Билет 1

1. Тепловое излучение, его спектральные и интегральные характеристики. Закон Кирхгофа. Закон смещения Вина. Закон Стефана-Больцмана.

Электромагнитное излучение, испускаемое нагретым телом, находящимся в состоянии термодинамического равновесия, называется тепловым.

1) спектральная плотность энергетической светимости тела e(ν,T), (Вт*с)/м^2, численно равна спектральной плотности потока энергии теплового излучения, испускаемой единицей поверхности нагретого тела;

2) спектральный коэффициент поглощения, или спектральная поглощательная способность тела *a*(ν,T), численно равна отношению спектральной плотности лучистого потока $\Phi_{\nu,погл}$, поглощаемого телом, к падающей на это тело извне спектральной плотности потока $\Phi_{\nu,пад}$, т.е.

$$a(\nu,T) = \Phi_{\nu,погл} / \Phi_{\nu,пад} ,$$

Тела, которые полностью поглощают все падающее на них излучение, называются абсолютно черными. Очевидно, что для абсолютно черных тел *a*(ν,T)≡1. Спектральную плотность энергетической светимости абсолютно черного тела будем обозначать символом *r*(ν,T).

Наряду со спектральными характеристиками теплового излучения широко используются так называемые интегральные характеристики:

1) интегральная энергетическая светимость тела E, Вт/м^2, численно равна потоку энергии теплового излучения, испускаемому единицей поверхности нагретого тела;

2) интегральная поглощательная способность тела A, численно равна отношению поглощаемого телом лучистого потока к падающему на это тело извне лучистому потоку, т.е.

$$A = \Phi_{погл} / \Phi_{пад}$$

Для абсолютно черного тела, очевидно, A=1. Интегральную энергетическую светимость абсолютно черного тела будем обозначать $R_э$.

Между интегральными и спектральными характеристиками теплового излучения имеются соотношения:

$$E = \int_0^\infty e(\nu,T)d\nu; R_э = \int_0^\infty r(\nu,T)d\nu \qquad (1)$$

лами. Равновесное тепловое излучение подчиняется закону Кирхгофа, согласно

которому отношение спектральной плотности энергетической светимости тела к его спектральной поглощательной способности, взятой при той же частоте и температуре, не зависит от природы тела и равно спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела при этой частоте и температуре, т.е.

$$e(\nu,T)/a(\nu,T)=r(\nu,T) \qquad (2)$$

Закон Кирхгофа остается справедливым и для интегральных характеристик: отношение интегральной энергетической светимости тела к его интегральной поглощательной способности, взятой при той же температуре, не зависит от природы тела и равно интегральной энергетической светимости абсолютно черного тела при этой температуре, т.е.

$$E/A=R_э \qquad (3)$$

Согласно закону Стефана-Больцмана интегральная энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его температуры

$$R_э=\sigma T^4 \qquad (4)$$

Закон смещения Вина: $f(\omega,T)=\omega^3F(\frac{\omega}{T})$,

($F\left(\frac{\omega}{T}\right)=F(\frac{2\pi c}{\lambda T})$) из чего следует

$$\lambda_{max}T=const=b$$

λ_{max} – длина волны которой соответствует максимум отношения испускательной и поглощательной способностей при данной температуре.

$b=2{,}9*10^{-3}$ мК , *постоянная Вина*

Б1 №2. Дано: одн. прям. яма
сост-е n
$\langle p^2\rangle$ – ?

Решение:

$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}$

$\hat{p}^2=-\hbar^2\Delta$

$\langle p^2\rangle=\int\limits_{V\to\infty}\psi^*(\hat{\varphi}\psi)\,dV$

$\hat{\varphi}\psi=\hat{p}^2\psi=-\hbar^2\Delta\psi_n=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi_n(x))=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}\right)$

$\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}\right)''_{xx}=\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi n x}{a}\right)'_x=-\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{\pi^2n^2}{a^2}\sin\frac{\pi n x}{a}$

$\hat{p}^2\psi=\hbar^2\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{\pi^2n^2}{a^2}\sin\frac{\pi n x}{a}$

$\langle p^2\rangle=\int\limits_{R^N}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}\cdot\hbar^2\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{\pi^2n^2}{a^2}\sin\frac{\pi n x}{a}\,dV=$ (dx)

$=\int\limits_0^a\frac{2\pi^2n^2\hbar^2}{a^3}\sin^2\frac{\pi n x}{a}\,dx=\frac{2\pi^2n^2\hbar^2}{a^3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{\pi^2n^2\hbar^2}{a^2}$

2.

3. Коэффициент прозрачности потенциального барьера, его физический смысл.

Коэффициентом прозрачности потенциального барьера называется отношение плотности потока прошедших сквозь барьер частиц к плотности потока падающих на барьер частиц. Для барьера произвольной формы он приближенно равен:

$$D \cong C\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}\,\mathrm{d}x\right),$$

где C — коэффициент порядка 1, x_1, x_2 — координаты точек, для которых $U(x)=E$, $x_2 - x_1$ — ширина барьера для частицы с энергией E, $U_{max} - E$ — высота барьера[1].

Билет 2

1. Дискретный характер испускания и поглощения электромагнитного излучения веществом. Формула Планка для равновесного теплового излучения. Квантовое объяснение законов теплового излучения.

Дискретный характер испускания и поглощения электромагнитного теплового излучения веществом. (Гипотеза Планка): ТИ излучается и поглощается порциями, энергия которых пропорциональна частоте: $\varepsilon = \hbar\omega$ ($\hbar = 1{,}055 * 10^{-34}$Дж $*$ с)

***

Формула Планка для равновесного ТИ:

$$r^*{}_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} * \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right]-1}$$

$$u_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} * \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right]-1}$$

2.

Б2 №2. Одн. пот. яма $n = 3$

$P_{\text{вер. трети}}$ - ?

Решение: $\psi_{n=3}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}$

2я треть $= \frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}$

$$P_{\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3}} = \int_{a/3}^{2a/3}|\psi_3(x)|^2dx = \int_{a/3}^{2a/3}\frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi x}{a}dx = \frac{2}{a}\int_{a/3}^{2a/3}\left(\frac12 + \frac12\cos\frac{6\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{a}\left[\frac12 x + \frac12\cdot\frac{a}{6\pi}\sin\frac{6\pi x}{a}\right]\Bigg|_{a/3}^{2a/3} = \frac{2}{a}\left[\frac12\cdot\frac{2a}{3} + \frac{a}{12\pi}\sin\frac{6\pi}{a}\cdot\frac{2a}{3} - \frac12\cdot\frac{a}{3} - \frac{a}{12\pi}\sin\frac{6\pi}{a}\frac{a}{3}\right] =$$

$$= \frac{2}{a}\left[\frac{a}{6} + \underbrace{\frac{a}{12\pi}\sin 4\pi}_{\to 0} - \underbrace{\frac{a}{12\pi}\sin 2\pi}_{\to 0}\right] = \frac13$$

3. Работа выхода электрона из металла, ее физический смысл

Если рассматривать металл как систему заряженных частиц: в металле имеются положительно заряженные ионы, расположенные в узлах кристаллической решетки, и газ свободных электронов. Ионы создают внутри металла электрическое поле, потенциал которого будем считать одинаковым повсюду внутри металла. Свободный электрон внутри металла, таким образом обладает потенциальной энергией $U_0 = -e\varphi_0$

Также электроны внутри металла сами по себе обладают кинетической энергией, при T=0 максимально возможная кинетическая энергия электрона в металле равна энергии Ферми, а при $T \neq 0$, вследствие теплового возбуждения

$$E_{max} > E_F$$

Однако, поскольку эта разница несущественно, считают

$$E_{max} = E_F$$

Рис. 6.14. Свободные электроны в металле:
а — внутренний потенциал φ; *б* — энергетические уровни электронов в металле при $T = 0$

Чтобы вырвать электрон из металла, нужно затратить энергию, равную разности глубины потенциальной ямы и кинетической энергии электрона. Наименьшая работа, которая затрачивается для вырывания электрона, обладающего максимальной кинетической энергией, без потерь энергии на взаимодействие с кристаллической решеткой и другими электронами, называется работой выхода электрона из металла, и равна:

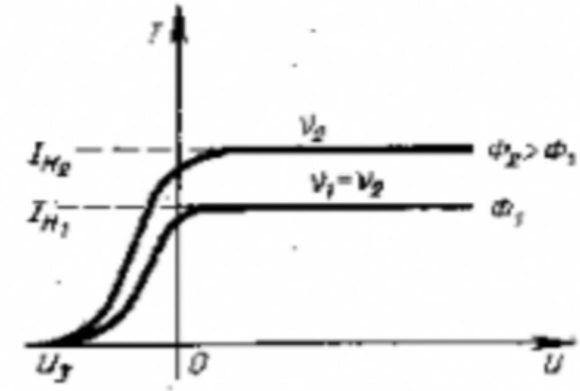
$$A_{вых} = e\varphi_0 - E_F$$

Билет 3

1. Фотоэффект, его законы. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.

Фотоэффектом называются различные процессы поглощения фотона квантовой системой. Фотоэффект может быть внешним (эмиссия электронов с поверхности металла), внутренним (образование в полупроводнике пары электрон-дырка, что повышает концентрацию носителей тока, следовательно, общую электропроводность, при поглощении фотона), также к фотоэффекту относится фотоионизация – ионизация атома при поглощении фотона.

На установке для исследования внешнего фотоэффекта током насыщения называют максимальный ток, достигаемый, когда все эмиссированные электроны попадают с катода на анод, запирающим напряжением – напряжение, при котором пропадает фотоэффект.



Законы фотоэффекта:

a) Ток насыщения пропорционален потоку падающего излучения.
b) $T_{max} = eU_{\text{зап}}$ не зависит от интенсивности излучения, но зависит от материала фотокатода, и линейно зависит от частоты падающего света (линейно возрастает с увеличением частоты).
c) Для каждого материала фотокатода существует красная граница фотоэффекта – такая длина волны, что при увеличении длины волны падающего света больше красной границы фотоэффект прекращается.

Работа выхода: с точки зрения квантовой физики электроны в металле находятся в потенциальной яме. Энергия электрона внутри ямы принимает дискретные значения, наибольшее из которых называется энергией Ферми. Работой выхода из металла называется энергия, которую нужно придать электрону Ферми для вылета из потенциальной ямы металла (при условии, что электрон не теряет энергию на взаимодействие с другими электронами и дефектами кристаллической решетки)

Уравнение Эйнштейна:

$$T_{max} = \hbar\omega - A_{\text{вых}}$$

Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения: ТИ является как потоком единичных неделимых частиц, так и волнами, способными к дифракции, интерференции и поляризации.

2. Б3 №2. $E_к = 10$ эВ $= 16 \cdot 10^{-19}$ Дж
$l \sim ?$

Решение:

$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

$E_к = \frac{p^2}{2m_0} \Rightarrow p = \sqrt{2m_0E_к}$ (опр. точно)

$\Delta x \sim l$ — неопр.

$l \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0E_к}} = \ldots$

3. Главное квантовое число электрона в атоме водорода, его физический смысл.

Главное квантовое число — целое число, для водорода и водородоподобных атомов определяет возможные значения энергии. В случаях сложных атомов нумерует уровни энергии с фиксированным значением азимутального (орбитального) квантового числа l[1]:

$$n = l+1,\ l+2,\ l+3,\ \ldots.$$

Является первым в ряду квантовых чисел, который включает в себя главное, орбитальное и магнитное квантовые числа, а также спин. Эти четыре квантовых числа определяют уникальное состояние электрона в атоме (его волновую функцию). При увеличении главного квантового числа возрастает энергия электрона. Максимальное возможное значение главного квантового числа для электронов атома элемента в основном состоянии равно номеру периода элемента.

и определяет *полную энергию электрона в любом квантовом состоянии*

$$E_n = -\frac{m_0 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}6\ \text{эВ}}{n^2}.$$

Билет 4

1. Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.

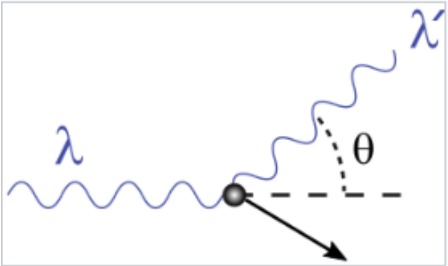
Комптон обнаружил, что в рассеянном монохроматическом излучении можно обнаружить излучение с длиной волны большей, чем основная.

Эффект Комптона объясняется упругим рассеиванием фотонов на свободных электронах вещества.

Часть импульса фотон передает электрону, от чего уменьшается энергия фотона и увеличивается его длина волны.

Определим зависимость

$\lambda` - \lambda = f(\theta)$, записав уравнения законов сохранения энергии и импульса для системы из электрона и фотона, а также релятивистского инварианта для электрона (*k — волновой вектор электрона, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$*)



Излучение с длиной волны λ направлено слева направо. После взаимодействия с электроном оно меняет длину волны на λ', а направление на угол θ относительно первоначального направления. Стрелкой указано направление движения электрона, с которым провзаимодействовал фотон.

$$\begin{cases} \hbar\omega + mc^2 = E_{эл} + \hbar\omega` \\ \hbar\bar{k}_ф = \hbar\bar{k}`_ф + \bar{P}_э \\ E_{эл}^2 - P_э^2c^2 = m^2c^4 \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $\lambda` - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - cos\theta) = \lambda_c(1 - cos\theta)$

$\lambda_c = 2{,}43 * 10^{-12}$м - длина волны Комптона для электрона.

Мы не наблюдаем комптоновского рассеяния на ядрах, поскольку из-за их большой массы величина комптоновской длины волны для ядер слишком мала. Эффект комптоновского рассеивания на электронах мы наблюдаем только в рентгеновском излучении, потому что длина рентгеновского излучения сопоставима с длиной волны Комптона.

2.

Б4№2. Кратн. вырожд-е 3го эн. уровня?

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2)$$

I ур. E_{111}

II ур. $E_{112}, E_{121}, E_{211}$

III ур. $E_{122}, E_{212}, E_{221}$ $\Rightarrow$ 3 ф-ций $\Psi_{122}, \Psi_{212}, \Psi_{221}$

Кратность вырож-я = 3.

3. Энергия ионизации атома, её физический смысл.

Придавая n целочисленные значения, получаем для атома водорода энергетические уровни, представленные на рисунке. Минимальная энергия атома водорода $E_1 = -13{,}55$ эВ. Максимальная энергия $E_\infty = 0$ при $n = \infty$ называется ***энергией ионизации*** атома (при $E = E_\infty$ происходит отрыв электрона от атома). Переход из стационарного состояния n в стационарное состояние m сопровождается испусканием кванта:

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = hR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad \text{где } R = \frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2}.$$

Билет 5

1. Ядерная модель атома. Постулаты Бора. Энергетический спектр атома водорода в теории Бора.

Ядерная модель атома

Резерфорд на основании результатов эксперимента по рассеянию α-частиц на атомах металлической фольги обосновал планетарную модель строения атома. Согласно этой модели, атом состоит из тяжёлого положительно заряженного ядра очень малых размеров (~ 10^-15 м), вокруг которого по некоторым орбитам движутся электроны. Радиусы этих орбит имеют размеры ~ 10^-10 м. Наличие у электрона заряда делает планетарную модель противоречивой с точки зрения классической физики, т.к. вращающийся вокруг ядра электрон, как и любая ускоренно движущаяся заряженная частица должен излучать электромагнитные волны. Спектр такого излучения должен быть непрерывным. В опытах наблюдается линейчатый спектр излучения атомов. Кроме того, непрерывное излучение уменьшает энергию электрона, и он из-за уменьшения орбиты обязан был бы упасть на ядро.

