

Билет № 1

- ① (Тепловое излучение, его спектральные и интегр. хар-ки. Закон Кирхгофа. Закон смещения Вина. Закон Стефана - Больцмана)

Тепловое излучение - испускание ЭМ волн телами за счёт их внутренней энергии. (имеет непрер. спектр $\rightarrow$ нагретое тело способно испуск. энергию излучения при любой частоте и длине волны)

Люминесценция - нетепловое излучение (происх. за счёт внешней энергии)

Интегральные характеристики (количественные):

- ① Энергия излучения E [Дж]
② Поток излучения (мощность) Φ - энергия излучения, переносимая через един. пов. за время dt [Вт]
 $\Phi = dE/dt$

- ③ Энергетич. светимость R_Σ - физ. величина, числ. равн. энергии ЭМ волн всех частот (длин от 0 до ∞), изл. за ед. времени с ед. площади пов-ти тела. [Вт/м²]
 $R_\Sigma = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda = \int_0^\infty r_\nu d\nu$; $R_\Sigma = \frac{d\Phi}{dS}$

Спектральные хар-ки: (опис. распр. по дл. волн и част.)

- ① Испускат. способность r - спектр. плотн. потока лучистой энергии, излуч. ед. площ. пов-ти тела [Вт/м³]
 $r_\lambda = \frac{dR_\Sigma}{d\lambda} = \frac{d\Phi}{ds d\lambda}$; $r_\nu = \frac{dR_\Sigma}{d\nu} = \frac{d\Phi}{ds d\nu}$ } $\lambda^2 |r_\lambda| / c = |r_\nu|$
 $\nu = c/\lambda \rightarrow d\nu = (-c/\lambda^2) d\lambda$

- ② Поток излуч. с площ. S в интерв. $[\lambda_1; \lambda_2]$:
 $\Phi = \int_S \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r_\lambda d\lambda dS$

Полноту спос. тела a_ν - безразм. величина, показ., какая доля энергии ЭМ волн с частотами $[\nu; \nu+d\nu]$ пад. на пов-ть тела, полноту. им:

$$a_\nu = \frac{dE_{\text{полн}}}{dE_{\text{пад}}} \leq 1$$

Абсолютно-Черное Тело (АЧТ) - тело, полн. полноту. пад. на него излучение, независ. от напр. пад. на него изл., его спектр. состава и поляризации, ничего не отраж. и не пропускает: $a_\nu = 1$

Серое тело - тело, полноту. способн. которого меньше 1 и не зависит от частоты (дл. волны) света, напр. его распр. и поляризации

Т (3-й Закон Жирхгофа):

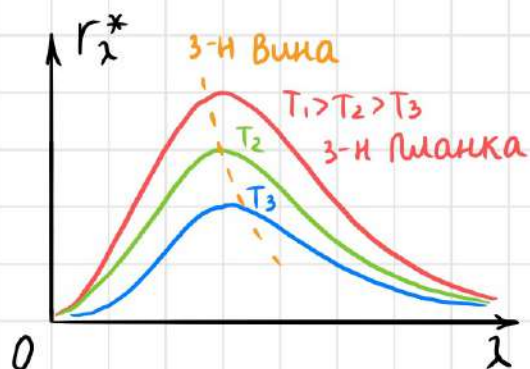
Отношение испуск. спос. тела к его полн. способн. не зав. от прир. тела и равно испуск. способн. АЧТ при тех же знан. темп. и частоты

$$\frac{r_\nu}{a_\nu} = r_\nu^* ; \frac{r_\lambda}{a_\lambda} = r_\lambda^* \rightarrow r_\lambda^* = \frac{c}{\lambda^2} r_\nu^*$$

$$r_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} K_B T - \text{формула Рэлея-Джинса}$$

$$r_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/K_B T) - 1} - \text{формула Планка для АЧТ}$$

(3-й сдвиг Вина):



$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$ - длина волны, кот. соотв. максим. отнош. испуск. и полн. спос. при данн. T
 b - постоянная Вина

(3-й Стеорана - Больцмана) :

$$R_{\Sigma} = \int_0^{\infty} r_{\lambda}^* d\lambda = \sigma T^4 \rightarrow R_{\Sigma} = \sigma T^4$$

σ - пост. Стеорана - Больцмана

③ (Коэффициент прозр. пот. барьера, его физ. смысл)

Коэфф. прохожд. τ -чы (прозр. порога) D - определяет вероятность того, что частица пройдет в область потенц. порога.

$$D = \left| \frac{\bar{J}_{\text{прош}}}{\bar{J}_{\text{пад}}} \right|$$

$\bar{J}_{\text{прош}}, \bar{J}_{\text{пад}}$ - вект. плотн. потока вероятн. для прошедшей и падающей волн.

② (Задача)

Дано:
одноим. пот. яма
 n - состояние
 $\langle p^2 \rangle = ?$

1) (Для одноим. потенц. ямы):

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a}$$

2) (Оператор импульса): $\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta$

3) (Среднее значение) $\langle p^2 \rangle = \int_0^a \psi (\hat{p}^2 \psi) dx$

$$\begin{aligned} 4) \hat{p}^2 \psi &= -\hbar^2 \Delta \psi_n = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\psi_n(x) \right] = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a} \right] = \\ &= \left| \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a} \right)'' \right| = \left| \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\pi n}{a} \cos \frac{\pi n x}{a} \right)' \right| = \left| -\sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \sin \frac{\pi n x}{a} \right| = \\ &= \hbar^2 \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \sin \frac{\pi n x}{a} \end{aligned}$$

$$4) \rightarrow 3) = 3') \quad \langle p^2 \rangle = \int_0^a \frac{2\pi^2 n^2 \hbar^2}{a^3} \sin^2 \frac{\pi n x}{a} dx = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{a^2}$$

Билет №2

① (Дискр. хар-р испуск. и погл. ЭМ излуч. вещ-вом. Ф-ла Планка для равновесного темп. изл. Квантовое объяснение законов темп. излучения)

Т (Гипотеза Планка):

Излучение света происх. не непрерывно, а дискретно → определенными порциями (квантами), энергия кот. определ. частотой ν :

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$h = 2\pi\hbar$ - пост. планка

Формула Планка для равн. ТИ:

$$\nu_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} ; \quad \nu_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

$U_T = \int_0^\infty U_\omega d\omega$ - объемная плотн. энергии равновесного ТИ

U_ω - спектр. объемная плотн. энергии равн. ТИ

$$U_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

Квантовое объяснение з-нов ТИ:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \varepsilon_n - \text{средняя энергия излучения}$$

$\varepsilon_n = n\hbar\omega$ - возм. значения энергии излучения

P_n - вероятность обладания эн. ε_n в случае ТД равнов.

→ применим распредел. Больцмана:

$$P_n = A e^{-\varepsilon_n/kT}$$

$$\text{Учитывая, что } \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \rightarrow A = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/kT} \right)^{-1} \rightarrow$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum n\hbar\omega \exp(-n\hbar\omega/kT)}{\sum \exp(-n\hbar\omega/kT)} = \hbar\omega \frac{\sum n \exp(-n\hbar\omega/kT)}{\sum \exp(-n\hbar\omega/kT)} =$$

$$= \hbar\omega \frac{1/(1 - \exp(-\hbar\omega/kT))}{\exp(-n\hbar\omega/kT)/(1 - \exp(-\hbar\omega/kT))^2} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

При малых частотах $\hbar\omega/kT \ll 1 \rightarrow \langle \epsilon \rangle = kT$

(формула классической теории)

При больших частотах $\rightarrow$ ф-ла Планка (разрешает "УФ катастрофу" классической теории)

③ (Работа выхода электр. из мет., её физик. смысл)

Т (2-ой з-н Фотоэффекта)

Для данного фотокатода макс. нач. скор. фотоэлектр. зав. от частоты света и не завис. от его интенсивности

(ЗСЭ): $h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} \rightarrow h\nu = A_{\text{вых}} + mV_{\text{max}}^2/2$

- ур-ние Эйнштейна для внешн. фотоэффекта

$$\frac{mV_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}} = eU_3$$

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}$$

ν_0 - мин. част. света, при кот. возм. внешн. фотоэф. (завис. от хим. прир. вещ-ва и сост. его пов-ти)

Поглощая квант света, электрон приобретает энергии $h\nu$. При вылете из металла энергии кажд. e^- уменьшается на величину $A_{\text{вых}}$ (работа выхода)

Работа выхода $A_{\text{вых}}$ - работа, которую необх. затратить, чтобы удалить e^- из металла.

② (Задача)

Дано:

Одном. пот. яма
 $n=3$ - состояние

P - ? (средн. треть)

1) (Для одном. потенц. ямы)

$$\Psi_{n=3}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi x}{a}$$

2) (Учитывая, что x наход. в ср. трети):
 $a/3 < x < 2a/3$

3) (Вероятн. нахождения):

$$P = \int_{a/3}^{2a/3} |\Psi_3(x)|^2 dx = \int_{a/3}^{2a/3} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{3\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_{a/3}^{2a/3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{6\pi x}{a} \right) dx =$$
$$= \frac{2}{a} \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{6\pi} \sin \frac{6\pi x}{a} \right]_{a/3}^{2a/3} = \frac{1}{3}$$

Билет №3

① (Фотоэффект, его законы. Ур-ние Эйнштейна для фотоэффекта. Дуализм волновых и корп. св-в излуч.)

Фотоэффект - процессы поглощения фотона квант. сист.

① Внутренний [образов. в полупров. пары электрон-дырка]

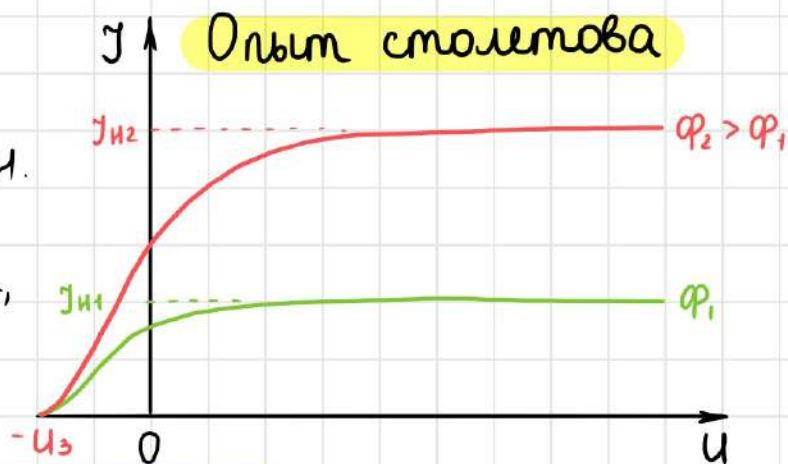
② Внешний [эмиссия e^- с пов. металла]

Фотоэл. эффект - явление вырывания e^- из вещ-ва при освещении его светом

e^- - фотоэлектроны, создающие фотопоток.

Ток насыщения - макс. ток, достигаемый при переходе всех e^- с кат. на ан.

Запирающ. напр. - напрен., при котором пропадает фотоэффект.



Т (1-ый з-н Фотоэффекта (Столетова))

Ток насыщ. строго проп. инт. пад. света, если част. света остаётся постоянной

$$A_{эл} = e U_z = \Delta E_{кин} = E_{кин} = m v_{max}^2 / 2$$

Т (2-ой з-н Фотоэффекта)

Для данного фотокатода макс. нач. скор. фотоэлектр. зав. от частоты света и не завис. от его интенсивности

$$(ЗСЭ): h\nu = A_{вых} + E_{кин} \rightarrow h\nu = A_{вых} + m v_{max}^2 / 2$$

Ур-ние Эйнштейна для внешн. фотоэффекта

$$\frac{m v_{max}^2}{2} = h\nu - A_{вых} = e U_z$$

$$h\nu_0 = A_{вых}$$

ν_0 - мин. част. света, при кот. возм. внешн. фотоэф. (завис. от хим. прир. вещ-ва и сост. его пов-ти)

Т(3-ий з-н Фотоэффекта)

Для каждого фотокатода существ. красн. граница внешнего фотоэффекта

Корпуск.-волнов. дуал. - проявление ТЧ св-в частиц и волн.
Чем ↓ длина волны → КВД проявляется ↑

$$E = mc^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow m_0 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{фотон в покое} \\ \text{не существует} \end{array} \right\}$$

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (m_0 c^2)^2 = 0 \rightarrow E = pc$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \rightarrow \bar{p} = \hbar \bar{k}, \text{ где } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ - длина волны де Бройля.

$$\begin{cases} E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \\ mc^2 = E_k + m_0 c^2 \end{cases} \rightarrow p = \sqrt{2m_0 E_k} \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0 c^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 E_k} \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0 c^2}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для нерелятив.} \\ \text{частиц} \end{array} \right. p = \sqrt{2m_0 E_k} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 E_k}}$$

Электрон ($E_k = eU$) станов. релатив. при ускор. разн. потенц. $> 10 \text{ кВ}$. Для нерелатив. электрона $\lambda \sim \text{\AA} \rightarrow$ проявляет волновые свойства в кристаллах.

Волновая природа света: интерф.; дифф.; поляриз.

Корпуск. природа света: фотоэффект; эффект Комптона

③ (Главное квантовое число электр. в атоме водор, его физический смысл)

Главное квантовое число n :

Принимает значения $n = 1, 2, 3, \dots$ и определяет полн. энергию электрона в любом квант. состоянии:

$$E_n = -\frac{m_0 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2} \text{ эВ} \left\{ \begin{array}{l} \text{собств. значения} \\ \text{гамма-тонна} \end{array} \right\}$$

② (Задача)

Дано:

$$E_k = 10 \text{ эВ} =$$

$$= 16 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж/Гц}$$

$$l = ? \text{ (мин)}$$

$$1) \text{ (Соотнош. неопр.) : } \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

$$2) \Delta x = l$$

$$3) E_k = p^2/2m_0 \rightarrow p = \sqrt{2m_0 E_k}$$

$$2), 3) \rightarrow 1) = 1) \quad l \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0 E_k}} \rightarrow l_{\min} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0 E_k}}$$

Решение:

$$l_{\min} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{2\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 16 \cdot 10^{-19}}} = 3,08 \cdot 10^{-11} \text{ м}$$

Билет № 4

① (Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпуск. свойств излучения)

Фотоэффект - процессы поглощения фотона квант. сист.

① Внутренний [образов. в паупров. пары электрон-дырка]

② Внешний [эмиссия e^- с пов. металла]

Фотоэл. эффект - явление вырывания e^- из вещ-ва при освещении его светом

e^- - фотоэлектроны, создающие фотопоток.

Корпуск.-волнов. дуал. - проявление ТЦ св-в частиц и волн.

$\lambda_{\text{ем}} \downarrow$ длина волны $\rightarrow$ КВД проявляется $\uparrow$

$$E = mc^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow m_0 = 0 \left[\begin{array}{l} \text{фотон в покое} \\ \text{не существует} \end{array} \right]$$

$$\left(\frac{\epsilon}{c} \right)^2 - p^2 = (m_0 c^2)^2 = 0 \rightarrow \epsilon = pc$$

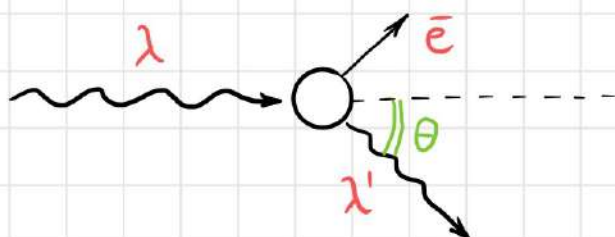
$$p = \frac{\epsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \rightarrow \bar{p} = \hbar k, \text{ где } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ - длина волны де Бройля.

Волновая природа света: интерф.; дифф.; поляриз.

Корпуск. природа света: фотоэффект; эффект Комптона

Эффект Комптона - изменение длин. волны рентг. изл. при его рассеянии вещ-вом, содерж. лёгкие атомы



$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = 2 \lambda_K \sin^2(\theta/2)$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_K (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda_K = \frac{h}{m_e c}$$

- комптон. длина волны электрона

Эффект Комптона объясняется упругим рассеян. фотонов на свободных электронах вещ-ва. Часть имп. фотон передает $e^- \rightarrow$ энергии фотона и $\uparrow$ длина λ .

