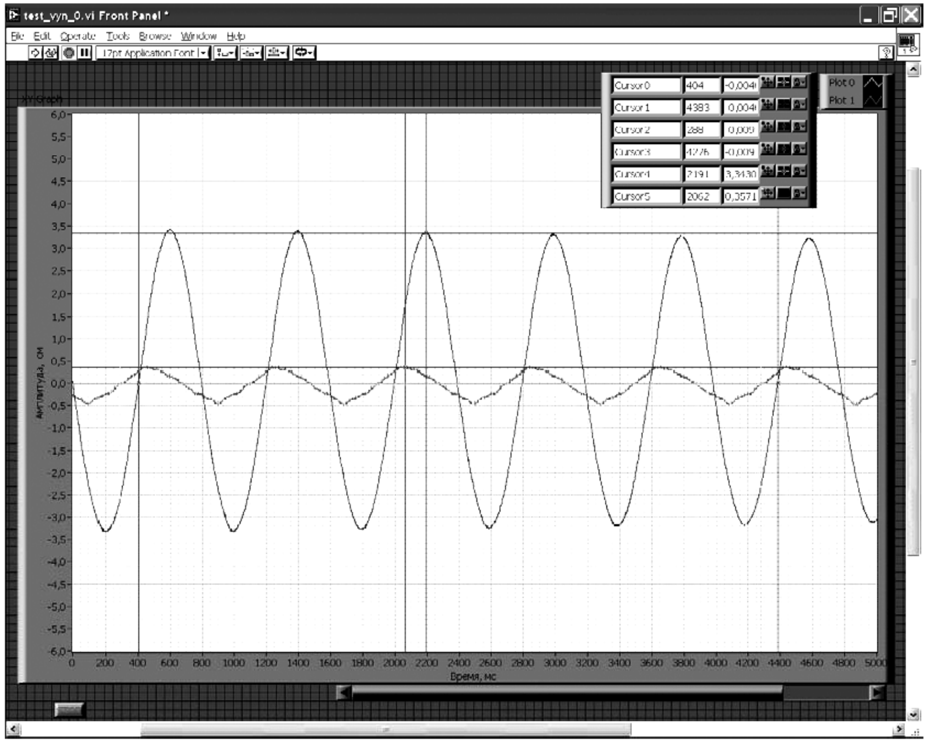


Рис. 11. Колебания маятника и тележки при $\omega \approx K$

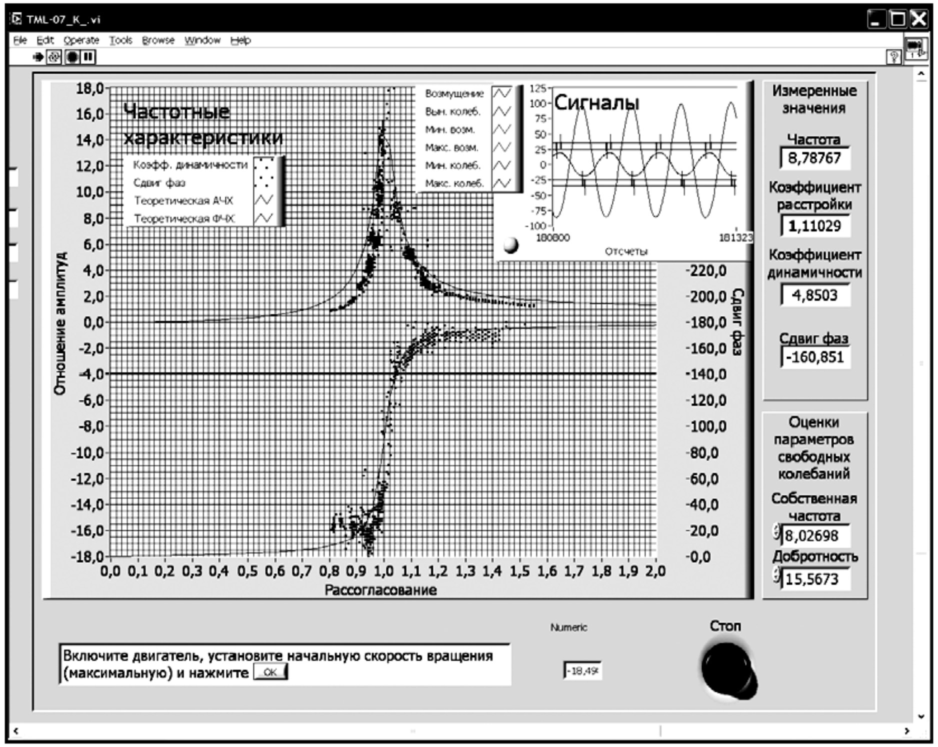


Рис. 12. Теоретические и экспериментальные АЧХ и ФЧХ

4. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Определим параметры системы K и n с помощью записи затухающих колебаний (см. рис. 8).