Постулаты Нильса Бора *(водородоподобных атомов)*

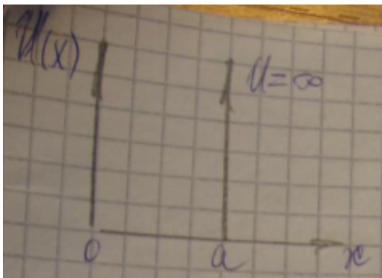
Нильс Бор «спас» планетарную модель для атома водорода, сформулировав три постулата:

1. В атоме существуют стационарные состояния, в которых излучение отсутствует. Этим состояниям соответствуют стационарные орбиты, движение электронов по которым не сопровождается излучением ЭМВ.

2. Электрон на стационарной орбите имеет дискретные значения орбитального момента импульса: $mvr = n\hbar$, $n = 1,2,3$ ...

3. При переходе 1 электрона с одной орбиты на другую выделяется/поглощается 1 фотон энергии $\hbar\omega = \Delta E$

2.



$$U(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ 0, & 0<x<a\\ \infty, & x>a\end{cases}$$

Внутри ямы $\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar}E\psi=0$

$k=\frac{2m}{\hbar^2}E_n \Rightarrow \psi''+k\psi=0$

$\psi(x)=A\sin kx+\underbrace{\cancel{B\cos kx}}_{0}$

$\psi(x)=A\sin kx$

$k=\frac{2m}{\hbar^2}E_n=\frac{\pi^2}{a^2}n^2 \Rightarrow E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$

$\int_0^a|\psi|^2dx=1 \Rightarrow A^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}nx\right)dx=1 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{a}}$

$\boxed{\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right)}$ Во 2м возбужд. состоянии $n=3$.

$\psi_3(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}3x\right)$; $\hat{E}_n=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — опер-р кин. эн-ии

$\langle E_k\rangle=\int_0^a\psi_3\hat{E}_n\psi_3dx=\frac{2}{a}\int_0^a\sin\left(\frac{\pi}{a}3x\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{a}3x\right)\right)\right)dx=$

$=\boxed{\frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$ Ответ

3. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, его физический смысл.

$$h\nu=A+\frac{mv^2}{2}$$

Смысл уравнения Эйнштейна:

энергия кванта тратится на работу выхода электрона из металла и сообщение электрону кинетической энергии.

Билет 6

1. Корпускулярно-волновой дуализм материи. Гипотеза де Бройля. Опыты, подтверждающие наличие волновых свойств у микрочастиц.

Установление корпускулярно-волнового дуализма в оптических явлениях имело очень большое значение для дальнейшего развития физики. Впервые была выявлена двойственная - корпускулярно-волновая - природа физического объекта - электромагнитного излучения. Естественно было ожидать, что подобная двойственность может не ограничиваться только оптическими явлениями.

В 1924 г французский физик *Луи де Бройль* выдвинул смелую гипотезу, согласно которой корпускулярно-волновой дуализм имеет универсальный характер. Согласно *гипотезе де Бройля* каждая материальная частица обладает волновыми свойствами, причем соотношения, связывающие волновые и корпускулярные характеристики частицы остаются такими же, как и в случае электромагнитного излучения. Напомним, что энергия E и импульс p фотона связаны с круговой частотой ω и длиной волны λ соотношениями

$$E = \hbar\omega, \qquad p = k\hbar = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

По гипотезе де Бройля движущейся частице, обладающей энергией E и импульсом p, соответствует волновой процесс, частота которого равна

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \qquad \textbf{(2.1)}$$

а длина волны

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p}. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Как известно, плоская волна с частотой ω, распространяющаяся вдоль оси x, может быть представлена в комплексной форме

$$\xi(x,t) = A\exp[-i(\omega t - kx)],$$

где A - амплитуда волны, а $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число.

Согласно гипотезе де Бройля свободной частице с энергией E и импульсом p, движущейся вдоль оси x, соответствует плоская волна

$$\Psi(x,t) = A\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right], \qquad \textbf{(2.3)}$$

распространяющаяся в том же направлении и описывающая волновые свойства частицы. Эту волну называют *волной де Бройля*. Соотношения, связывающие волновые и корпускулярные свойства частицы

$$E = \hbar\omega, \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \qquad \textbf{(2.4)}$$

где $\vec{p}$ импульс частицы, а $\vec{k}$ - волновой вектор, получили название уравнений де Бройля.

Опыты по дифракции микрочастиц.

Опыт Дэвиссона-Джермера (1927 г.) – дифракция пучка электронов, выстреливаемого электронной пушкой, при отражении от монокристалла никеля.

Детектор показывал зависимость интенсивности рассеянного пучка электронов от угла рассеяния. Результаты опыта были идентичны результатам опыта по дифракции рентгеновских лучей, была получена формула идентичная условию Вульфа-Брэггов ($2dsin\theta$ – разность хода) – условие максимума:

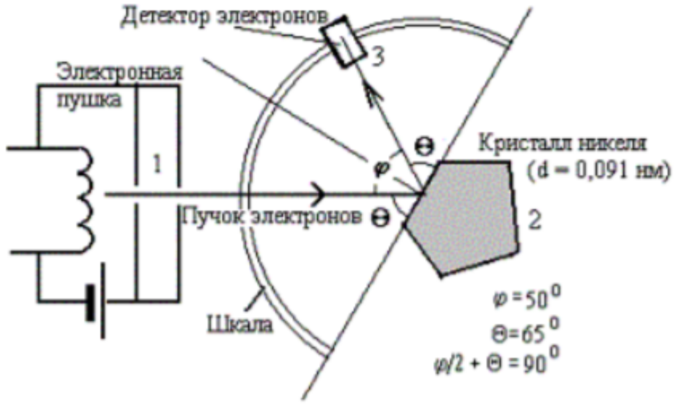
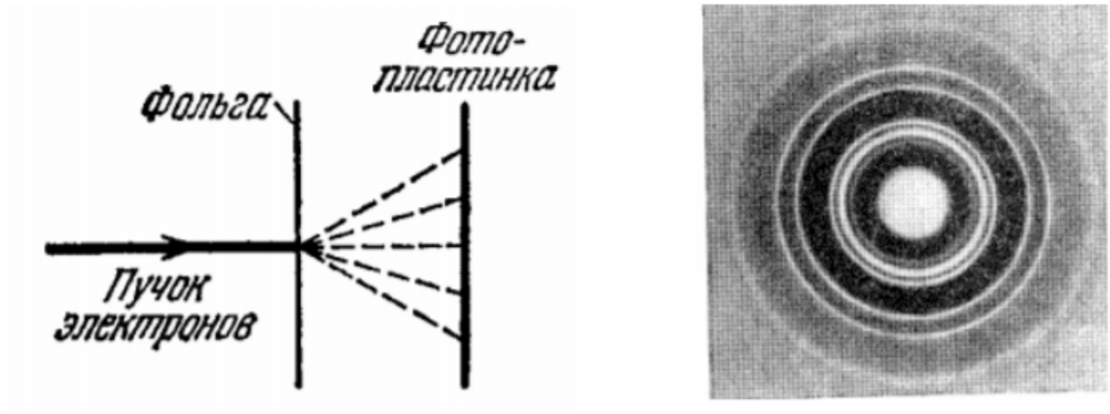


Рис. 2

$$2dsin\theta = n\lambda_{Б}\ , n = 1,2,3 \ldots$$

Опыт Томсона-Тартаковского



а б

Рис. 17.4

Для наблюдения дифракции электронов Томсон и Тартаковский пропускали пучок электронов через металлическую поликристаллическую пластину, рассеянные на хаотически расположенных кристаллах электроны давали на фотографической пластинке систему интерференционных колец. Чтобы объяснить, что система интерференционных колец порождается не рассеянными электронами, а вторичным рентгеновским излучением, на пути рассеянных электронов между металлической пластинкой и фотопластинкой создавалось дополнительное магнитное поле, искажающее интерференционную картину.

2.

Дано	Решение
$\Delta E_n = E_к$ T	$\Delta E_n = (2n+1)\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}$,
l — ?	$E_к = \dfrac{3}{2}kT$.

$$(2n+1)\frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2} = \frac{3}{2}kT, \qquad l = \hbar\pi\sqrt{\frac{2n+1}{3mkT}}.$$

Ответ $l = \hbar\pi\sqrt{\dfrac{2n+1}{3mkT}}$.

3. Испускательная способность тела при тепловом излучении r, её физический смысл.

1) спектральная плотность энергетической светимости тела e(ν,T), (Вт*с)/м^2, численно равна спектральной плотности потока энергии теплового излучения, испускаемой единицей поверхности нагретого тела;

Билет 7

1. Волновая функция, её статистический смысл и условия, которым она должна удовлетворять. Принцип суперпозиции в квантовой механике.

Для описания поведения квантовых систем вводится ***волновая функция*** (другое название — *пси-функция*) $\Psi(x,y,z,t)$. Она определяется таким образом, чтобы вероятность $\mathrm{d}w$ того, что частица находится в элементе объёма $\mathrm{d}V$, была равна:

$$\mathrm{d}w = |\Psi^2|\,\mathrm{d}V.$$

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ~~Физический~~ смысл имеет не сама функция Ψ, а квадрат её модуля $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$, которым задаётся интенсивность волн де Бройля (здесь Ψ^* – функция, комплексно сопряжённая с Ψ).

Величина $|\Psi|^2$ имеет смысл ***плотности вероятности*** ρ_w, а сама волновая функция Ψ имеет смысл ***амплитуды вероятности***.

$$\rho_w = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}V} = |\Psi|^2$$

Условие нормировки вероятностей получается из того, что вероятность существования частицы где-либо в пространстве равна единице (интеграл вычисляется по всему бесконечному пространству).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2\,\mathrm{d}V = 1$$

Волновая функция, характеризующая вероятность обнаружения действия микрочастицы в элементе объёма, *должна быть*: **1)** ***конечной*** (вероятность не может быть больше единицы), **2)** ***однозначной*** (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и **3)** ***непрерывной*** (вероятность не может изменяться скачком).

Волновая функция позволяет вычислить средние значения физических величин, характеризующих данный микрообъект.

Например, среднее расстояние $\langle r\rangle$ имеет вид:

$$\langle r\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r|\Psi|^2\,\mathrm{d}V$$

Волновая функция удовлетворяет **принципу суперпозиции:** если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$, то она также может находиться в состоянии, описываемом линейной комбинацией этих функций (где C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – произвольные, вообще говоря, комплексные числа).

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$$

Сложение *волновых функций* (амплитуд вероятностей), а не *вероятностей* (определяемых квадратами модулей волновых функций) принципиально отличает квантовую теорию от классической статистической теории, в которой для независимых событий справедлива *теорема сложения вероятностей*.

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \quad b = 2{,}9 \cdot 10^{3}\ К \cdot м$$

$$R^{*} = \sigma T^{4}, \quad \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{Вт}{м^2 К^4}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{R^{*}}{\sigma}}.$$

$$\lambda_{max} = \frac{b}{\sqrt[4]{\frac{R^{*}}{\sigma}}} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{3}}{\sqrt{\frac{5{,}67 \cdot 10^{-8}}{250 \cdot 10^{3}}}} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{3}}{0{,}685 \cdot 10^{-5}} = 0{,}423 \cdot 10^{8}\ м.$$

2.
3. Физический смысл условия Брэгга-Вульфа.

Условие Вульфа — Брэгга (также **Условие Вульфа — Брэггов**) определяет направление максимумов дифракции упруго рассеянного на кристалле рентгеновского излучения. Выведено в 1913 независимо У. Л. Брэггом и Г. В. Вульфом. Имеет вид:

$$2d \sin\theta = n\lambda$$

где *d* — межплоскостное расстояние, *θ* — угол скольжения (брэгговский угол), *n* — порядок дифракционного максимума, *λ* — длина волны.

Билет 8

1. Основные постулаты квантовой механики. Вероятностный характер результатов измерений в квантовой механике.

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией Ψ ($q_1, q_2, \ldots, q_n, t$) от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

Обобщенная координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — *x*, *y*, *z*) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi d\tau$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема $d\tau$.

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi \, d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Элемент объема

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Оператор — это закон, по которому одной функции *f* ставится в соответствие другая функция *g*. Оператор определяет, какое действие должно быть произведено над функцией *f*, чтобы перевести ее в функцию *g*:

$$\hat{L}f = g$$

Оператор

Два оператора квантовой механики постулируются: **оператор координат** и **оператор импульса**. Остальные операторы квантовой механики выводятся из этих двух.

Оператор координаты есть просто координата, и его действие на любую функцию заключается в умножении ее на x.

$\hat{x}$ — оператор координаты

$$\hat{x}f = xf$$

Оператор импульса определяется через операторы его проекций.

$$\hat{L}\Psi_i = \lambda\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ, имеющей квантово-механический оператор λ, в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle\lambda\rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle\Psi|\lambda|\Psi\rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle\Psi|\lambda|\Psi\rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2, то она может находиться и в состоянии

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

$\hat{p}_x$ — оператор импульса

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

—Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

Собственное значение

Собственная функция оператора H

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = const$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2, либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2.

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = -\Psi(q_1, q_3, q_2, \dots, q_n, t)$$

Квантовая механика является статистической теорией, вследствие того, что измерение начальных условий микрообъекта изменяет его состояние и приводит к *вероятностному* описанию исходного положения микрообъекта, которое описывается волновой функцией[6]. Центральным понятием квантовой механики является комплексная волновая функция. Можно описать изменение волновой функции до нового измерения. Его ожидаемый результат зависит вероятностным образом от волновой функции. Физически значимым является лишь квадрат модуля волновой функции, означающий вероятность нахождения изучаемого микрообъекта в некотором месте пространства.[7][8]

2.

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}}$$

Услие Брэгга-Вульфа: $2d\sin\theta = n\lambda$

$n = 1 \Rightarrow \lambda_Б = 2d\sin\theta$

$$\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} = 2d\sin\theta, \quad \sin\theta = 1.$$

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{2meU} = d^2 \Rightarrow U = \frac{\pi^2\hbar^2}{2med^2}$$

3. Условие нормировки волновой функции, его физический смысл.

Условие нормировки волновой функции (вытекает из вероятностного смысла волновой функции):

$$\int_{\infty} \Psi\overline{\Psi}\mathrm{dV} = 1$$

Условие нормировки выполняется не во всех задачах квантовой механики, например, интеграл будет расходиться в случае, если частица удаляется в бесконечность.

Условие нормировки вероятностей получается из того, что вероятность существования частицы где-либо в пространстве равна единице (интеграл вычисляется по всему бесконечному пространству).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 \, dV = 1$$

Билет 9

1. Уравнение Шредингера, его свойства. Статистическая интерпретация волновой функции.

Наиболее общая форма уравнения Шрёдингера — это форма, включающая зависимость от времени

Зависящее от времени уравнение *(общий случай)*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}(p,q)\Psi,$$

где $\hat{H}$ — гамильтониан, q — координаты, $p_r = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_r}$ — импульсы.

после упрощений приобретает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi \qquad \text{или} \qquad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$$

– уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Физический смысл имеют только ***регулярные*** волновые функции – *конечные, однозначные и непрерывные вместе со своими первыми производными*. Эти условия выполняются только при определённом наборе E. Эти ***значения энергии*** называются ***собственными***. Решения, которые соответствуют собственным значениям энергии, называются ***собственными функциями***. Собственные значения E могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд. В первом случае говорят о ***непрерывном*** (или ***сплошном***) ***спектре***, во втором – о ***дискретном спектре***.

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

1) $T = 3K$ $\lambda = \frac{2,9 \cdot 10^3}{3} = 0,96 \cdot 10^3 м$ - радиоволна

2) $T = 300K$ $\lambda = \frac{2,9 \cdot 10^3}{300} = 0,96 \cdot 10 м = 9,6 м$ - радиоволн

3) $T = 3000K$ $\lambda = \frac{2,9 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3} = 0,96 м$ - радиоволны

4) $T = 10000 K$ $\lambda = \frac{2,9 \cdot 10^3}{10\,000} = 0,29 м$ - радиоволна

2.
3. Физический смысл полной энергетической светимости R, её размерность.