Пусть $\epsilon_\varphi, \bar{p}_\varphi$ и $\epsilon'_\varphi, \bar{p}'_\varphi$ - энергия и имп. фотона до и после рассеяния

$$\epsilon_0 = m_0 c^2 ; p_0 = 0$$

$$\epsilon_e ; \bar{p}_e$$

$$(3C3) : \epsilon_\varphi + \epsilon_0 = \epsilon'_\varphi + \epsilon_e$$

$$(3C4) : \bar{p}_\varphi = \bar{p}'_\varphi + \bar{p}_e$$

$$\epsilon_e = \epsilon_\varphi + \epsilon_0 - \epsilon'_\varphi$$

$$\bar{p}_e = \bar{p}_\varphi - \bar{p}'_\varphi$$

$$\left(\frac{\epsilon_e}{c}\right)^2 - \bar{p}_e^2 = \frac{(\epsilon_\varphi - \epsilon'_\varphi + \epsilon_0)^2}{c^2} - (\bar{p}_\varphi - \bar{p}'_\varphi)^2$$

$$\left(\frac{\epsilon}{c}\right)^2 - \bar{p}^2 = inv = m_0^2 c^2$$

$$\left(\frac{\epsilon_e}{c}\right)^2 - \bar{p}_e^2 = \left(\frac{\epsilon_0}{c}\right)^2 ; \left(\frac{\epsilon_\varphi}{c}\right)^2 = \bar{p}_\varphi^2 ; \left(\frac{\epsilon'_\varphi}{c}\right)^2 = \bar{p}'_\varphi^2$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \frac{\epsilon_\varphi \epsilon'_\varphi}{c^2} + \frac{\epsilon'_\varphi \epsilon_0}{c^2} - \frac{\epsilon_\varphi \epsilon_0}{c^2} - \bar{p}_\varphi \bar{p}'_\varphi = 0$$

$$\epsilon = \hbar \omega \rightarrow \frac{\hbar^2 \omega \omega'}{c^2} + \hbar \omega' m_0 - \hbar \omega m_0 - \hbar^2 k k' \cos \theta = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} ; k' = \frac{\omega'}{c} = \frac{2\pi}{\lambda'} ; \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{h^2}{\lambda \lambda'} + \frac{h}{\lambda'} m_0 c - \frac{h}{\lambda} m_0 c - \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta = 0$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = \lambda_k (1 - \cos \theta)$$

③ (Энергия ионизации атома, её физ. смысл)

Ионизация атома - процесс, при котором электрон может преодолеть силу притяж. к ядру и оторваться от атома.

Энергия ионизации E_i - энергия, необходимая для осуществления ионизации атома.

$$E_i = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m_0 e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = 13,6 \text{ эВ} \quad \text{— энергия ионизации атома водорода}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2} \quad \text{при } n=1, 2, 3 \dots \quad \text{— радиусы допустим. орбит}$$

② (Задача)

Дано:

куб. пот. яма
 $n=3$

$N=?$ (кр. вып.)

1) (Энергетические уровни):

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

I уровень: E_{111}

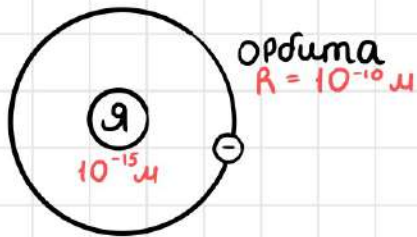
II уровень: $E_{112}, E_{121}, E_{211}$

III уровень: $E_{122}, E_{212}, E_{221} \rightarrow N=3$

Бишет №5

① (Ядерная модель атома. Постулаты Бора. Энерг. спектр атома водорода в теории Бора)

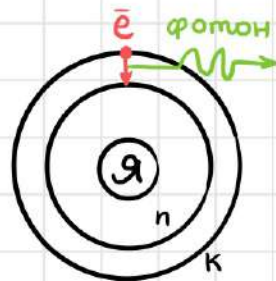
Модель атома Резерфорда:



Атом состоит из тяжелого положит. заряженного ядра Я очень малых размеров, вокруг которого по некот. орбитам движутся электроны

Постулаты Бора:

- ① Электрон в атоме может движ. только по опред. стационарн. орбитам, каждой из кот. можно приспис. опред. номер $n = 1, 2, 3, \dots$. Такое движение соотв. станд. атома, облад. неизм. полной энергией $E_n \rightarrow$ электрон не излучает энергию.
- ② Разрешенными стационар. орбитами явл. только те, для которых угловой момент импульса L электрона равен целому кратному знач. пост. Планка $\hbar \rightarrow$ для n -й станд. орбиты выполн. условие квантования: $L = n\hbar$, при $n = 1, 2, \dots$
- ③ Испускание или поглощение кванта изл. происходит при переходе атома из одного станд. сост. в другое. При этом частота ω излучения атома опред. разностью энерг. атома в 2-х станд. состояниях:
 $\hbar\omega_{nk} = E_k - E_n$ при $k > n$



Квантование энергии атома

$$\frac{m_0 v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \text{— условие вращ. электр. по круговой орбите радиуса } r \quad ①$$

$m_0 v r = n \hbar$ - ф-ла Бора квантов. мом. импульса e

$\rightarrow r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2}$ при $n=1, 2, 3...$ - радиусы допустим. орбит

Введем боровский радиус:

$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2} \rightarrow r_n = a n^2$ при $n=1, 2, 3...$

① $\rightarrow v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n}$ - значение скорости электрона на n -й стационар. орбите

$E_k = \frac{m_0 v_n^2}{2} = \frac{m_0 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$ - кинетическая энергия

②

$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m_0 e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$ - потенциальная энергия

③

②, ③ $\rightarrow E = E_k + U = -\frac{m_0 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$

- формула квантов. энергии в атоме водорода

Ионизация атома - процесс, при котором электрон может преодолеть силу притяж. к ядру и оторваться от атома.

③ (Ур-ние Эйнштейна для фотоэфф. его физ. смысл)

Т (2-ой з-н Фотоэффекта)

Для данного фотокатода макс. нач. скор. фотоэлектр. зав. от частоты света и не завис. от его интенсивности

(ЗСЭ): $h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} \rightarrow h\nu = A_{\text{вых}} + m v_{\text{max}}^2 / 2$

- ур-ние Эйнштейна для внешн. фотоэффекта

$\frac{m v_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}} = e U_3$

$h\nu_0 = A_{\text{вых}}$

ν_0 - мин. част. света, при кот. возм. внешн. фотоэф. (завис. от хим. прир. вещ-ва и сост. его пов-ти)

Поглощая квант света, электрон приобретает энергии $h\nu$. При вылете из металла энергии кажд. e^- уменьшается на величину $A_{\text{вых}}$ (работа выхода)
Работа выхода $A_{\text{вых}}$ - работа, которую необх. затратить, чтобы удалить e^- из металла.

② (Задача)

Дано:

одног. пот. яма
 $n=1$ (осн. сост.)

$\langle E_k \rangle = ?$

1) (Для одног. пот. ямы):

$$\Psi_{n=1}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{1 \cdot \pi x}{a}$$

2) (Оператор кин. энергии): $\hat{E}_k = -\hbar^2 \Delta / 2m_0$

3) (Среднее значение кин. энергии):

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle &= \int_0^a \Psi_1 (\hat{E}_k \Psi_1) dx = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \left(\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \right) dx = \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_0 a^3} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_0 a^3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} \end{aligned}$$

Билет №6

① (Корпуск.-волнов. дуализм материи. Гипотеза де Бройля. Опыты, подтверждающие волновые св-ва у микрогастий)

Корпуск.-волнов. дуал. - проявление ТЦ св-ва гастий и волн.
Чем ↓ длина волны → КВД проявляется ↑

$$E = mc^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow m_0 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \text{фотон в покое} \\ \text{не существует} \end{array} \right]$$

$$\left(\frac{\epsilon}{c} \right)^2 - p^2 = (m_0 c^2)^2 = 0 \rightarrow \epsilon = pc$$

$$p = \frac{\epsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \rightarrow \bar{p} = \hbar k, \text{ где } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ - длина волны де Бройля.

Электрон ($\epsilon_k = eU$) станов. релатив. при ускор. разн. потенц. $> 10 \text{ кВ}$. Для нерелатив. электрона $\lambda \sim \text{\AA} \rightarrow$ проявляет волновые свойства в кристаллах.

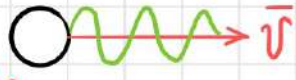
Волновая природа света: интерф.; дифф.; поляриз.

Корпуск. природа света: фотоэффект; эффект Комптона

Т (Гипотеза де-Бройля):

Дуализм имеет универс. характер и распростран. не только на светов. корпускулы, но и на все гастий вещества (материи)

[макрогастий (напр. электроны) наряду с корпускул. обладают и волновыми свойствами]

 де-Бройль связывает с движущ. гастий, обладающей массой покоя m_0 , некот. волну, которая распростран. с напр. скор. $\bar{v}$ гастий

① Для случая нерелятивистской свободной частицы:

$$\lambda_b = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}}; \quad v_{\text{ф}} = \frac{E}{\sqrt{2m_0K}} = \sqrt{\frac{E}{2m_0}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m_0}}$$

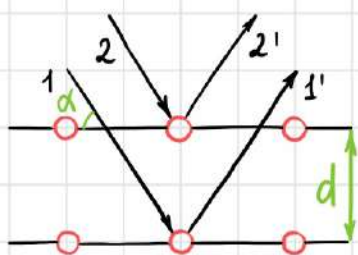
(учтено: $P = \sqrt{2m_0K}$; $K = E$)

② Для случая релятивистской частицы:

$$\lambda_b = \frac{hc}{\sqrt{K(K+2m_0c^2)}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+K/2m_0c^2}}$$

(учтено: $P = (1/c)\sqrt{K(K+2m_0c^2)}$)

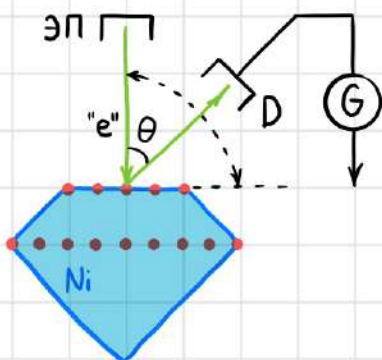
Эксперименты Дэвиссона и Джермера по дифракции макрочастиц:



Если пучок ускоренных электронов обладает волновыми св-вами, то их отражение от кристалла будет иметь такой же интерф. характер, как у рентгеновских лучей. Для них интерф. максимумы отраж.

набл. при условии Вульфа - Брэггов:

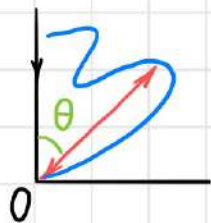
$$2d \sin \alpha = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots$$



В эксперименте использов. монокристал Ni , сошлифов. с одной вершины перпендик. большой диагональю куба.

Узкий пучок моноэнерг. электронов напр. из электронной пушки ЭП на сошлиф. грань, которая была покрыта рядом атом. перпендик. плоскости падения пучка.

В опыте измерялось ускоряющ. напряжение электр. (до 100 В) и одновременно фиксир. положение детект. D (счётлика отраж. электронов) - угол θ (детектор мог перемещаться в плоскости падения пучка)



По результатам замеров тока электронов через гальванометр G строились полярные диагр.

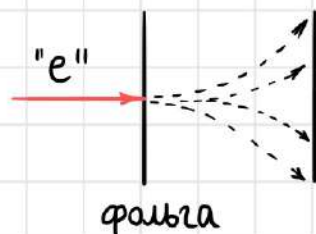
$I_e(\theta)$ при разных ускоряющих напряжениях U

→ отчётливый максимум I_e , наблюдаемый под

углом $\theta = 50^\circ$ и при ускор. напряж. $U = 54В$ соотв. интер. максимуму 1-го порядка, падающему от отражательной плоской дифф. решетки с известн. периодом d →

→ практическое совпадение длин волн явилось подтверждением гипотезы де-Бройля.

Эксперименты Томсона и Тартаковского



Было установлено воздействие внешнего МП на диффракц. лучи → они заметно откл, что свидетельств. об их электр. природе.

* ③ (Испуск. способн. тела при ТИ $\Gamma_{w,T}$, её физ. смысл)

Испускат. способность r - спектр. плотн. потока лучистой энергии, излуч. ед. площ. пов-ти тела $[Вт/м^2]$

$$\left. \begin{aligned} r_\lambda &= \frac{dR_\lambda}{d\lambda} = \frac{d\Phi}{ds d\lambda} ; r_\nu = \frac{dR_\nu}{d\nu} = \frac{d\Phi}{ds d\nu} \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda^2 |r_\lambda| / c = |r_\nu|$$

$$\nu = c/\lambda \rightarrow d\nu = (-c/\lambda^2) d\lambda$$

$$R_\lambda = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda = \int_0^\infty r_\nu d\nu - \text{энергетическая светимость}$$

$$r_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} ; \Gamma_w = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} -$$

- ф-ла Планка для равнов. ТИ

② (Задача)

Дано
одн. пот. яма
 $\Delta E_n = E_T$
T
a - ?

1) (дискретность энергии электрона):

$$\Delta E_n = (2n+1) \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

2) (Энергия теплового движения):

$$E_T = 3kT/2$$

$$2) \rightarrow 1) = 3) \quad \Delta E_n = E_T \rightarrow (2n+1) \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} = \frac{3}{2} kT \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \hbar \pi \sqrt{\frac{2n+1}{3mkT}}$$

Билет № 7

① (Волновая ф-ция, её статист. смысл и условия, которыми она должна удовл. Принцип суперпозиции в квантовой механике)

Волновая ф-ция Ψ - комплексн. ф-ция, используем. в квант. мех. для описания квант. сост. системы

Волновая ф-ция $\Psi(r, t)$ должна интерпретир. статистически, т.е. она является величиной, кот. позволяет находить все вероятности.

Таким образом, вероятность нахождения частицы в момент времени t с координатами $[x; x+dx]$, $[y; y+dy]$, $[z; z+dz]$ или в объеме $dV = dx dy dz$ можно определить интенс. волновой ф-ции:

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \Psi^* dV$$

Ψ^* - комплексно-сопряжённая ф-ция с Ψ

3: Т.к. Ψ - комплексная ф-ция, а вероятн. должна быть всегда действит. и положит. величиной, то за меру интенс. волнов. ф-ции принимается квадрат её модуля

Физ. смысл Ψ ф-ции: проявляется через плотность вероятности (вероятн. нахожд. т-цы в ед. объёма)

$$dP/dV = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$$

Вероятность нахождения частицы в момент времени t в некотором конечном объёме, согласно теореме сложения вероятностей:

$$P = \int P = \int |\Psi|^2 dV$$

Требования, предъявляемые к волновой функции:

① Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dV = 1$$

$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ - нормир. волн. ф-ция
 $\Psi \neq 0$

(вероятность нахождения частицы в момент врем. t во всем пространстве $\rightarrow$ является вероятностью абсолютно достоверного события ($= 1$))

② Условие ЖОН:

Волновая ф-ция должна быть:

- **К** - конечной (т.к. вероятность не больше 1);
- **О** - однозначной (т.к. вероятность не может быть неоднозначной величиной);
- **Н** - непрерывной (т.к. вероятность не может измен. скачком);

③ Дополнительные условия:

- гладкость Ψ -функции (отсутствие изломов);
- непрерывность производных типа $\partial \Psi / \partial x$;

Т (Принцип суперпозиции состояний):

Если какая-либо квантовомеханическая система (τ -ча или совокупность τ -ч) может находиться в состояниях, описываемых волновыми ф-циями $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i$, то она может также находиться в состоянии Ψ , описываемом линейной комбинацией этих функций:

$$\Psi = \sum_i C_i \Psi_i$$

C_i - некот. пост. коэфф. в виде произвольных (в общ. случае комплексных) чисел;

$|C_i|^2$ - определ. вероятность того, что система, предст. состоянием Ψ , может оказ. в сост. Ψ_i

③ (Физический смысл условия Брэга-Вульфа)

Условие Вульфа - Бреггов: определяет направление максимумов дифракции упруго рассеянного на кристалле рентгеновского излучения

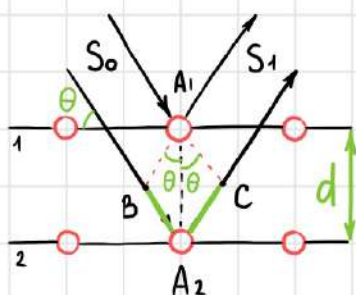
$$2d \sin \theta = n \lambda$$

d - межплоскостное расстояние

θ - угол скольжения (Брегговский угол)

n - порядок дифр. максимума

λ - длина волны



Если пучок ускоренных электронов облад. волновыми св-вами, то их отражение от кристалла будет иметь такой же интерф. характер, как у рентгеновских луч.

○ - узлы крист. решетки

$$\Delta = BA_2 + A_2C = 2d \sin \theta$$

② (Задача)

Дано:

$$R = 250 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$$

$$\sigma = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ Мк}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4$$

$$\lambda_m = ?$$

1) (Закон смещения Вина):

$$\lambda_m = \sigma / T$$

2) (Закон Стефана - Больцмана):

$$R = \sigma T^4 \rightarrow T = \sqrt[4]{R/\sigma}$$

$$2) \rightarrow 1) = 1) \quad \lambda_m = \sigma \sqrt[4]{\frac{\sigma}{R}}$$

Решение:

$$\lambda_m = 2,9 \cdot 10^{-3} \sqrt[4]{\frac{5,67 \cdot 10^{-8}}{250 \cdot 10^3}} = 2,001 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

Билет №8

① (Основные постулаты квант. мех. Вероятностный характер рез-тов измер. в квант. механике)

Основные постулаты квантовой механики:

- ① Каждая динамич. переменная представл. определен. линейным оператором
- ② Операторы, представл. динамические переменные, должны быть самосопряж. операторами.
- ③ Если система наход. в сост. Ψ , то вероятн. того, что при измерении динам. перем. $\hat{L}$ будет получено численн. значение L_n , равна $|C_n|^2$, где:
 $\hat{L}U_n = L_n U_n$; $\Psi = \sum_n C_n U_n$

Вероятн. характер рез-тов измер. в квант. механ:

Волновая ф-ция Ψ - комплексн. ф-ция, используем. в квант. мех. для описания квант. сост. системы

Волновая ф-ция $\Psi(r, t)$ должна интерпретир. статистически, т.е. она является величиной, кот. позволяет находить все вероятности.