Установим по отметкам курсора условный период затухающих колебаний тележки с маятником:

$$T_1 = \frac{5685 - 1763}{5 \cdot 10^3} = 0,7844 \text{ с}; \quad K_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 8,01 \text{ рад/с}.$$

Определим коэффициент сопротивления n:

$$n = \frac{1}{5T_1} \ln \frac{q_i}{q_{i+5}}; \quad n = \frac{1}{5 \cdot 0,7844} \ln \frac{4,5246}{2,0044} = 0,2076 \text{ рад/с}.$$

Тогда

$$K = \sqrt{K_1^2 + n^2} = 8,013 \text{ рад/с}.$$

Данные расчеты выполнены по замерам с помощью курсоров, проведенных на экране виртуального прибора (см. рис. 8). Здесь частота колебаний несколько меньше ее значения (8,068 рад/с), полученного в подразд. 3 расчетным путем без учета массы стержня маятника.

Определение собственной частоты по графику (см. рис. 8) с более грубым замером условного периода (по одному колебанию) дает

$$T_1 \approx 0,8 \text{ с}; \quad n = 0,211 \text{ рад/с}.$$

На рис. 12 представлены данные, полученные при обработке результатов экспериментов на ЭВМ:

$K = 8,02698$ рад/с — «собственная частота»;

при $Q = \dfrac{K}{2n} = 15,5673$ — «добротность».

Отсюда

$$n = \frac{K}{2Q} = 0,2578 \text{ рад/с}.$$

На рис. 9, *а* представлены графики возмущения (колебание маятника) и вынужденных колебаний тележки при частоте $\omega = 7,7208$ рад/с $< K$,

$$\lambda = \frac{a_\text{в}}{l\varphi_0} = \frac{1,7900}{0,3571} = 5,013$$

(коэффициент динамичности).

Установим величину разности фаз

$$\varepsilon = \psi_{\text{в}} - \psi_{\text{в.к}} = \omega\,(t_1 - t_2) = \omega \cdot \Delta t,$$

где Δt — запаздывание по времени вынужденных колебаний тележки (отклик) по отношению к колебаниям маятника (сигнал возмущения).

Найдем

$$\varepsilon = \omega \cdot \Delta t = 7{,}7208 \cdot \frac{2841 - 2770}{10^3} = 0{,}5482 \text{ рад},$$

или

$$\varepsilon \approx 31,41^\circ.$$

Коэффициент расстройки

$$Z = \frac{\omega}{K} = 0{,}9619.$$

Эти данные удовлетворительно соответствуют экспериментальным точкам на рис. 12. Однако теоретическая АЧХ лежит несколько выше экспериментальных данных.

Для данных, представленных на рис. 9, *б*, получим

$$T' = 0{,}7932 \text{ с}.$$

Определим частоту вынужденных колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 5}{(4339 - 373)} = 7,9213 \text{ рад/с}.$$

Найдем частоту возмущения:

$$\omega_{\text{в}} = \frac{2\pi}{T_{\text{в}}} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 5}{(4214 - 248)} = 7{,}9213 \text{ рад/с} \quad (T_{\text{в}} = 0{,}7932 \text{ с}).$$

Определим коэффициенты расстройки:

$$Z = \frac{\omega}{K} = 0{,}9858 \text{ и } Z_{\text{в}} = \frac{\omega_{\text{в}}}{K} = 0{,}9858.$$

Напомним, что должно выполняться равенство $\omega = \omega_{\text{в}}$, $Z = Z_{\text{в}}$.

Коэффициент динамичности

$$\lambda = \frac{a_{\text{в}}}{l\varphi_0} = \frac{3{,}0814}{0{,}3571} = 8{,}63.$$

Разность фаз равна

$$\varepsilon = \omega \Delta t = 7{,}9213 \frac{(2151 - 1999)}{10^3} = 1{,}204 \text{ рад}; \quad \varepsilon = 69^\circ.$$

На рис. 9 представлены случаи, когда $\omega < K$, т. е. $Z < 1$. Все расчеты соответствуют экспериментальным данным, указанным на рис. 12.

Рассмотрим рис. 10, *а*.