Энергети́ческая свети́мость M_e — физическая величина, одна из энергетических фотометрических величин[1]. Характеризует мощность оптического излучения, излучаемого малым участком поверхности единичной площади. Равна отношению потока излучения $d\Phi_e$, испускаемого малым участком поверхности источника излучения, к его площади dS[1]:

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS}.$$

Энергет
Размерность
Ед
СИ
СГС
энергетическа

Билет 10

1. Стационарные состояния, их временная зависимость. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Стационарные состояния, их временная зависимость.

Если силовая функция не зависит от времени, ее поле называется стационарным.

Если частица движется в стационарном поле, существует состояние, в котором ее энергия определена. Это состояние называется стационарным. Также в стационарном состоянии определены все измеряемые физические величины.

Полная энергия частицы в стационарном поле является постоянной величиной.

Волновую функцию в стационарном поле можно представить в виде $\Psi = \psi \exp\left[-\frac{i}{\hbar}Et\right]$ - **временная зависимость.**

Уравнение Шредингера для стационарного состояния:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

Свойства уравнения Шредингера – регулярность волновой функции, статистическая интерпретация.

2. Б 10 №2. Решение.

По II зну Ньютона $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$; $v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r m_e}$

$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

Будем считать, что $\Delta x \approx r$, $\Delta p_x \approx p = mv$ $\Rightarrow$ $r m_e v \geq \frac{\hbar}{2}$, $r \geq \frac{\hbar}{2 m_e v}$

$r m_e v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 v}$

$r m_e \cdot \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r m_e}} \geq \frac{\hbar}{2}$

$\sqrt{r} \geq \frac{\hbar \cdot 2\sqrt{\pi\varepsilon_0}}{2\sqrt{m_e}\cdot e}$; $r \geq \frac{\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \simeq 0{,}13\cdot 10^{-10}$ м

3. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, его физический смысл.

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$$

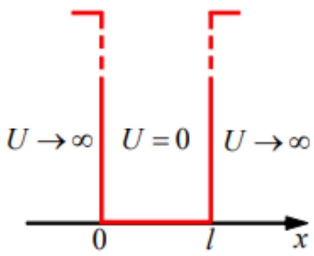
Смысл уравнения Эйнштейна:

энергия кванта тратится на работу выхода электрона из металла и сообщение электрону кинетической энергии.

Билет 11

1.Частица в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности для различных состояний частицы.

13. Частица в одномерной прямоугольной "потенциальной яме" с бесконечно высокими "стенками"



Рассмотрим одномерную "потенциальную яму":

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le l \\ \infty, & x > l \end{cases}$$

где l – ширина "ямы", а энергия отсчитывается от ее дна.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний в пределах ямы:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0, \quad \text{где } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

За пределы "ямы" частица не проникает, поэтому волновая функция вне "ямы" равна нулю, следовательно, на границах "ямы" непрерывная волновая функция также должна обращаться в нуль

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Этим граничным условиям удовлетворяет решение уравнения Шредингера $\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$ при $B = 0$ и $k = \frac{n\pi}{l}$. Поскольку $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, то:

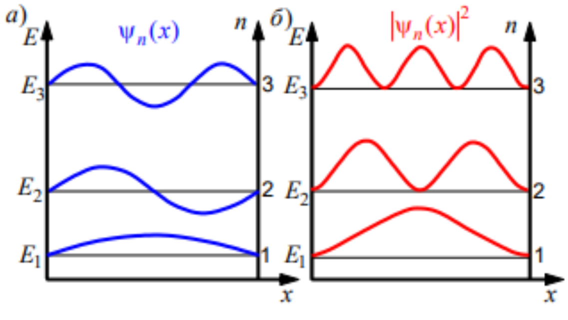
$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$ – ***собственные значения энергии***.

Минимально возможное значение энергии: $$E_{\min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}.$$

Таким образом, энергия частицы в бесконечно высокой потенциальной "яме" принимает лишь определённые *дискретные* значения, т. е. ***квантуется***.

Квантованные значения энергии E_n называются ***уровнями энергии***, а число n, определяющее энергетические уровни частицы, называется ***главным квантовым числом***.

Собственные волновые функции $\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi}{l}x$, с учётом нормировки $\int_0^l \psi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x\,\mathrm{d}x = 1$, будут иметь вид:



$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

На рисунке изображены графики собственных функций (*а*) и плотность вероятности (*б*) обнаружения частицы на разных расстояниях от "стенок" ямы, определяемая выражением:

$$|\psi_n(x)|^2 = \psi_n(x)\psi_n^*(x).$$

2.

Б11 №2 $\lambda_1 = 0{,}35$ мкм $= 0{,}35 \cdot 10^{-6}$ м

$\lambda_2 = 0{,}54 \cdot 10^{-6}$ м

V_{max} отл. в $\eta = 2$ раза.

$A_{вых}$ – ?

Решение:

$$\hbar w = A_{вых} + E_m$$

$$E_m = \frac{m_e V_m^2}{2}$$

$$\hbar w = \hbar \cdot \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = A_{вых} + E_m = A_{вых} + \frac{m_e V_m^2}{2}$$

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} = A_{вых} + \frac{m_e V_{m1}^2}{2} \qquad \lambda_1 < \lambda_2 \quad \frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_2}$$

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} = A_{вых} + \frac{m_e V_{m2}^2}{2} \qquad \Rightarrow V_{m1} > V_{m2} \quad \Rightarrow V_{m1} = 2V_{m2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} = A_{вых} + \dfrac{m_e \cdot 4V_{m1}^2}{2} \\ \dfrac{2 \cdot 2\pi\hbar c}{\lambda_2 m_e} = \dfrac{2A_{вых}}{m_e} + V_{m2}^2 \end{cases}; \quad V_{m2}^2 = \left(\frac{4\pi\hbar c}{m_e \lambda_2} - \frac{2A_{вых}}{m_e}\right)$$

2 ур., 2 неизв.

$$A_{вых} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - 2m_e V_{m2}^2 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - 2m_e\left(\frac{4\pi\hbar c}{m_e\lambda_2} - \frac{2A_{вых}}{m_e}\right) =$$

$$= \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - \frac{8\pi\hbar c}{\lambda_2} + 4A_{вых} \Rightarrow 3A_{вых} = \frac{8\pi\hbar c}{\lambda_2} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} = 2\pi\hbar c\left(\frac{4}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

$$A_{вых} = \frac{2}{3}\pi\hbar c\left(\frac{4}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

3.Волновая функция, её статистический смысл.

Для описания поведения квантовых систем вводится ***волновая функция*** (другое название – *пси-функция*) $\Psi(x, y, z, t)$. Она определяется таким образом, чтобы вероятность $\mathrm{d}w$ того, что частица находится в элементе объёма $\mathrm{d}V$, была равна:

$$\mathrm{d}w = \left|\Psi^2\right| \mathrm{d}V.$$

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ~~Физический~~ смысл имеет не сама функция Ψ, а квадрат её модуля $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$, которым задаётся интенсивность волн де Бройля (здесь Ψ^*– функция, комплексно сопряжённая с Ψ).

Величина $|\Psi|^2$ имеет смысл ***плотности вероятности*** ρ_w, а сама волновая функция Ψ имеет смысл ***амплитуды вероятности.***

$$\rho_w = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}V} = |\Psi|^2$$

Условие нормировки вероятностей получается из того, что вероятность существования частицы где-либо в пространстве равна единице (интеграл вычисляется по всему бесконечному пространству).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 \, \mathrm{d}V = 1$$

Волновая функция, характеризующая вероятность обнаружения действия микрочастицы в элементе объёма, *должна быть*: **1)** ***конечной*** (вероятность не может быть больше единицы), **2)** ***однозначной*** (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и **3)** ***непрерывной*** (вероятность не может изменяться скачком).

Волновая функция позволяет вычислить средние значения физических величин, характеризующих данный микрообъект.

Например, среднее расстояние $\langle r \rangle$ имеет вид: $\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r |\Psi|^2 \, dV$

Волновая функция удовлетворяет **принципу суперпозиции:** если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$, то она также может находиться в состоянии, описываемом линейной комбинацией этих функций (где C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – произвольные, вообще говоря, комплексные числа).

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$$

Сложение *волновых функций* (амплитуд вероятностей), а не *вероятностей* (определяемых квадратами модулей волновых функций) принципиально отличает квантовую теорию от классической статистической теории, в которой для независимых событий справедлива *теорема сложения вероятностей*.

Билет 12

1.Частица в трёхмерной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Энергетический спектр частицы. Понятие о вырождении энергетических уровней.

Трехмерная потенциальная яма. Рассмотрим частицу, находящуюся в трехмерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками (потенциальном ящике). Обозначим через $G = \{ (x, y, z) : 0 < x < a_1, 0 < y < a_2, 0 < z < a_3 \}$ внутреннюю область прямоугольного параллелепипеда (рис.4.6). В данной задаче потенциальная энергия частицы $U(x, y, z)$ имеет вид

$$U(x,y,z,) = \begin{cases} 0, & (x,y,z) \in G \\ \infty, & (x,y,z) \notin G \end{cases} .$$

Вне потенциальной ямы волновая функция частицы $\psi(x,y,z) \equiv 0$. Внутри

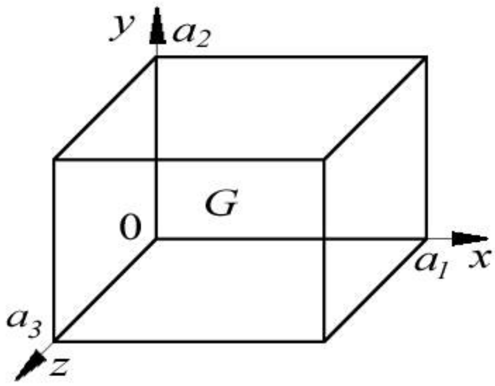


Рис. 4.6.

ямы будем, так же как и в двумерном случае, искать волновую функцию в виде произведения

$$\psi(x,y,z) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z),$$

где функция $\psi_1(x)$ зависит только от координаты x, $\psi_2(y)$ - зависит только от y, $\psi_3(z)$ - только от z.

Используя тот же самый метод решения, что и для двумерной ямы, из уравнения Шредингера в трехмерном случае получаем три одномерных уравнения

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} E_1 \psi_1(x) = 0,$$

$$\frac{d^2\psi_2(y)}{dy^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} E_2 \psi_2(y) = 0,$$

$$\frac{d^2\psi_3(z)}{dz^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} E_3 \psi_3(z) = 0,$$

где $E_1 + E_2 + E_3 = E$. Решение этих уравнений, обращающееся в нуль на границе области G, т.е. на непроницаемых стенках потенциального ящика, определяет вид волновой функции частицы

$$\psi_{n_1,n_2,n_3}(x,y,z)=\sqrt{\frac{8}{a_1a_2a_3}}\sin\frac{\pi n_1 x}{a_1}\sin\frac{\pi n_2 y}{a_2}\sin\frac{\pi n_3 z}{a_3} \qquad \textbf{(4.26)}$$

и ее энергетический спектр

$$E_{n_1,n_2,n_3}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0}\left[\left(\frac{n_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{n_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{n_3}{a_3}\right)^2\right] . \qquad \textbf{(4.27)}$$

Здесь квантовые числа n_1, n_2 и n_3 принимают значения $n_1, n_2, n_3 = 1,2,3,...$. Отметим, что и волновая функция частицы, и ее энергия в случае трехмерной потенциальной ямы зависят от трех квантовых чисел.

Рассмотрим движение частицы в кубической потенциальной яме, т.е. будем считать, что $a_1 = a_2 = a_3 = a$. В этом случае энергетический спектр частицы имеет вид

$$E_{n_1,n_2,n_3}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2),$$
$$n_1,n_2,n_3=1,2,3,... \quad . \qquad \textbf{(4.28)}$$

Энергетические уровни в кубической яме, для которых $n_1 = n_2 = n_3$, являются невырожденными, все остальные уровни вырождены. Вопрос о кратности вырождения энергетических уровней в кубической яме рассмотрен в задаче 4.4.

2.

Дебройлевская длина волны электрона:

$$\lambda_Б=\frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (1)$$

где p – импульс электрона. Будем считать, что мы имеем дело с релятивистским электроном, тогда его импульс связан с кинетической энергией следующим соотношением:

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{K(K+2mc^2)} \qquad (2)$$

m - здесь и далее масса покоя электрона.
Подставим (2) в выражение (1), тогда получим для дебройлевской длины волны соотношение:

$$\lambda_Б=\frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{K(K+2mc^2)}} \qquad (3)$$

Комптоновская длина волны электрона:

$$\lambda_C=\frac{2\pi\hbar}{mc} \qquad (4)$$

По условию задачи $\lambda_Б=\lambda_C$, поэтому мы можем записать:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{K(K+2mc^2)}}=\frac{2\pi\hbar}{mc} \qquad (5)$$

Упростив это выражение и возведя обе части в квадрат, получим квадратное уравнение относительно K:

$$K^2+2mc^2K-m^2c^4=0 \qquad (6)$$

Решая это уравнение, получим корни:

$$K_{1,2}=-mc^2\pm mc^2\sqrt{2}$$

Отрицательный корень не имеет физического смысла, поэтому в качестве результата возьмём положительный корень:

$$K=mc^2(\sqrt{2}-1) \qquad (7)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$K=9.1\cdot10^{-31}\cdot9\cdot10^{16}(\sqrt{2}-1)=3.3\cdot10^{-14}\,Дж=20.5\,кэВ$$

Ответ:

$K=mc^2(\sqrt{2}-1)$;
$K=20.5\,кэВ$.

3.Работа выхода электрона из металла, её физический смысл.

Если рассматривать металл как систему заряженных частиц: в металле имеются положительно заряженные ионы, расположенные в узлах кристаллической решетки, и газ свободных электронов. Ионы создают внутри металла электрическое поле, потенциал которого будем считать одинаковым повсюду внутри металла. Свободный электрон внутри металла, таким образом обладает потенциальной энергией $U_0 = -e\varphi_0$

Также электроны внутри металла сами по себе обладают кинетической энергией, при T=0 максимально возможная кинетическая энергия электрона в металле равна энергии Ферми, а при $T \neq 0$, вследствие теплового возбуждения

$$E_{max} > E_F$$

Однако, поскольку эта разница несущественно, считают

$$E_{max} = E_F$$

Рис. 6.14. Свободные электроны в металле:
а — внутренний потенциал φ; *б* — энергетические уровни электронов в металле при *T* = 0

Чтобы вырвать электрон из металла, нужно затратить энергию, равную разности глубины потенциальной ямы и кинетической энергии электрона. Наименьшая работа, которая затрачивается для вырывания электрона, обладающего максимальной кинетической энергией, без потерь энергии на взаимодействие с кристаллической решеткой и другими электронами, называется работой выхода электрона из металла, и равна:

$$A_{вых} = e\varphi_0 - E_F$$

Билет 13

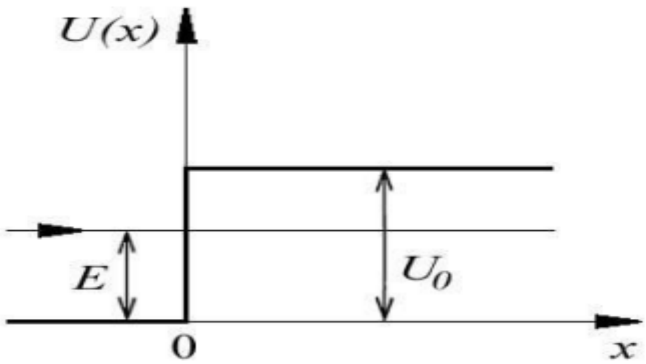
1.Движение микрочастицы в области одномерного потенциального порога. Надбарьерное отражение частицы в случае низкого порога.