Таким образом, вероятность нахождения частицы в момент времени t с координатами $[x; x+dx]$, $[y; y+dy]$, $[z; z+dz]$ или в объеме $dV = dx dy dz$ можно определить интенс. волновой ф-ции:

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \Psi^* dV$$

Ψ^* - комплексно-сопряженная ф-ция с Ψ

3: Т.к. Ψ - комплексная ф-ция, а вероятн. должна быть всегда действит. и положит. величиной, то за меру интенс. волнов. ф-ции принимается квадрат её модуля

Физ. смысл Ψ ф-ции: проявляется через плотность вероятности (вероятн. нахожд. т-цы в ед. объёма)
 $dP/dV = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$

Вероятность нахождения частицы в момент времени t в некотором конечном объёме, согласно теории соотношения вероятностей:
 $P = \int P = \int |\Psi|^2 dV$

Вычисление средних значений динам. переменных
 $\langle L \rangle = \sum_n L_n |C_n|^2$ - в теории вероятностей

Среднее значение динамической перем., представл. оператором $\hat{L}$, в сост., характер. волнов. ф-цией Ψ :
 $\langle L \rangle = \int \Psi^* \hat{L} \Psi d\tau$

③* (Условие нормир. волновой ф-ции, его физ. смысл)

Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dV = 1 \quad \Psi = \Psi(x, y, z, t) - \text{нормир. волн. ф-ция}$$

$$\Psi \neq 0$$

(вероятность нахождения частицы в момент врем. t во всем пространстве $\rightarrow$ является вероятностью абсолютно достоверного события ($= 1$))

② (Задача)

Дано: $d = 0,22 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ $U = ?$	1) (Усл. Вульфа-Брэггов): $2d \sin \theta = n\lambda \rightarrow \lambda = 2d$ 2) $\lambda = h/P \rightarrow \lambda = h/\sqrt{2m E_K} = h/\sqrt{2m eU}$ 2) $\rightarrow$ 1) = 1) $2d = \frac{h}{\sqrt{2m eU}} \rightarrow U = \frac{h^2}{8m e d^2}$
---	---

Решение:

$$U = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (0,22 \cdot 10^{-9})^2} = 7,79 \text{ В}$$

Билет №9

① (Ур-ние Шрёдингера, его св-ва. Статистич. интер. волновой функции)

Общее ур-ние Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$$

①

m - масса частицы

$U = U(x, y, z, t)$ - потенц. ф-ция част. в силовом поле

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в декартов. системе координат

$\hbar = h/2\pi$ - постоянная Планка

3: Ур-ние Шрёдингера является основным ур-нием нерелятивистской квантовой механики (не может быть выведено из других соотношений)

Свойства ур-ния Шрёдингера:

- ① Реллирность волновой ф-ции
- ② Статистическая интерпретация

Стационар. состояние - состояние, в которых набл. физические величины не изменяются во времени.

Если силов. поле стационарно (пот. энергия $U = U(x, y, z)$ не зависит от врем.) $\rightarrow$ решение

общего ур-ния Шрёдингера имеет вид:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \varphi(t)$$

②

Подставив ② $\rightarrow$ ① и разделив левую и правую части полуз. ур-ния на ②, получим:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, y, z) \right] \frac{1}{\Psi(x, y, z)} + U(x, y, z)$$

③

Т.к. левая часть ур-ния ③ зависит только от времени t , а правая - только от координат (x, y, z) , то их можно приравн. одной констан. разделения E (полная энергия частицы) $\rightarrow$ получим диффер. уравнения:

① Временное уравнение:

$$i\hbar \frac{1}{\psi(t)} \frac{d\psi(t)}{dt} = E \quad \left(\text{с решен: } \psi(t) = e^{\frac{i}{\hbar} Et} \right) \quad (4)$$

② Координатное уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) + U(x, y, z) \cdot \psi(x, y, z) = E \cdot \psi(x, y, z) \quad (5)$$

$$\psi(x, y, z) \neq 0$$

Из ур-ния ⑤ получаем $\rightarrow$

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

В случае стационар. электромагн. состояние z -ой будет описываться полной волнов. ф-цией:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i/\hbar (Et)}$$

Выражение для плотности вероятн. имеет вид:

$$\frac{dP}{dV} = |\psi(x, y, z, t)|^2 = \psi \psi^* = \psi(x, y, z) \psi^*(x, y, z)$$

$$\text{Т.к. } \psi(t) \psi^*(t) = 1$$

③* (Физический смысл полной энерг. свет. R , её размерн.)

Энергетич. светимость R_{Σ} - физ. величина, числ. равн. энергии ЭМ волн всех частот (длин от 0 до ∞), изл. за ед. времени с ед. площади пов-ти тела. $[Вт/м^2]$

$$R_{\Sigma} = \int_0^{\infty} R_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} R_{\nu} d\nu \quad ; \quad R_{\Sigma} = \frac{dQ}{dS}$$

2 (Задача)

Дано:

А) $T = 3 \text{ K}$

Б) $T = 300 \text{ K}$

В) $T = 3000 \text{ K}$

Г) $T = 10000 \text{ K}$

$\lambda_m = ?$

1) (3-й сдвиг Вина):

$$\lambda_m = \frac{b}{T}$$

Решение

А)	$\lambda = \frac{2,9 \cdot 10^3}{3} = 0,96 \cdot 10^{-3} \text{ м}$	} радиоволны
Б)	$\lambda = \frac{2,9 \cdot 10^3}{300} = 9,6 \text{ м}$	
В)	$\lambda = \frac{2,9 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3} = 0,96 \text{ м}$	
Г)	$\lambda = \frac{2,9 \cdot 10^3}{10000} = 0,29 \text{ м}$	

Билет №10

- ①* (Стационарные состояния, их временная зависимость. Уравнение Шрёдингера для стационарных состояний)

Общее уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$$

①

m - масса частицы

$U = U(x, y, z, t)$ - потенциал. ф-ция гравит. в силовом поле

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в декартовой системе координат

$\hbar = h/2\pi$ - постоянная Планка

3: Уравнение Шрёдингера является основным уравнением нерелятивистской квантовой механики (не может быть выведено из других соотношений)

Свойства уравнения Шрёдингера:

- 1) Релятивистская волновая ф-ция
- 2) Статистическая интерпретация

Стационарные состояния - состояния, в которых наблюдаемые физические величины не изменяются во времени.

Если силовое поле стационарно (потенциал энергии $U = U(x, y, z)$ не зависит от времени) → решение общего уравнения Шрёдингера имеет вид:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \varphi(t)$$

②

Подставив ② → ① и разделив левую и правую части полуз. уравнения на ②, получим:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, y, z) \right] \frac{1}{\Psi(x, y, z)} + U(x, y, z)$$

③

Т.к. левая часть ур-ния ③ зависит только от времени t , а правая - только от координат (x, y, z) , то их можно приравн. одной констан. разделения E (полная энергия частицы) $\rightarrow$ получим диффер. уравнение:

① Временное уравнение:

$$i\hbar \frac{1}{\psi(t)} \frac{d\psi(t)}{dt} = E \quad \left(\text{с решен: } \psi(t) = e^{\frac{i}{\hbar} Et} \right)$$

④

② Координатное уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) + U(x, y, z) \cdot \psi(x, y, z) = E \cdot \psi(x, y, z)$$

⑤

$$\psi(x, y, z) \neq 0$$

Из ур-ния ⑤ получаем $\rightarrow$

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

В случае стационар. ситового поля состояние i -цы будет описываться полной волнов. ф-цией:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i/\hbar (Et)}$$

Выражение для плотности вероятн. имеет вид:

$$\frac{dP}{dV} = |\psi(x, y, z, t)|^2 = \psi \psi^* = \psi(x, y, z) \psi^*(x, y, z)$$

$$\text{Т.к. } \psi(t) \psi^*(t) = 1$$

*
③ (Ур-ние Эйнштейна для фотоэффекта, его физ. смысл)

Т (2-ой з-н Фотоэффекта)

Для данного фотокатода макс. нач. скор. фотоэлектр. зав. от частоты света и не завис. от его интенсивности

$$(ЗСЭ): h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} \rightarrow h\nu = A_{\text{вых}} + mV_{\text{max}}^2/2$$

Ур-ние Эйнштейна для внешн. фотоэффекта

$$\frac{mV_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}} = eU_3$$

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}$$

ν_0 - мин. част. света, при кот. возм. внешн. фотоэф. (завис. от хим. прир. вещ-ва и сост. его пов-ти)

Поглощая квант света, электрон приобретает энергии $h\nu$. При вылете из металла энергии кванта $\bar{e}$ уменьшается на величину $A_{\text{вых}}$ (работа выхода)

Работа выхода $A_{\text{вых}}$ - работа, которую необх. затратить, чтобы удалить $\bar{e}$ из металла.

② (Задача)

Дано:

сделать выв.
об устойчив.
атома

1) (По II з-ну Ньютона):

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r m}$$

2) (соотнош. неопред.): $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \rightarrow$

$$\rightarrow r \cdot mv \geq \hbar/2 \rightarrow r \geq \hbar/2mv$$

$$1) \rightarrow 2) = 2') \quad r \geq \frac{\hbar}{2m} \frac{2\sqrt{\pi\epsilon_0 r m}}{e} \rightarrow \sqrt{r} \geq \frac{\hbar\sqrt{\pi\epsilon_0}}{e\sqrt{m}} \rightarrow r \geq \frac{\hbar^2\pi\epsilon_0}{e^2 m}$$

Решение:

$$r \geq \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 0,13 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

(электрон не может упасть на ядро)

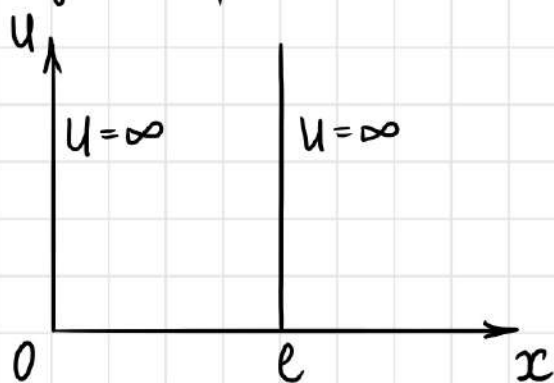
Билет №11

① (Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечными стенками. Квантование энергии. Плотн. вероятности для различных состояний частицы)

Избранные значения E ур. Шрёдингера - собственные значения энергии, а их решения Ψ - собственные функции

Совокупность собств. значений - спектр (сплошн. дискр.)

Одномерная потенциальная яма:



$$U = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ \infty, & \text{при } x < 0, x > l \end{cases}$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$$

$$\Psi(0) = \Psi(l) = 0$$

В области $U = 0$:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad ; \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \rightarrow$$

$$\Psi'' + k^2 \Psi = 0$$

$$\Psi(x) = A \sin(kx + \alpha)$$

$$\Psi(0) = A \sin \alpha \rightarrow \alpha = 0$$

$$\Psi(l) = A \sin kl \rightarrow kl = \pm \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k = \pm \frac{\pi n}{l}; \quad k^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} = \frac{2mE_n}{\hbar^2}$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2me^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- квантов. энергии

E_n - ур-ни энергии

n - кв. числа

Если $n = 1 \rightarrow$ основное состояние

Если $n > 1 \rightarrow$ возбужденное состояние

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2me^2} (2n+1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{me^2} n \rightarrow \frac{\Delta E_n}{E_n} \sim \frac{1}{n}$$

(дискретность энергии убывает при увелич. ном. ур-в.)

①

Подставим $K = \pm \pi n / l$ $\rightarrow$ ①

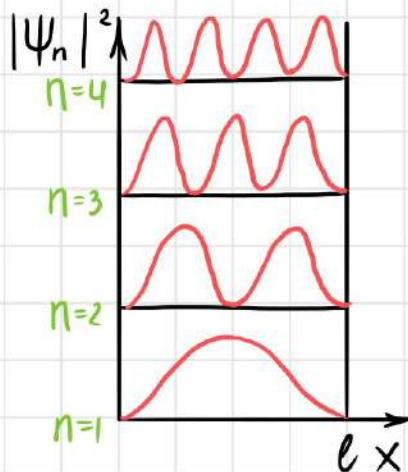
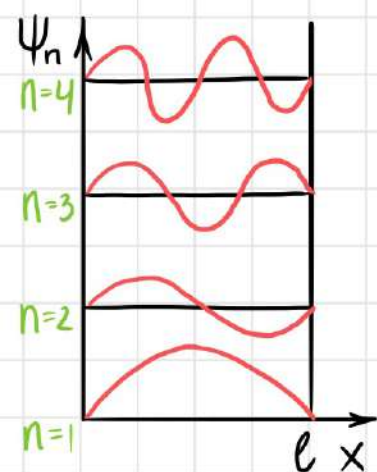
$$\psi_n(x) = A \sin \frac{\pi n x}{l}, \text{ при } \alpha = 0$$

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = 1 \rightarrow A^2 \frac{l}{2} = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ тогда:}$$

$$|\psi_n|^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{\pi n x}{l} - \text{плотность вероятности для различных энерг. уровней}$$

$$P = \int_1^2 |\psi_n|^2 dx - \text{вероятн. обнаружить з-цу внутри некоторого интервала}$$



③* (Волновая ф-ция, её статистический смысл)

Волновая ф-ция Ψ - комплексн. ф-ция, используем. в квант. мех. для описания квант. сост. системы

Волновая ф-ция $\Psi(r, t)$ должна интерпретир. статистически, т.е. она является величиной, кот. позволяет находить все вероятности.

Таким образом, вероятность нахождения частицы в момент времени t с координатами $[x; x+dx]$, $[y; y+dy]$, $[z; z+dz]$ или в объёме $dV = dx dy dz$ можно определить интенс. волновой ф-ции:

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \Psi^* dV$$

Ψ^* - комплексно-сопряжённая ф-ция с Ψ

3: Т.к. Ψ - комплексная ф-ция, а вероятн. должна быть всегда действит. и положит. величиной, то за меру интенс. волнов. ф-ции принимается квадрат её модуля

Физ. смысл Ψ ф-ции: проявляется через плотность вероятности (вероятн. нахожд. т-цы в ед. объёма)
 $dP/dV = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$

Вероятность нахождения частицы в момент времени t в некотором конечном объёме, согласно теореме сложения вероятностей:

$$P = \int P = \int |\Psi|^2 dV$$

② (Задача)

Дано:

$$\lambda_1 = 0,35 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\lambda_2 = 0,54 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\eta = 2$$

$$A_{\text{выл}} = ?$$

1) (Ур-ние Эйнштейна):

$$h\nu = A_{\text{выл}} + E_k \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{hc}{\lambda} = A_{\text{выл}} + \frac{m v_m^2}{2}, \text{ соотв:}$$

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{выл}} + \frac{m v_{m1}^2}{2}; \quad \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{выл}} + \frac{m v_{m2}^2}{2}$$

$$2) v_{m1} = 2 v_{m2}$$

$$2) \rightarrow 1) = 1')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{выл}} + \frac{4 m v_{m2}^2}{2} \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{выл}} + \frac{m v_{m2}^2}{2} \end{array} \right\} \times 4 \rightarrow \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{4hc}{\lambda_2} = -3 A_{\text{выл}} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_{\text{выл}} = \frac{hc}{3} \left[\frac{4}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right]$$

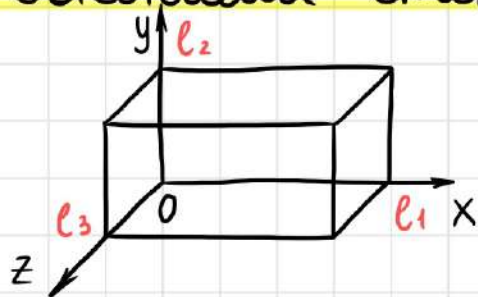
Решение:

$$A_{\text{выл}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3} \left[\frac{4}{0,54 \cdot 10^{-6}} - \frac{1}{0,35 \cdot 10^{-6}} \right] = 3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

Билет №12

① (Частица в 3-х мерной пот. яме с абсол. непрон. стенками. Энерг. спектр частицы. Понятие о вырождении энергет. уровней)

Рассмотрим 3-х мерно-потенц. яму с бескон. высокими стенками



$$K = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2, 0 \leq z \leq l_3\}$$

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{при } (x, y, z) \in K \\ \infty, & \text{при } (x, y, z) \notin K \end{cases}$$

Вне ямы: $\Psi(x, y, z) = 0 \rightarrow \Psi(x, y, z) = \Psi_1(x) \Psi_2(y) \Psi_3(z) \rightarrow$
 $\rightarrow$ ур. Шрёдингера $\rightarrow \Delta \Psi(x, y, z) + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x, y, z) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \Psi_2(y) \Psi_3(z) \frac{d^2 \Psi_1(x)}{dx^2} + \Psi_1(x) \Psi_3(z) \frac{d^2 \Psi_2(y)}{dy^2} +$$

$$+ \Psi_1(x) \Psi_2(y) \frac{d^2 \Psi_3(z)}{dz^2} = - \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi_1(x) \Psi_2(y) \Psi_3(z) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\Psi_1(x)} \frac{d^2 \Psi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{\Psi_2(y)} \frac{d^2 \Psi_2(y)}{dy^2} + \frac{1}{\Psi_3(z)} \frac{d^2 \Psi_3(z)}{dz^2} = - \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \Psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_1 \Psi_1(x) = 0 \\ \frac{d^2 \Psi_2(y)}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_2 \Psi_2(y) = 0 \\ \frac{d^2 \Psi_3(z)}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_3 \Psi_3(z) = 0 \end{cases}$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = E$$

$$\Psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin \frac{\pi n_1 x}{l_1} \sin \frac{\pi n_2 y}{l_2} \sin \frac{\pi n_3 z}{l_3}$$

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left\{ \left[\frac{n_1}{l_1} \right]^2 + \left[\frac{n_2}{l_2} \right]^2 + \left[\frac{n_3}{l_3} \right]^2 \right\}, \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l \rightarrow E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m l^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Для кубической ямы, если $n_1 = n_2 = n_3 = 1 \rightarrow$ энерг. ур-ни являются невырожд. (все ост. - вырождены)
 При $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ - основное состояние

*
 ③ (Работа выхода электрона из металла)

Т (2-ой з-н Фотоэффекта)

Для данного фотокатода макс. нач. скор. фотоэлектр. зав. от частоты света и не завис. от его интенсивности

$$(ЗСЭ): h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} \rightarrow h\nu = A_{\text{вых}} + mV_{\text{max}}^2/2$$

- ур-ние Эйнштейна для внешн. фотоэффекта

$$\frac{mV_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}} = eU_z$$

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}$$

ν_0 - мин. част. света, при кот. возм. внешн. фотоэф. (завис. от хим. прир. вещ-ва и сост. его пов-ти)

Помогающий квант света, электрон приобретает энергии $h\nu$. При вылете из металла энергии кажд. e^- уменьшается на величину $A_{\text{вых}}$ (работа выхода)

Работа выхода $A_{\text{вых}}$ - работа, которую необх. затратить, чтобы удалить e^- из металла.