Определим частоты вынужденных колебаний и возмущения ω и $\omega_\text{в}$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3}{(8078 - 4495)} = 8{,}768 \text{ рад/с}; \quad T' = 0{,}7166 \text{ с};$$

$$\omega_\text{в} = \frac{2\pi}{T_\text{в}} = \frac{2\pi \cdot 2,25 \cdot 10^3}{(7739 - 6157)} = 8{,}936 \text{ рад/с}; \quad T_\text{в} = 0{,}703 \text{ с}.$$

Вычислим значения коэффициентов динамичности и расстройки:

$$\lambda = \frac{a_\text{в}}{l\varphi_0} = \frac{1{,}5758}{0{,}4488} = 3{,}51 \text{ и } Z = \frac{\omega}{K} = 1{,}092.$$

Разность фаз

$$\varepsilon = \Psi_\text{в} - \Psi_\text{в.к} = \omega \Delta t,$$

где

$$\Delta t = \frac{6460 - 6157}{10^3} = 0,303 \text{ с},$$

$$\varepsilon = 8{,}768 \cdot 0{,}303 = 2{,}65 \text{ рад, или } \varepsilon = 152^\circ.$$

Для данных, представленных на рис. 10, *б*, получим

$$\omega = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10}{(4468 - 301)} = 15{,}1 \text{ рад/с}; \quad T' = 0{,}4167 \text{ с} \, (\omega_\text{в} \approx \omega).$$

Коэффициенты динамичности и расстройки:

$$\lambda = \frac{a_\text{в}}{l\varphi_0} = \frac{0{,}2368}{0{,}3571} = 0{,}663 \text{ и } Z = 1{,}88.$$

Сдвиг фаз

$$\varepsilon = \psi_\text{в} - \psi_\text{в.к} = \pi - \omega \Delta t = \pi - 15,1 \cdot 0 \cong \pi \text{ рад, или } \varepsilon \cong 180^\circ,$$

где $\Delta t \cong 0$.

На рис. 11 изображены колебания, которые происходят при частоте, близкой к резонансной:

$$\omega \approx 7{,}84 \text{ рад/с}.$$

При этом коэффициент расстройки

$$Z = 0{,}979$$

и коэффициент динамичности

$$\lambda = \frac{4{,}7203}{0{,}5711} = 8{,}3$$

(по экспериментальным данным (курсорным), см. рис. 11). Среди экспериментальных данных на рис. 12 есть точки в дорезонансной зоне, близкие к этим результатам. Следует отметить, что результаты расчетов весьма чувствительны к точности замеров величин по записываемым экспериментальным данным.

Частота возмущения (колебаний маятника) $\omega_{\text{в}}$ и частота вынужденных колебаний ω действительно совпадают (это хорошо подтверждает эксперимент).

На рис. 12 кривая АЧХ вблизи резонанса имеет асимптотический вид, т. е. значительно приближается к оси ординат. Поэтому здесь экспериментальные данные весьма чувствительны к изменению частоты возмущения (небольшое изменение частоты ведет к значительному изменению амплитуды вынужденных колебаний).

При резонансе $Z = 1$ и $\lambda = Q$.

По экспериментальным данным имеем $Q = 15{,}567$ (см. рис. 12).

Разность фаз возмущения и вынужденных колебаний при резонансе

$$|\varepsilon| = \frac{\pi}{2} \text{ рад},$$

это хорошо видно по кривой, изображенной на рис. 12, где значения ε взяты со знаком минус для того, чтобы показать, что вынужденные колебания отстают от возмущения.

На рис. 12 приведены также полученные по АЧХ и ФЧХ данные для точек с коэффициентом расстройки $Z = 1{,}11029$ (при частоте возмущения $\omega = 8{,}78767$): коэффициент динамичности $\lambda = 4{,}8503$, разность фаз — сдвиг фаз $|\varepsilon| = 160{,}851°$.

Следует отметить, что здесь изложены результаты экспериментов при снятых с установки дополнительных грузах *3* (см. рис. 2). Аналогичные испытания могут быть выполнены также при других условиях, например при установленном на тележке *1* (см. рис. 2) одном или двух грузах, с пружинами *10* с другой характеристикой жесткости, отличной от приведенной на рис. 6, и т. п.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Дубинин Владимир Валентинович
Жигулевцев Юрий Николаевич
Витушкин Вячеслав Валентинович

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС «ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИНЕРЦИОННЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ» ТМл-07М

Редактор *О.М. Королева*
Корректор *М.А. Василевская*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 03.06.2010. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,63. Тираж 300 экз. Изд. № 10.
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.