Порог задается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & x > 0 \end{cases}$$

1 – область U = 0

2 – облась $U = U_0$



Уравнения Шредингера:

$$\begin{cases} \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_1 = \psi_1'' + {k_1}^2\psi_1 = 0 \\ \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = \psi_2'' - {k_2}^2\psi_2 = 0 \end{cases}$$

b) Низкий порог

Аналогично:

$$\begin{cases} \psi_1`` + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_1 = \psi_1`` + {k_1}^2\psi_1 = 0 \\ \psi_2`` + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = \psi_2`` + {k_2}^2\psi_2 = 0 \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 \exp[ik_1x] + B_1 \exp[-ik_1x] \\ \psi_2 = A_2 \exp[ik_2x] + B_2 \exp[-\, ik_2x] \end{cases}$$

Применим граничные условия, условия регулярности, условия нормированности:

1) A_1 положим 1 ; во второй области нет отраженной волны => $B_2 = 0$;
2) непрерывность: $\psi_1(0) = \psi_2(0), \psi_1`(0) = \psi_2`(0)$ =>

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ ; \ A_2 = B_1 + 1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

Получили:

$$\psi_1 = \exp[ik_1x] + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\exp[-ik_1x] \ , \qquad x < 0$$

$$\psi_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\exp[ik_2x] \ , \qquad x > 0$$

Коэффициенты отражения и прохождения:

$$\bar{J} = {}^{i\hbar}/_{2m}\,(\Psi grad\overline{\Psi} - \overline{\Psi} grad\Psi)$$

Определим $|\bar{J}_{пад}|, |\bar{J}_{отр}|, |\bar{J}_{прош}|$

$$|\bar{J}_{пад}| = \frac{\hbar k_1}{m} \ ; \ |\bar{J}_{отр}| = \frac{\hbar k_1}{m}\left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 ; |\bar{J}_{прош}| = \frac{\hbar k_2}{m}\left|\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right|^2$$

Отсюда:

Коэффициент отражения $R = \frac{|J_{отр}|}{|J_{пад}|} = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 = \left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{U}{E}}}{1+\sqrt{1-\frac{U}{E}}}\right)^2 \neq 0$

В квантовой физике есть вероятность отражения частицы от низкого потенциального барьера! ***При этом вероятность отражения не зависит от направления движения частицы.***

Коэффициент прохождения $D = \frac{|J_{прош}|}{|J_{пад}|} = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{4\sqrt{1-\frac{U}{E}}}{\left(1+\sqrt{1-\frac{U}{E}}\right)^2}$

Энергетический спектр частицы непрерывен вне зависимости от высоты порога!

2.

21. Определить ширину одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, если при переходе электрона с ~~третьего~~ 2 энергетического уровня на ~~второй~~ 1 излучается энергия 1 эВ.

Дано: $i = 3$; $n = 2$; $\Delta E = 1$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Найти: l. ($l = a$)

Решение. Энергия электрона, находящегося в потенциальной яме шириной l на n-м энергетическом уровне, определяется по формуле $E = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot n^2$. Разность энергий электрона ΔE на n-м и i-м уровнях $\Delta E = E_i = E_n = \frac{h^2}{8ml^2}(i^2 - n^2)$, откуда

$$l = h\sqrt{\frac{i^2 - n^2}{8m \cdot \Delta E}};$$

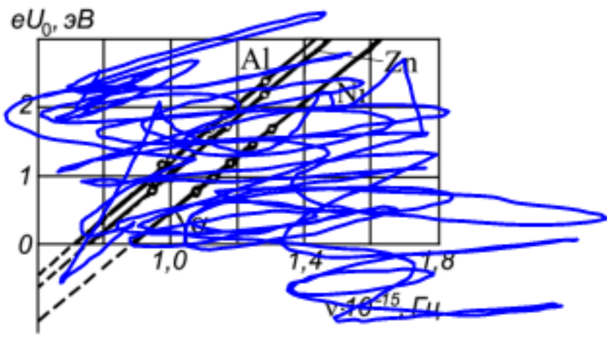
$$l = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{\cancel{9-4}\ 4-1}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} \simeq \overset{?}{\cancel{1{,}27}} \cdot 10^{-9}\ (\text{м}).$$

3. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, его физический смысл.

Оно имеет простой **физический смысл**: энергия светового кванта расходуется на вырывание электрона из вещества и на сообщение ему кинетической энергии.

Энергия падающего фотона расходуется на совершение электроном ***работы выхода*** A из металла (см. стр. 3–31) и на сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии.

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта: $h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2}$.



Это уравнение объясняет зависимость кинетической энергии фотоэлектронов от частоты падающего света (2-й закон). Предельная частота $\nu_0 = \frac{A}{h}$ (или $\lambda_0 = \frac{hc}{A}$), при которой кинетическая энергия фотоэлектронов становится равной нулю, и есть красная граница фотоэффекта (3-й закон).

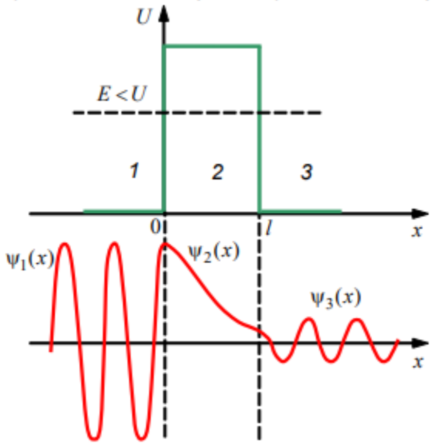
Другая форма записи уравнения Эйнштейна: $eU_0 = h(\nu - \nu_0)$.

Билет 14

1.Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп

14. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект

Рассмотрим простейший потенциальный барьер прямоугольной формы (высота U и ширина l) для одномерного движения частицы:



$$U(x)=\begin{cases}0, & x<0 \quad \text{(область 1)}\\ U, & 0\le x\le l \quad \text{(область 2)}\\ 0, & x>l \quad \text{(область 3)}\end{cases}$$

Вид волновых функций, являющихся решениями уравнения Шредингера для областей 1, 2 и 3 (см. рисунок и таблицу) свидетельствует о том, что:

1) ***В области 1*** волновая функция представляет собой сумму двух плоских волн – движущейся в сторону барьера и отражённой от барьера.
2) ***В области 2*** в случае $E<U$:

$$q=i\beta, \quad \text{где } \beta=\frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}.$$

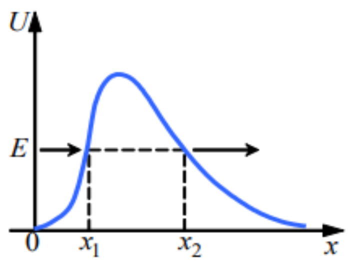
3) ***В области 3*** имеется только волна, прошедшая через барьер $(B_3=0)$, которая имеет вид волн де Бройля с той же длиной волны, но меньшей амплитудой.

Область	Уравнение Шредингера	Общее решение	Решение при $E<U$
1	$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k^2\psi_1=0$,	$\psi_1(x)=A_1\,e^{ikx}+B_1\,e^{-ikx}$	$\psi_1(x)=A_1\,e^{ikx}+B_1\,e^{-ikx}$
2	$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+q^2\psi_2=0$,	$\psi_2(x)=A_2\,e^{iqx}+B_2\,e^{-iqx}$	$\psi_2(x)=A_2\,e^{-\beta x}+B_2\,e^{\beta x}$
3	$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k^2\psi_2=0$,	$\psi_3(x)=A_3\,e^{ikx}+B_3\,e^{-ikx}$	$\psi_3(x)=A_3\,e^{ikx}$

Здесь $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$, $q^2=\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}$.

Таким образом, квантовая механика приводит к принципиально новому специфическому квантовому явлению, получившему название ***туннельного эффекта***, в результате которого микрообъект может "пройти" сквозь потенциальный барьер.

Для описания туннельного эффекта используют понятие ***коэффициента прозрачности*** D потенциального барьера, определяемого как отношение квадратов модулей прошедшей и падающей волны. Для случая *прямоугольного* потенциального барьера:



$$D=\frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}=D_0\exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\right).$$

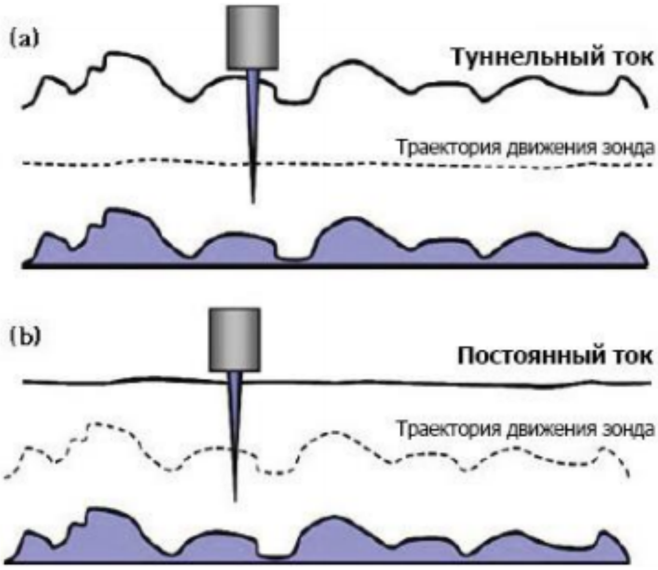
Для потенциального барьера произвольной формы:

$$D=D_0\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m[U(x)-E]}\,dx\right).$$

Прохождение частицы сквозь область, в которую, согласно законам классической механики, она не может проникнуть, можно пояснить *соотношением неопределённостей*. Неопределённость импульса Δp на отрезке $\Delta x=l$ составляет $\Delta p>h/l$. Связанная с этим разбросом в значениях импульса кинетическая энергия $\frac{(\Delta p)^2}{2m}$ может оказаться достаточной для того, чтобы полная энергия частицы оказалась больше потенциальной.

Сканирующий туннельный микроскоп (СТМ):

Устройство, позволяющее «увидеть атом»: между иглой и поверхностью металлов создается разность потенциалов – потенциальный барьер. В силу туннельного эффекта между металлом и иглой возникает туннельный ток, по величине которого можно судить о вероятности прохождения, пропорциональной расстоянию от иглы до поверхности металла.



2.

№2

Дано:
$\Delta E = 200$ эВ
$\eta = 2$

λ_1 - ?

Решение:

$\lambda_1 = \frac{h}{p}$

$E_1 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_1^2}$

$E_2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_2^2}$

$\Delta E = E_2 - E_1$

Чем больше энергия, тем меньше длина волны:

$\lambda_1 = \eta\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = 2\lambda_2$

$\Delta E = \frac{h^2}{2m\lambda_2^2} - \frac{h^2}{8m\lambda_2^2} \Rightarrow \Delta E = \frac{3h^2}{8m\lambda_2^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_2^2 = \frac{3h^2}{8m\cdot\Delta E}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{3h^2}{8m\Delta E}}$

$\lambda_2 = 6,63\cdot10^{-34}\cdot\sqrt{\frac{3}{8\cdot9,1\cdot10^{-31}\cdot200\cdot1,6\cdot10^{-19}}}$

$\lambda_2 = 7,5\cdot10^{-11}$, т.к. $\lambda_1 = 2\lambda_2$, то

$\lambda_1 = 1,5\cdot10^{-10}$ м

Ответ: $1,5\cdot10^{-10}$ м

3.Поглащательная способность тела при тепловом излучении $a_{w,T}$, её фзический смысл и размерность.

2) спектральный коэффициент поглощения, или спектральная поглощательная способность тела $a(\nu,T)$, численно равна отношению спектральной плотности лучистого потока $\Phi_{\nu,\text{погл}}$, поглощаемого телом, к падающей на это тело извне спектральной плотности потока $\Phi_{\nu,\text{пад}}$, т.е.

$$a(\nu,T) = \Phi_{\nu,погл} / \Phi_{\nu,пад} ,$$

Тела, которые полностью поглощают все падающее на них излучение, называются абсолютно черными. Очевидно, что для абсолютно черных тел $a(\nu,T)\equiv 1$. Спектральную плотность энергетической светимости абсолютно чер-

2) интегральная поглощательная способность тела А, численно равна отношению поглощаемого телом лучистого потока к падающему на это тело извне лучистому потоку, т.е.

$$A = \Phi_{погл} / \Phi_{пад}$$

Для абсолютно черного тела, очевидно, А=1. Интегральную энергетиче-

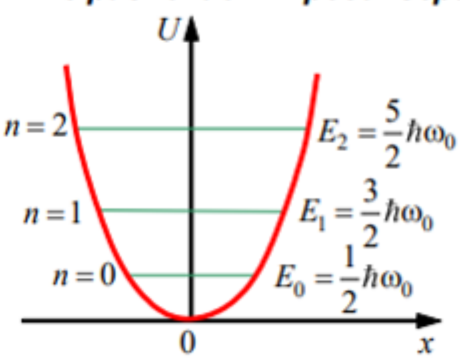
Билет 15

1.Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора, анализ его решений. Энергетический спектр гармонического осциллятора.

Линейный гармонический осциллятор – система, совершающая одномерное движение под действием квазиупругой силы, является моделью, которая часто используется при описании классических и квантовых систем.

Классический осциллятор не может выйти за пределы "потенциальной ямы" с координатами $-x_{\max} \le x \le +x_{\max}$.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний квантового осциллятора:



$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\cdot\psi = 0,$$

где E – полная энергия осциллятора.

Собственные значения энергии для этого уравнения:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Таким образом, энергия квантового осциллятора ***квантуется*** (может иметь лишь дискретные значения). Уровни энергии расположены на *одинаковых* расстояниях, равных $\hbar\omega_0$.

Минимальная энергия $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ называется ***энергией нулевых колебаний.***

2.

Б15 №2. **Дано:** $\hat{\varphi} = \varphi$

$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$

Возм-ть одновр. измерение?

$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{\varphi}, \hat{L}_z] = \hat{\varphi}\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{\varphi}$

$\hat{\varphi}(\hat{L}_z\psi) - \hat{L}_z(\hat{\varphi}\psi) = \varphi\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}(\varphi\psi) = i\hbar\psi$

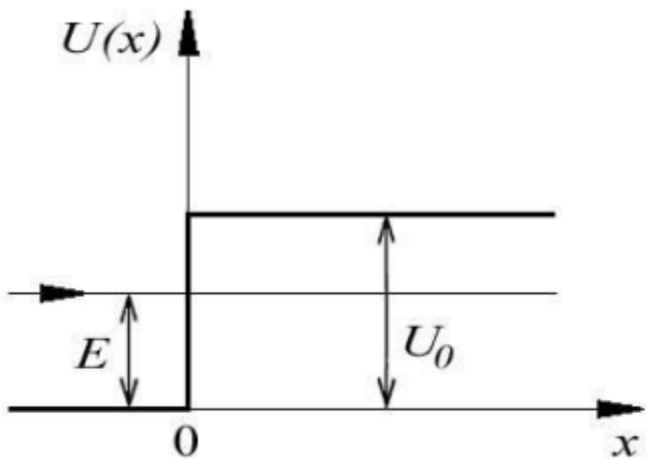
$\Rightarrow [\hat{\varphi}, \hat{L}_z] = i\hbar \neq 0$

$\Rightarrow$ нельзя.

3. Надбарьерное отражение квантовой величины, его физическая причина.