② (Задача):

Дано: 1) (длина волны Комптона):

$$\lambda_B = \lambda_K$$

$$\lambda_K = \frac{h}{m_0 c}$$

2) (длина волны Дебройля):

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_K}}$$

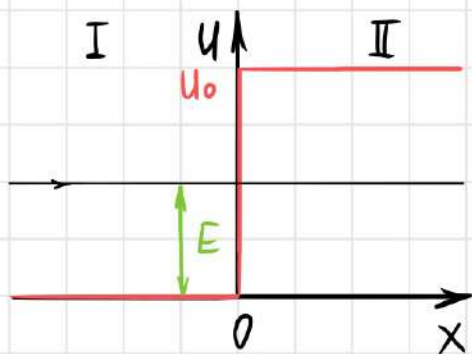
$$2) \rightarrow 1) = 1) \quad \lambda_B = \lambda_K \rightarrow \sqrt{2m_0 E_K} = m_0 c \rightarrow E_K = \frac{m_0 c^2}{2}$$

Решение:

$$E_K = \frac{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{2} = 4,1 \cdot 10^{-14}$$

Бишет №13

① (Движение микрочаст. в области одног. пот. порога. Надбарьерное отражение э-нов в случае низкого порога)



$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ U_0, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

(Ур-ние Шр. в I): $\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1 = 0$

(Ур-ние Шр. в II): $\frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2} \psi_2 = 0$

① При $E < U_0$ (высокий порог)

$$K_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}; \quad K_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E)}$$

$$\psi_1'' + K_1^2 \psi_1 = 0; \quad \psi_2'' - K_2^2 \psi_2 = 0$$

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(K_2 x) + B_2 \exp(-K_2 x)$$

Примем: $A_2 = 0$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0); \quad \psi_1'(0) = \psi_2'(0)$$

$$A_1 + B_1 = B_2 \rightarrow ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = -K_2 B_2 \rightarrow A_1 = 1$$

$$B_1 = \frac{K_1 - iK_2}{K_1 + iK_2}; \quad B_2 = \frac{2K_1}{K_1 + iK_2}$$

$$\psi_1(x) = \exp(ik_1 x) + \frac{K_1 - iK_2}{K_1 + iK_2} \exp(-ik_1 x), \quad \text{при } x < 0$$

$$\psi_2(x) = \frac{2K_1}{K_1 + iK_2} \exp(-K_2 x), \quad \text{при } x > 0$$

$$R = \frac{J_{\text{отр}}}{J_{\text{пад}}}; \quad D = \frac{J_{\text{прох}}}{J_{\text{пад}}}$$

$$R = \left| \frac{B_1}{1} \right|^2 = \left| \frac{K_1 - iK_2}{K_1 + iK_2} \right|^2 = 1$$

$$R + D = 1 \rightarrow D = 0$$

J - интенсив. волны де-Бройля

R - коэффци. отражения

D - коэффци. прохождения

Плотность вероятн. обнаруж. τ -цы под порогом

$$W_2(x) = \frac{dP}{dx} = |\Psi_2(x)|^2 = \left| \frac{2K_1}{K_1 + iK_2} \right|^2 \exp(-2K_2 x) = \frac{4K_1^2}{K_1^2 + K_2^2} \cdot \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} x\right]$$

② При $E > U_0$ (низкий порог)

$$\Psi'' + K^2 \Psi = 0$$

$$\Psi_1(x \leq 0) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x) \rightarrow K_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$$\Psi_2(x \geq 0) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \rightarrow K_2 = \sqrt{2m(E - U_0)/\hbar^2}$$

$$B_2 = 0$$

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) \rightarrow A_1 + B_1 = A_2$$

$$\Psi_1'(0) = \Psi_2'(0) \rightarrow A_1 K_1 + B_1 K_1 = A_2 K_2 \rightarrow A_1 = 1$$

$$B_1 = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}; \quad A_2 = \frac{2K_1}{K_1 + K_2}$$

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left[\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right]^2 = \left[\frac{1 - \sqrt{1 - U_0/E}}{1 + \sqrt{1 - U_0/E}} \right]^2 \quad - \text{коэфф. отражения}$$

$$R + D = 1 \rightarrow D = 1 - R = \frac{4K_1 K_2}{(K_1 + K_2)^2} = \frac{4\sqrt{1 - U_0/E}}{(1 + \sqrt{1 - U_0/E})^2} \quad - \text{коэфф. прохождения}$$

$$R > 0 \rightarrow \Psi_1(x) = \exp(ik_1 x) + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \exp(-ik_1 x), \quad \text{при } x < 0$$

$$\Psi_2(x) = \frac{2K_1}{K_1 + K_2} \exp(ik_2 x), \quad \text{при } x \geq 0$$

Существует отличная от нуля вероятн. отражения τ -цы от низкого пот. порога $\rightarrow$ надбарьерное отражение. Оно объясняется наличием у τ -цы волновых свойств. Макроскопическая τ -ца при прохождении через низкий потенц. порог не испытыв. отражения, в области порога лишь уменьшается её кинет. энергия.

③* (Ур-ние Эйнштейна для фотоэффекта, его физ. смысл)

Т (2-ой з-н Фотоэффекта)

Для данного фотокатода макс. нач. скор. фотоэлектр. зав. от частоты света и не завис. от его интенсивности

$$(ЗСЭ): h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} \rightarrow h\nu = A_{\text{вых}} + m\nu_{\text{max}}^2/2$$

- ур-ние Эйнштейна для внешн. фотоэффекта

$$\frac{m\nu_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}} = eU_3$$

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}$$

ν_0 мин. част. света, при кот. возм. внешн. фотоэф. (завис. от хим. прир. вещ-ва и сост. его пов-ти)

Поглощая квант света, электрон приобретает энергии $h\nu$. При вылете из металла энергии кажд. e уменьшается на величину $A_{\text{вых}}$ (работа выхода)

Работа выхода $A_{\text{вых}}$ - работа, которую необх. затратить, чтобы удалить e из металла.

② (Задача)

Дано:

одноэлектрон. пот. яма

$$n = 3 \rightarrow n = 2$$

$$E = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

a - ? (ширина)

$$1) \Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (2n+1) \rightarrow$$

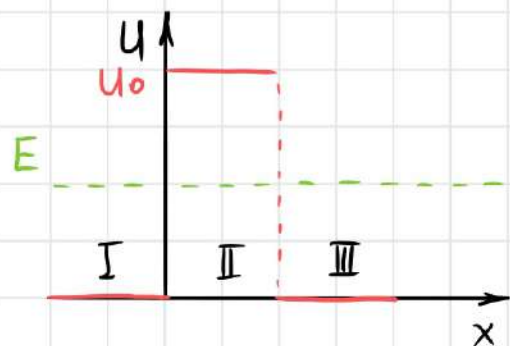
$$\rightarrow E = E_3 - E_2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (4+1) \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2 = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2m_0 E} \rightarrow a = \pi \hbar \sqrt{\frac{5}{2m_0 E}}$$

Решение:

$$a = 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \sqrt{\frac{5}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} = 1,37 \cdot 10^{-9}$$

① (Проникновение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп)



Для I и III: $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$

Для II: $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0$

$\psi_2 = A_2 \exp(\beta x) + B_2 \exp(-\beta x)$ для II

$\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$

$\psi = e^{\lambda x}$ для I и III

$\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0$, $\lambda = \pm i\alpha$, при $\alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\psi_1 = A_1 \exp(i\alpha x) + B_1 \exp(-i\alpha x)$ для I

$A_1 = 1 \rightarrow B_3 = 0$

$\psi_3 = A_3 \exp(i\alpha x) + B_3 \exp(-i\alpha x)$ для III

$\psi_1(0) = \psi_2(0)$

$\psi_2(l) = \psi_3(l)$

$\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$; $\psi_2'(l) = \psi_3'(l)$

$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$; $D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$; ① и ② $\rightarrow D = |A_3|^2 \rightarrow$

$\rightarrow D \approx \exp(-2\beta l) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)l}\right)$

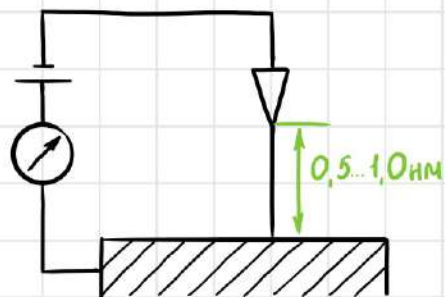
$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right)$

Туннельный эффект - проникновение частицы через потенциальный барьер, высота которого превышает энергию частицы (При прохождении через барьер полная энергия E не изменяется)

Туннельный эффект объясняет явления:

- ① Холодная эмиссия электронов
- ② Альфа-распад радиоактивных ядер
- ③ Контактная разность потенциалов
- ④ Сканирующий туннельный микроскоп

Сканирующий туннельный микроскоп (СТМ):



Принцип работы СТМ заключается в сканировании проводящего образца на характеристическое расстояние z подвод. тонкое металл. острие (иголка). При приложении между образцом и иглой разности потенциалов $U \sim 0,1 \dots 1,0 \text{ В}$ в цепи появляется эл. ток, обусловленный туннелированием электронов. Сила туннельного тока составл. $I_T \sim 1 \dots 10 \text{ нА}$

Режимы работы СТМ:

- 1) Режим постоянной высоты (острие иглы перемещ. в горизонт. пл-ти над исслед. пов-тью $\rightarrow$ изменяется туннельный ток $\rightarrow$ определ. рельеф пов-ти образца)
- 2) Режим постоянного тока (использ. система обр. связи, которая поддерживает постоянным ток туннел. за счёт вертик. перемещения иглы $\rightarrow$ определ. рельеф пов-ти образца)
- *
3) (Помощь способн. тела при темп. излуч. АЧТ, её физич. смысл и размерность)

Помощь спос. тела A_ν - безразм. величина, показ., какая доля энергии ЭМ волн с частотами $[\nu; \nu + d\nu]$ пад. на пов-ть тела, помощ. им:

$$A_\nu = \frac{dE_{\text{полн}}}{dE_{\text{пад}}} \ll 1$$

Абсолютно-Черное Тело (АЧТ) - тело, полн. помощ. пад. на него излучение, независ. от напр. пад. на него изл., его спектр. состава и поляризации, ничего не отраж. и не пропускает: $A_\nu = 1$

Серое тело - тело, помощ. способн. которого меньше 1 и не зависит от частоты (дл. волны) света, напр. его распр. и поляризации

② (Задача)

Дано:

$$\Delta E = 200 \text{ эВ} =$$

$$= 320 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$\eta = 2,0$$

$$\lambda_{B1} = ?$$

1) (длина волны Дебройля):

$$\lambda_B = h/p = h/\sqrt{2m_0 E}, \text{ соотв:}$$

$$\lambda_{B1} = h/\sqrt{2m_0 E_1}$$

$$\lambda_{B2} = h/\sqrt{2m_0 (E_1 + \Delta E)}$$

$$2) \lambda_{B2} / \lambda_{B1} = 1/\eta = 1/2 \rightarrow \lambda_{B1} = 2 \lambda_{B2}$$

$$2) \rightarrow 1) = 1) \quad \frac{2h}{\sqrt{2m_0 (E_1 + \Delta E)}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 8m_0 E_1 = 2m_0 E_1 + 2m_0 \Delta E \rightarrow E_1 = \Delta E/3$$

$$1) \rightarrow 1) = 1) \quad \lambda_{B1} = \frac{h \sqrt{3}}{\sqrt{2m_0 \Delta E}}$$

Решение:

$$\lambda_{B1} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 320 \cdot 10^{-19}}} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

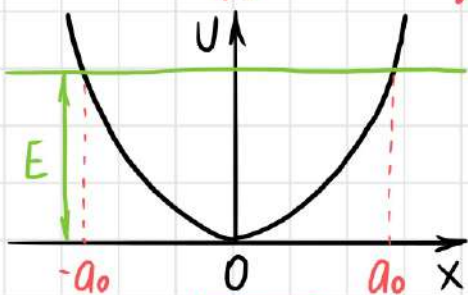
Бишет №15

① (Ур-ние Шрёдингера для гарм. осциллятора, анализ его решений. Энерг. спектр гармон. осцилл.)

Гармонический осциллятор — система, способная соверш. гармонические колебания

Рассмотрим одномерн. ГО, соверш. колебания вдоль оси x под действием возврац. квазиупругой силы $F_x = -kx$.
Выражение для потенц. энергии такого ГО имеет вид:
$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m_0 \omega_0^2 x^2}{2}$$

 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$ — собст. частота классического ГО



Пусть γ -ца, обладающая полн. эн. E совершает калед. в силов. поле между стенками потенц. ямы внутри отр. $[-a_0; a_0]$ — находим амплитуду колебаний a_0 :

$$a_0 = \sqrt{\frac{2E}{m_0 \omega_0^2}}$$

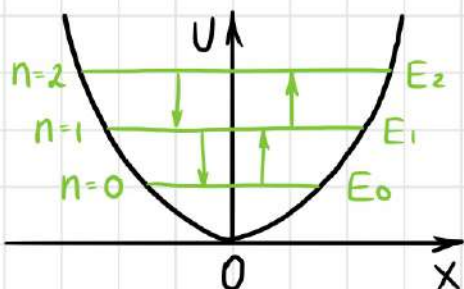
$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left(E - \frac{m_0 \omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0$$
 — ур-ние Шрёдингера

Введём: $\eta = \frac{2E}{\hbar \omega_0}$; $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega_0}}$; $\xi = \frac{x}{x_0}$ →

$$\rightarrow \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + (\eta - \xi^2) \psi = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 2n+1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\rightarrow E_n = \hbar \omega_0 \left[n + \frac{1}{2} \right] \quad \text{при} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(закон квантов. энергии ГО)



Уровни энергии ГО являются эквидистантными → расположены на одинаковом энергет. расст: $\Delta E = \hbar \omega_0$ друг от друга

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 - \text{нулевые колебания (при } n=0)$$

Поместим ГК в точку, явл. положением равновесия ГО, соверш. колебания по з-ну $x = x_0 \cos \omega_0 t$, соотв.

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{a_0^2 \cos^2 \omega_0 t} = \sqrt{\frac{1}{2} a_0^2} - \text{неопределенность координаты}$$

$$E = \frac{1}{2} m_0 a_0^2 \omega_0^2 - \text{связь амплитуды колебаний } a_0 \text{ с энергией } E$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{E}{m_0 \omega_0^2}}$$

Аналогично для неопредел. импульса имеем:

$$\Delta p = \sqrt{\overline{p^2}} = \sqrt{m_0^2 a_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t} = \sqrt{\frac{1}{2} m_0^2 a_0^2 \omega_0^2} = \sqrt{m_0 E}$$

Подставляем Δx и Δp в соотн. неопр. $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \rightarrow E \geq \hbar \omega_0 / 2$, т.е. миним. знач. энергии гарм. осцил:

$$E_0 = \hbar \omega_0 / 2$$

Волновые ф-ции ГО имеют следующий вид:

$$\Psi_n(\xi) = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots$$

C_n - коэфф., полуз. из условия нормир. волнов. ф-ции

$$H_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} - \text{полином Чебышева-Эрмита } n\text{-го порядка}$$

$$H_{n+1}(\xi) - 2\xi H_n(\xi) + 2n H_{n-1}(\xi) = 0, \text{ где } H_0(\xi) = 1 \text{ и } H_1(\xi) = 2\xi$$

Волновые ф-ции ортонорм. $\rightarrow$ удовлетв. условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^*(x) \Psi_m(x) dx = \delta_{mn} \quad \delta_{mn} - \text{символ Кронекера}$$

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 \sqrt{\pi}}} \exp \left[-\frac{x^2}{2x_0^2} \right]$$

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0 \sqrt{\pi}}} \frac{2x}{x_0} \exp \left[-\frac{x^2}{2x_0^2} \right]$$

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0 \sqrt{\pi}}} \left[\frac{4x^2}{x_0^2} - 2 \right] \exp \left[-\frac{x^2}{2x_0^2} \right]$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{\pi \sqrt{a_0^2 - x^2}} - \text{плотность вероятности обнаружения классического осциллятора}$$

③* (Надбарьерное отраж. кв. з-цы, его физик. причина)

Рассмотрим случай низкого потенц. порога:

При $E > U_0$ (низкий порог)

$$\Psi'' + K^2 \Psi = 0$$

$$\Psi_1(x \leq 0) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x) \rightarrow K_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$$\Psi_2(x \geq 0) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \rightarrow K_2 = \sqrt{2m(E-U_0)/\hbar^2}$$

$$B_2 = 0$$

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) \rightarrow A_1 + B_1 = A_2$$

$$\Psi_1'(0) = \Psi_2'(0) \rightarrow A_1 K_1 + B_1 K_1 = A_2 K_2 \rightarrow A_1 \equiv 1$$

$$B_1 = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}; \quad A_2 = \frac{2K_1}{K_1 + K_2}$$

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U_0/E}}{1 + \sqrt{1 - U_0/E}} \right)^2 \quad - \text{коэфф. отражения}$$

$$R + D = 1 \rightarrow D = 1 - R = \frac{4K_1 K_2}{(K_1 + K_2)^2} = \frac{4\sqrt{1 - U_0/E}}{(1 + \sqrt{1 - U_0/E})^2} \quad - \text{коэфф. прохода}$$

$$R > 0 \rightarrow \Psi_1(x) = \exp(ik_1 x) + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \exp(-ik_1 x), \quad \text{при } x < 0$$

$$\Psi_2(x) = \frac{2K_1}{K_1 + K_2} \exp(ik_2 x), \quad \text{при } x \geq 0$$

Существует отличие от нуля вероятн. отражения з-цы от низкого пот. порога $\rightarrow$ надбарьерное отражение. Оно объясняется наличием у з-ц волновых свойств. Макроскопическая з-ца при прохождении через низкий потенц. порог не испытыв. отражения, в области порога лишь уменьшается её кинет. энергия.

② (Задача)

Дано:

$$\hat{\varphi} = \varphi$$

$$\hat{L}_z = \hbar \partial / \partial \varphi$$

Возможн. одн.

измерен. - ?

1) (Рассмотрим одновремен. действия):

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{\varphi}, \hat{L}_z] = \hat{\varphi} \hat{L}_z - \hat{L}_z \hat{\varphi}, \text{ соотв:}$$

$$\hat{\varphi}(\hat{L}_z \psi) - \hat{L}_z(\hat{\varphi} \psi) = \varphi \left[-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right] + i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} (\varphi \psi) = i\hbar \psi,$$

соотв: $[\hat{\varphi}, \hat{L}_z] = i\hbar \neq 0$, значит,
нельзя одновр. измерить φ и L_z

Бишет № 16

① (Основные постулаты кв. мех. Представление физич. величин операторами. Гамильтониан кв. системы как оператор полной энергии)

Основные постулаты квантовой механики:

- ① Каждая динамич. переменная предст. определ. линейным оператором
- ② Операторы, предст. динамические переменные, должны быть самосопряж. операторами.
- ③ Если система наход. в сост. Ψ , то вероятн. того, что при измерении динам. перем. $\hat{L}$ будет получено численное значение L_n , равна $|C_n|^2$, где:
 $\hat{L}U_n = L_n U_n$; $\Psi = \sum_n C_n U_n$

Оператор - пр-ю, с помощью которого каждой ф-ции из некоторого множ-ва ф-ций может соотв. ф-ция из того же или некот. другого множ-ва.

$\hat{L}$ - оператор

$$U = \hat{L}u \rightarrow v = \frac{du}{dx} = u'$$
$$\hat{L} = d/dx$$

Линейные операторы:

Оператор $\hat{L}$ называется линейным, если для любых ф-ций U_1 и U_2 из рассматр. класса ф-ций и для любых постоянных чисел C_1 и C_2 имеет место:

$$\hat{L}(C_1 U_1 + C_2 U_2) = C_1 \hat{L}U_1 + C_2 \hat{L}U_2$$

Сумма и произведение векторов:

Если для любой ф-ции U имеют место рав:

$$\hat{C}U = \hat{A}U + \hat{B}U; \quad \hat{C}_1 U = \hat{A}_1 U - \hat{B}_1 U; \quad \hat{C}_2 U = \hat{A}_2 (\hat{B}_2 U),$$

то операторы $\hat{C}, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ назыв. соотв. суммой операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, разностью опер. $\hat{A}_1$ и $\hat{B}_1$ и произвед. опер. $\hat{A}_2 \hat{B}_2$

$$\rightarrow \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}; \quad \hat{C}_1 = \hat{A}_1 - \hat{B}_1; \quad \hat{C}_2 = \hat{A}_2 \hat{B}_2$$

Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ назыв. коммутирующими, если их произв. не зависит от порядка сомножит., т.е:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

Если для 2-х опер. $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеет место равенство $\hat{A}\hat{B} = -\hat{B}\hat{A}$, то эти операторы назыв. антикоммутирующ.

$$\hat{L}u = \lambda u$$

Если ф-ция u непрер., однозначна и конечна, то она называется собств. ф-цией оператора $\hat{L}$, принадлежит собственному значению λ оператора $\hat{L}$. Совокупность собств. значений оператора называется его спектром.

Оператор $\hat{L}$ назыв. самосоприм. (эрмитовым), если для любых 2-х ф-ций u и v имеет место равенство:

$$\int v^* \hat{L}u d\tau = \int u \hat{L}^* v^* d\tau$$

Операторы основных физических величин:

① Оператор координаты:

$$\hat{x}\psi = x\psi; \hat{y}\psi = y\psi; \hat{z}\psi = z\psi$$

В символической операторной форме:

$$\hat{x} = x; \hat{y} = y; \hat{z} = z \rightarrow \hat{r} = \bar{e}_x \hat{x} + \bar{e}_y \hat{y} + \bar{e}_z \hat{z} \quad \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z - \text{ед. орты коорд. осей}$$

② Оператор импульса:

В символической операторной форме:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}; \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \hat{p} = \bar{e}_x \hat{p}_x + \bar{e}_y \hat{p}_y + \bar{e}_z \hat{p}_z \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \nabla$$

$$\text{где: } \nabla = \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

(Соотн. класс. мех.): $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z$

$$\rightarrow \hat{p}^2 = (\hat{p}_x)^2 + (\hat{p}_y)^2 + (\hat{p}_z)^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \rightarrow \hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta$$

③ Оператор момента импульса:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow L_x = y p_z - z p_y ; L_y = z p_x - x p_z ; L_z = x p_y - y p_x$$

$$\hat{L}_x = \hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = \hat{z} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_z = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{L}_z = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x \hat{L}_x + \hat{L}_y \hat{L}_y + \hat{L}_z \hat{L}_z$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} ; \hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{— угловая часть опер. Лапласа в сф. сист. коорд.}$$

④ Операторы энергии:

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} \rightarrow \hat{E}_k = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta$$

$$\hat{U} \psi = U \psi \rightarrow \hat{U} = U \quad \text{— оператор потенциальной энергии}$$

$$\hat{H} = \hat{E}_k + \hat{U} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + U = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + U(x, y, z) \quad \text{— оператор полн. эн. (гамильтониан)}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad \text{— уравнение Шрёдингера}$$

③ (Красная граница фотоэффекта, её физический см.)

Красная граница фотоэфф. — миним. частота $\nu_{\min}$ (макс. длина волны $\lambda_{\max}$), ниже (выше) которой свет любой интенс. не вызывает фотоэффекта.

$$h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} \quad \text{— ур-ние Эйнштейна} \quad h\nu \text{ — энергия фот.}$$

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}} \quad \text{— условие начала фотоэффекта}$$

$$\rightarrow \nu_0 = A_{\text{вых}} / h \quad \text{— кр. граница фотоэфф. по частоте}$$

$$\rightarrow \lambda_0 = hc / A_{\text{вых}} \quad \text{— кр. граница фотоэфф. по длине волны}$$

(кр. граница фотоэфф. зависит только от вида вещ. и степени обработки его пов-ти и не зависит от хар-к излучения)

② (Задача)

Дано:

двуш. пот. яма
 m

a

$E_1, E_2, E_3, E_4 - ?$

1) (Для квадр. 2-мерной пот. ямы):

$$E_{n_1, n_2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (n_1^2 + n_2^2), \text{ при } n_1, n_2 = 1, 2, 3 \dots$$

I уровень: $E_{11} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (1+1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_0 a^2}$

II уровень: $E_{12} = E_{21} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (1+4) = \frac{5}{2} \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_0 a^2}$

III уровень: $E_{22} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (4+4) = 4 \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_0 a^2}$

IV уровень: $E_{13} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (1+9) = 5 \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_0 a^2}$

Билет № 17

- *
① (Основные постулаты кв. механики. Вероятностный характер рез-тов измерений в кв. мех. Вычисление средн. значений физ. величин в квант. системах)

Основные постулаты квантовой механики:

- ① Каждая динамич. переменная предст. определ. линейным оператором
- ② Операторы, предст. динамические переменные, должны быть самосопряж. операторами.
- ③ Если система наход. в сост. Ψ , то вероятн. того, что при измерении динам. перем. $\hat{L}$ будет получено численн. значение L_n , равна $|C_n|^2$, где:
 $\hat{L}U_n = L_n U_n$; $\Psi = \sum_n C_n U_n$

Вероятн. характер рез-тов измер. в квант. механ:

Волновая ф-ция Ψ - комплексн. ф-ция, используем. в квант. мех. для описания квант. сост. системы

Волновая ф-ция $\Psi(r, t)$ должна интерпретир. статистически, т.е. она является величиной, кот. позволяет находить все вероятности.

Таким образом, вероятность нахождения частицы в момент времени t с координатами $[x; x+dx]$, $[y; y+dy]$, $[z; z+dz]$ или в объёме $dV = dx dy dz$ можно определить интенс. волновой ф-ции:

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \Psi^* dV$$

Ψ^* - комплексно-сопряжённая ф-ция с Ψ

3: Т.к. Ψ - комплексная ф-ция, а вероятн. должна быть всегда действит. и положит. величиной, то за меру интенс. волнов. ф-ции принимается квадрат её модуля

Физ. смысл Ψ ф-ции: проявляется через плотность вероятности (вероятн. нахожд. τ -цы в ед. объёма)
 $dP/dV = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$

Вероятность нахождения частицы в момент времени t в некотором конечном объёме, согласно теореме сложения вероятностей:
 $P = \int P = \int |\Psi|^2 dV$

Вычисление средних значений динам. переменных
 $\langle L \rangle = \sum_n L_n |C_n|^2$ - в теории вероятностей

Среднее значение динамической перем., представл. оператором $\hat{L}$, в сост., характер. волнов. ф-цией Ψ :
 $\langle L \rangle = \int \Psi^* \hat{L} \Psi d\tau$

③ (Физический смысл пост. Планка, её размерность)

Постоянная Планка h - коэфф., связывающий величину энергии кванта ЭМ изл. с его част. $[\Delta E / \Gamma_4]$

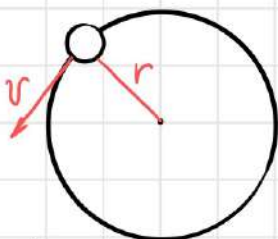
Квант - порция ЭМ энергии

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = h\nu \\ \varepsilon = \hbar\omega \end{array} \right\} \rightarrow \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \begin{array}{l} h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} - \text{пост. Планка} \\ \hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} - \text{пост. Дирака} \end{array}$$

② (Задача)

Дано:

n -ш. кв. τ .
 $\lambda_5 - ?$



1) (длина волны Дебройля):

$$\lambda_5 = h/p = h/m_0 v = 2\pi\hbar/m_0 v$$

$$2) (II_3 \text{ и } H): \frac{m_0 v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- условие вращения e^- по круговой орбите

$$3) mvr = n\hbar - \text{ф-ла Бора квантов. мом. имп. } e^-$$

$$3) \rightarrow 2) = 2')$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2} \quad - \text{ радиус допустим. орбит}$$

$$2' \rightarrow 3' = 3' \quad v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \quad - \text{ значение скор. } \bar{v} \text{ на } n\text{-й стационарной орбите}$$

$$3' \rightarrow 1' = 1' \quad \lambda_B = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2 n}{m_0 e^2}$$

$$4) \ell = 2\pi r$$

$$2', 1' \rightarrow 4' = 4' \quad \ell = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2} = n \lambda_B \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{уклад. целое чис.} \\ \text{дл. волн де Бройля} \end{array} \right\}$$

Бишет № 18

① (Условия возм. одновремен. измерен. разных мех. величин в квантов. механике. Соотнош. неопредел. Гейзенберга)

Оператор - пр-ю, с помощью которого каждой ф-ции из некоторого множ-ва ф-ций может соотв. ф-ция из того же или некот. другого множ-ва.

$\hat{L}$ - оператор

$$\hat{L}u \rightarrow v = \frac{du}{dx} = u'$$

Линейные операторы:

Оператор $\hat{L}$ называется **линейным**, если для любых ф-ций u_1 и u_2 из рассматр. класса ф-ций и для любых постоянных чисел c_1 и c_2 имеет место:

$$\hat{L}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \hat{L}u_1 + c_2 \hat{L}u_2$$

Сумма и произведение векторов:

Если для любой ф-ции u имеют место рав:
 $\hat{C}u = \hat{A}u + \hat{B}u$, $\hat{C}_1 u = \hat{A}_1 u - \hat{B}_1 u$, $\hat{C}_2 u = \hat{A}_2 (\hat{B}_2 u)$, то операторы $\hat{C}$, $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$ назыв. соотв. суммой операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, разностью опер. $\hat{A}_1$ и $\hat{B}_1$ и произвед. опер. $\hat{A}_2 \hat{B}_2$
 $\rightarrow \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 - \hat{B}_1$, $\hat{C}_2 = \hat{A}_2 \hat{B}_2$

3: **Произведение операторов некоммутативно** $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ назыв. **коммутирующими**, если их произв. не зависит от порядка сложит., т.е:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

Если для 2-х опер. $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеет место равенство $\hat{A}\hat{B} = -\hat{B}\hat{A}$, то эти операторы назыв. **антикоммутирующ.**

$$[\hat{A}, \hat{B}]_- = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad - \text{коммутатор операторов}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad - \text{антикоммутатор операторов}$$

Если две разные физ. величины A и B могут быть одновременно точно измерены, то соотв. им операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ должны быть коммутирующими.

Т (Соотношение неопредел. I):

При наличии у микрогастцы волновых свойств, суу связь (соотношения) между неопределённостями координат и соответствующими неопределённостями компонент импульса гастцы:

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2 \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar/2 \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar/2 \end{cases}$$

Т (Соотношение неопредел. II):

Определяет связь между промен. времени Δt суу системы (гастцы) и неопр. энергии ΔE этой сист. в данном состоянии (связь между неопределённостью в измерении энергии за промежуток врем. измерен.)

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \rightarrow \Delta E \Delta t \geq \hbar$$

③* (Физический смысл полной энерг. свет. R , её размерн.)

Энергетич. светимость $R_{\text{э}}$ - физ. величина, чис. равн. энергии ЭМ волн всех частот (длин от 0 до ∞), изд. за ед. времени с ед. площади пов-ти тела. $[Bт/м^2]$

$$R_{\text{э}} = \int_0^{\infty} r_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} r_{\nu} d\nu ; R_{\text{э}} = \frac{d\Phi}{ds}$$

② (Задача)

Дано:

m
 $l = 10^{-15} \text{ м}$
 $E_k = ?$

1) (Соотнош. неопред.) : $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \rightarrow l \Delta p_x \geq \hbar/2$

2) (Для релятив. гастцы) : $p_{\text{min}} = (1/c) \sqrt{E_k (E_k + 2m_0 c^2)}$

$$2) \rightarrow 1) = 1) \quad \frac{l^2}{c^2} E_k (E_k + 2m_0 c^2) = \frac{\hbar^2}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k - (\hbar c / 2l)^2 = 0 \rightarrow$$

$$E_k = -m_0 c^2 \pm c \sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{\hbar^2}{4e^2}}, \text{ соотв.}$$

$$E_{k \min} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{\hbar^2}{4e^2}} - m_0 c^2$$

Решение:

$$\begin{aligned} E_{k \min} &= 3 \cdot 10^8 \sqrt{(9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8)^2 + \left(\frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-15}} \right)^2} - 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = \\ &= 1,57 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} \end{aligned}$$

Билет № 19

①* (Корпуск.-волнов. дуализм изл. Эффект Комптона)

Фотоэффект - процессы поглощения фотона квант. сист.

- ① Внутренний [образов. в паров. пары электрон-дырка]
- ② Внешний [эмиссия e^- с пов. металла]

Фотоэл. эффект - явление вырывания e^- из вещ-ва при освещении его светом

e^- - фотоэлектроны, создающие фотопоток.

Корпуск.-волнов. дуал. - проявление ТЦ св-в частиц и волн.
Чем ↓ длина волны → КВД проявляется ↑

$$E = mc^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow m_0 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{фотон в покое} \\ \text{не существует} \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\epsilon}{c} \right)^2 - p^2 = (m_0 c^2)^2 = 0 \rightarrow \epsilon = pc$$

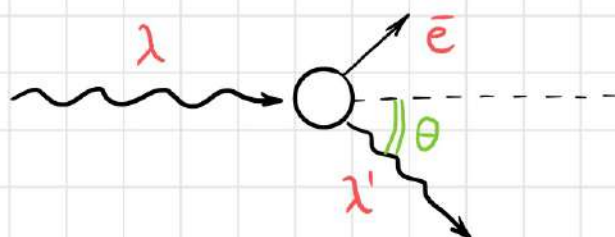
$$p = \frac{\epsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \rightarrow \bar{p} = \hbar k, \text{ где } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ - длина волны де Бройля.