Порог задается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & x > 0 \end{cases}$$



1 – область U = 0

2 – облась $U = U_0$

Уравнения Шредингера:

$$\begin{cases} \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_1 = \psi_1'' + {k_1}^2\psi_1 = 0 \\ \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = \psi_2'' - {k_2}^2\psi_2 = 0 \end{cases}$$

b) Низкий порог

Аналогично:

$$\begin{cases} \psi_1`` + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_1 = \psi_1`` + {k_1}^2\psi_1 = 0 \\ \psi_2`` + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = \psi_2`` + {k_2}^2\psi_2 = 0 \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 \exp[ik_1 x] + B_1 \exp[-ik_1 x] \\ \psi_2 = A_2 \exp[ik_2 x] + B_2 \exp[-\, ik_2 x] \end{cases}$$

Применим граничные условия, условия регулярности, условия нормированности:

1) A_1 положим 1 ; во второй области нет отраженной волны => $B_2 = 0$;
2) непрерывность: $\psi_1(0) = \psi_2(0), \psi_1`(0) = \psi_2`(0)$ =>

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\ ;\ A_2 = B_1 + 1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

Получили:

$$\psi_1 = \exp[ik_1 x] + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\exp[-ik_1 x]\ , \qquad x < 0$$

$$\psi_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\exp[ik_2 x]\,, \qquad x > 0$$

Коэффициенты отражения и прохождения:

$$\bar{j} = {}^{i\hbar}/_{2m}\,(\Psi grad\bar{\Psi} - \bar{\Psi} grad\Psi)$$

Определим $|\bar{j}_{\text{пад}}|, |\bar{j}_{\text{отр}}|, |\bar{j}_{\text{прош}}|$

$$|\bar{j}_{\text{пад}}| = \frac{\hbar k_1}{m}\ ;\ |\bar{j}_{\text{отр}}| = \frac{\hbar k_1}{m}\left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 ;\ |\bar{j}_{\text{прош}}| = \frac{\hbar k_2}{m}\left|\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right|^2$$

Отсюда:

Коэффициент отражения $R = \frac{|J_{\text{отр}}|}{|J_{\text{пад}}|} = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 = \left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{U}{E}}}{1+\sqrt{1-\frac{U}{E}}}\right)^2 \neq 0$

В квантовой физике есть вероятность отражения частицы от низкого потенциального барьера! ***При этом вероятность отражения не зависит от направления движения частицы.***

Коэффициент прохождения $D = \frac{|\bar{J}_{\text{прош}}|}{|\bar{J}_{\text{пад}}|} = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{4\sqrt{1-\frac{U}{E}}}{\left(1+\sqrt{1-\frac{U}{E}}\right)^2}$

Энергетический спектр частицы непрерывен вне зависимости от высоты порога!

Билет 16

1.Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Гамильтониан квантовой системы как оператор полной энергии.

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией Ψ ($q_1, q_2, \dots, q_n, t$) от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Обобщенная координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — *x*, *y*, *z*) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. Ψ*Ψdτ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема dτ.

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi \, d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Элемент объема

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Оператор — это закон, по которому одной функции *f* ставится в соответствие другая функция *g*. Оператор определяет, какое действие должно быть произведено над функцией *f*, чтобы перевести ее в функцию *g*:

$$\hat{L} f = g$$

Оператор

Два оператора квантовой механики постулируются: **оператор координат** и **оператор импульса**. Остальные операторы квантовой механики выводятся из этих двух.

Оператор координаты есть просто координата, и его действие на любую функцию заключается в умножении ее на x.

$\hat{x}$ — оператор координаты

$$\hat{x} f = x f$$

Оператор импульса определяется через операторы его проекций.

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ, имеющей квантово-механический оператор λ, в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle\lambda\rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle\Psi|\lambda|\Psi\rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle\Psi|\lambda|\Psi\rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2, то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2\,,$$

$$C_1, C_2 = const$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2, либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2.

$\hat{p}_x$ — оператор импульса

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

—Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

Собственное значение

Собственная функция оператора H

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = -\Psi(q_1, q_3, q_2, \dots, q_n, t)$$

Антисимметрия волновой функции электронов была постулирована В. Паули (1925).

Определим операторы основных физических величин в квантовой механике.

1. *Оператор координаты*. Действие этого оператора на волновую функцию сводится к умножению ее на соответствующую координату, то есть.

$$\hat{x}\Psi = x\Psi,\ \ \hat{y}\Psi = y\Psi,\ \ \hat{z}\Psi = z\Psi\,. \qquad \textbf{(3.27)}$$

В символической операторной форме записи этих операций имеют вид

$$\hat{x} = x,\ \ \hat{y} = y,\ \ \hat{z} = z\,. \qquad \textbf{(3.28)}$$

Объединяя эти формулы, можно ввести векторный оператор $\hat{\vec{r}}$, соответствующий радиусу-вектору $\vec{r}$ в классической механике. Такой оператор формально рассматривается как некотор вектор, имеющий в качестве компонент в декартовой системе координат операторы $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Поэтому

$$\hat{\vec{r}} = \vec{i}\hat{x} + \vec{j}\hat{y} + \vec{k}\hat{z}\,. \qquad \textbf{(3.29)}$$

2. *Оператор импульса*. С помощью операций дифференцирования по координатам определим операторы проекций импульса, записав эти определения в символической операторной форме ка

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x},\ \ \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y},\ \ \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\,. \qquad \textbf{(3.30)}$$

Все три формулы в (3.30) можно объединить в одну, введя векторный оператор импульса $\hat{\vec{p}} = \vec{i}\hat{p}_x + \vec{j}\hat{p}_y + \vec{k}\hat{p}_z$, который с учетом (3.30) запишется как

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla\,. \qquad \textbf{(3.31)}$$

Здесь

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Используя соотношение классической механики

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z\,,$$

определим оператор квадрата импульса как

$$\hat{p}^2 = (\hat{p}_x)^2 + (\hat{p}_y)^2 + (\hat{p}_z)^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\,. \qquad \textbf{(3.32)}$$

Используя символ оператора Лапласа, запишем (3.32) в более компактном виде

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2\Delta\,. \qquad \textbf{(3.33)}$$

Оператор – математическое правило, преобразующее одну функцию в другую.

Второй постулат квантовой механики гласит, что каждой физической валичине соответствует оператор этой физической величины, соотношения между операторами имеют ту же структуру, что и отношения между соответствующими физическими величинами в классической механике.

Квантомеханические операторы должны быть:

A) **Линейными**
B) **самосопряженными (эрмитовыми)**

$$\int \overline{\Psi_1}\hat{\Phi}\Psi_2 dV = \int \Psi_2 \overline{\hat{\Phi}\Psi_1} dV$$

(собственные значения эрмитовых операторов могут быть только действительными числами)

Оператор Гамильтона (гамильтониан) – оператор полной энергии $\hat{H}$:

$$\hat{H} = \hat{E} + \hat{U}.$$

Если частица движется в потенциальном поле U(x,y,z), то оператор Гамильтона $\hat{H}$ имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x,y,z).$$

2. Б16 №2. Дано: m, a

2 мерн. квадр. яма

E_1, E_2, E_3, E_4 ?

Решение:

$E_{n_1,n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2}(n_1^2+n_2^2)$ для квадр. 2 мерн. пот. ямы

$n_1, n_2 = 1, 2, 3 \ldots$

I ур. $E_{11} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2}\cdot(1+1) = \frac{\pi^2\hbar^2}{m_0a^2}$

II ур. $E_{12} = E_{21} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2}(1+4) = \frac{5}{2}\frac{\pi^2\hbar^2}{m_0a^2}$

III ур. $E_{22} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2}(4+4) = 4\frac{\pi^2\hbar^2}{m_0a^2}$

IV ур. $E_{13} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2}(1+9) = 5\frac{\pi^2\hbar^2}{m_0a^2}$

3.Красная граница фотоэффекта, её физический смысл.

Красной границей фотоэффекта называют минимальную частоту света, ниже которой фотоэффект не наблюдается.
Эта граница для разных веществ различна, так как работа выхода зависит от рода вещества. При этом кинетическая энергия электронов равна нулю.
Поскольку это пороговое значение всегда ближе к красному свету, то ему дали название - красная граница фотоэффекта.

$$\nu_{min} = \frac{A}{h} \quad \text{или} \quad \lambda_{max} = \lambda_{кр} = \frac{hc}{A}$$

Билет 17

1.Основные постулаты квантовой механики. Вероятностный характер результатов измерений в квантовой механике. Вычисление средних значений физических величин в квантовой системе.

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией Ψ ($q_1, q_2, \ldots, q_n, t$) от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

Обобщенная координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — *x*, *y*, *z*) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi d\tau$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема $d\tau$.

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi \, d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Элемент объема

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Оператор — это закон, по которому одной функции *f* ставится в соответствие другая функция *g*. Оператор определяет, какое действие должно быть произведено над функцией *f*, чтобы перевести ее в функцию *g*:

$$\hat{L} f = g$$

Оператор

Два оператора квантовой механики постулируются: **оператор координат** и **оператор импульса**. Остальные операторы квантовой механики выводятся из этих двух.

Оператор координаты есть просто координата, и его действие на любую функцию заключается в умножении ее на x.

$\hat{x}$ — оператор координаты

$$\hat{x} f = x f$$

Оператор импульса определяется через операторы его проекций.

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

$\hat{p}_x$ — оператор импульса

$$\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

Собственное значение

Собственная функция оператора H

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ, имеющей квантово-механический оператор λ, в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Обозначение введено П. Дираком

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2, то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = const$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2, либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2.

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) = -\Psi(q_1, q_3, q_2, \ldots, q_n, t)$$

Четвертый постулат:

В случае дискретного спектра измерение F даёт значение f_n с вероятностью $|C_n|^2$, а в случае непрерывного спектра измерение F даёт значение в инт-ле $(f, f+df)$ с вероятностью $dW(f) = |C(f)|^2 df$

Тогда условие нормировки примет вид:

$$\sum_n |C_n|^2 + \int_{\Omega_f} |C(f)|^2 df = 1,$$ где C_n и $C(f)$ – амплитуды вероятности.

(PS. 4-ый постулат – вероятностный хар-р...)

Среднее значение

$$< f > = \sum P_n f_n = \sum |C_n|^2 f_n = \int_V \bar{\Psi} \hat{\Phi} \Psi dV$$

2.

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{e^2}{r^2}$$

$$mVr = n\hbar$$

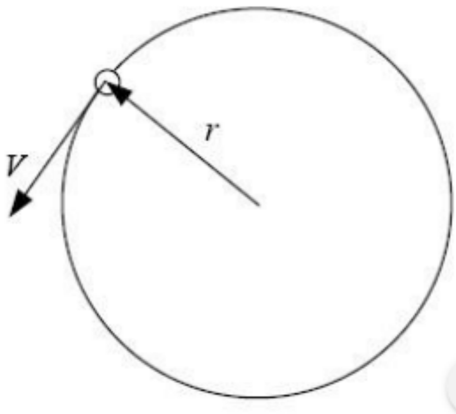
$$\rightarrow r(n) = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{me^2}$$

$$V = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar n}$$

$$l(n) = 2\pi r(n) = \frac{8\pi^2 \varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{me^2}$$

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{mV} = \frac{8\pi^2 \varepsilon_0 \hbar^2 n}{me^2}$$

$$\frac{l}{\lambda_Б} = n$$



3.Физический смысл постоянной Планка, её размерность.

Постоянная Планка

Постоя́нная Пла́нка — основная константа квантовой теории, коэффициент, связывающий величину энергии кванта электромагнитного излучения с его частотой так же, как и вообще величину кванта энергии любой линейной колебательной физической системы с её частотой.

$$h = 6,63 \cdot 10 - 34 \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

Билет 18

1.Условия возможности одновременного измерения разных механических величин в квантовой механике. Соотношение неопределённостей Гейзенберга.

http://phys.bspu.by/static/lib/phys/bmstu/tom5/ch3/formulas/fml3.77_more.htm

Вывод: Таким образом, коммутативность операторов служит выражением возможности одновременного точного измерения соответствующих им физических величин. Обратно, некоммутативность операторов указывает на невозможность такого одновременного точного измерения двух соответствующих им физических величин.

Иное дело в механике микромира. В 1924 году В. Гайзенберг показал, что одновременное точное измерение координаты и проекции импульса на эту координату имеет ограничения, определяемые выражениями, называемыми соотношениями неопределенности Гайзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (7)$$

Здесь под Δx, Δy, Δz понимают среднеквадратические погрешности при измерении координат, а Δp_x, Δp_y, Δp_z – соответственно, среднеквадратические погрешности измерения проекций импульса. Соотношения неопределенности, по существу, являются условной границей, разделяющей механику классическую и квантовую.

2.

На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя m_0, чтобы с их помощью можно было исследовать структуры с линейными размерами l? Решите задачу для электронов в случае $l = 10^{-15}$ м, что соответствует характерному размеру атомных ядер.

Соотношение неопределенностей: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$. В нашем случае $\Delta x = l$, поэтому $l\Delta p_x \geq h$.
Импульс частицы $p = \langle p \rangle + \Delta p$, где Δp – неопределенность импульса, $\langle p \rangle$ – среднее значение импульса.
Минимальное значение импульса равно его неопределенности: $l\Delta p_x = l \cdot p_{\min} \approx \hbar$.

$$\left(E_\kappa + mc^2\right)^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$
$$E_\kappa^2 + 2mc^2E_\kappa = c^2p^2$$
$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_\kappa\left(E_\kappa + 2m_0c^2\right)}$$
$$p_{\min} = \frac{1}{c}\sqrt{E_{\kappa_{\min}}\left(E_{\kappa_{\min}} + 2m_0c^2\right)}$$
$$\frac{l}{c}\sqrt{E_{\kappa_{\min}}\left(E_{\kappa_{\min}} + 2m_0c^2\right)} = \frac{\hbar}{2}$$
$$E_{\kappa_{\min}}{}^2 + 2m_0c^2E_{\kappa_{\min}} - \left(\frac{c\hbar}{2l}\right)^2 = 0$$

Решая это уравнение, получаем: $E_{\kappa_{\min}} = -m_0c^2 \pm \sqrt{m_0^2c^4 + \left(\frac{c\hbar}{2l}\right)^2}$. Так как отрицательный корень физического смысла не имеет, то: $E_{\kappa_{\min}} = -m_0c^2 + c\sqrt{m_0^2c^2 + \left(\frac{\hbar}{2l}\right)^2}$.

3.Физический смысл полной энергетической светимости R, её размерность.

Энерге́тическая свети́мость M_e — физическая величина, одна из энергетических фотометрических величин[1]. Характеризует мощность оптического излучения, излучаемого малым участком поверхности единичной площади. Равна отношению потока излучения $d\Phi_e$, испускаемого малым участком поверхности источника излучения, к его площади dS[1]:

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS}.$$

Энергети	
Размерность	
Еди	
СИ	
СГС	
энергетическа	

Полная энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$R_T = \sigma \cdot T^4 \quad (20.10)$$

Постоянная Стефана-Больцмана s была определена опытным путем:

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$$

Излучение серых тел подчиняется аналогичной закономерности, однако излучение их для каждой длины волны меньше, чем для абсолютно черного тела (см.(20.7); a<1). Полная энергетическая светимость серого тела:

$$R_T = a \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (20.11)$$

Билет 19

1.Корпускулярно-волновой дуализм излучения. Эффект Комптона.

Электромагнитное излучение обладает двойственной природой, получившей название **«корпускулярно-волновой дуализм».** Явления, в которых участвует свет, объясняются с учетом двух , дополняющих друг друга, понятий: ***«волна – частица»***

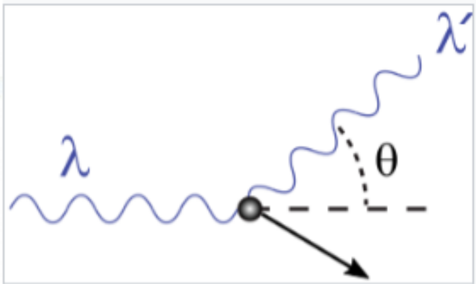
Комптон обнаружил, что в рассеянном монохроматическом излучении можно обнаружить излучение с длиной волны большей, чем основная.

Эффект Комптона объясняется упругим рассеиванием фотонов на свободных электронах вещества.

Часть импульса фотон передает электрону, от чего уменьшается энергия фотона и увеличивается его длина волны.