Волновая природа света: интерф.; дифф.; поляриз.

Корпуск. природа света: фотоэффект; эффект Комптона

Эффект Комптона - изменение длин. волны рентг. изл. при его рассеянии вещ-вом, содерж. лёгкие атомы



$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = 2 \lambda_K \sin^2(\theta/2)$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_K (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda_K = \frac{h}{m_e c} \quad - \text{Комптон. длина волны электрона}$$

Эффект Комптона объясняется упругим рассеян. фотонов на свободных электронах вещ-ва. Часть имп. фотон передает $e^- \rightarrow$ ↓ энергии фотона и ↑ длина в.

Пусть $\epsilon_\varphi, \bar{p}_\varphi$ и $\epsilon'_\varphi, \bar{p}'_\varphi$ — энергия и имп. фотона до и после рассеяния

$$\epsilon_0 = m_0 c^2 ; p_0 = 0$$

$$\epsilon_e ; \bar{p}_e$$

$$(3C3) : \epsilon_\varphi + \epsilon_0 = \epsilon'_\varphi + \epsilon_e$$

$$(3C4) : \bar{p}_\varphi = \bar{p}'_\varphi + \bar{p}_e$$

$$\epsilon_e = \epsilon_\varphi + \epsilon_0 - \epsilon'_\varphi$$

$$\bar{p}_e = \bar{p}_\varphi - \bar{p}'_\varphi$$

$$\left(\frac{\epsilon_e}{c}\right)^2 - \bar{p}_e^2 = \frac{(\epsilon_\varphi - \epsilon'_\varphi + \epsilon_0)^2}{c^2} - (\bar{p}_\varphi - \bar{p}'_\varphi)^2$$

$$\left(\frac{\epsilon}{c}\right)^2 - \bar{p}^2 = inv = m_0^2 c^2$$

$$\left(\frac{\epsilon_e}{c}\right)^2 - \bar{p}_e^2 = \left(\frac{\epsilon_0}{c}\right)^2 ; \left(\frac{\epsilon_\varphi}{c}\right)^2 = \bar{p}_\varphi^2 ; \left(\frac{\epsilon'_\varphi}{c}\right)^2 = \bar{p}'_\varphi^2$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \frac{\epsilon_\varphi \epsilon'_\varphi}{c^2} + \frac{\epsilon'_\varphi \epsilon_0}{c^2} - \frac{\epsilon_\varphi \epsilon_0}{c^2} - \bar{p}_\varphi \bar{p}'_\varphi = 0$$

$$\epsilon = \hbar \omega \rightarrow \frac{\hbar^2 \omega \omega'}{c^2} + \hbar \omega' m_0 - \hbar \omega m_0 - \hbar^2 k k' \cos \theta = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} ; k' = \frac{\omega'}{c} = \frac{2\pi}{\lambda'} ; \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{h^2}{\lambda \lambda'} + \frac{h}{\lambda'} m_0 c - \frac{h}{\lambda} m_0 c - \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta = 0$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = \lambda_k (1 - \cos \theta)$$

③* (Надбарьерное отраж. кв. г-цы, его физик. причина)

Рассмотрим случай низкого потенци. порога:

При $E > U_0$ (низкий порог)

$$\Psi'' + K^2 \Psi = 0$$

$$\Psi_1(x \leq 0) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x) \rightarrow K_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$$\Psi_2(x \geq 0) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \rightarrow K_2 = \sqrt{2m(E-U_0)/\hbar^2}$$

$$B_2 = 0$$

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) \rightarrow A_1 + B_1 = A_2$$

$$\Psi_1'(0) = \Psi_2'(0) \rightarrow A_1 K_1 + B_1 K_1 = A_2 K_2 \rightarrow A_1 = 1$$

$$B_1 = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}; \quad A_2 = \frac{2K_1}{K_1 + K_2}$$

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U_0/E}}{1 + \sqrt{1 - U_0/E}} \right)^2 \quad - \text{коэфф. отражения}$$

$$R + D = 1 \rightarrow D = 1 - R = \frac{4K_1 K_2}{(K_1 + K_2)^2} = \frac{4\sqrt{1 - U_0/E}}{(1 + \sqrt{1 - U_0/E})^2} \quad - \text{коэфф. прохождения}$$

$$R > 0 \rightarrow \Psi_1(x) = \exp(ik_1 x) + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \exp(-ik_1 x), \quad \text{при } x < 0$$

$$\Psi_2(x) = \frac{2K_1}{K_1 + K_2} \exp(ik_2 x), \quad \text{при } x \geq 0$$

Существует отличие от класс. вероятн. отражения τ -цы от низкого пот. порога $\rightarrow$ надбарьерное отражение. Оно объясняется наличием у τ -ц волновых свойств. Макроскопическая τ -ца при прохождении через низкий потенци. порог не испытывает отражения, в области порога лишь уменьшается её кинет. энергия.

② (Задача)

Дано: $E = 10 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$
 $e = ?$

1) (Соотнош. неопредел.) $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \rightarrow e \sqrt{2m_0 E} \geq \hbar/2 \rightarrow e \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0 E}}$

Решение:

$$e = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{2 \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}}} = 0,03 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

Бишет № 20

- *
① (Тепловое излучение, его спектральные и интегр. хар-ки. Закон Кирхгофа. Закон смещения Вина. Закон Стефана - Больцмана)

Тепловое излучение - испускание ЭМ волн телами за счёт их внутренней энергии. (имеет непрер. спектр $\rightarrow$ нагретое тело способно испуск. энергию излучения при любой частоте и длине волны)

Люминесценция - нетепловое излучение (происх. за счёт внешней энергии)

Интегральные характеристики (количественные):

- ① Энергия излучения E [Дж]
② Поток излучения (мощность) Φ - энергия излучения, переносимая через един. пов. за время dt [Вт]
 $\Phi = dE/dt$
③ Энергетич. светимость R_Σ - физ. величина, числ. равн. энергии ЭМ волн всех частот (длин от 0 до ∞), изл. за ед. времени с ед. площади пов-ти тела. [Вт/м²]
 $R_\Sigma = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda = \int_0^\infty r_\nu d\nu$; $R_\Sigma = \frac{d\Phi}{dS}$

Спектральные хар-ки: (опис. распр. по дл. волн и част.)

- ① Испускат. способность r - спектр. плотн. потока лучистой энергии, излуч. ед. площ. пов-ти тела [Вт/м³]
 $r_\lambda = \frac{dR_\Sigma}{d\lambda} = \frac{d\Phi}{dS d\lambda}$; $r_\nu = \frac{dR_\Sigma}{d\nu} = \frac{d\Phi}{dS d\nu}$ } $\lambda^2 |r_\lambda| / c = |r_\nu|$
 $\nu = c/\lambda \rightarrow d\nu = (-c/\lambda^2) d\lambda$
② Поток излуч. с площ. S в интерв. $[\lambda_1; \lambda_2]$:
 $\Phi = \int_S \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r_\lambda d\lambda dS$

Пошлю. спос. тела a_ν - безразм. величина, показ., какал дале энергии ЭМ волн с частотами $[\nu; \nu + d\nu]$ пад. на пов-ть тела, пошлю. им:

$$a_\nu = \frac{dE_{\text{полн}}}{dE_{\text{пад}}} \ll 1$$

Абсолютно - Черное Тело (АЧТ) - тело, полн. пошлю. пад. на него излучение, независ. от напр. пад. на него изл., его спектр. состава и полизации, ничего не отраж. и не пропускал: $a_\nu = 1$

Серое тело - тело, пошлю. способн. которого меньше 1 и не зависит от частоты (дл. волны) света, напр. его распр. и полизации

Т (З-н Жирхгофа):

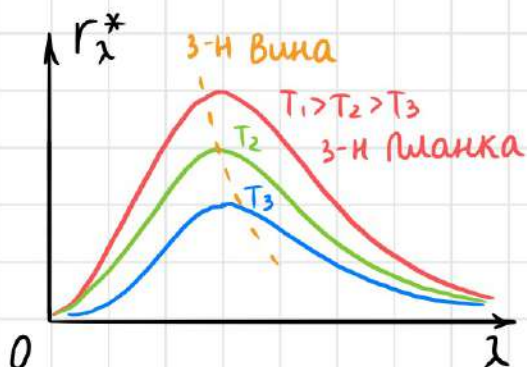
Отношение испуск. спос. тела к его полн. способн. не зав. от прир. тела и равно испуск. способн. АЧТ при тех же знел. темп. и частоты

$$\frac{r_\nu}{a_\nu} = r_\nu^* ; \frac{r_\lambda}{a_\lambda} = r_\lambda^* \rightarrow r_\lambda^* = \frac{c}{\lambda^2} r_\nu^*$$

$$r_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} K_B T - \text{формула Рэлея-Дингеса}$$

$$r_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/K_B T) - 1} - \text{формула Планка для АЧТ}$$

(З-н смещения Вина):



$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$ - длина волны, кот. соотв. максим. отнош. испуск. и полн. спос. при данн. T
 b - постоянная Вина

(3-й Стерана - Больцмана) :

$$R_{\Sigma} = \int_0^{\infty} r_{\lambda}^* d\lambda = \sigma T^4 \rightarrow R_{\Sigma} = \sigma T^4$$

σ - пост. Стерана - Больцмана

*

③ (Работа выхода электрона из металла, её физ. см)

Т (2-ой 3-й Фотоэффекта)

Для данного фотокатода макс. нач. скор. фотоэлектр. зав. от частоты света и не завис. от его интенсивности

$$(ЗСЭ): h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} \rightarrow h\nu = A_{\text{вых}} + m\nu_{\text{max}}^2/2$$

- ур-ние Эйнштейна для внешн. фотоэффекта

$$\frac{m\nu_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}} = eU_3$$

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}$$

ν_0 - мин. част. света, при кот. возм. внешн. фотоэф. (завис. от хим. прир. вещ-ва и сост. его пов-ти)

Поглощая квант света, электрон приобретает энергии $h\nu$. При вылете из металла энергии квант. $\bar{e}$ уменьшается на величину $A_{\text{вых}}$ (работа выхода)

Работа выхода $A_{\text{вых}}$ - работа, которую необх. затратить, чтобы удалить $\bar{e}$ из металла.

② (Задача)

Дано :

m

a

$E^- ? (\text{min})$

1) (Соотношение неопр.) : $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \rightarrow$

$$\rightarrow a \sqrt{2m_0 E} \geq \hbar/2 \rightarrow 8a^2 m_0 E \geq \hbar^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow E \geq \frac{\hbar^2}{8m_0 a^2} \rightarrow E_{\text{min}} = \frac{\hbar^2}{8m_0 a^2}$$

При этом энергии для одноч. пот. ямы :

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 \rightarrow E_{\text{min}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Билет №21

①* (Основные постулаты квант. мех. Вероятностный характер рез-тов измер. в квант. механике)

Основные постулаты квантовой механики:

- ① Каждая динамич. переменная представл. определен. линейным оператором
- ② Операторы, представл. динамические переменные, должны быть самосопряж. операторами.
- ③ Если система наход. в сост. Ψ , то вероятн. того, что при измерении динам. перем. $\hat{L}$ будет получено численн. значение L_n , равна $|C_n|^2$, где:
 $\hat{L}U_n = L_n U_n$; $\Psi = \sum_n C_n U_n$

Вероятн. характер рез-тов измер. в квант. механ:

Волновая ф-ция Ψ - комплексн. ф-ция, используем. в квант. мех. для описания квант. сост. системы

Волновая ф-ция $\Psi(r, t)$ должна интерпретир. статистически, т.е. она является величиной, кот. позволяет находить все вероятности.

Таким образом, вероятность нахождения частицы в момент времени t с координатами $[x; x+dx]$, $[y; y+dy]$, $[z; z+dz]$ или в объеме $dV = dx dy dz$ можно определить интенс. волновой ф-ции:

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \Psi^* dV$$

Ψ^* - комплексно-сопряженная ф-ция с Ψ

З: Т.к. Ψ - комплексная ф-ция, а вероятн. должна быть всегда действит. и положит. величиной, то за меру интенс. волнов. ф-ции принимается квадрат ее модуля

Физ. смысл Ψ ф-ции: проявляется через плотность вероятности (вероятн. наход. τ -цы в ед. объёма)
 $dP/dV = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$

Вероятность нахождения частицы в момент времени t в некотором конечном объёме, согласно теореме сложения вероятностей:

$$P = \int P = \int |\Psi|^2 dV$$

Вычисление средних значений динам. переменных

$$\langle L \rangle = \sum_n L_n |C_n|^2 \quad - \text{ в теории вероятностей}$$

Среднее значение динамической перем., представл. оператором $\hat{L}$, в сост., характер. волнов. ф-цией Ψ :

$$\langle L \rangle = \int \Psi^* \hat{L} \Psi d\tau$$

*
 ③ (Коэфф. прозр. потенц. барьера, его физ. смысл)

Коэфф. прохонд. τ -цы (прозр. порога) D - определяет вероятность того, что частица пройдёт в область потенц. порога.

$$D = \left| \frac{J_{\text{прош}}}{J_{\text{пад}}} \right|$$

$J_{\text{прош}}, J_{\text{пад}}$ - вект. плотн. потока вероятн. для прошедшей и падающей волн.

② (Задача)

Дано:

одн. пот. яма
 $n=1$ (осн. сост.)

$\langle x \rangle = ?$

$\langle P_x \rangle = ?$

1) (Для одноч. потенц. ямы):

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

2) (Найдём ср. значен. координаты):

$$\langle x \rangle = \int_0^a \Psi (\hat{x} \Psi) dx = \int_0^a x \Psi^2 dx$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 2') \quad \langle x \rangle = \int_0^a \frac{2}{a} x \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_0^a x \left[1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right] dx = \frac{a}{2}$$

3) (Найдем среднее значение импульса ψ -ы):

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \begin{array}{l} \text{оператор} \\ \text{импульса} \end{array} \rightarrow \hat{p}_x \psi_n(x) = -i\hbar \left[\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \right]'_x =$$

$$= -i\hbar \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a}, \text{ соотв:}$$

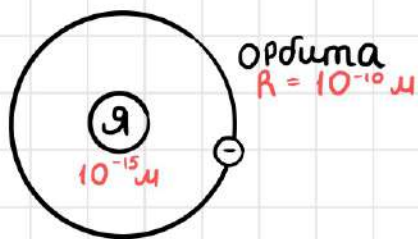
$$\langle p_x \rangle = \int_0^a \psi (\hat{p}_x \psi) dx = - \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot i\hbar \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi x}{a} dx =$$

$$= - \frac{i\hbar 2\pi}{a^2} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} dx = - \frac{i\hbar \pi}{a^2} \int_0^a \sin \frac{2\pi x}{a} dx =$$

$$= \frac{i\hbar \pi}{a^2} \left[\frac{a}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{a} \right]_0^a = \frac{i\hbar}{2a} (1-1) = 0$$

* ① (Ядерная модель атома. Постулаты Бора. Энерг. спектр атома водорода в теории Бора)

Модель атома Резерфорда:



Атом состоит из тяжелого положит. заряженного ядра Я очень малых размеров, вокруг которого по некот. орбитам движутся электроны

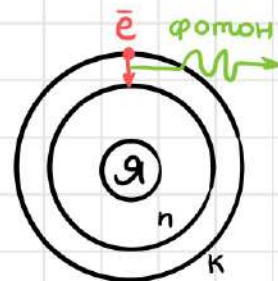
Постулаты Бора:

① Электрон в атоме может движ. только по опред. стационарн. орбитам, каждой из кот. можно приспис. опред. номер $n = 1, 2, 3, \dots$. Такое движение соотв. станд. атома, облад. неизм. полной энергией $E_n \rightarrow$ электрон не излучает энергию.

② Разрешенными стационар. орбитами явл. только те, для которых угловой момент импульса L электрона равен целому кратному знач. пост. Планка $\hbar \rightarrow$ для n -й станд. орбиты выполн. условие квантования: $L = n\hbar$, при $n = 1, 2, \dots$

③ Испускание или поглощение кванта изл. происходит при переходе атома из одного стационар. сост. в другое. При этом частота ω излучения атома опред. разностью энерг. атома в 2-х стационар. состояниях:

$$\hbar\omega_{nk} = E_k - E_n \text{ при } k > n$$



Квантование энергии атома

$$\frac{m_0 v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \text{— условие вращ. электр. по круговой орбите радиуса } r \quad ①$$

$m_0 v r = n \hbar$ - ф-ла Бора квантов. мом. импульса e

→ $r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2}$ при $n=1, 2, 3...$ - радиусы допустим. орбит

Введем боровский радиус:

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2} \rightarrow r_n = a n^2 \text{ при } n=1, 2, 3...$$

① → $v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n}$ - значение скорости электрона на n -й стационар. орбите

$$E_k = \frac{m_0 v_n^2}{2} = \frac{m_0 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad \begin{array}{l} \text{— кинетическая} \\ \text{энергия} \end{array} \quad \textcircled{2}$$

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m_0 e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad \begin{array}{l} \text{— потенциальная} \\ \text{энергия} \end{array} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \rightarrow E = E_k + U = -\frac{m_0 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} -$$

- формула квантов. энергии в атоме водорода

Ионизация атома - процесс, при котором электрон может преодолеть силу притяж. к ядру и оторваться от атома.

③* (Условие нормир. волновой ф-ции, его физ. смысл)

Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1$$

$\psi = \psi(x, y, z, t)$ - нормир. волн. ф-ция
 $\psi \neq 0$

(вероятность нахождения частицы в момент врем. t во всем пространстве → является вероятностью абсолютно достоверного события ($= 1$))

② (Задача)

Дано:

$$\theta_1 = 60^\circ$$

$$\theta_2 = 120^\circ$$

$$\eta = 2,0$$

$$\lambda = ?$$

$$1) \Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta), \text{ Compton:}$$

$$\begin{cases} \lambda'_1 - \lambda = h(1 - \cos \theta_1) / m_0 c = h(1 - \cos 60^\circ) / m_0 c \\ \lambda'_2 - \lambda = h(1 - \cos \theta_2) / m_0 c = h(1 - \cos 120^\circ) / m_0 c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda'_1 - \lambda = h / 2 m_0 c \rightarrow \lambda'_1 = h / 2 m_0 c + \lambda \\ \lambda'_2 - \lambda = 3h / 2 m_0 c \rightarrow \lambda'_2 = 3h / 2 m_0 c + \lambda \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda'_1 - \lambda = h / 2 m_0 c \rightarrow \lambda'_1 = h / 2 m_0 c + \lambda \\ \lambda'_2 - \lambda = 3h / 2 m_0 c \rightarrow \lambda'_2 = 3h / 2 m_0 c + \lambda \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \frac{1}{2} = \frac{h + 2m_0 c \lambda}{2m_0 c} \cdot \frac{2m_0 c}{3h + 2m_0 c \lambda} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2h + 4m_0 c \lambda = 3h + 2m_0 c \lambda \rightarrow 2m_0 c \lambda = h \rightarrow \lambda = \frac{h}{2m_0 c}$$

Решение:

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,21 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

Билет №23

①* (Основные постулаты квант. мех. Вероятностный характер рез-тов измер. в квант. механике)

Основные постулаты квантовой механики:

- ① Каждая динамич. переменная предст. определ. линейным оператором
- ② Операторы, предст. динамические переменные, должны быть самосопр. операторами.
- ③ Если система наход. в сост. Ψ , то вероятн. того, что при измерении динам. перем. $\hat{L}$ будет получено числен. значение L_n , равна $|C_n|^2$, где:
 $\hat{L}U_n = L_n U_n$; $\Psi = \sum_n C_n U_n$

Вероятн. характер рез-тов измер. в квант. механ:

Волновая ф-ция Ψ - комплексн. ф-ция, используем. в квант. мех. для описания квант. сост. системы

Волновая ф-ция $\Psi(r, t)$ должна интерпретир. статистически, т.е. она является величиной, кот. позволяет находить все вероятности.

Таким образом, вероятность нахождения частицы в момент времени t с координатами $[x; x+dx]$, $[y; y+dy]$, $[z; z+dz]$ или в объеме $dV = dx dy dz$ можно определить интенс. волновой ф-ции:

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \Psi^* dV$$

Ψ^* - комплексно-сопряжённая ф-ция с Ψ

3: Т.к. Ψ - комплексная ф-ция, а вероятн. должна быть всегда действит. и положит. величиной, то за меру интенс. волнов. ф-ции принимается квадрат её модуля

Физ. смысл Ψ ф-ции: проявляется через плотность вероятности (вероятн. нахожд. τ -цы в ед. объёма)
 $dP/dV = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$

Вероятность нахождения частицы в момент времени t в некотором конечном объёме, согласно теореме сложения вероятностей:
 $P = \int P = \int |\Psi|^2 dV$

Вычисление средних значений динам. переменных
 $\langle L \rangle = \sum_n L_n |C_n|^2$ - в теории вероятностей

Среднее значение динамической перем., представл. оператором $\hat{L}$, в сост., характер. волнов. ф-цией Ψ :
 $\langle L \rangle = \int \Psi^* \hat{L} \Psi d\tau$

*
 ③ (Коэфф. прозр. потенц. барьера, его физ. смысл)

Коэфф. прохождения τ -цы (прозр. порога) D - определяет вероятность того, что частица пройдёт в область потенц. порога.
 $D = \left| \frac{J_{\text{прош}}}{J_{\text{пад}}} \right|$ $J_{\text{прош}}, J_{\text{пад}}$ - вект. плотн. потока вероятн. для прошедшей и падающей волн.

*
 ② (Задача)

Дано: одн. пот. яма $n=1$ (осн. сост.) $\langle x \rangle = ?$ $\langle P_x \rangle = ?$	1) (Для одноч. потенц. ямы): $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$ 2) (Найдём ср. значен. координаты): $\langle x \rangle = \int_0^a \Psi (\hat{x} \Psi) dx = \int_0^a x \Psi^2 dx$ 1) $\rightarrow$ 2) = 2') $\langle x \rangle = \int_0^a \frac{2}{a} x \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_0^a x \left[1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right] dx = \frac{a}{2}$
--	---

3) (Найдем среднее значение импульса 2-й):

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{— оператор импульса} \rightarrow \hat{p}_x \Psi_n(x) = -i\hbar \left[\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \right]' \Big|_x =$$

$$= -i\hbar \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a}, \text{ соотв:}$$

$$\langle p_x \rangle = \int_0^a \Psi (\hat{p}_x \Psi) dx = - \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot i\hbar \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi x}{a} dx =$$

$$= - \frac{i\hbar 2\pi}{a^2} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} dx = - \frac{i\hbar \pi}{a^2} \int_0^a \sin \frac{2\pi x}{a} dx =$$

$$= \frac{i\hbar \pi}{a^2} \left[\frac{a}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{a} \right]_0^a = \frac{i\hbar}{2a} (1-1) = 0$$

Бишет №24

*
① (Дискр. хар-р испуск. и пошощ. ЭМ измуг. веш-вощ. Ф-ла Планка для равновесного темп. изм. Квантовое объяснение законов темп. измугения)

Т (Гипотеза Планка):

Измугение света происх. не непрерывно, а дискретно → определенными порциями (квантами), энергия кот. определ. частотой ν :

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$h = 2\pi\hbar$ - пост. планка

Формула Планка для равн. ТИ:

$$\nu\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} ; \quad \rho_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

$$U_T = \int_0^\infty U_\omega d\omega \quad \text{— объемная плотн. энергии равновесного ТИ}$$

U_ω - спектр. объемная плотн. энергии равн. ТИ

$$U_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

Квантовое объяснение з-нов ТИ:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \varepsilon_n \quad \text{— средняя энергия измугения}$$

$\varepsilon_n = n\hbar\omega$ - возмощн. значения энергии измугения

P_n - вероятность обладания эн. ε_n в случае ТД равнов.

→ применением распред. Больцмана:

$$P_n = A e^{-\varepsilon_n/k_B T}$$

$$\text{Учитывая, что } \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \rightarrow A = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/k_B T} \right)^{-1} \rightarrow$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum n\hbar\omega \exp(-n\hbar\omega/k_B T)}{\sum \exp(-n\hbar\omega/k_B T)} = \hbar\omega \frac{\sum n \exp(-n\hbar\omega/k_B T)}{\sum \exp(-n\hbar\omega/k_B T)} =$$

$$= \hbar\omega \frac{1/(1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T))}{\exp(-\hbar\omega/k_B T)/(1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T))^2} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

При малых частотах $\hbar\omega/KT \ll 1 \rightarrow \langle \epsilon \rangle = KT$
(формула классической теории)

При больших частотах $\rightarrow$ ф-ла Планка (разрешает
"УФ катастрофу" классической теории)

*
③ (Энергия ионизации атома, её физ. смысл)

Ионизация атома - процесс, при котором электрон может преодолеть силу притяж. к ядру и оторваться от атома.

Энергия ионизации E_i - энергия, необходимая для осуществления ионизации атома.

$$E_i = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m_0 e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = 13,6 \text{ эВ} \quad \text{- энергия ионизации атома водорода}$$

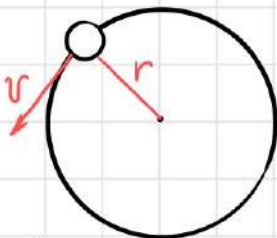
$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2} \quad \text{при } n=1,2,3... \quad \text{- радиусы допустим. орбит}$$

*
② (Задача)

Дано:

n - ш. кв. з.

λ_B - ?



1) (длина волны Дебройля):

$$\lambda_B = h/p = h/m_0 v = 2\pi\hbar/m_0 v$$

$$2) (II_3 - II_1): \frac{m_0 v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- условие вращения e^- по круговой орбите

$$3) m_0 v r = n\hbar \quad \text{- ф-ла Бора квантов. мом. имп. } e^-$$

$$3) - 2) = 2') \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2} \quad \text{- радиус допустим. орбит}$$

$$2') - 3) = 3') \quad v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \quad \text{- значение скор. } e^- \text{ на } n\text{-й стационарной орбите}$$

$$3') - 1) = 1') \quad \lambda_B = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2 n}{m_0 e^2}$$

$$4) \ell = 2\pi r$$

$$2'), 1') - 4) = 4') \quad \ell = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2} = n \lambda_B \quad \left(\begin{array}{l} \text{уклад. целое числ.} \\ \text{дл. волн де Бройля} \end{array} \right)$$

①* (Стационарные состояния, их временная зависимость. Ур-ние Шрёдингера для стационарных состояний)

Общее ур-ние Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$$

①

m - масса частицы

$U = U(x, y, z, t)$ - потенциал. ф-ция гас. в силовом поле

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в декартовой системе координат

$\hbar = h/2\pi$ - постоянная Планка

3: Ур-ние Шрёдингера является основным ур-нием нерелятивистской квантовой механики (не может быть выведено из других соотношений)

Свойства ур-ний Шрёдингера:

① Релативность волновой ф-ции

② Статистическая интерпретация

Стационарные состояния - состояния, в которых набл. физические величины не изменяются во времени.

Если силовое поле стационарно (пот. энергии $U = U(x, y, z)$ не зависит от врем.) $\rightarrow$ решение общего ур-ния Шрёдингера имеет вид:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \varphi(t)$$

②

Подставив ② $\rightarrow$ ① и разделив левую и правую части полуз. ур-ния на ②, получим:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, y, z) \right] \frac{1}{\Psi(x, y, z)} + U(x, y, z)$$

③

Т.к. левая часть ур-ния ③ зависит только от времени t , а правая - только от координат (x, y, z) , то их можно приравн. одной констан. разделения E (полная энергия частицы) $\rightarrow$ получим диффер. уравнения:

① Временное уравнение:

$$i\hbar \frac{1}{\psi(t)} \frac{d\psi(t)}{dt} = E \quad \left\{ \text{с решен: } \psi(t) = e^{\frac{i}{\hbar} Et} \right\} \quad (4)$$

② Координатное уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) + U(x, y, z) \cdot \psi(x, y, z) = E \cdot \psi(x, y, z) \quad (5)$$

$$\psi(x, y, z) \neq 0$$

Из ур-ния ⑤ получаем $\rightarrow$

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

В случае стационар. ситового палл состояние z -цы будет описываться полной волнов. ф-цией:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i/\hbar (Et)}$$

Выражение для плотности вероятн. имеет вид:

$$\frac{dP}{dV} = |\psi(x, y, z, t)|^2 = \psi \psi^* = \psi(x, y, z) \psi^*(x, y, z)$$

$$\text{Т.к. } \psi(t) \psi^*(t) = 1$$

*
③ (Физ. смысл пост. Планка, её размерность)

Постоянная Планка h - коэфф., связывающий величину энергии кванта ЭМ изм. с его част. $[\Delta m / \Gamma_4]$

Квант - порция ЭМ энергии

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= h\nu \\ \varepsilon &= \hbar\omega \end{aligned} \right\} \rightarrow \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \Delta m / \Gamma_4 - \text{пост. Планка}$$

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \Delta m / \Gamma_4 - \text{пост. Дирака}$$

② (Задача)

Дано:

$$\Delta\tau = 10^{-8} \text{ c}$$

$$\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta\omega/\omega = ?$$

$$1) \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$2) (\text{соотнош. неопр.}) : \Delta E \Delta\tau \geq \hbar/2$$

$$3) \Delta E = \hbar \Delta\omega$$

$$3) \rightarrow 2) = 2') \quad \hbar \Delta\omega \Delta\tau \geq \hbar/2 \rightarrow \Delta\omega \geq 1/2\Delta\tau$$

$$2') : 1) = 4) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\lambda}{4\pi c \Delta\tau}$$

Решение:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{4 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} \text{ c}} = 1,59 \cdot 10^{-8}$$

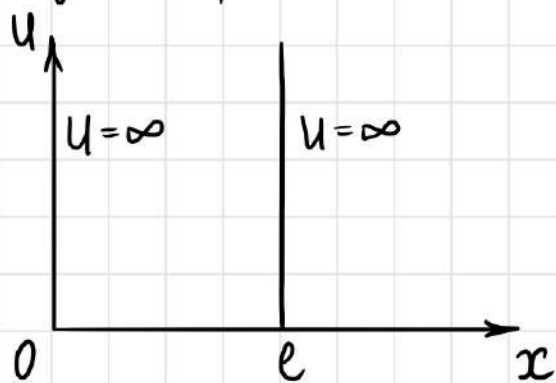
Билет №26

*
① (Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечными стенками. Квантование энергии. Плотн. вероятности для различных состояний частицы)

Избранные значения E ур. Шрёдингера - собственные значения энергии, а их решения Ψ - собственные функции

Совокупность собств. значений - спектр (сплошн. дискр.)

Одномерная потенциальная яма:



$$U = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ \infty, & \text{при } x < 0; x > l \end{cases}$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$$

$$\Psi(0) = \Psi(l) = 0$$

В области $U = 0$:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = 0; \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \rightarrow$$

$$\Psi'' + k^2 \Psi = 0$$

$$\Psi(x) = A \sin(kx + \alpha)$$

$$\Psi(0) = A \sin \alpha \rightarrow \alpha = 0$$

$$\Psi(l) = A \sin kl \rightarrow kl = \pm \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k = \pm \frac{\pi n}{l}; \quad k^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} = \frac{2mE_n}{\hbar^2}$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2me^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- квантов. энергии

E_n - ур-ни энергии

n - кв. числа

Если $n = 1 \rightarrow$ основное состояние

Если $n > 1 \rightarrow$ возбужденное состояние

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2me^2} (2n+1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{me^2} n \rightarrow \frac{\Delta E_n}{E_n} \sim \frac{1}{n}$$

(дискретность энергии убывает при увелич. ном. ур-в.)

①

Подставим $K = \pm \pi n / l \rightarrow \textcircled{1}$

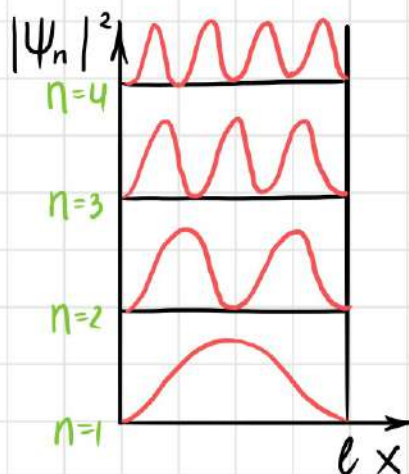
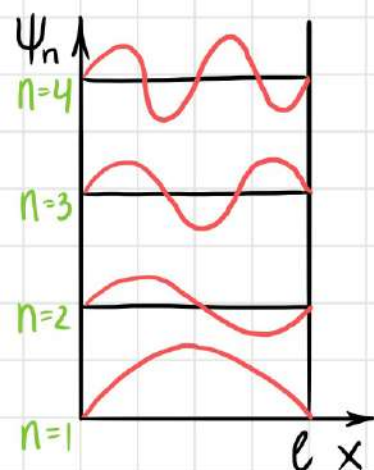
$$\Psi_n(x) = A \sin \frac{\pi n x}{l}, \text{ при } \alpha = 0$$

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = 1 \rightarrow A^2 \frac{l}{2} = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ тогда:}$$

$$|\Psi_n|^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{n \pi x}{l} - \text{плотность вероятности для различных энерг. уровней}$$

$$P = \int_1^2 |\Psi_n|^2 dx - \text{вероятн. обнаружить э-чу внутри некоторого интервала}$$



*
 $\textcircled{3}$ (Красная граница фотоэффекта, её физ. смысл)

Красная граница фотоэфф. - миним. частота $\nu_{\min}$ (макс. длина волны $\lambda_{\max}$), ниже (выше) которой свет любой интенс. не вызывает фотоэффекта.

$h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}}$ - ур-ние Эйнштейна $h\nu$ - энергия фот.

$h\nu_0 = A_{\text{вых}}$ - условие начала фотоэффекта

$\rightarrow \nu_0 = A_{\text{вых}} / h$ - кр. граница фотоэфф. по частоте

$\rightarrow \lambda_0 = hc / A_{\text{вых}}$ - кр. граница фотоэфф. по длине волны

(кр. граница фотоэфф. зависит только от вида вещ. и степени обработки его пов-ти и не зависит от хар-к излучения)

②* (Задача)

Дано: 1) (длина волны Комптона):

$$\frac{\lambda_B = \lambda_K}{E_K - ?} \quad \lambda_K = \frac{h}{m_0 c}$$

2) (длина волны Дебройля):

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_0 E_K}}$$

$$2) \rightarrow 1) = 1') \quad \lambda_B = \lambda_K \rightarrow \sqrt{2 m_0 E_K} = m_0 c \rightarrow E_K = \frac{m_0 c^2}{2}$$

Решение:

$$E_K = \frac{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{2} = 4,1 \cdot 10^{-14}$$

Билет №27

*
① (Условия возм. одновремен. измерен. разных мех. величин в квантов. механике. Соотнош. неопредел. Гейзенберга)

Оператор - пр-ю, с помощью которого каждой ф-ции из некоторого множ-ва ф-ций может соотв. ф-ция из того же или некот. другого множ-ва.