Определим зависимость

$\grave{\lambda} - \lambda = f(\theta)$, записав уравнения законов сохранения энергии и импульса для системы из электрона и фотона, а также релятивистского инварианта для электрона (k – *волновой вектор электрона*, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)



Излучение с длиной волны λ направлено слева направо. После взаимодействия с электроном оно меняет длину волны на λ', а направление на угол θ относительно первоначального направления. Стрелкой указано направление движения электрона, с которым провзаимодействовал фотон.

$$\begin{cases} \hbar\omega + mc^2 = E_{эл} + \hbar\grave{\omega} \\ \hbar\bar{k}_ф = \hbar\bar{\grave{k}}_ф + \bar{P}_э \\ E_{эл}^2 - P_э^2c^2 = m^2c^4 \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $\grave{\lambda} - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - cos\theta) = \lambda_c(1 - cos\theta)$

$\lambda_c = 2{,}43 * 10^{-12}$м - длина волны Комптона для электрона.

Мы не наблюдаем комптоновского рассеяния на ядрах, поскольку из-за их большой массы величина комптоновской длины волны для ядер слишком мала. Эффект комптоновского рассеивания на электронах мы наблюдаем только в рентгеновском излучении, потому что длина рентгеновского излучения сопоставима с длиной волны Комптона.

2.

Условие задачи:

Приняв, что минимальная энергия E нуклона в ядре равна 10 МэВ, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

<< задача 45.27 || задача 45.33 >>

Решение задачи:

Дано:

$E_{min} = 10$ МэВ

Найти:

l - ? м

Решение:

Минимальный модуль импульса:

$p_{min} = \sqrt{2E_{min} m_н}$

$\Delta p = p_{min}$

Из соотношения неопределённостей Гейзенберга:

$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar > \frac{h}{2\pi}$

Минимальная неопределенность координаты будет равна: $\Delta x = \frac{h}{2\pi \Delta p} = \frac{h}{2\pi\sqrt{2E_{min} m_н}}$

$l = 2\Delta x$

$E_{min} = 10$ МэВ $= 10^7$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ Дж

$l = \frac{h}{\pi\sqrt{2E_{min} m_н}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{3{,}14\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 3 \cdot 10^{-15}$ м $= 3$ фм

Проверка размерности:

$\left[\frac{Дж \cdot c}{\sqrt{Дж \cdot кг}}\right] = \left[\frac{Дж \cdot c}{\sqrt{кг^2 \cdot м^2/c^2}}\right] = \left[\frac{кг \cdot м^2/c}{кг \cdot м/c}\right] = [м]$

Ответ: $l = 3$ фм.

3. Надбарьерное отражение квантовой величины, его физическая причина.

Выводы относительно поведения классической и квантовой частиц

При $E < U_0$ по классической теории частицы не смогут преодолеть потенциального барьера и отразятся от него; согласно квантовой теории, часть частиц отражается, а часть имеет отличную от нуля вероятность пройти сквозь потенциальный барьер. При $E > U_0$, по классической теории все частицы преодолевают потенциальный барьер; согласно квантовой теории, часть частиц проходит, а часть отражается. Как *подбарьерное прохождение*, так и *надбарьерное отражение* являются специфическими квантовыми эффектами, связанными с волновыми свойствами частиц.

Билет 20

1.Тепловое излучение, его спектральные и интегральные характеристики. Закон Кирхгофа. Закон смещения Вина. Закон Стефана-Больцмана.

Электромагнитное излучение, испускаемое нагретым телом, находящимся в состоянии термодинамического равновесия, называется тепловым.

1) спектральная плотность энергетической светимости тела e(ν,T), (Вт*с)/м^2, численно равна спектральной плотности потока энергии теплового излучения, испускаемой единицей поверхности нагретого тела;

2) спектральный коэффициент поглощения, или спектральная поглощательная способность тела a(ν,T), численно равна отношению спектральной плотности лучистого потока $\Phi_{\nu,погл}$, поглощаемого телом, к падающей на это тело извне спектральной плотности потока $\Phi_{\nu,пад}$, т.е.

$$a(\nu,T) = \Phi_{\nu,погл} / \Phi_{\nu,пад} ,$$

Тела, которые полностью поглощают все падающее на них излучение, называются абсолютно черными. Очевидно, что для абсолютно черных тел a(ν,T)≡1. Спектральную плотность энергетической светимости абсолютно черного тела будем обозначать символом r(ν,T).

Наряду со спектральными характеристиками теплового излучения широко используются так называемые интегральные характеристики:

1) интегральная энергетическая светимость тела E, Вт/м^2, численно равна потоку энергии теплового излучения, испускаемому единицей поверхности нагретого тела;

2) интегральная поглощательная способность тела A, численно равна отношению поглощаемого телом лучистого потока к падающему на это тело извне лучистому потоку, т.е.

$$A = \Phi_{погл} / \Phi_{пад}$$

Для абсолютно черного тела, очевидно, A=1. Интегральную энергетическую светимость абсолютно черного тела будем обозначать $R_э$.

Между интегральными и спектральными характеристиками теплового излучения имеются соотношения:

$$E = \int_0^\infty e(\nu,T)d\nu; R_э = \int_0^\infty r(\nu,T)d\nu \qquad (1)$$

лами. Равновесное тепловое излучение подчиняется закону Кирхгофа, согласно

которому отношение спектральной плотности энергетической светимости тела к его спектральной поглощательной способности, взятой при той же частоте и температуре, не зависит от природы тела и равно спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела при этой частоте и температуре, т.е.

$$e(\nu,T)/a(\nu,T) = r(\nu,T) \qquad (2)$$

Закон Кирхгофа остается справедливым и для интегральных характеристик: отношение интегральной энергетической светимости тела к его интегральной поглощательной способности, взятой при той же температуре, не зависит от природы тела и равно интегральной энергетической светимости абсолютно черного тела при этой температуре, т.е.

$$E/A = R_э \qquad (3)$$

Согласно закону Стефана-Больцмана интегральная энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его температуры

$$R_э = \sigma T^4 \qquad (4)$$

Закон смещения Вина: $f(\omega,T) = \omega^3 F(\frac{\omega}{T})$,

($F\left(\frac{\omega}{T}\right) = F(\frac{2\pi c}{\lambda T})$) из чего следует

$$\lambda_{max} T = const = b$$

λ_{max} – длина волны которой соответствует максимум отношения испускательной и поглощательной способностей при данной температуре.

$b = 2{,}9 * 10^{-3}$ мК , *постоянная Вина*

2.

Б 20 №2. Дано: m

a (одн. пот. яма)

Найти: E_{min} с пом. соот. неопред.?

Решение:

$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

$\Delta x = a$ (шир. ямы)

Δp_x – неопр-ть

$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \geq \frac{\hbar}{2a}$

$E = \frac{p^2}{2m_e}$

$E_{min} \sim \frac{\Delta p_x^2}{2m_e} \sim \frac{1}{2m_e}\frac{\hbar^2}{2a} \sim \frac{\hbar^2}{4m_e a}$

$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0 a^2}\frac{1}{n^2}$; $E_{n\,min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0 a^2}$

3. Работа выхода электрона из металла, её физический смысл.

Если рассматривать металл как систему заряженных частиц: в металле имеются положительно заряженные ионы, расположенные в узлах кристаллической решетки, и газ свободных электронов. Ионы создают внутри металла электрическое поле, потенциал которого будем считать одинаковым повсюду внутри металла. Свободный электрон внутри металла, таким образом обладает потенциальной энергией $U_0 = -e\varphi_0$

Также электроны внутри металла сами по себе обладают кинетической энергией, при T=0 максимально возможная кинетическая энергия электрона в металле равна энергии Ферми, а при $T \neq 0$, вследствие теплового возбуждения

$$E_{max} > E_F$$

Однако, поскольку эта разница несущественно, считают

$$E_{max} = E_F$$

Рис. 6.14. Свободные электроны в металле: *а* — внутренний потенциал φ; *б* — энергетические уровни электронов в металле при $T = 0$

Чтобы вырвать электрон из металла, нужно затратить энергию, равную разности глубины потенциальной ямы и кинетической энергии электрона. Наименьшая работа, которая затрачивается для вырывания электрона, обладающего максимальной кинетической энергией, без потерь энергии на взаимодействие с кристаллической решеткой и другими электронами, называется работой выхода электрона из металла, и равна:

$$A_{вых} = e\varphi_0 - E_F$$

Билет 21

№1 Основные постулаты квантовой механики. Вероятностный характер результатов в квантовой механике.

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией Ψ ($q_1, q_2, \dots, q_n, t$) от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Обобщенная координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — *x*, *y*, *z*) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi d\tau$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема $d\tau$.

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi \, d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Элемент объема

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Оператор — это закон, по которому одной функции *f* ставится в соответствие другая функция *g*. Оператор определяет, какое действие должно быть произведено над функцией *f*, чтобы перевести ее в функцию *g*:

$$\hat{L} f = g$$

Оператор

Два оператора квантовой механики постулируются: **оператор координат и оператор импульса**. Остальные операторы квантовой механики выводятся из этих двух.

Оператор координаты есть просто координата, и его действие на любую функцию заключается в умножении ее на x.

$\hat{x}$ — оператор координаты

$$\hat{x} f = x f$$

Оператор импульса определяется через операторы его проекций.

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

$\hat{p}_x$ — оператор импульса

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

Собственное значение

Собственная функция оператора H

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ, имеющей квантово-механический оператор λ, в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2, то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = const$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i \, d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2, либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = -\Psi(q_1, q_3, q_2, \dots, q_n, t)$$

Четвертый постулат:

В случае дискретного спектра измерение F даёт значение f_n с вероятностью $|C_n|^2$, а в случае непрерывного спектра измерение F даёт значение в инт-ле $(f, f+df)$ с вероятностью $dW(f)=|C(f)|^2 df$. Тогда условие нормировки примет вид:

$\sum_n |C_n|^2 + \int_{\Omega_f} |C(f)|^2 df = 1$, где C_n и $C(f)$ – амплитуды вероятности.

(PS. 4-ый постулат – вероятностный хар-р...)

№2

Б 21 №2 Одн. прям. пот. яма

$n = 1$

$\langle x\rangle$ – ? $\langle p_x\rangle$ – ? $\langle f\rangle = \int_V \Psi^* (\hat F \Psi)\, dV$

Решение:

$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi x}{a}$

1) $\langle x\rangle = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cdot x\cdot\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a x\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)dx = \frac{a}{2}$

2) $\langle p_x\rangle$ – ?

$\hat p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$; $\hat p_x \Psi_n(x) = -i\hbar\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\right)'_x = -i\hbar\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}$

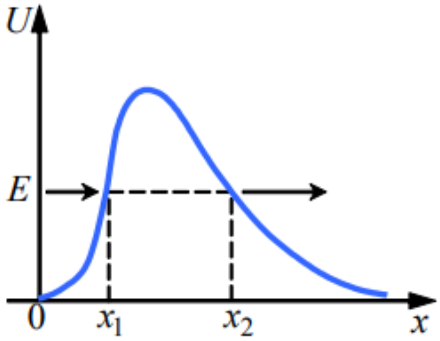
$\langle p_x\rangle = -\int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cdot i\hbar\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\,dx = -i\hbar\frac{2}{a}\cdot\frac{\pi}{a}\int_0^a \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\,dx =$

$= -i\hbar\frac{\pi}{a^2}\int_0^a \sin\frac{2\pi x}{a}\,dx = +i\hbar\frac{\pi}{a^2}\left[\frac{a}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{a}\Big|_0^a\right] = 0$

№3 Коэффициент прозрачности потенциального барьера, его физический смысл.

Таким образом, квантовая механика приводит к принципиально новому специфическому квантовому явлению, получившему название ***туннельного эффекта***, в результате которого микрообъект может "пройти" сквозь потенциальный барьер.

Для описания туннельного эффекта используют понятие ***коэффициента прозрачности*** D потенциального барьера, определяемого как отношение квадратов модулей прошедшей и падающей волны. Для случая *прямоугольного* потенциального барьера:



$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\right).$$

Для потенциального барьера произвольной формы:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m[U(x)-E]}\,\mathrm{d}x\right).$$

Билет 22

№1 Ядерная модель атома. Постулаты Н.Бора. Энергетический спектр атома водорода в теории Бора.

Ядерная модель атома

Резерфорд на основании результатов эксперимента по рассеянию α-частиц на атомах металлической фольги обосновал планетарную модель строения атома. Согласно этой модели, атом состоит из тяжёлого положительно заряженного ядра очень малых размеров (~ 10^-15 м), вокруг которого по некоторым орбитам движутся электроны. Радиусы этих орбит имеют размеры ~ 10^-10 м. Наличие у электрона заряда делает планетарную модель противоречивой с точки зрения классической физики, т.к. вращающийся вокруг ядра электрон, как и любая ускоренно движущаяся заряженная частица должен излучать электромагнитные волны. Спектр такого излучения должен быть непрерывным. В опытах наблюдается линейчатый спектр излучения атомов. Кроме того, непрерывное излучение уменьшает энергию электрона, и он из-за уменьшения орбиты обязан был бы упасть на ядро.

Постулаты Бора

1. Атомная система может находиться только в особых стационарных состояниях, каждому из которых соответствует определенная энергия E_n. В стационарном состоянии атом не излучает.

2. При переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается квант энергии $E=h\nu$

$$h\nu = E_m - E_n.$$

3. Электроны могут двигаться по орбитам определённого радиуса. На этой орбите момент импульса электрона кратен приведенной постоянной Планка.

$$m\upsilon_k r_k = k\hbar$$

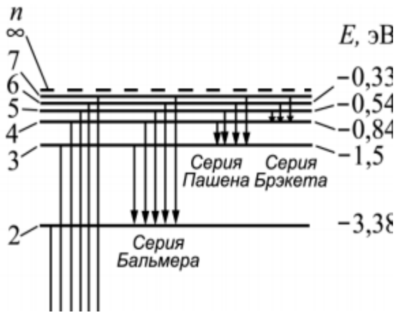
Третье также называют правилом квантования

Рассмотрим движение электрона в водородоподобной системе, ограничиваясь круговыми стационарными орбитами. Второй закон Ньютона $\dfrac{Ze\cdot e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{m_e\upsilon^2}{r}$ (другая форма: $\dfrac{m_e\upsilon^2}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$) и условие квантование момента импульса: $m_e\upsilon r_n = n\hbar$, – позволяют получить ***радиус n-й стационарной орбиты электрона:***

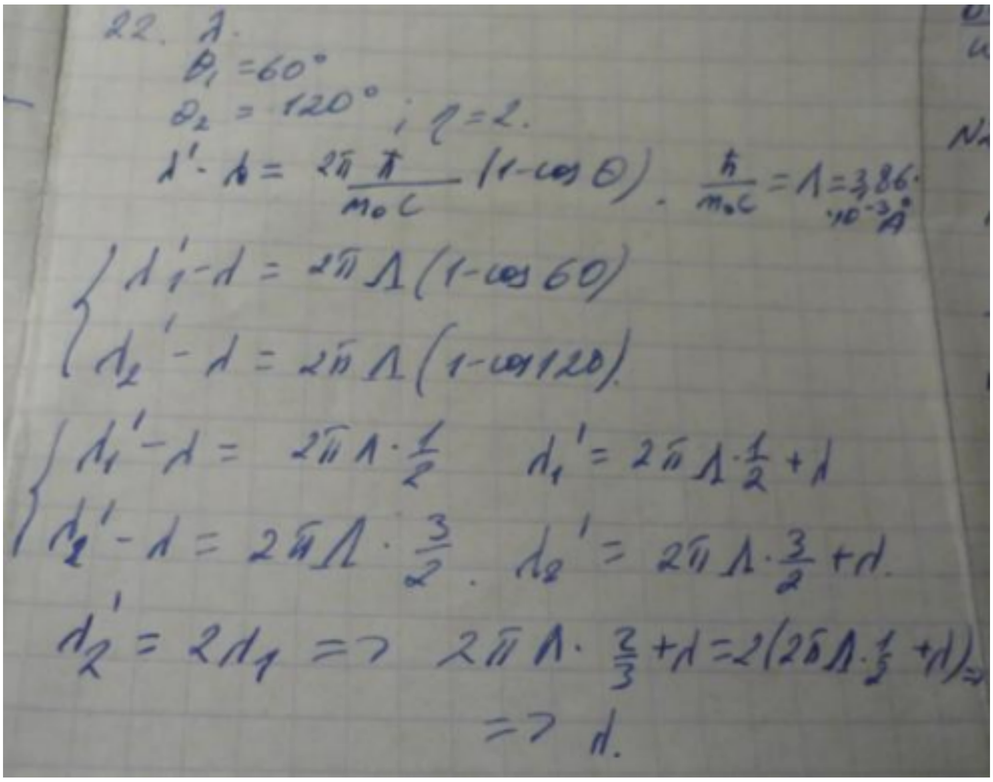
$$r_n = n^2\frac{\hbar^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e Ze^2} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Для водорода $(Z=1)$ радиус первой орбиты электрона (***первый бóровский радиус***):

$$a_0 = r_1 = \frac{\hbar^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} = 5{,}28\cdot 10^{-11}\,\text{м}.$$



№2



22. λ

$\theta_1 = 60^\circ$

$\theta_2 = 120^\circ$; $\eta = 2$.