$\hat{L}$ - оператор

$$\psi = \hat{L}u \rightarrow \psi = \frac{du}{dx} = u'$$

Линейные операторы:

Оператор $\hat{L}$ называется линейным, если для любых ф-ций u_1 и u_2 из рассматр. класса ф-ций и для любых постоянных чисел c_1 и c_2 имеет место:

$$\hat{L}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \hat{L}u_1 + c_2 \hat{L}u_2$$

Сумма и произведение векторов:

Если для любой ф-ции u имеют место рав:
 $\hat{C}u = \hat{A}u + \hat{B}u$; $\hat{C}_1 u = \hat{A}_1 u - \hat{B}_1 u$; $\hat{C}_2 u = \hat{A}_2 (\hat{B}_2 u)$, то операторы $\hat{C}$, $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$ назыв. соотв. суммой операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, разностью опер. $\hat{A}_1$ и $\hat{B}_1$ и произвед. опер. $\hat{A}_2 \hat{B}_2$
 $\rightarrow \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$; $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 - \hat{B}_1$; $\hat{C}_2 = \hat{A}_2 \hat{B}_2$

3: Произведение операторов некоммутативно $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ назыв. коммутирующими, если их произв. не зависит от порядка сложения, т.е:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

Если для 2-х опер. $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеет место равенство $\hat{A}\hat{B} = -\hat{B}\hat{A}$, то эти операторы назыв. антикоммутирующ.

$$[\hat{A}, \hat{B}]_- = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad - \text{коммутатор операторов}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad - \text{антикоммутатор операторов}$$

Если две разные физ. величины A и B могут быть одновременно точно измерены, то соотв. им операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ должны быть коммутирующими.

Т (Соотношение неопредел. I):

При наличии у микрогастцы волновых свойств, суц. связь (соотношения) между неопределённостями координат и соответствующими неопределённостями компонент импульса гастцы:

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2 \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar/2 \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar/2 \end{cases}$$

Т (Соотношение неопредел. II):

Определяет связь между промеж. времени Δt суц. системы (гастцы) и неопр. энергии ΔE этой сист. в данном состоянии (связь между неопределённостью в измерении энергии за промежуток врем. измерен.)

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \rightarrow \Delta E \Delta t \geq \hbar$$

* ③ (Условие Брэгга-Вульфа, его физик. смысл)

Условие Вульфа-Бреггов: определяет направление максимумов дифракции упруго рассеянного на кристалле рентгеновского излучения

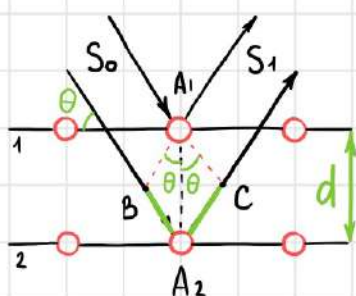
$$2d \sin \theta = n \lambda$$

d - межплоскостное расстояние

θ - угол скольжения (Брегговский угол)

n - порядок дифр. максимума

λ - длина волны



Если пучок ускоренных электронов облад. волновыми св-вами, то их отражение от кристалла будет иметь такой же интерф. характер, как у рентгеновских луг.

○ - узлы крист. решетки

$$\Delta = BA_2 + A_2C = 2d \sin \theta$$

②* (Задача)

Дано:

куб. пот. яма
 $n = 3$

$N = ?$ (кр. вып.)

1) (Энергетические уровни):

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

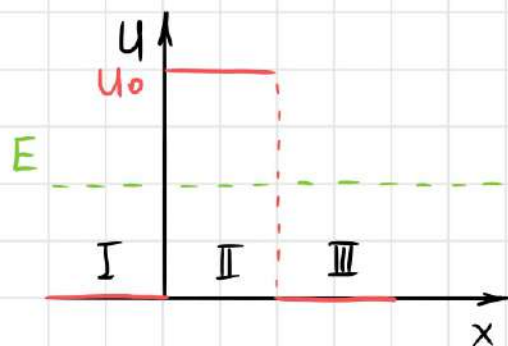
I уровень: E_{111}

II уровень: $E_{112}, E_{121}, E_{211}$

III уровень: $E_{122}, E_{212}, E_{221} \rightarrow N = 3$

Билет №28

①* (Прхождение частицы через потен. барьер.
Туннельный эффект. Сканир. туннельный микроскоп)



Для I и III: $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$

Для II: $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0$

$\psi_2 = A_2 \exp(\beta x) + B_2 \exp(-\beta x)$ для II

$\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$

$\psi = e^{\lambda x}$ для I и III
 $\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0$, $\lambda = \pm i\alpha$

$\alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\psi_1 = A_1 \exp(i\alpha x) + B_1 \exp(-i\alpha x)$ для I
 $\psi_3 = A_3 \exp(i\alpha x) + B_3 \exp(-i\alpha x)$ для III

$\psi_1(0) = \psi_2(0)$

$\psi_2(l) = \psi_3(l)$

$\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$; $\psi_2'(l) = \psi_3'(l)$

$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$; $D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$; ① и ② $\rightarrow D = |A_3|^2 \rightarrow$

$\rightarrow D \approx \exp(-2\beta l) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)l}\right)$

$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right)$

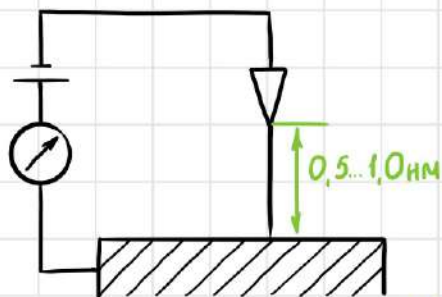
Туннельный эффект - прохождение частицы через потен. барьер, высота которого превышает энергию частицы (При прохождении через барьер полная энергия E не изменяется)

Туннельный эффект объясняет явление:

- ① Холодная эмиссия электронов
- ② Альфа-распад радиоактивных ядер

- ③ Контактная, разность потенциалов
- ④ Сканирующий туннельный микроскоп

Сканирующий туннельный микроскоп (СТМ):



Принцип работы СТМ заключается в следующем: к пов-ти проводящего образца на характ. межатомное расст. z подвод. тонкое металлич. острие (иголка). При прилож. между образцом и иглой разности потенциалов $U \sim 0,1 \dots 1,0 \text{ В}$ в цепи появляется эл. ток, обусловленный туннелированием электронов. Сила туннельного тока составл. $I_T \sim 1 \dots 10 \text{ нА}$

Режимы работы СТМ:

- ① Режим постоянной высоты (острие иглы перемещ. в горизонт. пл-ти над исслед. пов-тью $\rightarrow$ изменяется туннельный ток $\rightarrow$ определ. рельеф пов-ти образца)
- ② Режим постоянного тока (использ. система обр. связи, которая поддерживает постоянным ток туннел. за счёт вертик. перемещения иглы $\rightarrow$ определ. рельеф пов-ти образца)

*

- ③ (Физ. смысл постоянной Планка, её размерность)

Постоянная Планка h - коэфф., связывающий величину энергии кванта ЭМ излуч. с его част. $[\Delta \varepsilon / \Gamma \text{ч}]$

Квант - порция ЭМ энергии

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= h\nu \\ \varepsilon &= \hbar\omega \end{aligned} \right\} \rightarrow \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} h &= 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \Gamma \text{ч} - \text{пост. Планка} \\ \hbar &= 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \Gamma \text{ч} - \text{пост. Дирака} \end{aligned}$$

②* (Задача)

Дано: $E = 10 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$
 $l = ?$

1) (Сотнош. неопредел.) : $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \rightarrow$
 $\rightarrow l \sqrt{2m_0 E} \geq \hbar/2 \rightarrow l \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0 E}}$

Решение:

$$l = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{2 \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}}} = 0,03 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

Билет №29

- *
① (Основные постулаты кв. мех. Представление физич. величин операторами. Гамильтониан кв. системы как оператор полной энергии)

Основные постулаты квантовой механики:

- ① Каждая динамич. переменная предст. определ. линейным оператором
- ② Операторы, предст. динамические переменные, должны быть самосопряж. операторами
- ③ Если система наход. в сост. Ψ , то вероятн. того, что при измерении динам. перем. $\hat{L}$ будет получено численн. значение L_n , равна $|C_n|^2$, где:
 $\hat{L} U_n = L_n U_n$; $\Psi = \sum_n C_n U_n$

Оператор - пр-ю, с помощью которого каждой ф-ции из некоторого множ-ва ф-ций может соотв. ф-ция из того же или некот. другого множ-ва.

$\hat{L}$ - оператор

$$\hat{L} U = L U \rightarrow \hat{L} = d/dx \rightarrow v = \frac{dU}{dx} = U'$$

Линейные операторы:

Оператор $\hat{L}$ называется линейным, если для любых ф-ций U_1 и U_2 из рассматр. класса ф-ций и для любых постоянных чисел C_1 и C_2 имеет место:

$$\hat{L}(C_1 U_1 + C_2 U_2) = C_1 \hat{L} U_1 + C_2 \hat{L} U_2$$

Сумма и произведение векторов:

Если для любой ф-ции U имеют место рав:

$$\hat{C} U = \hat{A} U + \hat{B} U; \quad \hat{C}_1 U = \hat{A}_1 U - \hat{B}_1 U; \quad \hat{C}_2 U = \hat{A}_2 (\hat{B}_2 U),$$

то операторы $\hat{C}, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ назыв. соотв. суммой операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, разностью опер. $\hat{A}_1$ и $\hat{B}_1$ и произвед. опер. $\hat{A}_2 \hat{B}_2$

$$\rightarrow \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}; \quad \hat{C}_1 = \hat{A}_1 - \hat{B}_1; \quad \hat{C}_2 = \hat{A}_2 \hat{B}_2$$

Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ назыв. коммутующими, если их произв. не зависит от порядка сложит., т.е:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

Если для 2-х опер. $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеет место равенство $\hat{A}\hat{B} = -\hat{B}\hat{A}$, то эти операторы назыв. антикоммутирующ.

$$\hat{L}u = \lambda u$$

Если ф-ция u непрер., однозначна и конечна, то она называется **собств. ф-цией** оператора $\hat{L}$, принадлежит **собственному значению λ** оператора $\hat{L}$. Совокупность **собств. значений** оператора называется его **спектром**.

Оператор $\hat{L}$ назыв. **самосопрям.** (эрмитовым), если для любых 2-х ф-ций u и v имеет место равенство:

$$\int v^* \hat{L}u d\tau = \int u \hat{L}^* v^* d\tau$$

Операторы основных физических величин:

① Оператор координаты:

$$\hat{x}\psi = x\psi; \hat{y}\psi = y\psi; \hat{z}\psi = z\psi$$

В символической операторной форме:

$$\hat{x} = x; \hat{y} = y; \hat{z} = z$$

$$\hat{r} = \bar{e}_x \hat{x} + \bar{e}_y \hat{y} + \bar{e}_z \hat{z} \quad \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z - \text{ед. орты коорд. осей}$$

② Оператор импульса:

В символической операторной форме:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}; \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow$$

$$\hat{p} = \bar{e}_x \hat{p}_x + \bar{e}_y \hat{p}_y + \bar{e}_z \hat{p}_z \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \nabla$$

$$\text{где: } \nabla = \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

(Сопотн. классич. мех.): $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z$

$$\rightarrow \hat{p}^2 = (\hat{p}_x)^2 + (\hat{p}_y)^2 + (\hat{p}_z)^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \rightarrow \hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta$$

③ Оператор момента импульса:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow L_x = y p_z - z p_y ; L_y = z p_x - x p_z ; L_z = x p_y - y p_x$$

$$\hat{L}_x = \hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y = -i\hbar \left[y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$\hat{L}_y = \hat{z} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_z = -i\hbar \left[z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

$$\hat{L}_z = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x = -i\hbar \left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right]$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x \hat{L}_x + \hat{L}_y \hat{L}_y + \hat{L}_z \hat{L}_z$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} ; \hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad - \text{угловая часть опер. Лапласа в сф. сист. коорд.}$$

④ Операторы энергии:

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} \rightarrow \hat{E}_k = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta$$

$$\hat{U} \Psi = U \Psi \rightarrow \hat{U} = U \quad - \text{оператор потенциальной энергии}$$

$$\hat{H} = \hat{E}_k + \hat{U} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + U = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + U(x, y, z) \quad - \text{оператор полн. эн. (гамильтониан)}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad - \text{уравнение Шрёдингера}$$

* ③ (Коэфф. прозр. потенц. барьера, его физ. смысл)

Коэфф. прохонд. τ -чы (прозр. порога) $\mathcal{D}$ - определяет вероятность того, что частица пройдет в область потенц. порога.

$$\mathcal{D} = \left| \frac{J_{\text{прош}}}{J_{\text{пад}}} \right|$$

$J_{\text{прош}}, J_{\text{пад}}$ - вект. плотн. потока вероятн. для прошедшей и падающей волн.

② (Задача)

Дано: $r = 0,1 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ $\Delta v_x = ?$	1) (Соотношение неопр.): $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \rightarrow$ $\rightarrow r m \Delta v_x \geq \hbar/2 \rightarrow$ $\Delta v_x = \frac{\hbar}{2rm}$
--	--

Решение:

$$\Delta v_x = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-9} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 0,579 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

Билет №30

*
① (Ур-ние Шрёдингера, его св-ва. Статистич. интер. волновой функции)

Общее ур-ние Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$$

①

m - масса частицы

$U = U(x, y, z, t)$ - потенц. ф-ция част. в силовом поле

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в декартов. системе координат

$\hbar = h/2\pi$ - постоянная Планка

3: Ур-ние Шрёдингера является основным ур-нием нерелятивистской квантовой механики (не может быть выведено из других соотношений)

Свойства ур-ния Шрёдингера:

① Релативность волновой ф-ции

② Статистическая интерпретация

Стационар. состояние - состояние, в которых набл. физические величины не изменяются во времени.

Если силов. поле стационарно (пот. энергии $U = U(x, y, z)$ не зависит от врем.) $\rightarrow$ решение

общего ур-ния Шрёдингера имеет вид:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \varphi(t)$$

②

Подставив ② $\rightarrow$ ① и разделив левую и правую части полуз. ур-ния на ②, получим:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, y, z) \right] \frac{1}{\Psi(x, y, z)} + U(x, y, z)$$

③

Т.к. левая часть ур-ния ③ зависит только от времени t , а правая - только от координат (x, y, z) , то их можно приравн. одной констан. разделения E (полная энергия частицы) $\rightarrow$ получим диффер. уравнения:

① Временное уравнение:

$$i\hbar \frac{1}{\psi(t)} \frac{d\psi(t)}{dt} = E \quad \left[\text{с решен: } \psi(t) = e^{\frac{i}{\hbar} Et} \right] \quad (4)$$

② Координатное уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) + U(x, y, z) \cdot \psi(x, y, z) = E \cdot \psi(x, y, z) \quad (5)$$

$$\psi(x, y, z) \neq 0$$

Из ур-ния ⑤ получаем $\rightarrow$

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

В случае стационар. силового поля состояние z -цы будет описываться полной волнов. ф-цией:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i/\hbar (Et)}$$

Выражение для плотности вероятн. имеет вид:

$$\frac{dP}{dV} = |\psi(x, y, z, t)|^2 = \psi \psi^* = \psi(x, y, z) \psi^*(x, y, z)$$

$$\text{Т.к. } \psi(t) \psi^*(t) = 1$$

③* (Ур-ние Эйнштейна для фотоэффекта, его физ. смысл)

Т (2-ой з-н Фотоэффекта)

Для данного фотокатода макс. нач. скор. фотоэлектр. зав. от частоты света и не завис. от его интенсивности

$$(ЗСЭ): h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} \rightarrow h\nu = A_{\text{вых}} + m\nu_{\text{max}}^2/2$$

- ур-ние Эйнштейна для внешн. фотоэффекта

$$\frac{m\nu_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}} = eU_3$$

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}$$

ν_0 - мин. част. света, при кот. возм. внешн. фотоэф. (завис. от хим. прир. вещ-ва и сост. его пов-ти)

Полностью квант света, электрон приобретает энергии $h\nu$. При вылете из металла энергии кванта $\bar{e}$ уменьшается на величину $A_{\text{вых}}$ (работа выхода)

Работа выхода $A_{\text{вых}}$ - работа, которую необход. затратить, чтобы удалить $\bar{e}$ из металла.

②* (Задача)

Дано:	1) (Соотношение неопр.): $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \rightarrow$
m	$\rightarrow a \sqrt{2m_0 E} \geq \hbar/2 \rightarrow 8a^2 m_0 E \geq \hbar^2 \rightarrow$
a	$\rightarrow E \geq \frac{\hbar^2}{8m_0 a^2} \rightarrow E_{\min} = \frac{\hbar^2}{8m_0 a^2}$
$E - ? (\min)$	При этом энергии две одноч. пот. эллы:
$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$	$\rightarrow E_{\min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$