$\lambda' - \lambda = 2\pi \frac{\hbar}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$. $\frac{\hbar}{m_0 c} = \Lambda = 3{,}86 \cdot 10^{-3}$ Å

$$\begin{cases} \lambda_1' - \lambda = 2\pi\Lambda(1 - \cos 60) \\ \lambda_2' - \lambda = 2\pi\Lambda(1 - \cos 120) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1' - \lambda = 2\pi\Lambda \cdot \frac{1}{2} & \lambda_1' = 2\pi\Lambda \cdot \frac{1}{2} + \lambda \\ \lambda_2' - \lambda = 2\pi\Lambda \cdot \frac{3}{2}. & \lambda_2' = 2\pi\Lambda \cdot \frac{3}{2} + \lambda. \end{cases}$$

$\lambda_2' = 2\lambda_1 \Rightarrow 2\pi\Lambda \cdot \frac{2}{3} + \lambda = 2(2\pi\Lambda \cdot \frac{1}{2} + \lambda) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda$.

????

№3 Условие нормировки волновой функции, его физический смысл.

Условие нормировки вероятностей получается из того, что вероятность существования частицы где-либо в пространстве равна единице (интеграл вычисляется по всему бесконечному пространству).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 \, dV = 1$$

Волновая функция, характеризующая вероятность обнаружения действия микрочастицы в элементе объёма, *должна быть*: **1)** ***конечной*** (вероятность не может быть больше единицы), **2)** ***однозначной*** (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и **3)** ***непрерывной*** (вероятность не может изменяться скачком).

Билет 23

№1 Основные постулаты квантовой механики. Вероятностный характер результатов в квантовой механике.

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией Ψ ($q_1, q_2, \ldots, q_n, t$) от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

Обобщенная координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — *x*, *y*, *z*) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi d\tau$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема $d\tau$.

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi \, d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1 \; —$$

Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Элемент объема

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Оператор — это закон, по которому одной функции *f* ставится в соответствие другая функция *g*. Оператор определяет, какое действие должно быть произведено над функцией *f*, чтобы перевести ее в функцию *g*:

$$\hat{L} f = g$$

Оператор

Два оператора квантовой механики постулируются: **оператор координат** и **оператор импульса**. Остальные операторы квантовой механики выводятся из этих двух.

Оператор координаты есть просто координата, и его действие на любую функцию заключается в умножении ее на x.

$\hat{x}$ — оператор координаты

$$\hat{x} f = x f$$

Оператор импульса определяется через операторы его проекций.

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

$\hat{p}_x$ — оператор импульса

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

Собственное значение

Собственная функция оператора H

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ, имеющей квантово-механический оператор λ, в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2, то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2 ,$$

$$C_1, C_2 = const$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2, либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2.

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) = -\Psi(q_1, q_3, q_2, \ldots, q_n, t)$$

См 21 БИЛЕТ 1-ый вопрос

№2

Б 21 №2

Одн. прям. пот. яма

$n = 1$

$\langle x\rangle$ – ? $\langle p_x\rangle$ – ?

$\langle f\rangle = \int\limits_{V} \Psi^{*}(\hat{f}\Psi)\,dV$

Решение:

$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$

1) $\langle x\rangle = \int\limits_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cdot x\cdot\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\,dx = \frac{2}{a}\int\limits_0^a x\cdot\sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx =$

$= \frac{1}{a}\int\limits_0^a x\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)dx = \underline{\underline{\frac{a}{2}}}$

2) $\langle p_x\rangle$ – ?

$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$; $\hat{p}_x\Psi_n(x) = -i\hbar\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\right)'_x = -i\hbar\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}$

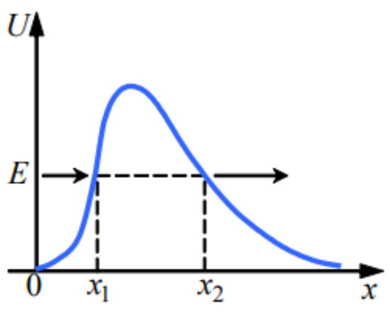
$\langle p_x\rangle = -\int\limits_0^a\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cdot i\hbar\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\,dx = -i\hbar\frac{2}{a}\cdot\frac{\pi}{a}\int\limits_0^a\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\,dx =$

$= -i\hbar\frac{\pi}{a^2}\int\limits_0^a\sin\frac{2\pi x}{a}\,dx = +i\hbar\frac{\pi}{a^2}\left[\frac{a}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{a}\Big|_0^a\right] = \underline{\underline{0}}$

№3 Коэффициент прозрачности потенциального барьера, его физический смысл

Таким образом, квантовая механика приводит к принципиально новому специфическому квантовому явлению, получившему название ***туннельного эффекта***, в результате которого микрообъект может "пройти" сквозь потенциальный барьер.

Для описания туннельного эффекта используют понятие ***коэффициента прозрачности*** D потенциального барьера, определяемого как отношение квадратов модулей прошедшей и падающей волны. Для случая *прямоугольного* потенциального барьера:



$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = D_0\exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\right).$$

Для потенциального барьера произвольной формы:

$$D = D_0\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m[U(x)-E]}\,\mathrm{d}x\right).$$

Билет 24

№1 Дискретный характер испускания и поглощения электромагнитного излучения веществом. Формула Планка для равновесного теплового излучения. Квантовое объяснение законов теплового излучения.

Дискретный характер испускания и поглощения электромагнитного теплового излучения веществом. (Гипотеза Планка): ТИ излучается и поглощается порциями, энергия которых пропорциональна частоте: $\varepsilon = \hbar\omega$ ($\hbar = 1{,}055 * 10^{-34}$Дж $*$ с)

***

Формула Планка для равновесного ТИ:

$$r^*_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} * \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right] - 1}$$

$$u_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} * \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right] - 1}$$

№2

Б24 №2. Решение: $r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2n^2}{m_0e^2}$

$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_k}}$; $E_{kn} = \frac{m_0e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2}$

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar\sqrt{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2}}{\sqrt{2m_0\cdot m_0e^4}} = \frac{2\pi\hbar\cdot 4\pi\varepsilon_0\hbar n}{m_0e^2} = \frac{8\pi^2\hbar^2\varepsilon_0 n}{m_0e^2}$$

$l_n = 2\pi r_n = \frac{8\pi^2\varepsilon_0\hbar^2n^2}{m_0e^2} = n\lambda_Б$, ч.т.д.

$\lambda_Б$ на кр. орбите с гл. кв. числом $n = \frac{8\pi^2\hbar^2\varepsilon_0 n}{m_0e^2}$

№3 Энергия ионизации атома, ее физический смысл.

Придавая n целочисленные значения, получаем для атома водорода энергетические уровни, представленные на рисунке. Минимальная энергия атома водорода $E_1 = -13{,}55$ эВ. Максимальная энергия $E_\infty = 0$ при $n = \infty$ называется ***энергией ионизации*** атома (при $E = E_\infty$ происходит отрыв электрона от атома). Переход из стационарного состояния n в стационарное состояние m сопровождается испусканием кванта:

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = hR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad \text{где } R = \frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2}.$$

Билет 25

№1 Стационарные состояния, их временная зависимость. Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi \qquad \text{или} \qquad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$$

– уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Состояния, в которых энергия имеет определенные значения, называются *стационарными состояниями* системы. Они описываются волновыми функциями Ψ_n, являющимися собственными функциями оператора Гамильтона, т. е. удовлетворяющими уравнению $\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n$, где E_n — собственные значения энергии. Соответственно этому, волновое уравнение (8,1) для функции Ψ_n

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} = \hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n$$

может быть непосредственно проинтегрировано по времени и дает

$$\Psi_n = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\psi_n(q), \tag{10,1}$$

№2

Б 25 №2. $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ – ? $\tau = 10^{-8}$ с

$\lambda = 0{,}6$ мкм

$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$; $\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\Delta\lambda}$

$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau}$; $\delta\omega_0 = \frac{\Delta E_n}{\hbar} + \frac{\Delta E_k}{\hbar} = \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_k}$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_k}\right)\cdot\lambda}{2\pi c}\ ?$$

№3 Физический смысл постоянной Планка, ее размерность.

Постоянная Планка - это одна из базовых постоянных в квантовой физике. Она показывает, какое количество энергии несет в себе наименьшая возможная "порция" света - квант. Меньше данной цифры не бывает. По этой причине существует универсальная формула расчета энергии: E=hv, где v - количество таких вот "порций".

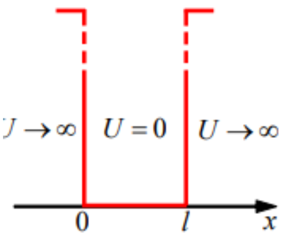
h = 6,548 × 10^{-34} Дж·с (в системе Си)

Также, постоянная Планка указывает нам нижний предел пространственных величин, после которого нельзя не принимать во внимание квантовые эффекты.

Билет 26

1. Частица в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности для различных состояний частицы.

13. Частица в одномерной прямоугольной "потенциальной яме" с бесконечно высокими "стенками"



Рассмотрим одномерную "потенциальную яму":

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le l \\ \infty, & x > l \end{cases}$$

где l – ширина "ямы", а энергия отсчитывается от ее дна.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний в пределах ямы:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0, \quad \text{где } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

За пределы "ямы" частица не проникает, поэтому волновая функция вне "ямы" равна нулю, следовательно, на границах "ямы" непрерывная волновая функция также должна обращаться в нуль

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Этим граничным условиям удовлетворяет решение уравнения Шредингера $\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$ при $B = 0$ и $k = \frac{n\pi}{l}$. Поскольку $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, то:

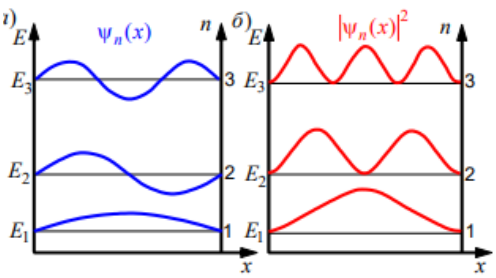
$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$ – ***собственные значения энергии***.

Минимально возможное значение энергии: $E_{\min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$.

Таким образом, энергия частицы в бесконечно высокой потенциальной "яме" принимает лишь определённые *дискретные* значения, т. е. ***квантуется***.

Квантованные значения энергии E_n называются ***уровнями энергии***, а число n, определяющее энергетические уровни частицы, называется ***главным квантовым числом***.

Собственные волновые функции $\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi}{l}x$, с учётом нормировки $\int_0^l \psi_n^2(x)\,dx = A^2\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}x\,dx = 1$, будут иметь вид:



$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

На рисунке изображены графики собственных функций (*а*) и плотность вероятности (*б*) обнаружения частицы на разных расстояниях от "стенок" ямы, определяемая выражением:

$$|\psi_n(x)|^2 = \psi_n(x)\psi_n^*(x).$$

2. При каком значении кинетической энергии дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны?

Решение:

Дебройлевская длина волны электрона:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (1)$$

где p – импульс электрона. Будем считать, что мы имеем дело с релятивистским электроном, тогда его импульс связан с кинетической энергией следующим соотношением:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K+2mc^2)} \qquad (2)$$

m - здесь и далее масса покоя электрона.
Подставим (2) в выражение (1), тогда получим для дебройлевской длины волны соотношение:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{K(K+2mc^2)}} \qquad (3)$$

Комптоновская длина волны электрона:

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc} \qquad (4)$$

По условию задачи $\lambda_Б = \lambda_C$, поэтому мы можем записать:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{K(K+2mc^2)}} = \frac{2\pi\hbar}{mc} \qquad (5)$$

Упростив это выражение и возведя обе части в квадрат, получим квадратное уравнение относительно K:

$$K^2 + 2mc^2K - m^2c^4 = 0 \qquad (6)$$

Решая это уравнение, получим корни:

$$K_{1,2} = -mc^2 \pm mc^2\sqrt{2}$$

Отрицательный корень не имеет физического смысла, поэтому в качестве результата возьмём положительный корень:

$$K = mc^2(\sqrt{2}-1) \qquad (7)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$K = 9.1\cdot10^{-31}\cdot9\cdot10^{16}(\sqrt{2}-1) = 3.3\cdot10^{-14}\,Дж = 20.5\,кэВ$$

Ответ:

$K = mc^2(\sqrt{2}-1)$;
$K = 20.5\,кэВ$.

3. Красная граница фотоэффекта, её физический смысл.

Фотоэффект — это явление испускания электронов веществом под действием света.

Были установлены два фундаментальных свойства.

Во-первых, безынерционность фотоэффекта: процесс начинается сразу в момент начала освещения.

Во-вторых, наличие характерной для каждого металла минимальной частоты ν_{min} ***— красной границы фотоэффекта.*** Эта частота такова, что при $\nu < \nu_{min}$ фотоэффект не происходит при любой энергии света а если $\nu > \nu_{min}$, то фотоэффект начинается даже при малой энергии.

Билет 27

1. Условия возможности одновременного измерения разных механических величин в квантовой механике. Соотношение неопределённостей Гейзенберга.

http://phys.bspu.by/static/lib/phys/bmstu/tom5/ch3/formulas/fml3.77_more.htm

Вывод: Таким образом, коммутативность операторов служит выражением возможности одновременного точного измерения соответствующих им физических величин. Обратно, некоммутативность операторов указывает на невозможность такого одновременного точного измерения двух соответствующих им физических величин.

Иное дело в механике микромира. В 1924 году В. Гайзенберг показал, что одновременное точное измерение координаты и проекции импульса на эту координату имеет ограничения, определяемые выражениями, называемыми соотношениями неопределенности Гайзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (7)$$

Здесь под Δx, Δy, Δz понимают среднеквадратические погрешности при измерении координат, а Δp_x, Δp_y, Δp_z – соответственно, среднеквадратические погрешности измерения проекций импульса. Соотношения неопределенности, по существу, являются условной границей, разделяющей механику классическую и квантовую.

2.

Кратность вырождения – кол-во таких собств-х состояний, в кр. неск-м состояния соответствует одно и то же значение E.

Распишем возможные наборы для первых 3х эн. ур-ей

1ый (1; 1; 1)

2ой (2; 1; 1), (1; 2; 1), (1; 1; 2)

3ий (2; 2; 1), (2; 1; 2), (1; 2; 2)

=> кратность вырождения равна 3м

3. Условие Брэгга – Вульфа, его физический смысл.

Брэгга — Вульфа условие – это условие, определяющее положение интерференционных максимумов рентгеновских лучей, рассеянных кристаллом без изменения длины волны.

Имеет вид: $$2d\sin\theta = n\lambda$$

d — межплоскостное расстояние, *θ* — угол скольжения (брэгговский угол), *n* — порядок дифракционного максимума, *λ* — длина волны.

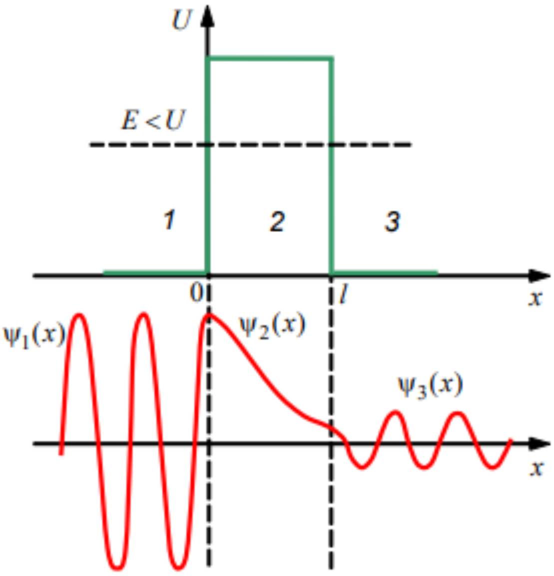
Физический смысл условия Брэгга-Вульфа (15) достаточно прозрачен: дифракционный максимум появляется в тех случаях, когда разность хода волн, отраженных от соседних атомных плоскостей, равна целому числу длин волн де Бройля. Именно в этом случае отраженные волны усиливают

Билет 28

1. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп

14. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект

Рассмотрим простейший потенциальный барьер прямоугольной формы (высота U и ширина l) для одномерного движения частицы:



$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \text{(область 1)} \\ U, & 0 \le x \le l \quad \text{(область 2)} \\ 0, & x > l \quad \text{(область 3)} \end{cases}$$

Вид волновых функций, являющихся решениями уравнения Шредингера для областей 1, 2 и 3 (см. рисунок и таблицу) свидетельствует о том, что:

1) ***В области 1*** волновая функция представляет собой сумму двух плоских волн – движущейся в сторону барьера и отражённой от барьера.
2) ***В области 2*** в случае $E < U$:

$$q = i\beta, \quad \text{где } \beta = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}.$$

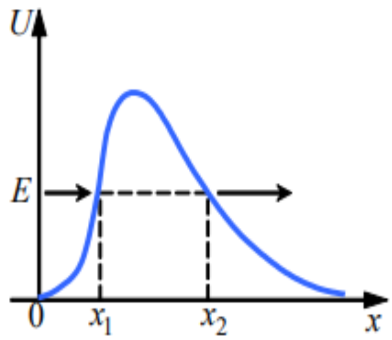
3) ***В области 3*** имеется только волна, прошедшая через барьер $(B_3 = 0)$, которая имеет вид волн де Бройля с той же длиной волны, но меньшей амплитудой.

Область	Уравнение Шредингера	Общее решение	Решение при $E < U$
1	$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + k^2\psi_1 = 0,$	$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$	$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$
2	$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + q^2\psi_2 = 0,$	$\psi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx}$	$\psi_2(x) = A_2 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x}$
3	$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + k^2\psi_2 = 0,$	$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$	$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}$

Здесь $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $q^2 = \frac{2m(E-U)}{\hbar^2}$.

Таким образом, квантовая механика приводит к принципиально новому специфическому квантовому явлению, получившему название ***туннельного эффекта***, в результате которого микрообъект может "пройти" сквозь потенциальный барьер.

Для описания туннельного эффекта используют понятие ***коэффициента прозрачности*** D потенциального барьера, определяемого как отношение квадратов модулей прошедшей и падающей волны. Для случая *прямоугольного* потенциального барьера:



$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\right).$$

Для потенциального барьера произвольной формы:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[U(x)-E]}\,\mathrm{d}x\right).$$

Прохождение частицы сквозь область, в которую, согласно законам классической механики, она не может проникнуть, можно пояснить *соотношением неопределённостей*. Неопределённость импульса Δp на отрезке $\Delta x = l$ составляет $\Delta p > h/l$. Связанная с этим разбросом в значениях импульса кинетическая энергия $\frac{(\Delta p)^2}{2m}$ может оказаться достаточной для того, чтобы полная энергия частицы оказалась больше потенциальной.

2.

Решение:

Импульс нуклона в ядре равен:

$$p = \langle p \rangle + \Delta p \qquad (1)$$

где $\langle p \rangle$ - среднее значение импульса нуклона, Δp - неопределённость импульса. Если среднее значение импульса равняется нулю $\langle p \rangle = 0$, то минимальное значение импульса имеет порядок его неопределённости, то есть $p_{\min} = \Delta p$. Отсюда следует, что минимальная энергия нуклона в ядре равняется:

$$E_{\min} = \frac{\Delta p^2}{2m} \qquad (2)$$

Из уравнения (2) найдём неопределённость импульса нуклона в ядре:

$$\Delta p = \sqrt{2mE_{\min}} \qquad (3)$$

где $m = 1.6 \cdot 10^{-27}\,кг$ - масса нуклона. Воспользуемся первым соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \approx \hbar \qquad (4)$$

В нашем случае неопределённость импульса $\Delta p = \sqrt{2mE_{\min}}$, а $\Delta x = l_{\min}$ - минимальные линейные размеры ядра. Поэтому выражение (4) можно переписать в следующем виде:

$$\sqrt{2mE_{\min}} \cdot l_{\min} \approx \hbar \qquad (5)$$

Из выражения (5) можно оценить минимальные линейные размеры ядра $l_{\min}$:

$$l_{\min} \approx \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_{\min}}} = 1.47 \cdot 10^{-15}\,м \qquad (6)$$

Ответ:

$l_{\min} = 1.47 \cdot 10^{-15}\,м$.

3. Физический смысл постоянной Планка, ее размерность.

Постоянная Планка - это одна из базовых постоянных в квантовой физике. Она показывает, какое количество энергии несет в себе наименьшая возможная "порция" света - квант. Меньше данной цифры не бывает. По этой причине существует универсальная формула расчета энергии: E=hv, где v - количество таких вот "порций".

$h = 6{,}548 \times 10^{-34}$ Дж·с (в системе Си)

Также, постоянная Планка указывает нам нижний предел пространственных величин, после которого нельзя не принимать во внимание квантовые эффекты.

Билет 29

1. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Гамильтониан квантовой системы как оператор полной энергии.

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией Ψ ($q_1, q_2, \ldots, q_n, t$) от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

Обобщенная координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — *x*, *y*, *z*) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi d\tau$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема $d\tau$.

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi \, d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Элемент объема

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ, имеющей квантово-механический оператор λ, в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle\lambda\rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle\Psi|\lambda|\Psi\rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle\Psi|\lambda|\Psi\rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2, то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = const$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i \, d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2, либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2.

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Оператор — это закон, по которому одной функции *f* ставится в соответствие другая функция *g*. Оператор определяет, какое действие должно быть произведено над функцией *f*, чтобы перевести ее в функцию *g*:

$$\hat{L} f = g$$

Оператор

Два оператора квантовой механики постулируются: **оператор координат** и **оператор импульса**. Остальные операторы квантовой механики выводятся из этих двух.

Оператор координаты есть просто координата, и его действие на любую функцию заключается в умножении ее на x.

$\hat{x}$ — оператор координаты

$$\hat{x} f = x f$$

Оператор импульса определяется через операторы его проекций.

$\hat{p}_x$ — оператор импульса

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

Собственное значение

Собственная функция оператора H

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) = -\Psi(q_1, q_3, q_2, \ldots, q_n, t)$$

Антисимметрия волновой функции электронов была постулирована В. Паули (1925).

Определим операторы основных физических величин в квантовой механике.

1. *Оператор координаты*. Действие этого оператора на волновую функцию сводится к умножению ее на соответствующую координату, то есть.

$$\hat{x}\Psi = x\Psi,\ \ \hat{y}\Psi = y\Psi,\ \ \hat{z}\Psi = z\Psi \cdot \qquad (3.27)$$

В символической операторной форме записи этих операций имеют вид

$$\hat{x} = x,\ \ \hat{y} = y,\ \ \hat{z} = z \cdot \qquad (3.28)$$

Объединяя эти формулы, можно ввести векторный оператор $\hat{\vec{r}}$, соответствующий радиусу-вектору $\vec{r}$ в классической механике. Такой оператор формально рассматривается как некоторый вектор, имеющий в качестве компонент в декартовой системе координат операторы $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Поэтому

$$\hat{\vec{r}} = \vec{i}\hat{x} + \vec{j}\hat{y} + \vec{k}\hat{z} \cdot \qquad (3.29)$$

2. *Оператор импульса*. С помощью операций дифференцирования по координатам определим операторы проекций импульса, записав эти определения в символической операторной форме как

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x},\ \ \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y},\ \ \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \cdot \qquad (3.30)$$

Все три формулы в (3.30) можно объединить в одну, введя векторный оператор импульса $\hat{\vec{p}} = \vec{i}\hat{p}_x + \vec{j}\hat{p}_y + \vec{k}\hat{p}_z$, который с учетом (3.30) запишется как

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla \cdot \qquad (3.31)$$

Здесь

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \cdot$$

Используя соотношение классической механики

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z,$$

определим оператор квадрата импульса как

$$\hat{p}^2 = (\hat{p}_x)^2 + (\hat{p}_y)^2 + (\hat{p}_z)^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot \qquad (3.32)$$

Используя символ оператора Лапласа, запишем (3.32) в более компактном виде

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2\Delta \cdot \qquad (3.33)$$

Оператор – математическое правило, преобразующее одну функцию в другую.

Второй постулат квантовой механики гласит, что каждой физической валичине соответствует оператор этой физической величины, соотношения между операторами имеют ту же структуру, что и отношения между соответствующими физическими величинами в классической механике.

Квантомеханические операторы должны быть:

A) **Линейными**
B) **самосопряженными (эрмитовыми)**

$$\int \overline{\Psi_1}\hat{\Phi}\Psi_2 dV = \int \Psi_2\overline{\hat{\Phi}\Psi_1}dV$$

(собственные значения эрмитовых операторов могут быть только действительными числами)

Оператор Гамильтона (гамильтониан) − оператор полной энергии $\hat{H}$:

$$\hat{H} = \hat{E} + \hat{U}.$$

Если частица движется в потенциальном поле U(x,y,z), то оператор Гамильтона $\hat{H}$ имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x, y, z).$$

2. Б29. №2. Дано: $r = 0{,}1$ нм $= 0{,}1\cdot10^{-9}$ м

v – ? с пом. соотн неопр.

Решение:

$\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

$\Delta p_x = m\Delta v_x$

$\Delta x\cdot\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m}$

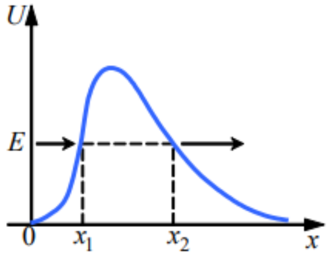
$\Delta x = r$

$\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2mr} = \frac{1{,}054\cdot10^{-34}}{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot0{,}1\cdot10^{-9}} = 0{,}579\cdot10^{6}\frac{м}{с}$

Ответ: $0{,}579\cdot10^{6}$ м/с.

3. Коэффициент прозрачности потенциального барьера, его физический смысл.

Для описания туннельного эффекта используют понятие ***коэффициента прозрачности*** D потенциального барьера, определяемого как отношение квадратов модулей прошедшей и падающей волны. Для случая *прямоугольного* потенциального барьера:



$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\right).$$

Для потенциального барьера произвольной формы:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m[U(x)-E]}\,\mathrm{d}x\right).$$

Прохождение частицы сквозь область, в которую, согласно законам классической механики, она не может проникнуть, можно пояснить *соотношением неопределённостей*. Неопределённость импульса Δp на отрезке $\Delta x = l$ составляет $\Delta p > h/l$. Связанная с этим разбросом в значениях импульса кинетическая энергия $\frac{(\Delta p)^2}{2m}$ может оказаться достаточной для того, чтобы полная энергия частицы оказалась больше потенциальной.

Билет 30

1. Уравнение Шредингера, его свойства. Статистическая интерпретация волновой функции.

11. Уравнение Шредингера для стационарных состояний

Важным *частным случаем* общего уравнения Шредингера, является **уравнение Шредингера для стационарных состояний**, в котором *исключена зависимость* Ψ *от времени*, и поэтому ***значения энергии*** этих состояний являются ***фиксированными*** (не изменяются со временем).

В этом случае силовое поле, в котором движется частица, ***стационарно***, т. е. функция $U = U(x,y,z)$ не зависит явно от времени и имеет *смысл потенциальной энергии*. Решение уравнения может быть представлено в виде произведения двух функций – функции *только координат* и функции *только времени*: $\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$, где E – *полная* энергия частицы.

Уравнение Шредингера:

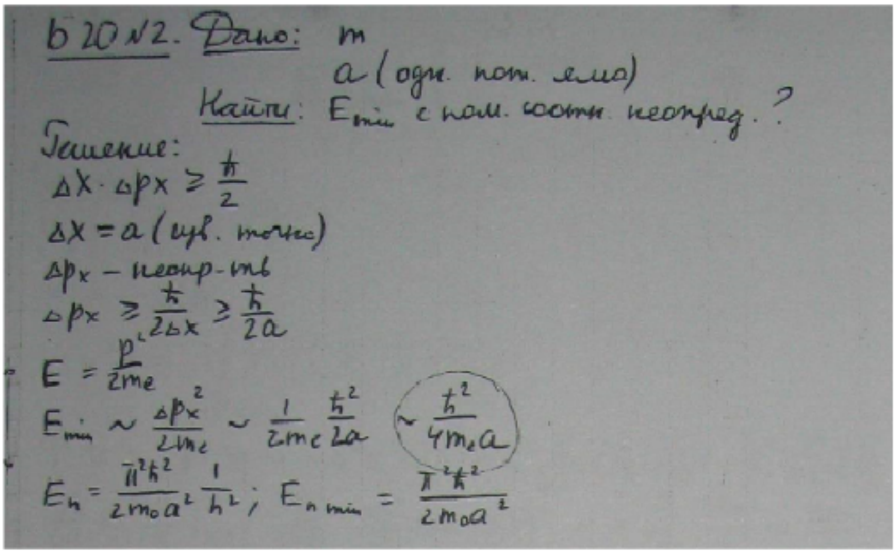
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\cdot\Delta\psi + U\cdot\psi\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) = i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)\cdot\psi\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$

после упрощений приобретает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi \qquad \text{или} \qquad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$$

– уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Физический смысл имеют только ***регулярные*** волновые функции – *конечные, однозначные и непрерывные вместе со своими первыми производными*. Эти условия выполняются только при определённом наборе E. Эти ***значения энергии*** называются ***собственными***. Решения, которые соответствуют собственным значениям энергии, называются ***собственными функциями***. Собственные значения E могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд. В первом случае говорят о ***непрерывном*** (или ***сплошном***) ***спектре***, во втором – о ***дискретном спектре***.

2. 

Б 20 №2. Дано: m

a (одн. пот. яма)

Найти: E_{min} с пом. соотн. неопред. ?

Решение:

$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

$\Delta x = a$ (шир. точно)

Δp_x – неопр-ть

$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \geq \frac{\hbar}{2a}$

$E = \frac{p^2}{2m_e}$

$E_{min} \sim \frac{\Delta p_x^2}{2m_e} \sim \frac{1}{2m_e}\frac{\hbar^2}{2a} \sim \frac{\hbar^2}{4m_e a}$

$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0 a^2}\frac{1}{n^2}$; $E_{n\,min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0 a^2}$

3. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, его физический смысл.

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$$

Физ.смысл : Энергия поглощённого фотона идет на совершение работы выхода и сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии