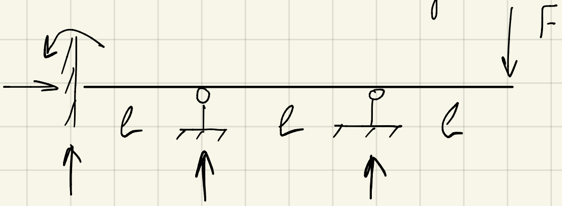
Лекция 1

Ганин Святослав Мирославович

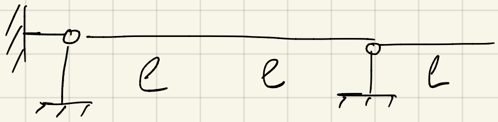
14 нед - РК

Жесткость и податливость механических систем

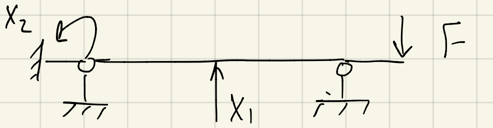
воспоминание о методе сил



О.С.



Э.С.

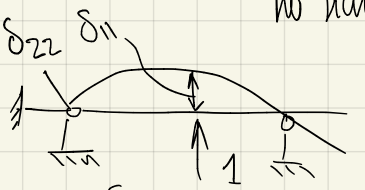


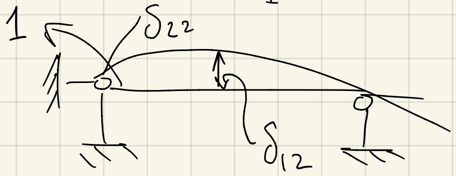
каноническое ур-е методов сил:

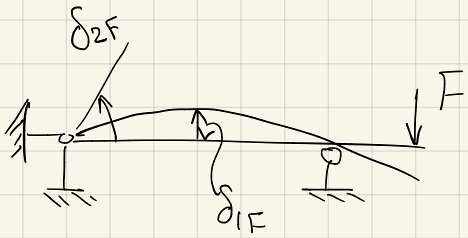
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{1F} \\ \delta_{2F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow [\delta]\{x\} + \{\delta_F\} = \{\Delta\}$$

δ_{ij} - компоненты матрицы податливости; δ_{ij} численно равны обобщенному перемещению i по напр вызванное един. обобщенным усилием по направлению j

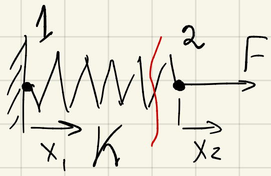




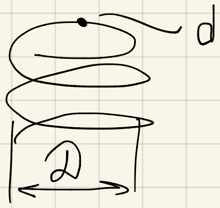


Метод сил требует больших вычислительных затрат для определения коэф. ij, а также в нём присутствуют эвристический момент (человеческий выбор), поэтому он плох для использ в комп. программе

Понятие жесткости



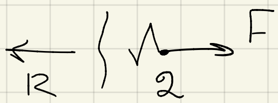
$$\left(K = \frac{Gd^4}{8D^3 i}\right)$$



$R = K\Delta X$ - внутр сила

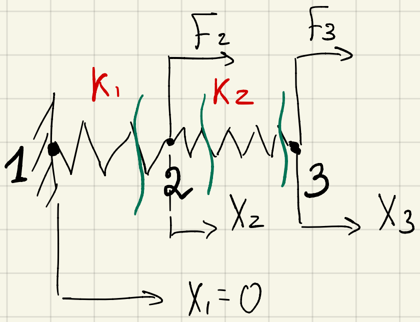
$R = K(X_2 - \cancel{X_1}) = KX_2$

$X_1 \to 0$



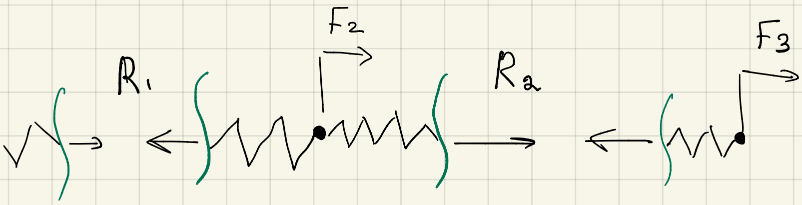
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow KX_2 = F$$

Если $X_2 = 1 \Rightarrow K \cdot 1 = F \Rightarrow$ по своей сути жёсткость численно равна силе, вызывающей единичное смещение



$$R_1 = K_1 \Delta X_1 = K_1(X_2 - X_1) = K_1 X_2$$

$$R_2 = K_2 \Delta X_2 = K_2(X_3 - X_2)$$



$$\begin{cases} -R_1 + F_2 + R_2 = 0 \\ -R_2 + F_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 X_2 - K_2(X_3 - X_2) = F_2 \\ K_2(X_3 - X_2) = F_3 \end{cases}$$

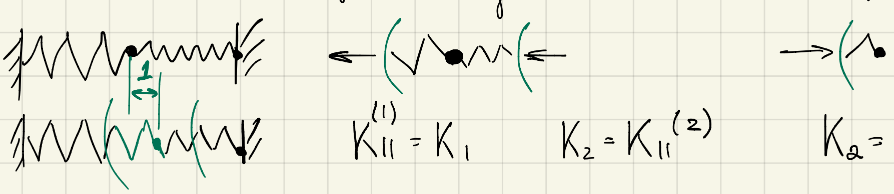
$$\begin{cases} (K_1 + K_2) X_2 - K_2 X_3 = F_2 \\ -K_2 X_2 + K_2 X_3 = F_3 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

матрица жёсткости конструкции — $[K]\{q\} = \{F\}$

каноническое ур-е методов конечных эл-тов

вектор узловых сил — вектор узловых перемещений

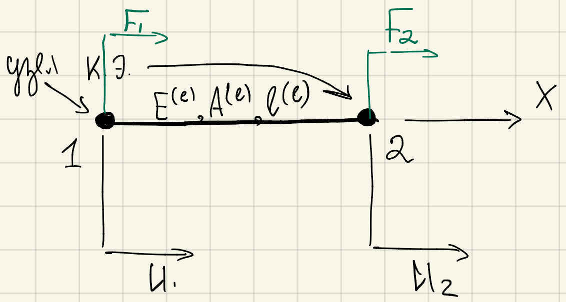
K_{ij} численно равна обобщённому усилию по направлению i вызванному обобщ. единичному смещению по напр. j



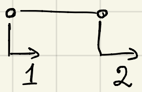
$$K_{11}^{(1)} = K_1 \qquad K_2 = K_{11}^{(2)} \qquad K_2 = K_{21}$$

$$K_{11} = K_1 + K_2$$

Матрица жёсткости простейшего конечного эл-та, работающего на растяжение и сжатие



$$\underset{2\times1}{\{a\}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \underset{2\times1}{\{F\}} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} = [K]$$



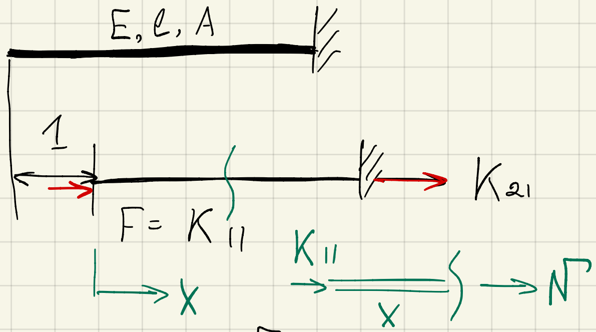
– шаблон К.Э.

$$\underset{2\times 2}{[k]}\,\underset{2\times1}{\{a\}} = \underset{2\times1}{\{F\}}$$

В этом методе получаются с помощью так назыв. тестов по формулам сопромата и теории упругости.

Для получения i столбца жесткости необходимо:
1) запретить все перемещения кроме i
2) i-ое перемещение делаем единичным
3) по формулам сопромата найти при каких силах это возможно

Тест №1

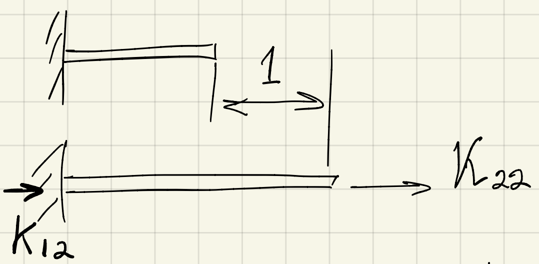


$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = -K_{11}$

$$u(x) = u_0 + \frac{Nx}{EA} = u_0 - \frac{K_{11}x}{EA} \;:\; \text{при } x=0 \quad u=1, \quad \text{при } x=\ell \quad u=0 \quad \Rightarrow K_{11} = \frac{EA}{\ell}$$

Из ур-я равновесия: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow K_{11} + K_{21} = 0 \Rightarrow K_{21} = -\frac{EA}{\ell}$

Тест №2

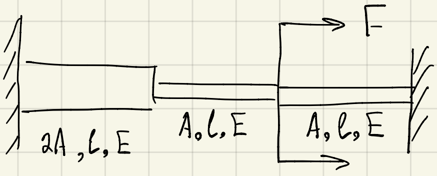


$\dots\; K_{22} = \frac{EA}{\ell}, \quad K_{12} = -\frac{EA}{\ell}$

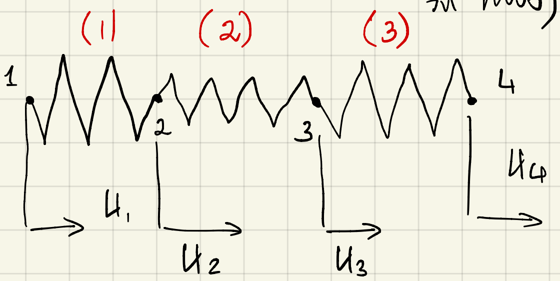
Итог:

$$[K^{(e)}] = \left(\frac{EA}{\ell}\right)^{(e)} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Порядок решения задач методом конеч. эл-тов (МКЭ)

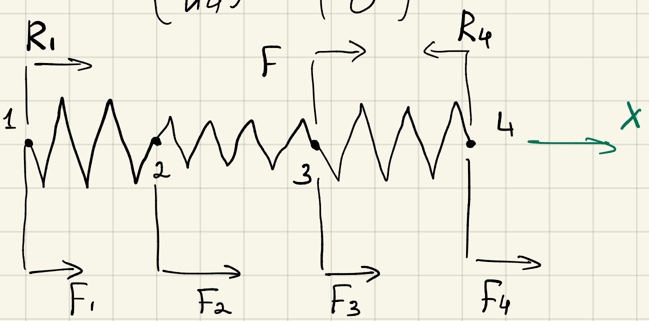


I Дискретизация задачи (переход от континуальной модели к дискретному набору эл-тов)



II Составление векторов узловых перемещ. и узл. сил;

$$\underset{4\times1}{\{a\}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ F \\ -R_4 \end{Bmatrix}$$



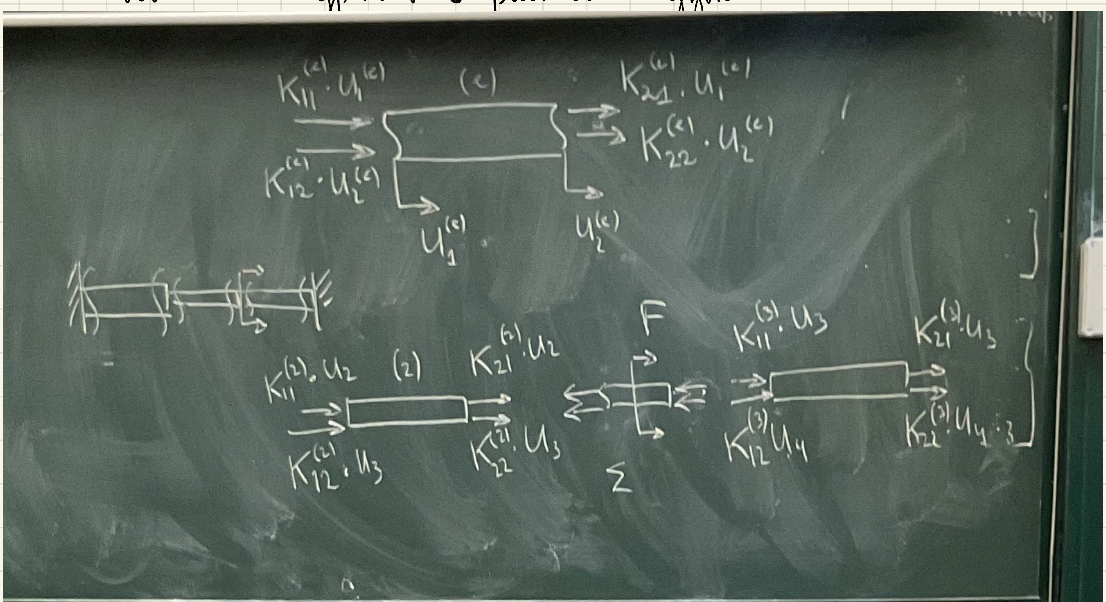
III Составление матриц жесткости отдельных конечных эл-тов

$$[K^{(1)}] = \frac{E\cdot 2A}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$[K^{(2)}] = \frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad [K^{(3)}] = \frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

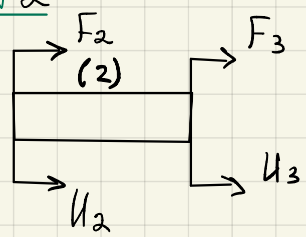
IV Процедура ансамблирования (составление матрицы жесткости всей конструкции из матриц жесткости отдельных конечных эл-тов)

1 Составить уравнение равновесия узлов



2. Испол. расширенных матриц жесткости отдельных конечных эл-тов

Элемент №2



$$\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

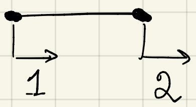
$$\{a\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{[K^{(2)}]_{расш}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K^{(1)}]_{расш} = \frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

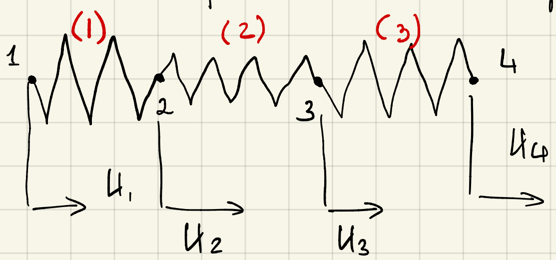
$$[K] = \sum_{i=1}^{n} [K^{(i)}]_{расш}$$

3. Метод окаймления Лекция 2 (необходимо поставить в соответствие локальную и глобальную нумерацию перемещения)



№(e)	1л	2л
1	u_1	u_2
2	u_2	u_3
3	u_3	u_4

1л - первый локальный узел



$$[K^{(1)}] = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \quad [K^{(2)}] = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \end{array} \quad [K^{(3)}] = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_3 \\ u_4 \end{array}$$

u_1	u_2	u_3	u_4	
2	-2	0	0	u_1
-2	2+1	1	0	u_2
0	-1	1+1	-1	u_3
0	0	-1	1	u_4

$$[K] = \frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Особенности матрицы жесткости: 1) матр. жесткости симметрична;

2) на главной диагонали всегда стоят полож. эл-ты;

3) если в узел с перемещением U_i приходят несколько конечн. элементов, то в матрице жесткости на позицию $U_i - U_i$ должны оказаться жесткости каждого из конечных элементов;

4) Вне главной диагонали ненулевые элементы в позиции $U_j - U_i$ возможны только если сущ. эл-т, у котор. есть перемещение U_i и U_j одновременно

V. Решение канонического МКЭ

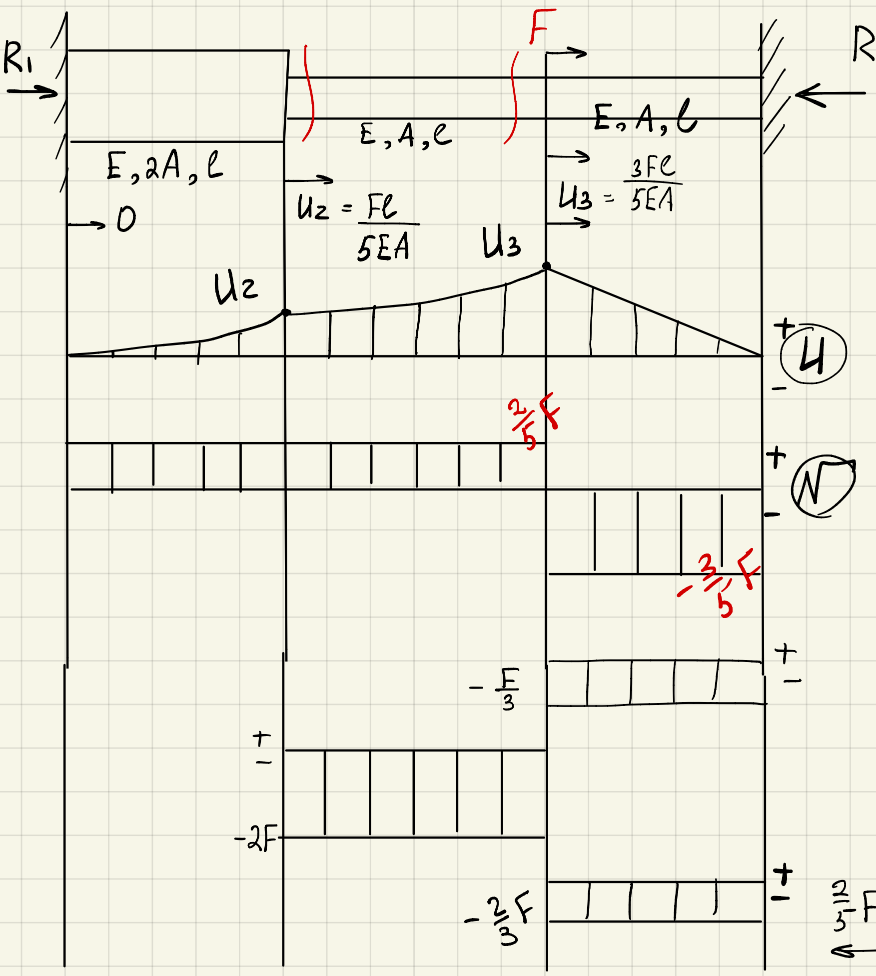
$$\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ F \\ -R_4 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{cases} 2\cdot 0 - 2U_2 + 0U_3 + 0\cdot 0 = \frac{R_1 l}{EA} \\ -2\cdot 0 + 3\cdot U_2 - U_3 + 0\cdot 0 = 0 \\ 0\cdot 0 - U_2 + 2\cdot U_3 - 1\cdot 0 = F \\ 0\cdot 0 + 0\cdot U_2 - U_3 + 1\cdot 0 = \frac{-R_4 l}{EA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3U_2 - U_3 = 0 \\ -U_2 + 2U_3 = \frac{Fl}{EA} \end{cases} \Rightarrow \quad U_2 = \frac{Fl}{5EA} \qquad U_3 = \frac{3}{5}\frac{Fl}{EA}$$

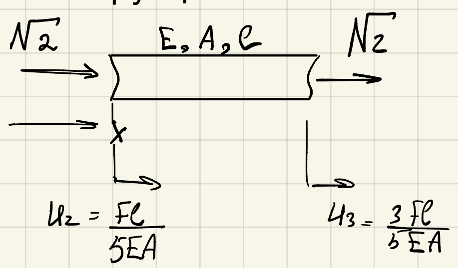
Постпроцессорная обработка

– Получение каких-либо результатов на основе найденных перемещений



Построим эпюру для нормальных сил:

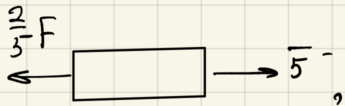
1. Для этого с помощью метода сечения вырежем 2ой элемент из конструкции



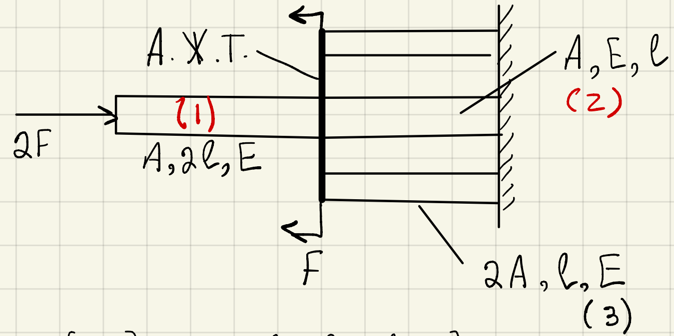
$$[K^{(2)}]\{a^{(2)}\} = \{N^{(2)}\}$$

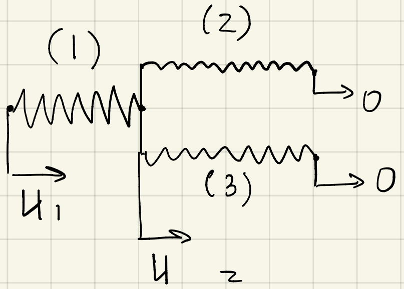
$$\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_2^{\Lambda} \\ N_2^{n} \end{Bmatrix}$$

$$N_2^{\Lambda} = -\frac{2F}{5} \qquad N_2^{n} = \frac{2}{5}F$$



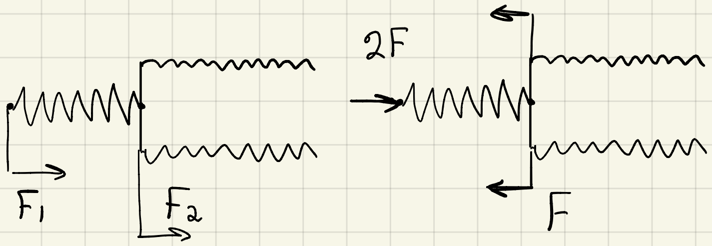
$N_2 = \frac{2}{5}F$ – растяжение





$$\{a\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \{F\}_{2\times1} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2F \\ -F \end{Bmatrix}$$

силы:



$$[k^{(1)}] = \frac{EA}{2l}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac12 & -\frac12 \\ -\frac12 & \frac12 \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}$$

$$[k^{(2)}] = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_2 & 0 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & \cancel{1} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} u_2 \\ 0 \end{array}$$

$$[k^{(3)}] = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_2 & 0 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & \cancel{-2} \\ \cancel{-2} & \cancel{2} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} u_2 \\ 0 \end{array}$$

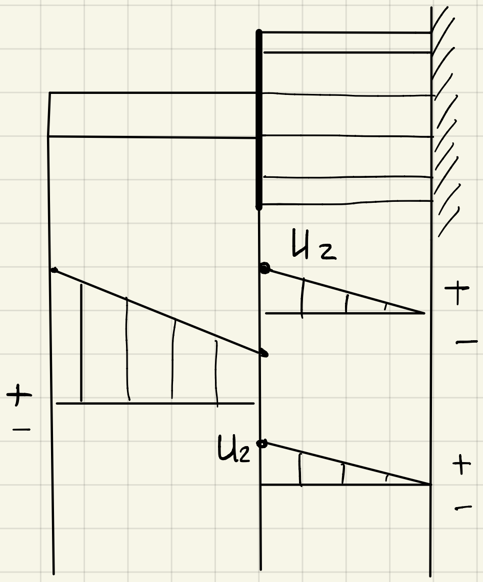
$N^{(e)}$	1	2
1	u_1	u_2
2	u_2	0
3	u_2	0

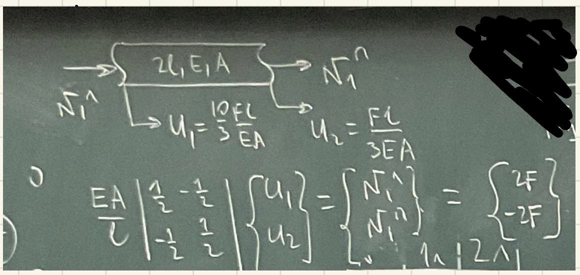
$$[k] = \frac{EA}{l}\begin{vmatrix} \frac12 & \frac12 \\ -\frac12 & \frac12+1+2 \end{vmatrix}$$

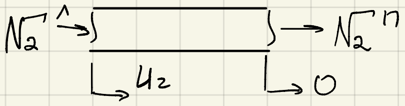
решение МКЭ: $[k]\{a\} = \{F\}$

$$\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} \frac12 & -\frac12 \\ -\frac12 & \frac72 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2F \\ -F \end{Bmatrix}$$

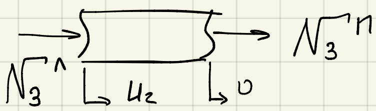
$$\begin{cases} \frac12 u_1 - \frac12 u_2 = \frac{2Fl}{EA} \\ -\frac12 u_1 + \frac72 u_2 = -\frac{Fl}{EA} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = \frac{13}{3}\cdot\frac{Fl}{EA} \\ u_2 = \frac13\cdot\frac{Fl}{EA} \end{cases}$$







$$\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_2^{л} \\ N_2^{п} \end{Bmatrix}$$



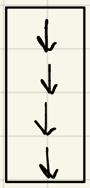
$$\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_3^{л} \\ N_3^{п} \end{Bmatrix}$$

Лекция 3 Учёт распределённой нагрузки в методе МКЭ

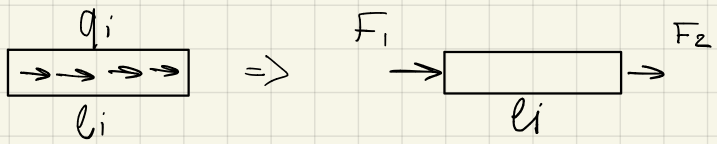
В МКЭ все воздействия не попадающие в узлы заменяют узловыми силами. При замене должны выполняться след. условия.

1) вклад в ур-я равновесия для исход и замен. конструкции одинаков.

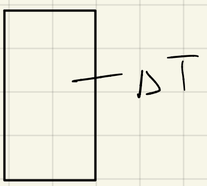
2) перемещение в любой из частных случаев для исходной и замененной конструкции одинаков.

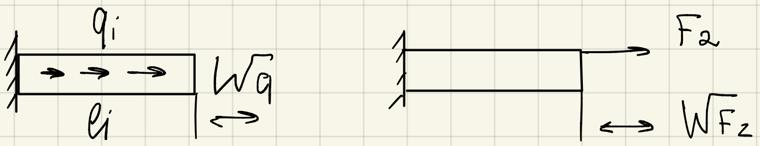


$q = \rho \cdot A g$

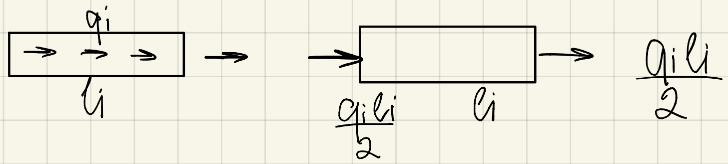


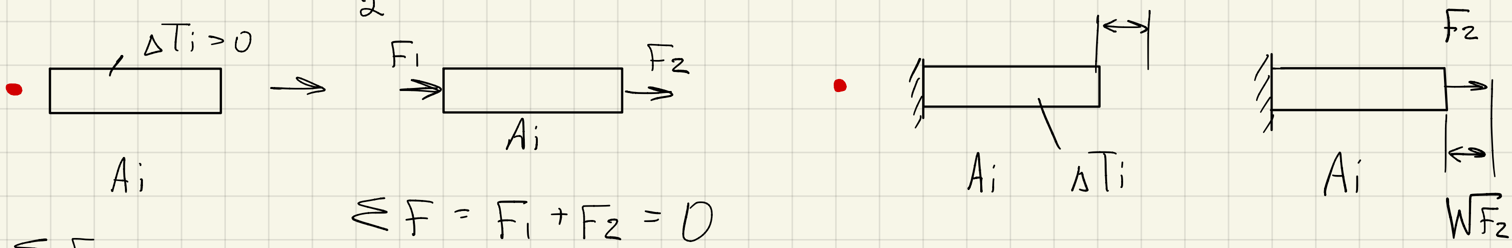
$\Sigma F = q_i l_i$ $\qquad$ $\Sigma F = F_1 + F_2 = q_i l_i$ – 1ое условие





$W_q = \frac{q_i l_i^2}{2EA}$; $\quad W_{F_2} = \frac{F_2 l_i}{EA}$ $\Rightarrow$ $F_1 = F_2 = \frac{q_i l_i}{2}$

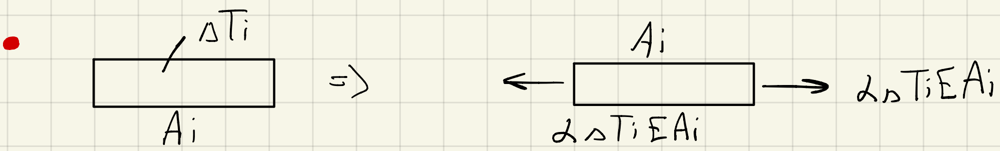


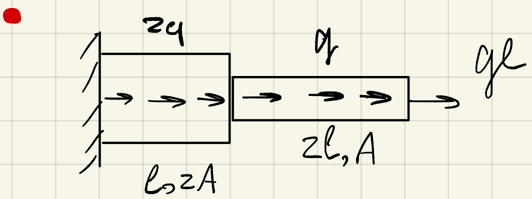


$\Sigma F = F_1 + F_2 = 0$

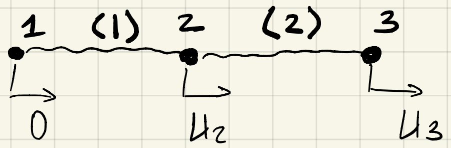
$\Sigma F = 0$

$W_{\Delta T} = \alpha \Delta T_i l$; $\qquad W_{F_2} = \frac{F_2 l}{EA_i}$; $\qquad F_2 = \alpha \Delta T_i E A_i$

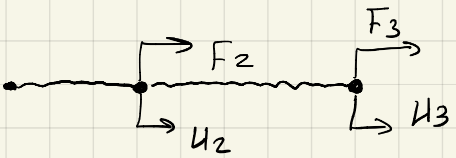




I.

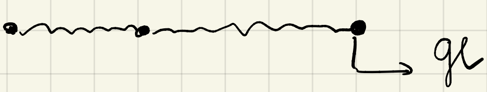


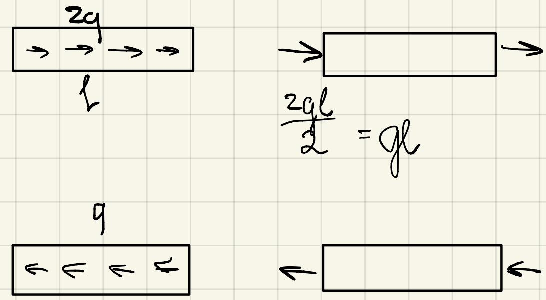
II. $\{a\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$



2. Составление векторов перемещений и узлов угловых сил.

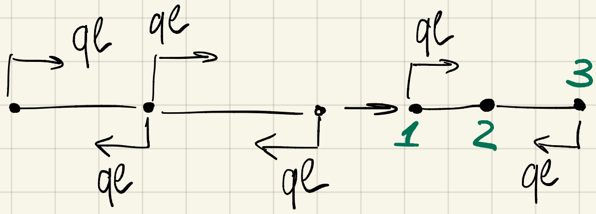
$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ql \end{Bmatrix}$





$$\frac{2ql}{2} = ql \qquad \frac{2ql}{2} = ql$$

$$\frac{q \cdot 2l}{2} = ql \qquad \frac{q \cdot 2l}{2} = ql$$



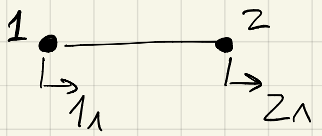
$$\{F_{gon}\} = \begin{Bmatrix} F_2^{gon} \\ F_3^{gon} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -ql \end{Bmatrix}$$

3. Составление жестокости матриц элемента

$$[K^{(1)}] = \frac{E \cdot 2A}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & u_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{-2} \\ -\cancel{2} & 2 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ u_2 \end{array}$$

$$[K^{(2)}] = \frac{EA}{l} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \end{array}$$

√	1∧	2∧
1	0	u_2
2	u_2	u_3



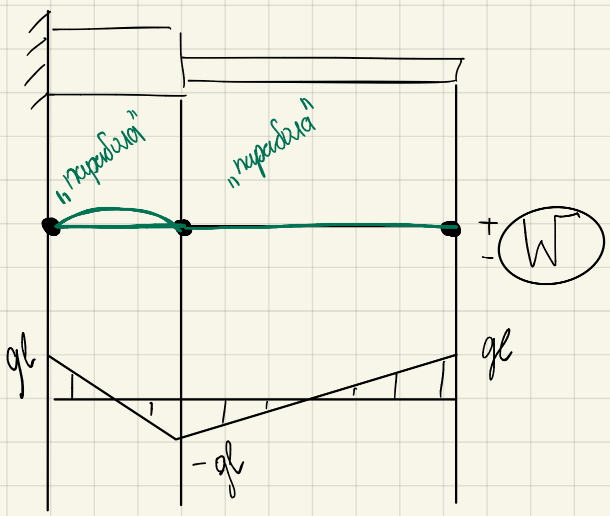
$$[K] = \frac{EA}{l} \begin{vmatrix} 2{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$

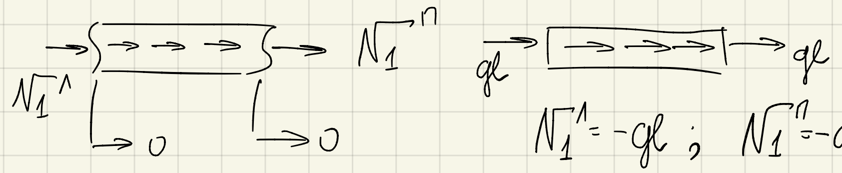
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

$$u_2 = u_3 = 0$$

$$[K]\{a\} = \{F\} + \{F_{gon}\}$$

$$\frac{EA}{l} \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ql \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -ql \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

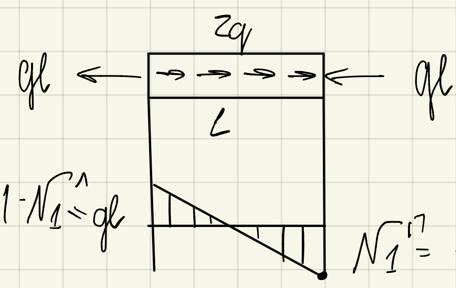




$$N_1^{\wedge} = -ql \; ; \quad N_1^{п} = -ql$$

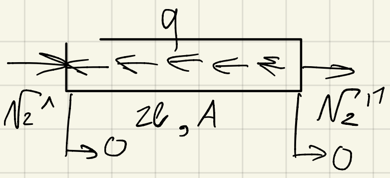
$$[K^{(1)}]\{a_1\} = \{N_1\} + \{F_{gon}\}$$

$$\frac{EA}{2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1^{\wedge} \\ N_1^{п} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ql \\ ql \end{Bmatrix}$$

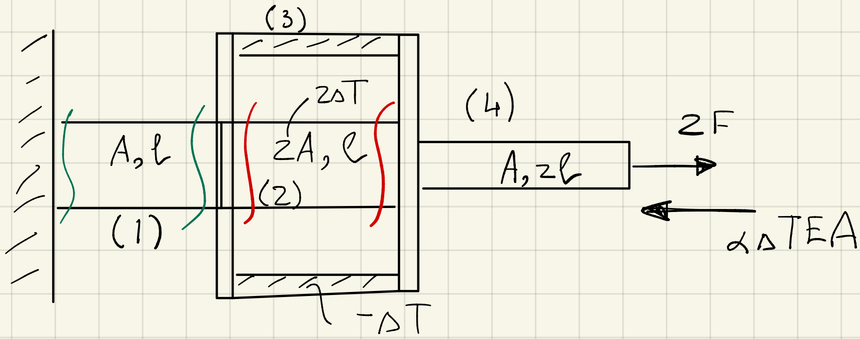


$$-1 \cdot N_1^{\wedge} = ql$$

$$N_1^{п} = -ql$$

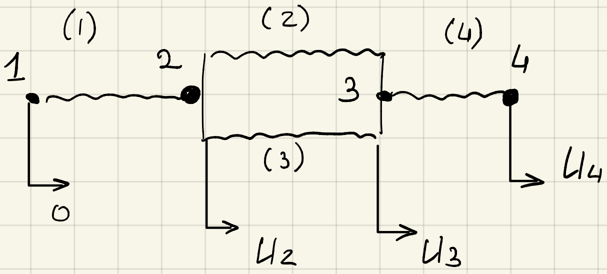


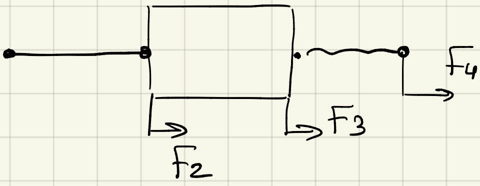
$$\frac{EA}{l} \begin{vmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_2^{\wedge} \\ N_2^{п} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -ql \\ -ql \end{Bmatrix}$$



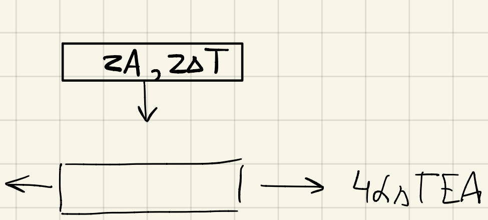
$F = k\alpha\Delta TEA$

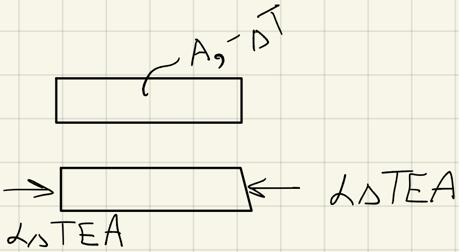
$k = -\frac{1}{2}$



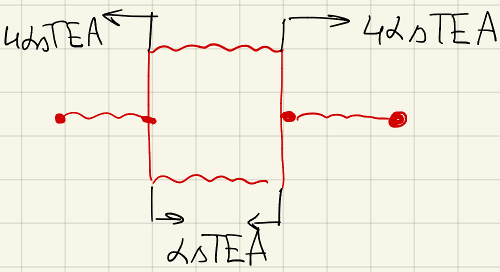


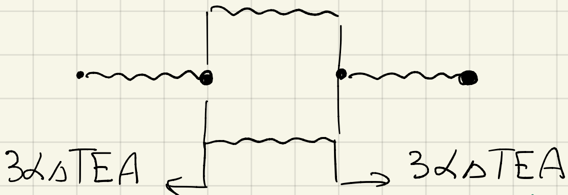
$$\{a\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha\Delta TEA \end{Bmatrix}$$





$\alpha \cdot 2\Delta TE \cdot 2A = 4\alpha\Delta TEA$





$$\{F_{gon}\} = \begin{Bmatrix} -3\alpha\Delta TEA \\ 3\alpha\Delta TEA \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K^{(1)}] = \frac{EA}{\ell} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & u_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$[K^{(2)}] = \frac{EA}{\ell} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$[K^{(3)}] = \frac{EA}{\ell} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

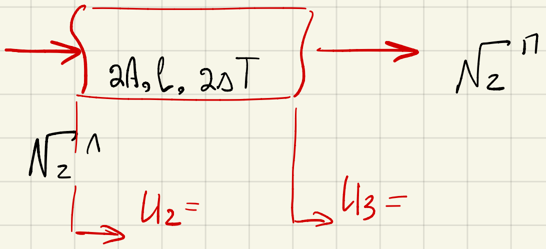
$$[K^{(4)}] = \frac{EA}{\ell} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \end{array}$$

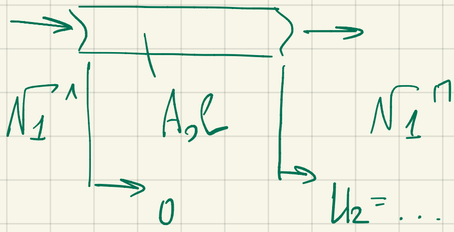
Nr	1ʌ	2ʌ
1	0	u_2
2	u_2	u_3
3	u_2	u_3
4	u_3	u_4

$$[K] = \frac{EA}{\ell} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_2 & u_3 & u_4 \end{array} & \\ \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 3{,}5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \end{array}$$

$$[K]\{a\} = \{F\} + \{F_{gon}\}$$

$u_2, u_3, u_4 = \ldots$





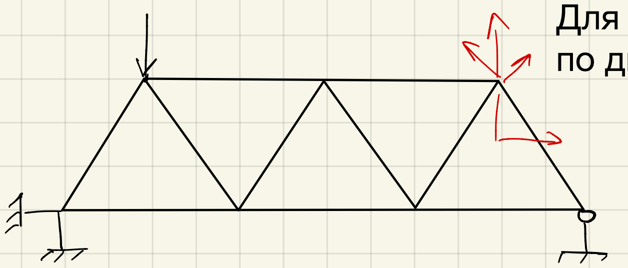
$$[K^{(2)}]\{a_2\} = \{N_2\} + \{F_{доп}\}$$

$$\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_2^{л} \\ N_2^{п} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4\alpha_\Delta T EA \\ 4\alpha_\Delta T EA \end{Bmatrix}$$

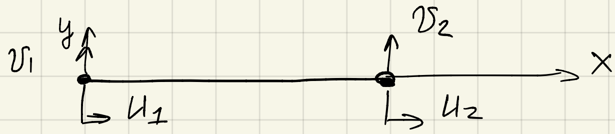
$$\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1^{л} \\ N_1^{п} \end{Bmatrix}$$

Расчёт ферменных конструкций

Фермами называют стержневые конструкции, в которых стержни работают только на растяжение, сжатие



Для плоской фермы в каждой из узлов элемента возникают по два перемещения

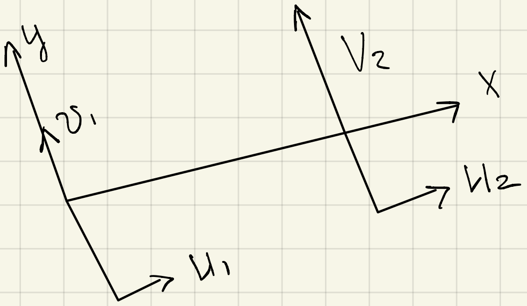


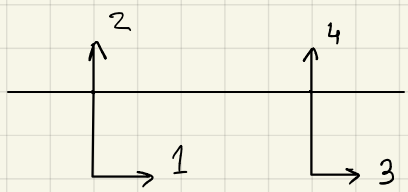
$$\{a\}_{4\times1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

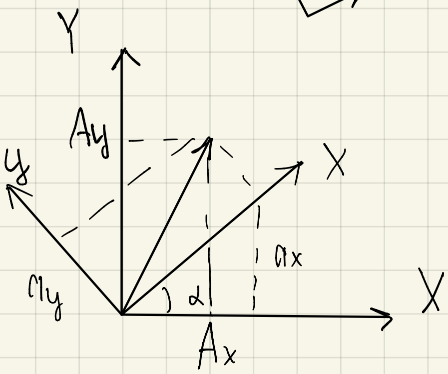
Перемещения по направлению У не влияют на растяжение, сжатие стержня, поэтому матрица жесткости элемента имеет следующий вид :

$$[k^{(e)}] = \frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Лекция 4







$$A_x = a_x\cos\alpha - a_y\sin\alpha$$

$$A_y = a_x\sin\alpha + a_y\cos\alpha$$

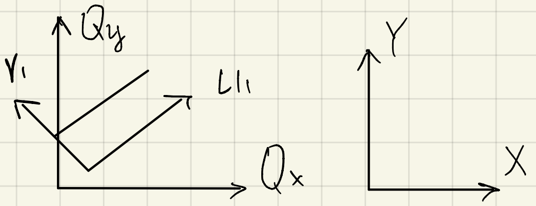
$$\{A\} = [l]\{a\}$$

$$[l] = \begin{vmatrix} \cos\alpha ; & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

Матрица направляющихся косинусов называется ортогональной матрицей

$$[l]^{-1} = [l]^T$$

Свяжем вектора перемещений и сил в локальной глобальной СК.



u_1, v_1 – в локальной

a_{x1}, a_{y1} – в глобальной

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{x2} \\ a_{y2} \end{Bmatrix} \qquad \{a\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \qquad \{A\} = \underline{\begin{vmatrix} [l] & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & [l] \end{vmatrix}} \{a\}$$

[T] – матрица трансформации

Матрицы блочно состоящие из ортогональных матриц также ортогональны

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

$\{F\}$ глоб. $\{f\}$ локальн. связаны аналогично $\Rightarrow$ $\{F\} = [T]\{f\}$

Запишем каноническое уравнение МКР в локальной и глобальной СК

$$[K_л]\{a\} = \{f\} \qquad [K_г][T]\{a\} = [T]\{f\}$$

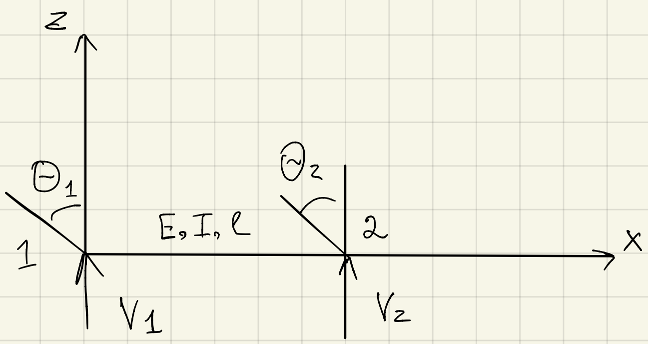
$$[K_г]\{A\} = \{F\}$$

$$[T]^T[K_г][T]\{a\} = \{f\}$$

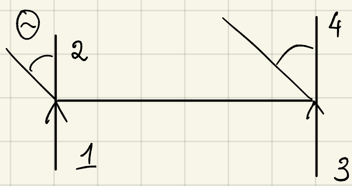
$$[K_л] = [T]^T[K_г][T]$$

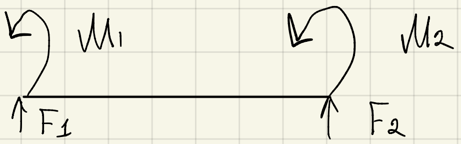
$$\boxed{[K_г] = [T][K_л][T]^T}$$ – матрица жёсткости в глоб.

Матрица жесткости простейшего палочного точечного элемента



$$\underset{4\times 1}{\{a\}} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ \Theta_1 \\ V_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}$$

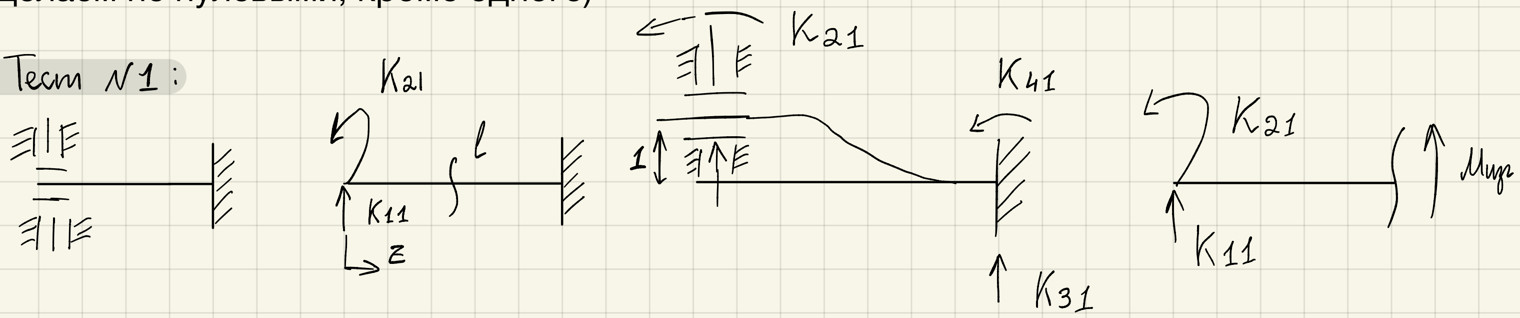




$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Матрицу жесткости получим с помощью метода прямых плоскостей (все перемещения делаем не нулевыми, кроме одного)

Тест № 1:



$M_{изг} = K_{11} Z - K_{21}$

$EIV'' = M_{изг} = K_{11} Z - K_{21}$

$$\Theta = \frac{1}{EI}\left(K_{11}\cdot\frac{Z^2}{2} - K_{21} Z\right) + C$$

$$V = \frac{1}{EI}\left(K_{11}\cdot\frac{Z^3}{6} - K_{21}\cdot\frac{Z^2}{2}\right) + CZ + D$$

Граничные условия:

При $Z=0$ $V=1$; при $Z=0$ $\Theta=0$

При $Z=l$ $V=0$ и $\Theta=0$

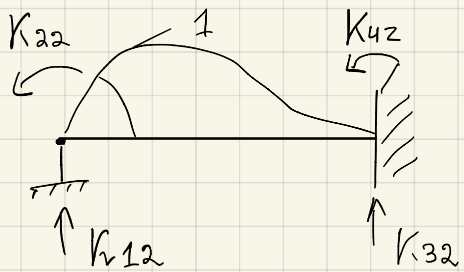
$$K_{11} = \frac{12EI}{l^3} \qquad K_{21} = \frac{6EI}{l^2}$$

Оставшиеся компоненты из уравнений равновесия

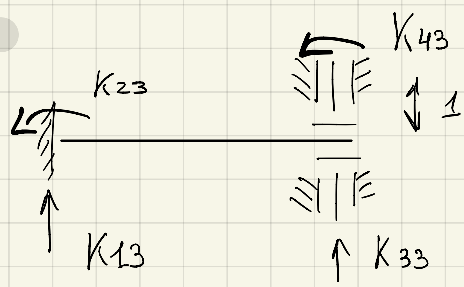
$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow K_{11} + K_{31} = 0$

$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow K_{41} + K_{21} - K_{11} l = 0$

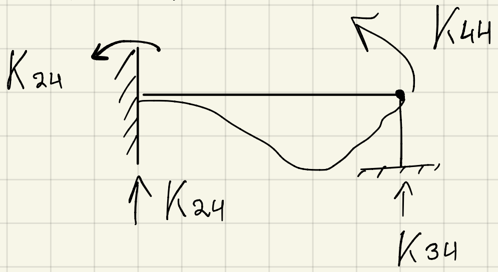
Тест 2: (запрещ. все передвиж. кроме 2-го) Тоже самое, но меняем знак у „K" с 1 на 2.



Тест 3:

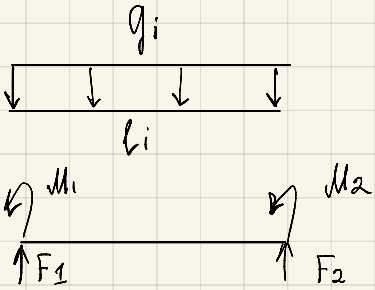


Тест 4:



$$[K] = \frac{EI}{l^3}\begin{vmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{vmatrix}$$

Учёт распределённой нагрузки

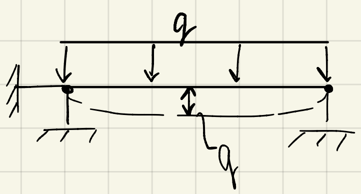


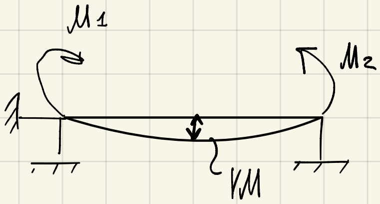
из симметрии: $F_1 = F_2$; $M_1 = -M_2$

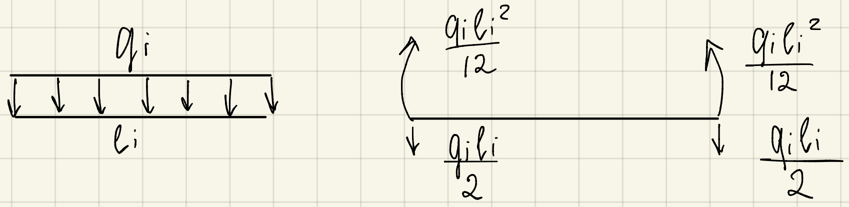
$\Sigma F_z = 0$

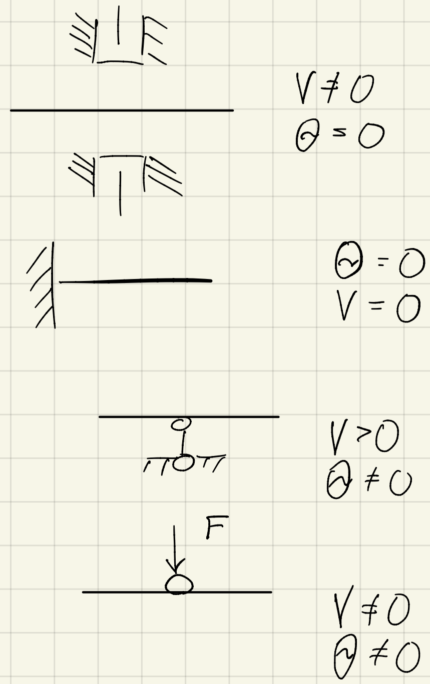
$F_1 + F_2 = -q_i l_i$

$$F_1 = F_2 = \frac{q_i l_i}{2}$$

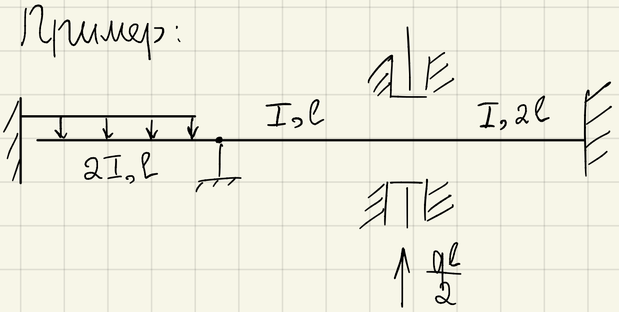




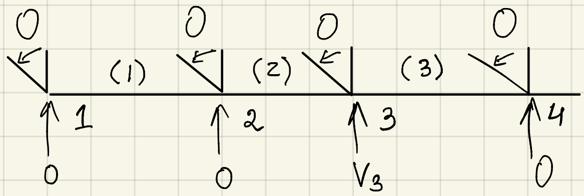




Пример:

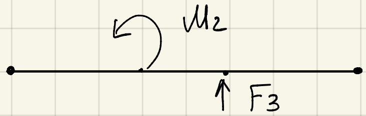


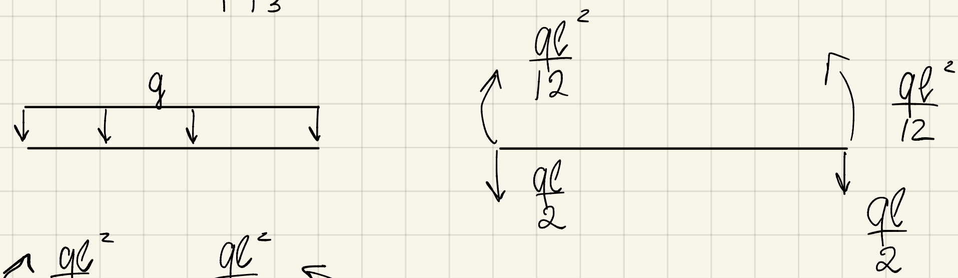
$$I = \frac{h^3}{12}$$



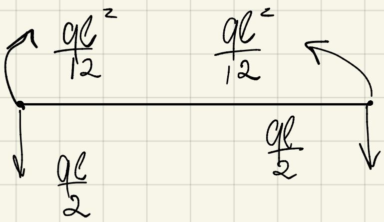
II. Сост-е векторов сил

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} M_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ \frac{ql}{2} \end{Bmatrix}$$





$$\{F_{доп}\} = \begin{Bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

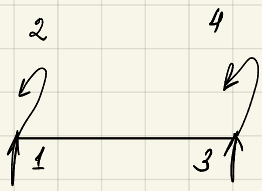


III. Сост-е матриц жесткости отдельных эл-тов

$$[K^{(2)}] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^{(1)}] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 12l & -24 & 12l \\ 12l & 8l^2 & -12l & 4l^2 \\ -24 & -12l & 24 & -12l \\ 12l & 4l^2 & -12l & 8l^2 \end{bmatrix}$$

$$K^{(3)} = \frac{EI}{(2l)^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & \theta_2 & V_3 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6\cdot 2l & -12 & 6\cdot 2l \\ 6\cdot 2l & 4\cdot(2l)^2 & -6\cdot 2l & 2\cdot(2l)^2 \\ -12 & -6\cdot 2l & 12 & 6\cdot 2l \\ 6\cdot 2l & 2(2l)^2 & -6\cdot 2l & 4\cdot(2l)^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ 0 \end{array} = \frac{EI}{(2l)^3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2}l & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}l \\ \frac{3}{2}l & 2l^2 & -\frac{3}{2}l & l^2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}l & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}l \\ \frac{3}{2}l & l^2 & -\frac{3}{2}l & 2l^2 \end{bmatrix}$$



$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \theta_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4l^2 + 8l^2 & -6l \\ -6l & 12 + \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \theta_2 \\ V_3 \end{array}$$

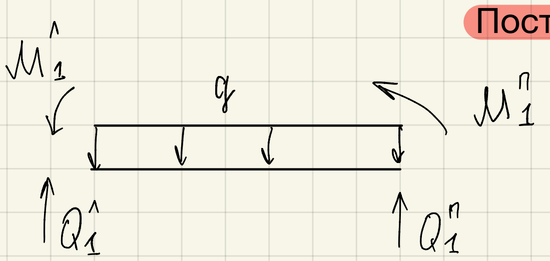
W	1	2	3	4
1	0	0	0	Θ_2
2	0	Θ_2	V_3	0
3	V_3	0	0	0

Решение канонического уравнения МКО

$$[K]\{a\} = \{F\} + \{F_{доп}\}$$

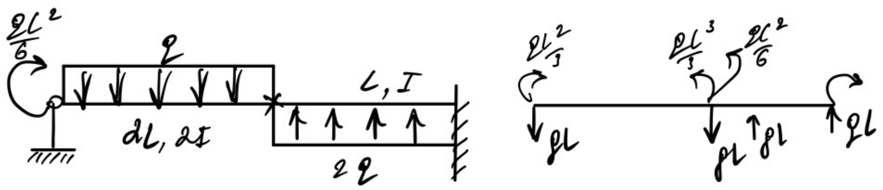
$$\Theta_2 = \frac{1}{24}\cdot\frac{ql^3}{EI} \qquad V_3 = \frac{1}{18}\cdot\frac{ql^4}{EI}$$

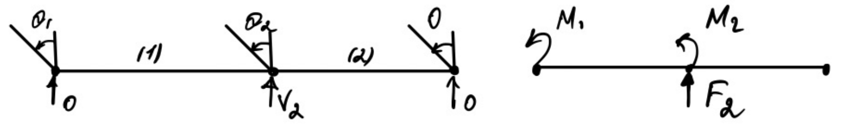
Постпроцессорная обработка



$$\frac{EI}{l^3}\begin{vmatrix} 24 & 12l & -24 & 12l \\ 12l & 8l^2 & -12l & 4l^2 \\ -24 & -12l & 24 & -12l \\ 12l & 4l^2 & -12l & 8l^2 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-\frac{ql}{2}\\ -\frac{ql^2}{12}\\ -\frac{ql}{2}\\ \frac{ql^2}{12}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-\frac{ql}{2}\\ -\frac{ql^2}{12}\\ -\frac{ql}{2}\\ \frac{ql^2}{12}\end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix}ql\\ ql^2/4\\ 0\\ ql^2/4\end{Bmatrix}$$

Лекция 5





$$\underset{3\times1}{\{F\}} = \begin{Bmatrix}M_1\\F_2\\M_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{ql^2}{6}\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$[K^{(2)}] = \frac{EI}{L^3}\begin{vmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{vmatrix}$$

$$\{F_{доп}\} = \begin{Bmatrix}-\frac{ql^2}{3}\\0\\ \frac{ql^2}{2}\end{Bmatrix}$$

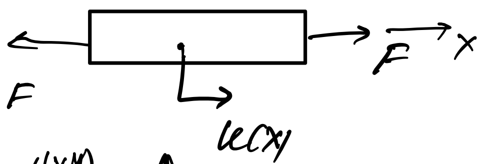
$$[K^{(1)}] = \frac{2EI}{(2L)^3}\begin{vmatrix} 12 & 12L & -12 & 12L \\ 6\cdot 2L & 4(2L)^2 & -6\cdot 2L & 2(2L)^2 \\ -12 & -6\cdot 2L & 12 & -6\cdot 2L \\ 6\cdot 2L & 2\cdot(2L)^2 & -6\cdot 2L & 4(2L)^2 \end{vmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c|cccc|c} & 0 & \Theta_1 & V_2 & \Theta_2 & \\ \hline & 3 & 3L & -3 & 3L & 0 \\ & 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 & \Theta_1 \\ & -3 & -3L & 3 & -3L & V_2 \\ & 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 & \Theta_2 \end{array}$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{|ccc|c} \Theta_1 & V_2 & \Theta_2 & \\ \hline 4L^2 & -3L & 2L^2 & \Theta_1 \\ -3L & 3+12 & -3L+6L & V_2 \\ 2L^2 & -3L+6L & 4L^2+4L^2 & \Theta_2 \end{array}$$

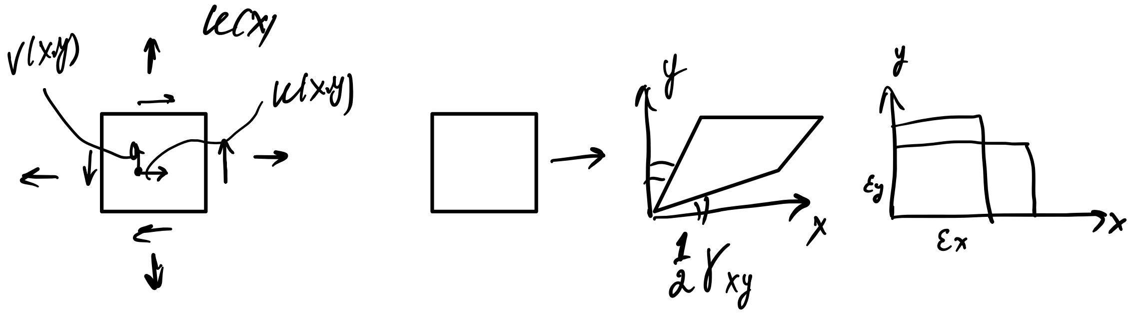
$$\frac{EI}{L^3}\begin{vmatrix} 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3L & 15 & 3L \\ 2L^2 & 3L & 8L^2 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix}\Theta_1\\V_2\\ \Theta_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{ql^2}{6}\\0\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-\frac{ql^2}{3}\\0\\ \frac{ql^2}{2}\end{Bmatrix}$$

- 23

1. Соотношение Коши (деформация и перемещение)



$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_x \qquad \left(\frac{du}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}\right)$$



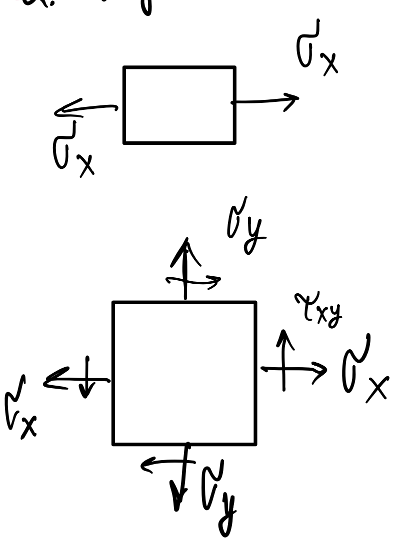
$$\boxed{\{\varepsilon\} = [R]\cdot\{u\}}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\underset{1\times 1}{\{\varepsilon_x\}} = \left[\frac{d}{dx}\right]\{u\}$$

2. Физическое соотношение (закон Гука)



$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_y - \nu\varepsilon_x]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)}\gamma_{xy}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

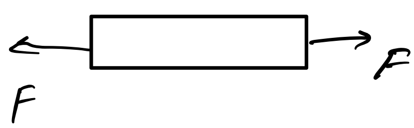
$$\boxed{\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

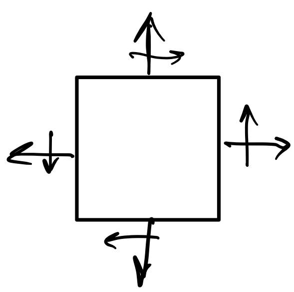
в плоском случае: $\{\sigma_x\} = [E] \cdot \{\varepsilon_x\}$

3. Удельная потенциальная энергия деф-и

$$U_0 = \frac{dU}{dV}$$



$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_x^2}{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_x \sigma_x$$



$$U_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_x \sigma_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \sigma_y + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot \tau_{xy}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \{\varepsilon_x \ \ \varepsilon_y \ \ \gamma_{xy}\} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Раст/сжат : $U_0 = \frac{1}{2} \{\varepsilon_x\} \{\sigma_x\}$

$$\boxed{\{u\} = [N]\{a\}}$$

$$[K]=\int_{V^{(e)}}[B]^T[D][B]\,dV^{(e)}$$

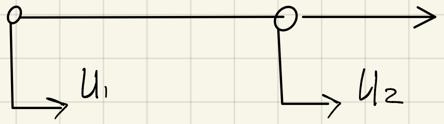
Лекция 6

$$[B]=[R][N] \qquad \{u\}=[N]\{a\}$$

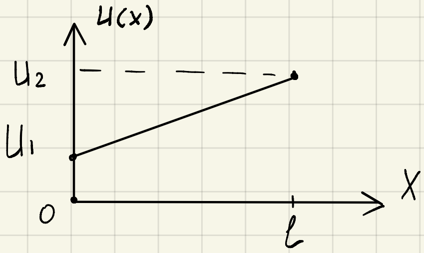
$$\{\varepsilon\}=[R]\{u\}$$

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$$

Получение матриц жесткости элемента растяжения и сжатия энергетическим методом



Аппроксимируем перемещение элемента через перемещение в его узнал линейно



$$u(x)=u_1\cdot N_1(x)+u_2\cdot N_2(x)$$

$$\frac{du}{dx}=\varepsilon \qquad \underset{1\times1}{\{\varepsilon\}}=\overbrace{\underset{1\times1}{\left[\frac{d}{dx}\right]}}^{[R]}\underset{1\times1}{\{u\}}$$

$$\sigma=E\varepsilon \qquad \underset{1\times1}{\{\sigma\}}=\underbrace{\underset{1\times1}{[E]}}_{[D]}\underset{1\times1}{\{\varepsilon\}}$$

$$N_1(x)=a_{11}x+a_{01} \qquad N_2(x)=a_{12}x+a_{02}$$

при $x=0$ $N_1=1$ $\qquad N_1(x)=\dfrac{l-x}{l}$ $\qquad$ при $x=0$ $N_2=0$ $\qquad \Rightarrow N_2(x)=\dfrac{x}{l}$

при $x=l$ $N_2=0$ $\qquad$ при $x=l$ $N_1=1$

$$\underset{1\times1}{\{u\}}=\underbrace{\underset{1\times2}{\left[\frac{l-x}{l}\,;\,\frac{x}{l}\right]}}_{N(x)}\underset{2\times1}{\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}}$$

$$\underset{1\times2}{[B]}=\underset{1\times1}{[R]}\underset{1\times1}{[N]}=\frac{d}{dx}\left[\frac{l-x}{l}\,;\,\frac{x}{l}\right]=\left[-\frac{1}{l}\,;\,\frac{1}{l}\right]$$

$$V^{(e)}=Al$$

$$[K]=\int_{V^{(e)}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{l}\\ \frac{1}{l}\end{bmatrix}\underset{1\times1}{E}\left[-\frac{1}{l}\,;\,\frac{1}{l}\right]dV^{(e)}=E\begin{vmatrix}\frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2}\\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2}\end{vmatrix}\cdot\int_{V^{(e)}}dV^{(e)}=\frac{EA}{l}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

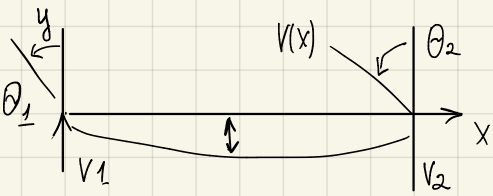
Полученная матрица совпала с точной матрицей, что означает, что перемещение в переделах конечного элемента задана точно.

Матрица жёсткости балочного элемента Эйлера- Бернулли

Данный элемент предполагает отсутствие сдвиговых деформаций

$$\sigma=E\varepsilon \qquad \{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = y \cdot \frac{1}{\rho} = y\frac{d^2V}{dx^2} \qquad \{\varepsilon\} = \underbrace{\left[y\frac{d^2}{dx^2}\right]}_{R}\{V\}$$



$$EIV'' = M_{изг}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V''}{\left(1+(V_0')^2\right)^{3/2}} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$V(x) = V_1 \cdot N_1(x) + \theta_1 N_2(x) + V_2 N_3(x) + \theta_2 N_4(x)$$

$$\theta(x) = \frac{dV}{dx} \qquad N_1(x) = a_{31}x^3 + a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{01}$$

$$V(0) = 1 \qquad V(l) = 0 \qquad N_1(0) = 1 \qquad N_1(l) = 0$$

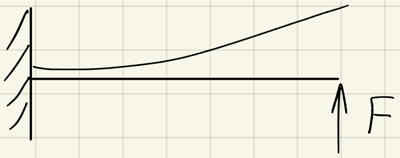
$$\theta(0) = V'(0) = 0 \qquad \theta(l) = V'(l) = 0 \qquad N_1'(0) = 0 \qquad N_1'(l) = 0$$

$$\{V\} \approx [N_1, N_2, N_3, N_4]\begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad [k] = \frac{EI}{l^3}\begin{vmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6 & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{vmatrix}$$

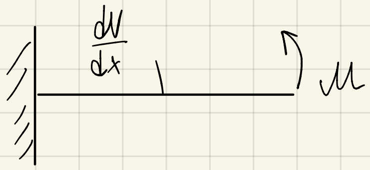
beam 3

Матрица жесткости балочного элемента Тимошенко

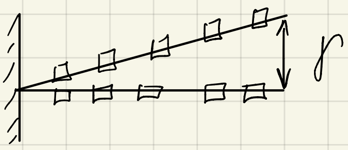
Элемент строчится на основе теории Тимошенко, учитывающий поперечные силы

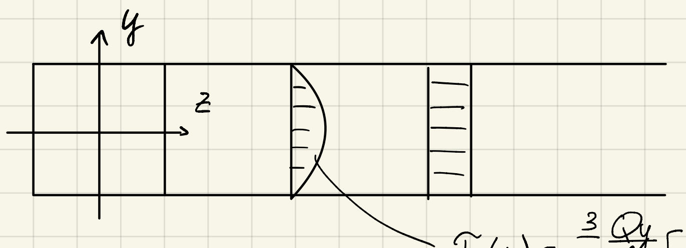


$$\theta = \frac{dV}{dx} + \gamma \qquad \gamma = \theta - \frac{dV}{dx} \qquad \varepsilon = y \cdot \frac{1}{\rho} = y\frac{d\theta}{dx}$$



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y\cdot\frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V \\ \theta \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} \sigma = E\varepsilon \\ \tau = G\gamma \end{matrix}$$

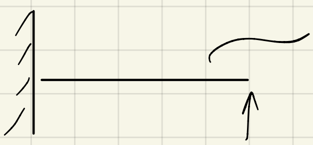




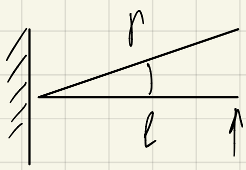
$$\tau(y) = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{A}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$$

$$Q_y = \int \tau\, dA, \quad \tau = k \cdot \frac{Q_y}{A}$$

Коэффициент K, учитывающий неравномерность распределения касательного напряжения, находится из условия равенства потенциальной энергии деформации и работе внешних сил



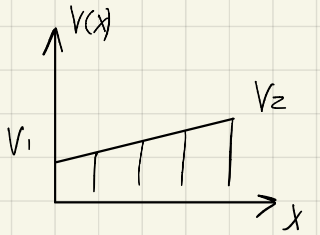
$$U = \int \frac{\tau^2(y)}{2G} dV^{(e)}$$

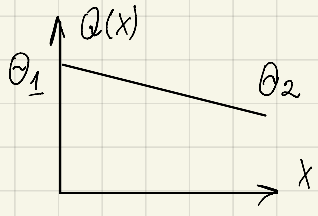


$$A = \frac{1}{2}F\cdot\gamma\cdot l$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = k\frac{Q_y}{GA}, \quad k = \frac{5}{6}$$

Для элементов Тимошенко линейные и угловые перемещения аппроксимируются независимо друг от друга





$$V(x) = N_1(x)V_1 + N_2(x)V_2 = \frac{l-x}{l}V_1 + \frac{x}{l}V_2$$

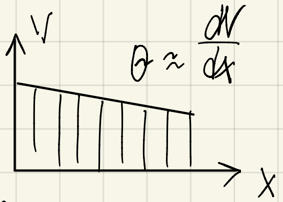
$$\theta(x) = \frac{l-x}{l}\theta_1 + \frac{x}{l}\theta_2$$

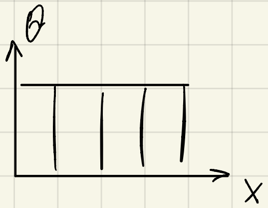
$$\begin{Bmatrix} V(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \gamma G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

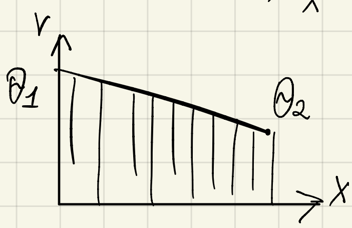
$$[k] = \frac{EI}{l}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{kGA}{l}\begin{vmatrix} 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{6} \\ -1 & -\frac{l}{2} & 1 & -\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{6} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{vmatrix}$$

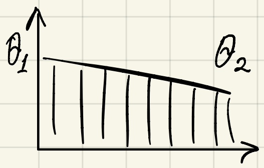
Полученное слагаемое, учитывающие сдвиг, будет давать некорректное результаты, для стержней с малыми сдвиговыми деформациями.

$$\theta \approx \frac{dV}{dx}$$



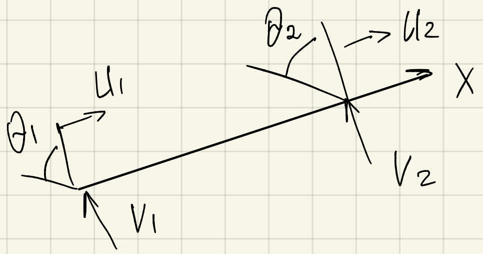


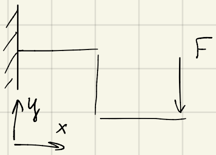




$$[K_{сдв}] = \frac{kGA}{l}$$

Плоский балочный конечный элемент Бернулли





$$\{a\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ Q_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

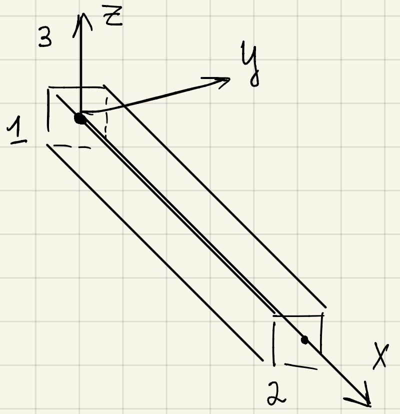
$$[K] = \begin{vmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^3} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4IE}{l} \end{vmatrix}$$

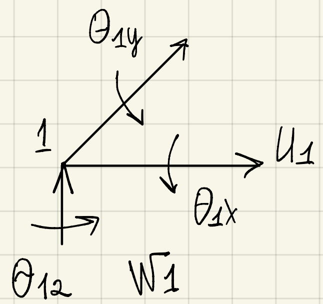
$$[T] = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Пространственные балочные конечные элементы

$$U(x) = U_1 N_1 + U_2 N_2 \qquad V(x) = N_3 V_1 + N_4 \theta_{1z} + N_5 V_2 + N_6 \theta_{2z}$$

$$Q_x = Q_{1x} N_1 + Q_{2x} N_2 \qquad W(x) = N_3 W_1 + N_4 \theta_{1y} + N_5 W_5 + N_6 \theta_{2y}$$





$N_3 - N_6$

$N_3 - N_6$

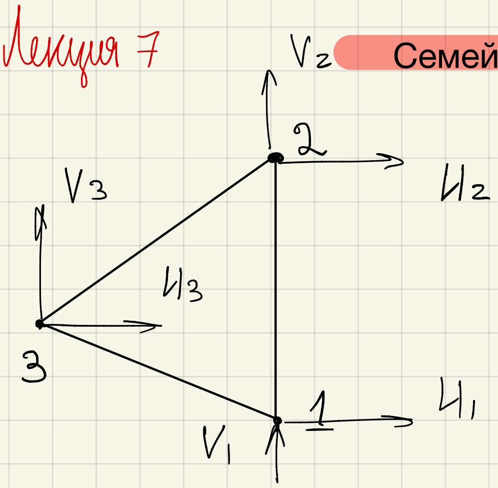
$(ax^3 + bx^2 + cx + d)$

$U(x) = U_1 W_1 + U_2 N_2$ $\qquad W(x) = W_1 N_2 + N_2 W_2$ $\qquad N_1 = \frac{l-x}{l};$ $\qquad N_2 = \frac{x}{l}$

$V(x) = V_1 N_1 + V_2 N_2$ $\qquad \theta_x = \theta_{1x} N_1 + \theta_{2x} N_2$

Лекция 7

Семейство конечных треугольных элементов



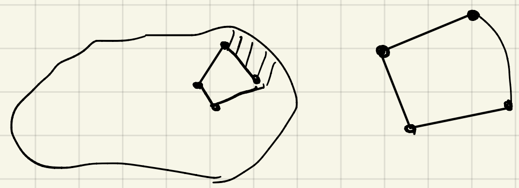
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Лекция 8

Изопараметрические конечные элементы

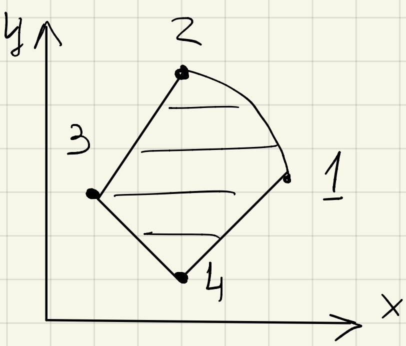
Использование рассмотренных ранее плоских элементов для крупной сетки на сложных геометрических областях имеет ряд проблем

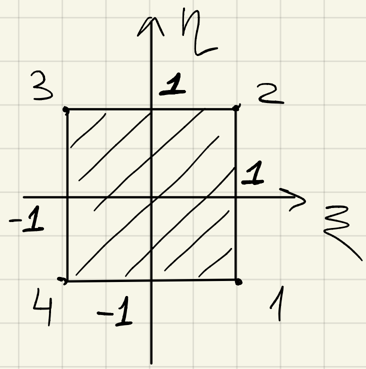
1.



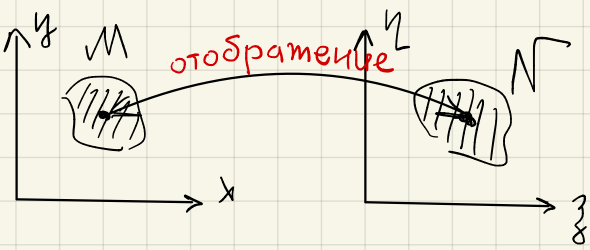
2. Интегрирование по произвольному четырёхугольнику вычислительно затратно

Для решения данных проблем разработаны изопараметрические элементы

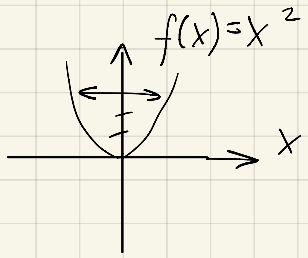




Для перехода используется аппарат комфомных отображений



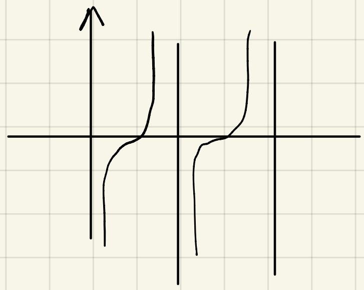
$$\begin{cases} x = f_1(\xi,\eta)\\ y = f_2(\xi,\eta)\end{cases} \qquad \begin{cases}\xi=\varphi_1(x,y)\\ \eta=\varphi_2(x,y)\end{cases}$$ – взаимнообратное отображение



– пример, когда отображение не работает

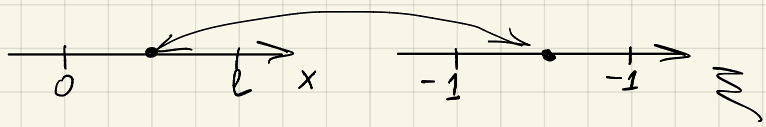
Если каждой точки N соотв. точкой в малой окрестности M, то такие отображения наз. непрерывными

Исключение:



Конформные – взаимнонепрерывные и взаимнообратн. отображения

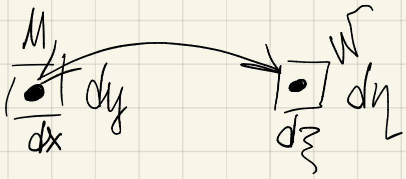
Матрица Якоби:
$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}$$



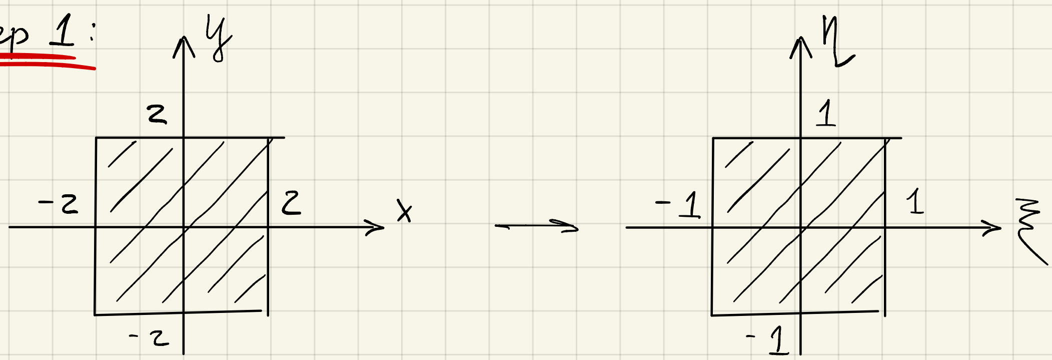
$$[J]=\frac{dx}{d\xi}$$

Можно вычислить определитель матрицы Якоби, который носит название якобиан - он показывает как меняется метрика пространства при перехода от одной области к другой

$$dx\,dy = \underbrace{\det[J]}_{\text{определитель}}\,d\xi\,d\eta$$



Пример 1:



$$x=2\xi$$
$$y=2\eta$$
$$[J]=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}$$
$$\det[J]=4$$
$$dx\,dy = 4\,d\xi\,d\eta$$

При использовании конформных изобретений

$$[K]=\int_{A^{(e)}}[B(x,y)]^T[D][B(x,y)]\,dx\,dy$$
$$\Downarrow$$
$$[K]=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}[B(\xi,\eta)]^T[D][B(\xi,\eta)]\det[J]\,d\xi\,d\eta$$

$$[B(\xi,\eta)] \to [R][N(\xi,\eta)] = [B]$$

Для получения матрицы жесткости в локальной нормированной система координат необходимо знать функции :

$$\begin{cases} x = f_1(\xi,\eta) \\ y = f_2(\xi,\eta) \end{cases}$$

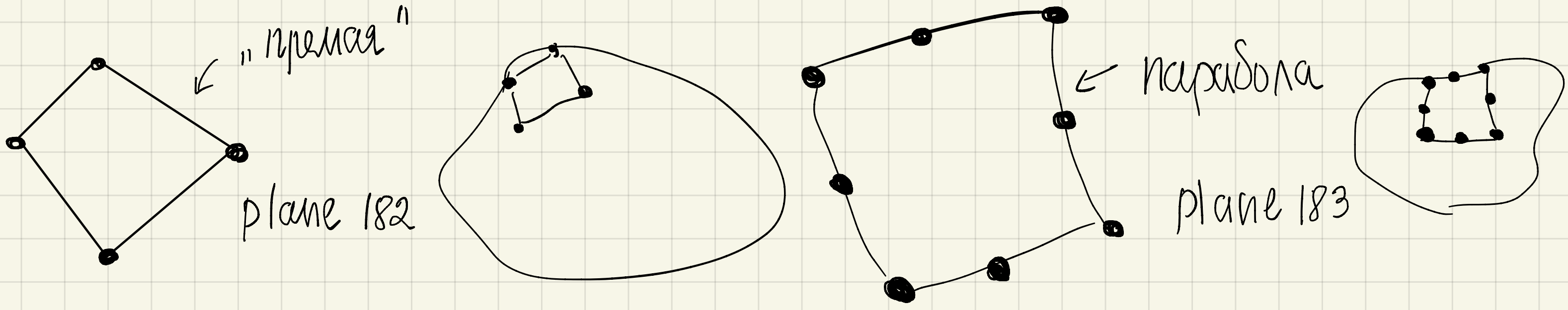
$$N_i = \frac{1}{4}(1-3\cdot\xi_i)(1+\eta\eta_i)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_4 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Для изопараметрический конечных элементов отказывают от точного учета их геометрии Вместо этого геометрию аппроксимируют с помощью тех же функций формы, что и перемещение внутри элемента

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\cdot u_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\cdot x_i \\ y = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\, y_i \end{cases}$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\cdot V_i$$



Численное интегрирование. Квадратурные формулы

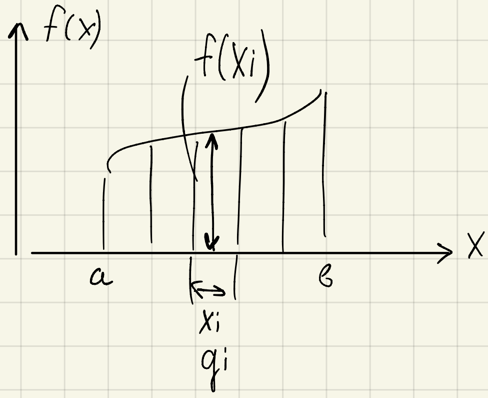
$$[K] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [B]^T[D][B] \det[J]\, d\xi\, d\eta$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

первообразная

$$[K] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

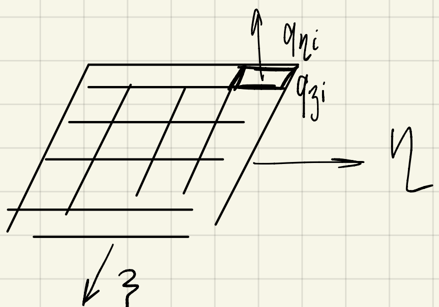
При численном счете определение первообразной невозможно



$$I \cong \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot f(x_i)$$

x_i – пробные точки

q_i – весовые коэф.



$$I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_{\xi i}\, q_{\eta i}\, \Phi(\xi_i;\eta_i)$$

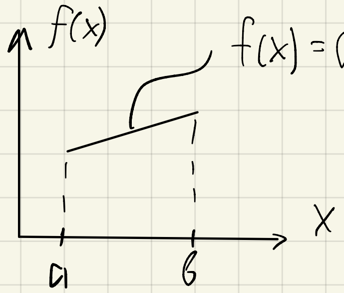
Такой подход трудно затратен, так как для приемлемой точности область интегрированиях необходимо разбить на большое число элементов

Для некоторых функций можно правильно подобрать пробные точки и весовые коэффициенты, чтобы интеграл вычислялся точно по малому числу точек.

1. Квадратурные формулы Ньютона - Котеса

В данных формулах подбирают весовые коэффициенты, а пробные точки задают равномерно

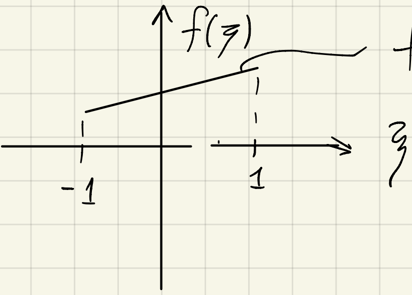
1)



$f(x) = a_1 x + a_0$

$$I = \frac{b-a}{2} \cdot f(a) + \frac{b-a}{2} \cdot f(b)$$

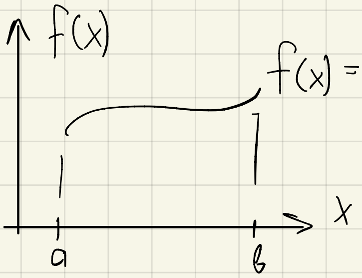
формула трапеции



$f(\xi) = a_1 \xi + a_0$

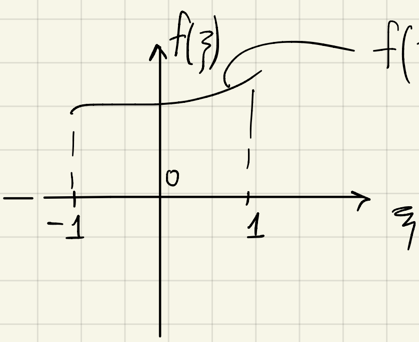
$$I = f(-1) + f(1)$$

2) Формула Симпсона



$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$I = \frac{b-a}{6} \cdot f(a) + \frac{4}{6}(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} \cdot f(b)$$



$f(\xi) = a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0$

$$I = \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1)$$

3) Формулы полином Гаусса-Лежанжра

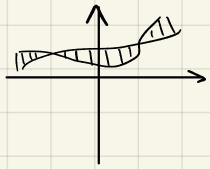
Данные формулы подбираются как весовые коэффициенты, так и точки…
Данные формулы примени для интегрированных полиномов $[-1, 1]$
В качестве пробных точек применяются

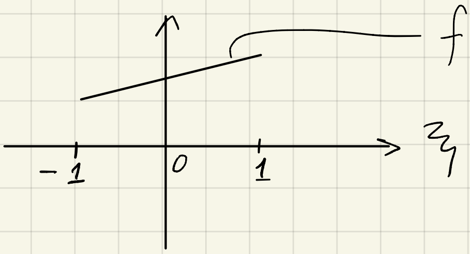
$$P_n(\xi)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\xi^n}\left[(\xi^2-1)^n\right]$$

$P_0(\xi)=1$ $\quad P_1(\xi)=\xi \quad \xi=0$ $\quad P_n(1)=1$

$P_2(\xi)=\frac{3\xi^2-1}{2} \quad \xi=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad P_n(-1)=(-1)^n$

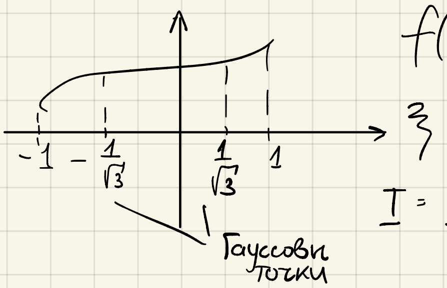
$$\int_{-1}^{+1} P_n(\xi)\cdot Q_k(\xi)\,d\xi=0 \quad ,k<n$$





$f(\xi)=a_1\xi+a_0$

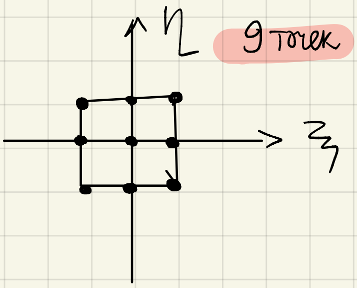
$I=2f(0)$

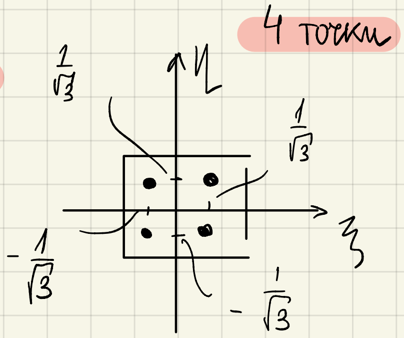


$f(\xi)=a_3\xi^3+a_2\xi^2+a_1\xi+a_0$

$I=1\cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+1\cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

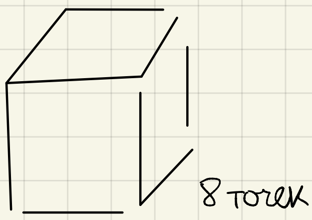
$$[K]=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$





$$[K]=\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+$$

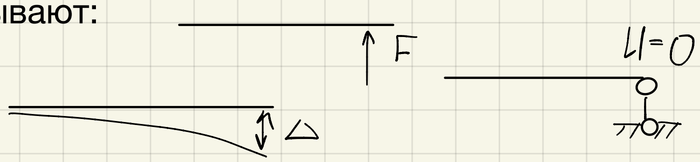
$$+\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



27 точек

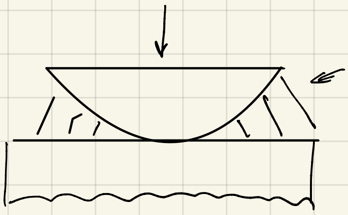
Особенности учета граничных условий в МКЭ

Граничные условия бывают:
1. Силовые
2. Кинематическийс



3. Функциональные граничные условия учитываются с помощью специальных конечных элементов, например, контактных

$F=K\cdot u$



контактные эл-ты

Силовые граничные условия учитываются с помощью вектора сил при этом, если нагрузка не приложена в узлы её раскидываются по узлам

$$\{F\}=\{F_{сосp}\}+\int_{V^{(e)}}[N]^T\{b\}\,dV^{(e)}+\int_{S_p}[N]^T\{p\}\,dS$$

$$A=\{a\}^T\{F\}+\int_{V^{(e)}}\{u\}^T\{b\}\,dV^{(e)}+\int_{S_p^{(e)}}\{u\}^T\{p\}\,dS$$

Для учета вектора кинематического перемещения возникают трудности:
Кинематические граничные условия приводят к тому, что часть элементов вектора перемещений известна, что не даёт использовать стандартные процедуры для решения уравнений . Для решения проблемы используется следующий метод

1. Метод "точный"

$$[A]\{\underset{\text{искать}}{\underset{\uparrow}{x}}\} = \{B\}$$

$$\{x\} = [A]^{-1}\{B\}$$

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

$$a_2 = C_2$$

$$\begin{vmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & K_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{12}C_2 \\ C_2 \\ F_3 - K_{32}C_2 \\ F_4 - K_{42}C_2 \end{Bmatrix}$$

Недостаток точного метода, что для учета одного условия на матрице н+н требует выполнение 3*н операций

2. Метод Пейна-Айронса, $M \sim 10^6$

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & M\cdot K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M\cdot K_{22}\cdot C_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\cancel{K_{21}a_1}}_{0} + K_{22}a_2\cdot M + \underbrace{\cancel{K_{23}a_3}}_{0} + \underbrace{\cancel{K_{24}\cdot a_4}}_{0} = M K_{22} C_2$$

$$K_{22}a_2 M \approx M K_{22} C_2$$

$$a_2 \approx C_2$$

- Необходимо выполнить 2 операции
- Данный метод не учитывает закрепление

Лекция 9

$$[M]\{\ddot{a}\} + [C]\{\dot{a}\} + [K]\{a\} = \{F(t)\}$$

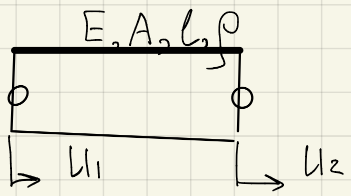
$[M]$ - матрица масс

$[C]$ - матрица демпфирования

Матрица масс

1. Согласованные
2. Диагональные

Согласованными ММ - матрица у которых масса по узлам раскидывается с помощью тех же функций формы, что и аппроксимируется перемещение
Диагональной ММ - матрица, в которой масса элемента равномерно распределена между элементами на главной диагонали



$$[M] = \int_{V^{(e)}} \rho \cdot [N]^T [N] \, dV^{(e)}$$

$$m_{ij} = \int_{V^{(e)}} \rho N_i \cdot N_j \, dV^{(e)}$$

$$u(x) \approx \underbrace{\frac{l-x}{l}}_{N_1(x)} u_1 + \underbrace{\frac{x}{l}}_{N_2(x)} u_2$$

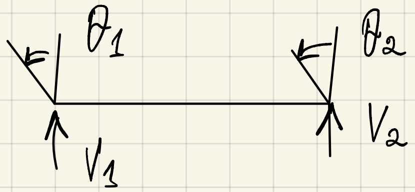
$$\underset{1\times 2}{[N]} = \left[\frac{l-x}{l} ; \frac{x}{l} \right]$$

$$[M] = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \rho A l \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$m_{22} = \int_{V^{(e)}} \rho \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{l} \, dV^{(e)} = \frac{\rho A}{l^2} \int_0^l x^2 dx = \frac{\rho A l}{3} = \frac{m}{3}$$

Для одномерного конечного элемента сумма всех компонентов ММ равна массе элемента

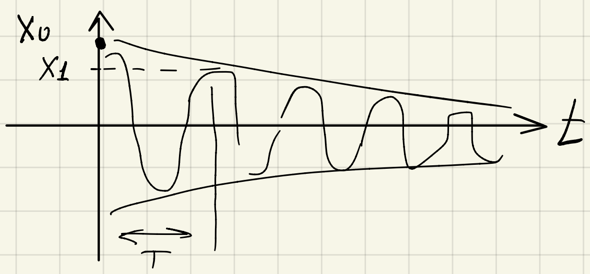
$$[M] = \rho A l \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$



$$V(x) = N_1(x) V_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) V_2 + N_4(x) \theta_2$$

$$[M] = \begin{vmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210} l & \frac{9}{70} & -\frac{13}{\ } l \\ \frac{11}{210} l & \frac{1}{105} l^2 & \frac{13}{420} l & -\frac{1}{140} l^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{420} l & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} l \\ -\frac{13}{420} l & -\frac{1}{140} l^2 & -\frac{11}{210} l & \frac{l^2}{105} \end{vmatrix}$$

Матрица демпфирования



$$x = A e^{-\varphi t} \cos(\omega t + \varphi) = A e^{-\varphi t} \cos(2\pi \nu t + \varphi)$$

$[\omega] = \frac{рад}{с}$ $\quad [\nu] = \frac{1}{c} = Гц$ (в Ansys)

$\omega = 2\pi\nu$

$\lambda = \ln\frac{x_0}{x_1} = T \cdot \psi$, $Q = \frac{2\pi}{1-e^{-\lambda}}$, но или $\lambda << 1$

$Q \approx \frac{2\pi}{\lambda}$

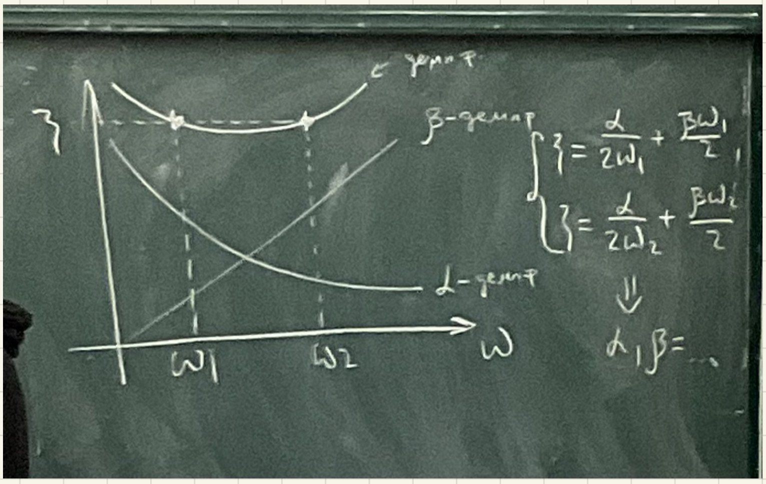
ξ - коэф. демпфирования , $\xi = \frac{1}{2Q}$ $\left(\delta = \frac{1}{Q} , \xi = \frac{\delta}{2} \right)$

Для задания МД в МКЭ используют модель рылеевского трения

$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$

$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2}$

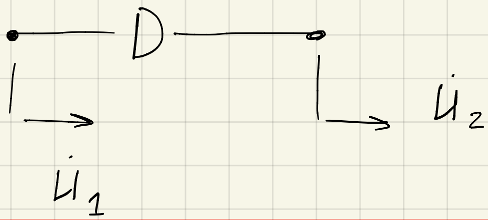
Параметры демпфирования зависят от частоты колебания



На практике большинство задач может быть решены без учета ММ и МД $\alpha = 0$

$\xi = \frac{\beta\omega_i}{2} \Rightarrow \beta = \frac{2\xi_i}{\omega_i}$

Существуют специализированные конечные элементы, для которых демпфирование задается числовым коэффициентом



$[C] = C \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

Типы задач в динамике

1. Определение собственных цистой и форм колебаний

$[C] = 0$ $\{F(t)\} = 0$ $\{a\} = \{a\}_0 \sin\omega t$

$[M]\{\ddot{a}\} + [K]\{a\} = 0$ $\{a_0\}\left(-[M]\omega^2 \sin\omega t + [K]\sin\omega t\right) = 0$

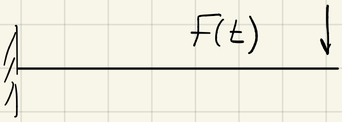
$\{a_0\}\left([K] - \omega^2[M]\right)\sin\omega t = 0$

$\det\left([K] - \omega^2[M]\right) = 0$ - каноническое уравнение

2. Гармонический анализ

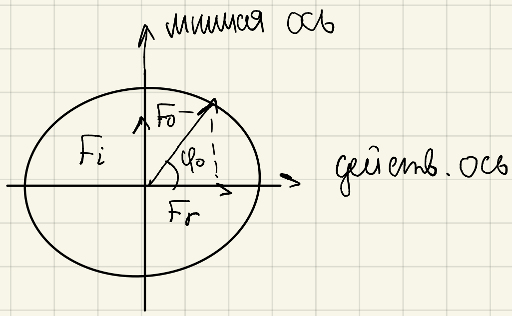
В этом анализе исследуется отклик системы на гармоническое воздействие

$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \psi_0)$



В теории колебаний вместе тригонометрических функций можно использовать экспоненты в мнимой степени

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \rightarrow F(t) = F_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi_0}$$



$$F_r = F_0 \cos\varphi_0$$

$$F_i = F_0 \sin\varphi_0$$

$$F_0 = \sqrt{F_i^2 + F_R^2}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{atan}\frac{F_i}{F_R}$$

$$[M]\{\ddot{a}\} + [C]\{\dot{a}\} + [K]\{a\} = \{F(t)\}$$

$$F(t) = (F_r + i\cdot F_i)e^{i\omega t}$$

$$\{a\} = (\{a\}_R + i\cdot\{a\}_i)e^{i\omega t}$$

$$-[M]\omega^2(\{a\}_R + i\{a\}_i)\cancel{e^{i\omega t}} + [C]i\omega(\{a\}_R + i\{a\}_i)\cancel{e^{i\omega t}} + [K](\{a\}_R + i\{a\}_i)\cdot$$
$$\cdot\cancel{e^{i\omega t}} = (\{F\}_R + i\{F\}_i)\cancel{e^{i\omega t}}$$

Получили комплексное векторо-матричное уравнение

Нас интересуют только действительные корни уравнения

$$-[M]\omega^2\{a\}_R - \omega[C]\{a\}_i + [K]\{a\}_R = \{F_R\}$$

$$-[M]\omega^2\{a\}_i - c[\omega]\{a\}_R + [K]\{a\}_i = \{F_i\}$$

$$a^{(1)} = \sqrt{(a_i^{(1)})^2 + (a_R^{(1)})^2}$$

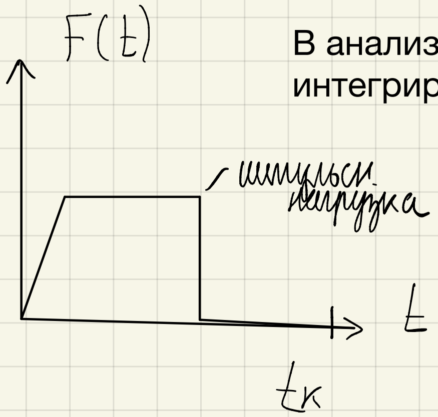
$$\begin{vmatrix} [K]-\omega^2[M] & -\omega[C] \\ \omega[C] & [K]-\omega^2[M] \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\}_R \\ \{a\}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_R \\ \{F\}_i \end{Bmatrix}$$

– канон. ур-е МКЭ для гармонического анализа

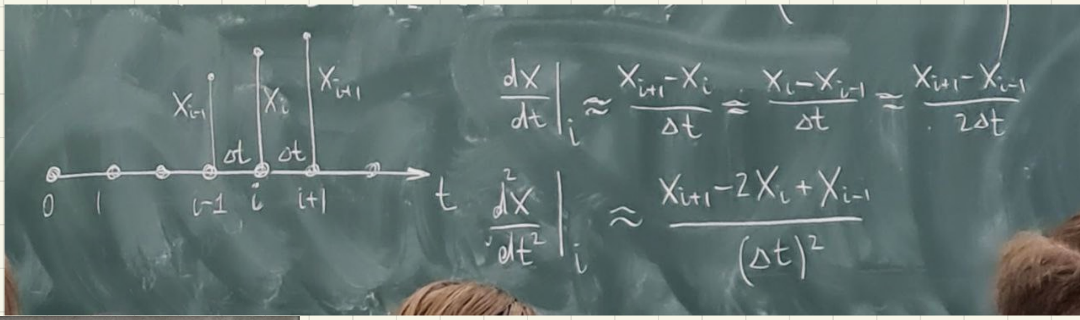
Задаваясь разными частотами и получая соответствующую им амплитуды перемещений можно подучить АЧХ

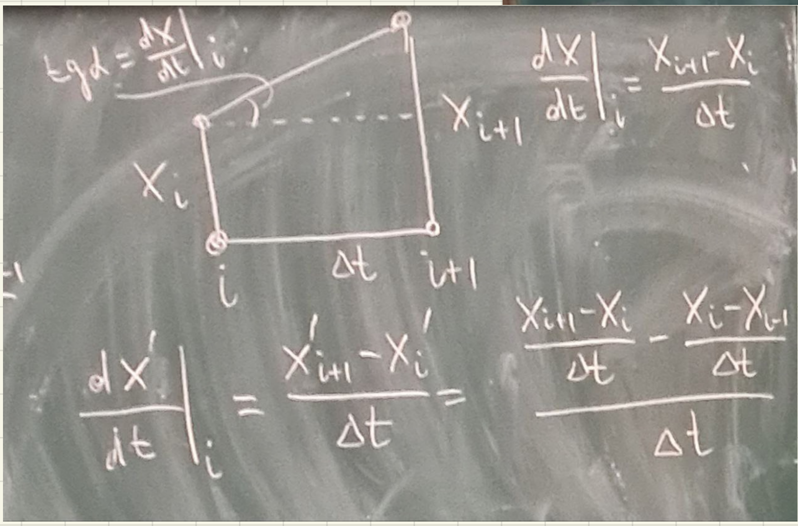
3. Анализ переходных процессов

В данном типе анализе сила воздействует по некоторому произвольному закону



В анализе переходных процессов каноническое уравнение МКЭ интегрируется во времени





$$X(t+\Delta t) = X(t) + \Delta t \cdot X'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} X''(t) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} X'''(t) + \ldots$$

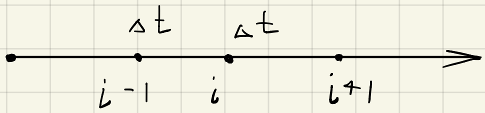
Воспользуемся конечными разностями для канонического уравнения МКЭ

$$[M]\left(\{a\}_{i+1} - 2\{a\}_i + \{a\}_{i-1}\right)\cdot\frac{1}{(\Delta t)^2} + [C]\left(\{a\}_{i+1} - \{a\}_i\right)\cdot\frac{1}{\Delta t} + [K]\{a_i\} = \{F(t_i)\}$$

$$\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[M] + \frac{1}{\Delta t}[C]\right)\{a\}_{i+1} = F(t_i) - \left([K] - \frac{1}{\Delta t}[C] - \frac{2}{(\Delta t)^2}[M]\right)\{a\}_i - \frac{1}{(\Delta t)^2}[M]\{a\}_{i-1}$$

Лекция 10

$$[M][\ddot{a}] + [C][\dot{a}] + [K]\{a\} = \{F(t)\}$$



$$\{\dot{a}\} \approx \frac{\{a\}_{i+1} - \{a\}_i}{\Delta t}$$

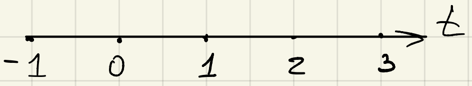
$$\{\ddot{a}\}_i = \frac{\{a\}_{i+1} - 2\{a\}_i + \{a\}_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[M] + \frac{1}{\Delta t}[C]\right)\{a\}_{i+1} = F(t_i) - \left([K] - \frac{1}{\Delta t}[C] - \frac{2}{(\Delta t)^2}[M]\right)\{a\} - \frac{1}{(\Delta t)^2}[M]\{a\}_{i-1}$$

$$[A]\{a\}_{i+1} = \{b\}$$

$$\{a\}_{i+1} = [A]^{-1}\{b\}$$

$$\{a\}_{i+1} = f(t_i, \Delta t, \{a\}_i, \{a\}_{i-1})$$



$$\{a\}_0, \{a\}_0, \{a\}_1 = f(t_0, \Delta t, \{a\}_0, \{a\}_{-1})$$

$$\{a\}_0 = \frac{\{a\}_0 - \{a\}_{-1}}{\Delta t} \Rightarrow \{a\}_1 \longrightarrow \{a\}_2 = f(t_{-1}, \Delta t, \{a\}_1, \{a\}_0)$$

$$\{a\}_{i+1} = f(t, \Delta t, \{a\}_i, \{a\}_{i+1})$$

Могут не сходится при неправильном выборе T
Для решения был разработан метод Ньюмарна

Метод Ньюмарна строится аналогичным образом, однако в конечно-разностных соотношениях берётся больше слагаемых в ряде Тейлора

$$\{a(t+\Delta t)\} = \{a(t)^2 + \Delta t\{\dot a(t)\} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\cdot\{\ddot a(t)\} + \frac{(\Delta t)^3}{3!}\{\dddot a(t)^2\} + \dots$$

Метод Ньюмарна

$$\{a(t+\Delta t)\} = \{a(t)\} + \Delta t\{\dot a(t)\} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\{\ddot a(t)\} + \alpha\{\ddot a(t)\}$$

$$\{\dot a(t+\Delta t)\} = \{\dot a(t)\} + \Delta t\{\ddot a(t)\}$$

$$\{\ddot a(t+\Delta t)\} = \{\ddot a(t)\} + \Delta t\{\dddot a(t)\}$$

$$[A]\{a\}_{i+1} = \{b\}$$

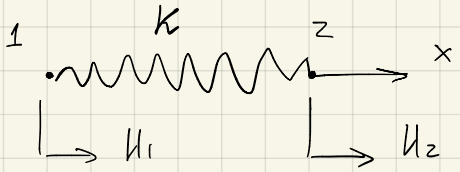
Если для α и Δ взять след. значения, то метод будет устойчивым

$$\begin{cases} \alpha \geq \frac{1}{4}\left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2 \\ \delta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

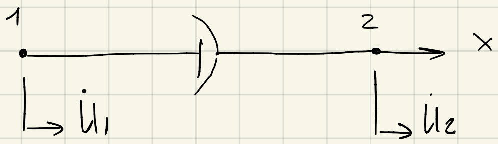
Коэффициент б отвечает за искусственное демпфирование. (При отсутствии трения, колебания будут затухать из-за численного метода)

При б=1 искусственного демпфирования не будет

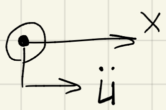
Простейшие конечные элементы для задач динамики



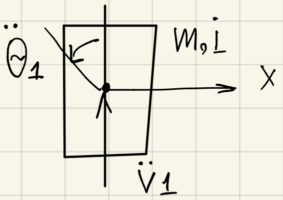
$$[K] = K\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$



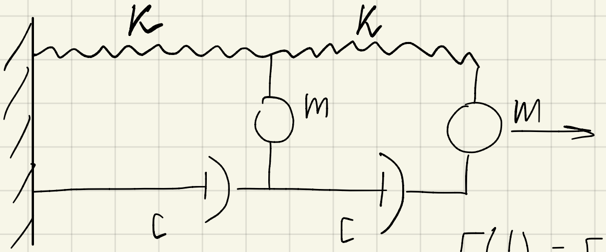
$$[C] = C\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$



$$[M]_{4\times1} = m$$



$$[M] = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

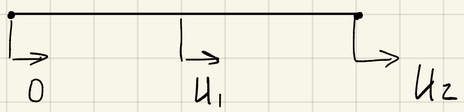


$F(t) = F_0 \sin \omega t$

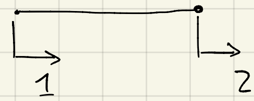
I. Model

$[C] = 0$

$\{F(t)\} = 0$



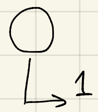
$$\{a\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$



$W^{(e)}$	1	2
1	0	u_1
2	u_1	u_2

$$[K^{(1)}] = K \begin{array}{c|cc|c} & 0 & u_1 & \\ \hline & 1 & -1 & 0 \\ & -1 & 1 & u_1 \end{array} \qquad [K^{(2)}] = K \begin{array}{c|cc|c} & u_1 & u_2 & \\ \hline & 1 & -1 & u_1 \\ & -1 & 1 & u_2 \end{array}$$

$$[K] = K \begin{vmatrix} 1+1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$



$[M] = m$ $\qquad [M^{(3)}] = \overset{3}{m}\ 3$ $\qquad [M^{(4)}] = \overset{4}{m}\ 4$

$$[M] = m \begin{array}{c|cc|c} & u_1 & u_2 & \\ \hline & 1 & 0 & u_1 \\ & 0 & 1 & u_2 \end{array}$$

$$[K] = K \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \iff \det\left(\begin{vmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \right) = 0$$

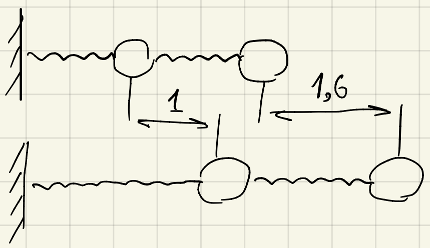
$$\det \begin{vmatrix} 2K - \omega^2 m & -K \\ -K & K - \omega^2 m \end{vmatrix}$$

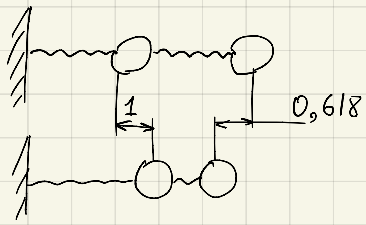
$$(2K - \omega^2 m)(K - \omega^2 m) - K^2 = 0 \implies \begin{cases} \omega_{1,3} = \pm \sqrt{\dfrac{K}{m}} \cdot \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ \omega_{1,4} = \pm \sqrt{\dfrac{K}{m}} \cdot \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \sqrt{\dfrac{K}{m}} = 0{,}618 \sqrt{\dfrac{K}{m}} \\ \omega_2 = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} \sqrt{\dfrac{K}{m}} \approx 1{,}618 \sqrt{\dfrac{K}{m}} \end{cases}$$

$$([K] - \omega^2 [M])\{a\} = 0$$

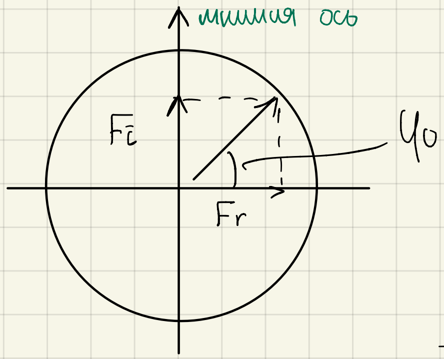
$$\left(\begin{vmatrix} 2K & K \\ -K & K \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix}\right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} (2K - \omega^2 m) u_1 - K u_2 = 0 \\ -K u_1 + (K - \omega^2 m) u_2 = 0 \end{cases}$$

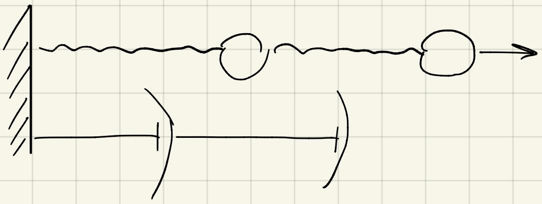




Гармонический анализ

$$[M][\ddot{a}] + [C][\dot{a}] + [K]\{a\} = \{F(t)\}$$





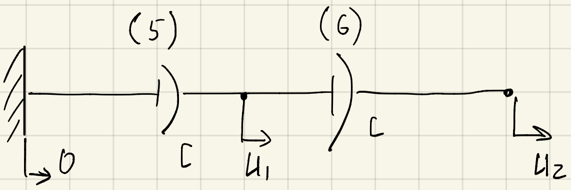
$$F(t) = F_0(-\sin \omega t)$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

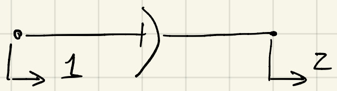
$$F(t) = (F_r + i F_i)\, e^{i\omega t}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1R} + i u_{1i} \\ u_{2R} + i u_{2i} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = \left(\begin{Bmatrix} u_{1R} \\ u_{2R} \end{Bmatrix} + i \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{Bmatrix} \right) e^{i\omega t}$$

Матрицу масс и жесткости возьмём из предыдущего анализа



$$[C^{(5)}] = C \begin{array}{c|cc|c} & 0 & u_1 & \\ & 1 & -1 & 0 \\ & -1 & 1 & u_1 \end{array} \qquad [C^{(6)}] = C \begin{array}{c|cc|c} & u_1 & u_2 & \\ & 1 & -1 & u_1 \\ & -1 & 1 & u_2 \end{array}$$



$$\{F(t)\} = \left(\begin{Bmatrix} F_{1R} \\ F_{2R} \end{Bmatrix} + i \begin{Bmatrix} F_{1i} \\ F_{2i} \end{Bmatrix} \right) e^{i\omega t}$$

$F_1 = 0 \Rightarrow F_{1R} = F_{1i} = 0$ $\qquad F_{2R} = F_0 \cos \varphi_0 \overset{0}{=} F_0$

$F_2 = F_0 \sin \omega t$ $\qquad F_{2i} = F_0 \sin \varphi_0 = 0$

$$\begin{vmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -\omega [C] \\ \omega [C] & [K] - \omega^2 [M] \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1R} \\ u_{2R} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1R} \\ F_{2R} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_{1i} \\ F_{2i} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

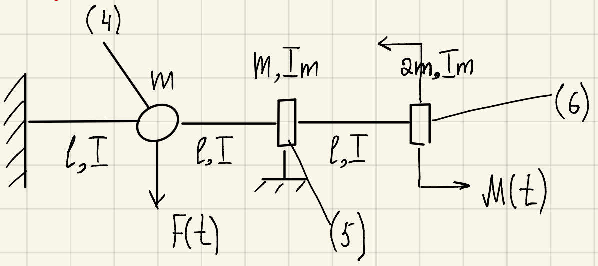
$m = 1 \quad K = 1$

$C = 1 \quad F_0 = 1$

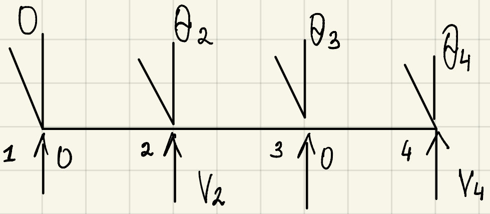
$\omega = 1 \qquad \nu = \frac{1}{2\pi} \Gamma_y$

$$\{U\}=\begin{Bmatrix}\{U_R\}\\ \{U_i\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-3/5\\ -4/5\\ -1/5\\ -3/5\end{Bmatrix} \qquad U_1=U_{10}\sin(\omega t+\psi_1)$$

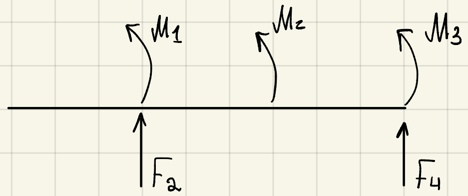
Лекция 11



$$\rho=0$$
$$\xi=0\ ([C]=0)$$



$$\underset{5\times1}{\{u\}}=\begin{Bmatrix}V_2\\ \theta_2\\ \theta_3\\ V_4\\ \theta_4\end{Bmatrix}$$

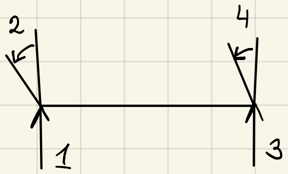


$$\{F\}=\begin{Bmatrix}F_2\\ M_2\\ M_3\\ F_4\\ M_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-F(t)\\ 0\\ 0\\ 0\\ M(t)\end{Bmatrix}$$

$$[K^{(1)}]=\frac{EI}{l^3}\begin{array}{c|cccc|c} & 0 & 0 & V_2 & \theta_2 & \\ \hline & 12 & 6l & -12 & 6l & 0\\ & 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0\\ & -12 & -6l & 12 & -6l & V_2\\ & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 & \theta_2\end{array}$$

$$[K^{(3)}]=\frac{EI}{l^3}\begin{vmatrix}12 & 6l & -12 & 6l\\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2\\ -12 & -6l & 12 & -6l\\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{vmatrix}$$

$$[K^{(2)}]=\frac{EI}{l^3}\begin{array}{c|cccc|c} & V_2 & \theta_2 & 0 & \theta_3 & \\ \hline & 12 & 6l & -12 & 6l & V_2\\ & 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & \theta_2\\ & -12 & -6l & 12 & -6l & 0\\ & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 & \theta_3\end{array}$$



$$[M^{(4)}]=\overset{V_2}{m}\ V_2$$

$\sqrt{}$	1	2	3	4
1	0	0	V_2	θ_2
2	V_2	θ_2	0	θ_3
3	0	θ_3	V_4	θ_4

$$[M^{(5)}]=\begin{array}{c|cc|c} & 0 & \theta_3 & \\ \hline & \cancel{m} & \cancel{0} & 0\\ & \cancel{0} & I_m & \theta_3\end{array} \qquad [M^{(6)}]=\begin{array}{c|cc|c} & V_4 & \theta_4 & \\ \hline & 2m & 0 & V_4\\ & 0 & I_m & \theta_4\end{array}$$

$\sqrt{}$	1	2
4	V_2	–
5	0	θ_3
6	V_4	θ_4

$$\underset{5\times5}{[K]}=\frac{EI}{l^3}\begin{array}{c|ccccc|c} & V_2 & \theta_2 & \theta_3 & V_4 & \theta_4 & \\ \hline & 12+12 & -6l+6l & 6l & 0 & 0 & V_2\\ & -6l+6l & 4l^2+4l^2 & 2l^2 & 0 & 0 & \theta_2\\ & 6l & 2l^2 & 4l^2+4l^2 & -6l & 2l^2 & \theta_3\\ & 0 & 0 & -6l & 12 & -6l & V_4\\ & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 4l^2 & \theta_4\end{array}$$

(в ДЗ 4×4)

$$[M] = \begin{array}{c|ccccc|c} & V_2 & \theta_2 & \theta_3 & V_4 & \theta_4 & \\ \hline & m & 0 & 0 & 0 & 0 & V_2 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 \\ & 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & \theta_3 \\ & 0 & 0 & 0 & 2m & 0 & V_4 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m & \theta_4 \end{array}$$

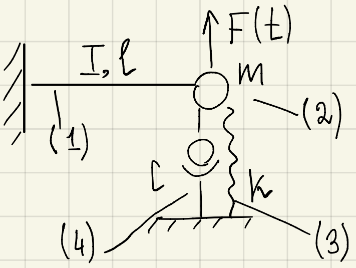
$$[M]\{\ddot{a}\} + [K]\{a\} = \{F\}$$

Modal1:

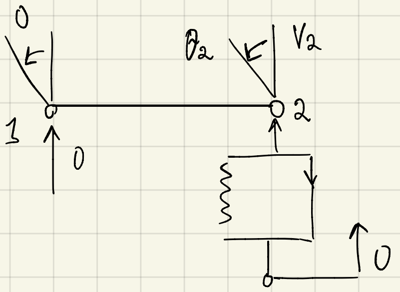
$$\det\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0 \qquad 4 \text{ шт } (\omega_i)$$

$\searrow$ $\omega_i > 0$

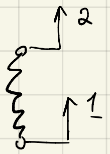
$\beta \neq 0 \longrightarrow \omega_i = \infty$ (теор.) т.к $\underset{5\times5}{[K]} \longrightarrow \omega_i - 5$ шт



$$\{a\} = \begin{Bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$[K^{(1)}] = \frac{EI}{l^3} \begin{vmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{vmatrix}$$

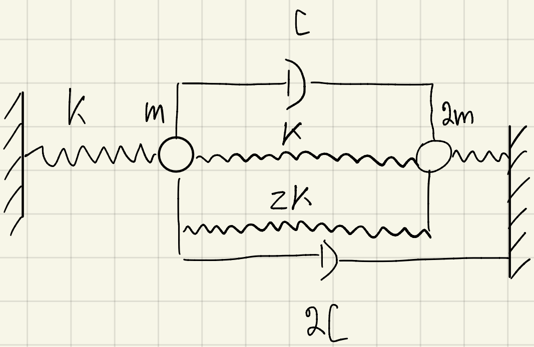


$$[K^{(3)}] = K \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

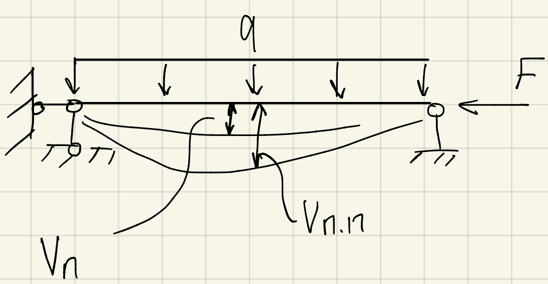
W	1	2	3	4
1	0	0	V_2	θ_2
3	0	V_2	—	—

$$[C] = \begin{array}{|cc|c} C & 0 & V_2 \\ 0 & 0 & \theta_2 \end{array} \qquad [M] = \begin{array}{|cc|c} m & 0 & V_2 \\ 0 & 0 & \theta_2 \end{array}$$

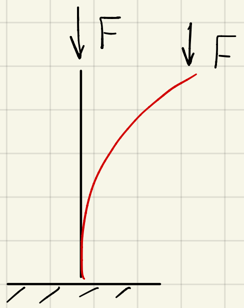
W	1	2	3	4
3	0	V_2		



Лекция 12 Продольно поперечный изгиб и устойчивость



— п-п изгиб



— устойчивость

Соотношение для п - п изгиба получимся с помощью энергетического метода

$$\Pi = U - A$$

$$\Pi = \Pi(\{a\})$$

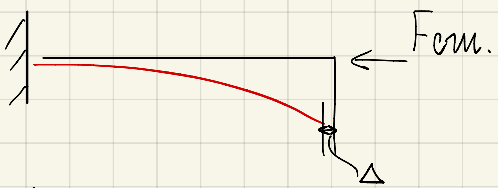
$$\frac{\delta \Pi}{\delta \{a\}^T} = 0 \Rightarrow \text{Ур-е МКЭ}$$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad V \approx \sum_{i=1}^{4} N_i(x) a_i$$

$$V(x) = N_1(x) V_1 + N_2(x)\cdot\theta_1 + N_3(x)\cdot V_2 + N_4(x)\cdot\theta_2$$

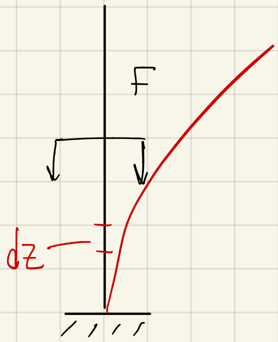
$$U = \frac{1}{2}\{a\}^T \left(\int_{V^{(e)}} [B]^T [D][B]\, dV^{(e)} \right) \{a\}$$

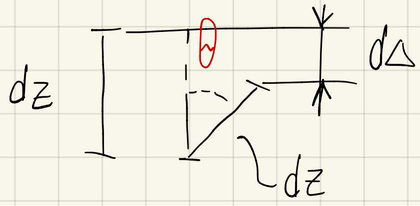
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$



$$A_{прод} = F_{ст} \cdot \Delta$$

$$A_{пол} = \{a\}^T\{F\} = F_1 V_1 + M_1\theta_1 + F_2 V_2 + M_2 \theta_2$$





$$d\Delta = dz - dz\cos\theta = dz(1-\cos\theta) =$$

$$= dz \cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2} \approx \frac{1}{2}\theta^2 dz =$$

$$= \frac{1}{2}(V')^2 dz$$

$$\boxed{\Delta = \int_l \frac{1}{2}(V')^2 dz}$$

$$V = [N]\{a\}$$

$$V' = [N_1'; N_2'; N_3'; N_4'] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [G]\{a\}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\{a\}^T \left(\int_l [G]^T [G]\, dz \right) \{a\}$$

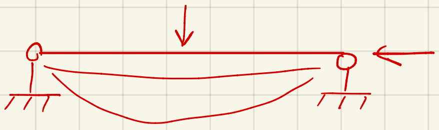
$$A_{пол} = \frac{1}{2} F_{ст} \{a\}^T \left(\int_l [G]^T [G]\, dz \right) \{a\}$$

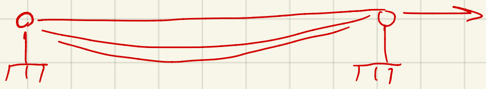
$$\Pi = U - A_{прод} - A_{поп}$$

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \{a\}_{\Pi}} = 0$$

$$\Big(\underbrace{\int_{V^{(e)}} [B]^T [D][B]\, dV^{(e)}}_{[K]} - \underbrace{F_{ст} \int [b]^T [b]\, dz}_{[S]} \Big) \{a\} = \{F\}$$ – геометр. матрица жесткости

$$([K] - [S])\{a\} = \{F\}$$





Матрица [S]:

$$[S] = \frac{F_{ст}}{30 l} \begin{vmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{vmatrix}$$

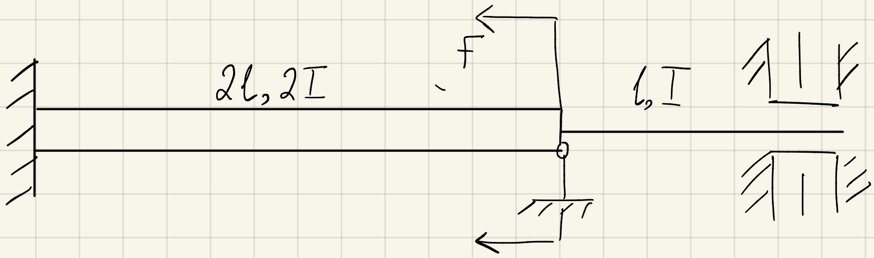
Для задачи устойчивости

$\{F\} = 0$

$$([K] - [S(F_{ст})])\{a\} = 0$$

$$\det([K] - [S(F_{ст})]) = 0 \Rightarrow F_{ст}^{кр}$$

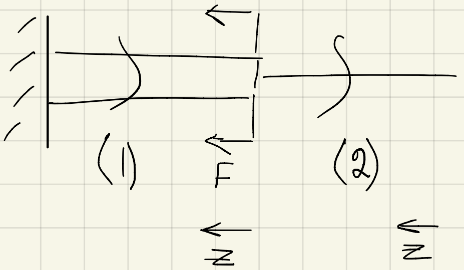
Пример 1

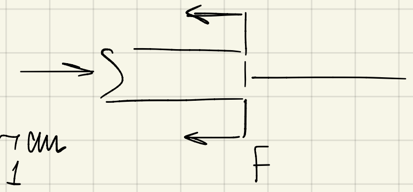


Для составления геометрической матрицы жесткости, необходимо знать величину нормальной силы в каждом из стержней

1. Поиск (нормальные сил сжатия) N_i
2. Решение задачи устойчивости

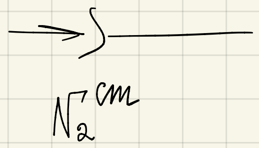
В домашнем задании воспользоваться методом сечения





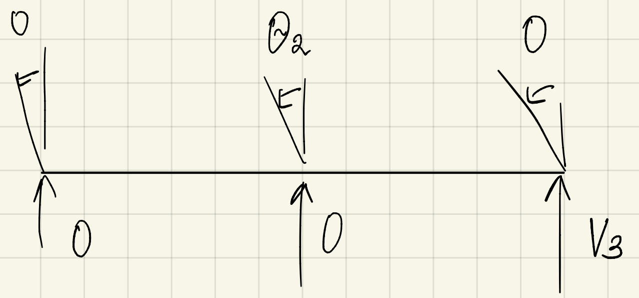
$\Sigma F_z = 0$

$N_1^{cm} = F$



$\Sigma F_z = 0$

$N_2^{cm} = 0$



$$\underset{2\times1}{\{a\}} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

$$[K^{(1)}] = \frac{2EI}{(2l)^3}\begin{vmatrix} 12 & 6\cdot2l & -12 & 6\cdot2l \\ 6\cdot2l & 4(2l)^2 & -6\cdot2l & 2(2l)^2 \\ -12 & -6\cdot2l & 12 & -6\cdot2l \\ 6\cdot2l & 2\cdot2l^2 & -6\cdot2l & 4(2l)^2 \end{vmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3 & 3l & -3 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & 2l^2 \\ -3 & -3l & 3 & -3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & 4l^2 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_2 \end{array}$$

$$[K^{(2)}] = \frac{EI}{l^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & \theta_2 & V_3 & 0 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4(l)^2 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ 0 \end{array}$$

$$[K] = \frac{EI}{l^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \theta_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 4l^2+4l^2 & -6l \\ -6l & 12 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \theta_2 \\ V_3 \end{array}$$

$$[S^{(2)}] = \frac{N_{cm}^{(2)}}{30l} = 0 \begin{vmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{vmatrix} = 0$$

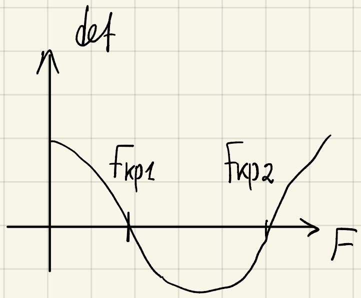
$$[S^{(1)}] = \frac{F}{30(2l)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 36 & 3\cdot2l & -36 & 3\cdot2l \\ 3\cdot2l & 4(2l)^2 & -3\cdot2l & -(2l)^2 \\ -36 & -3\cdot2l & 36 & -3\cdot2l \\ 3\cdot2l & -(2l)^2 & -3(2l) & \boxed{4(2l)^2} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_2 \end{array}$$

$= N_1^{cm}$

$$[S] = F\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \theta_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{4}{15}l & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \theta_2 \\ V_3 \end{array}$$

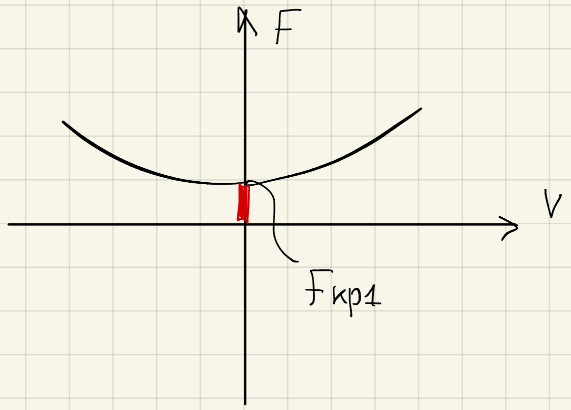
$$\det\left([K] - [S(F)]\right) = 0 \Rightarrow$$

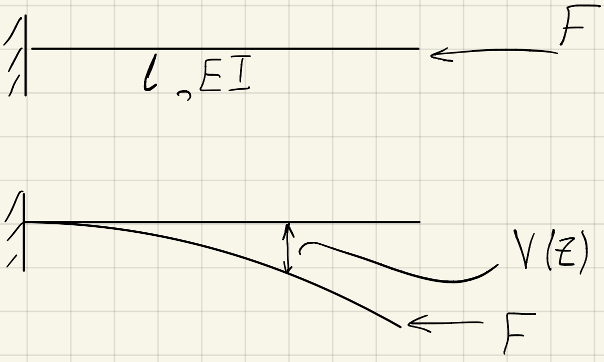
$$F = F_{кр\,i}$$



На практике

$F_{кр} = F_{кр1}$



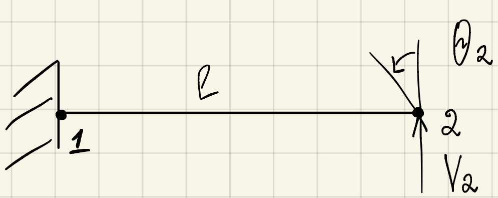


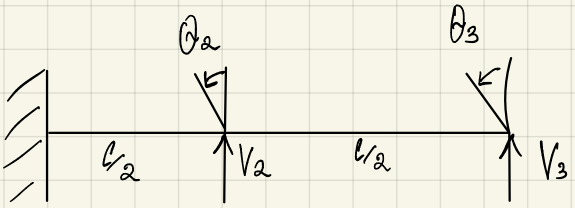
Геометрическая матрица жесткости является приближённой матрицей

Точное решение: $V(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4, \quad k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$

В МКЭ: $V(z) = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4$

Поэтому при решении задачи устойчивости пределы необходимо брать 2-3 конечных элементов



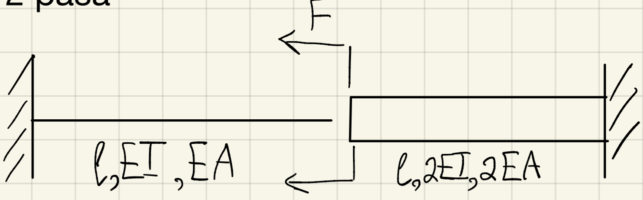


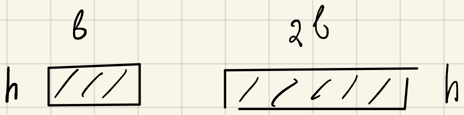
$F_{кр} = 2.486 \frac{EI}{l^2}$

$F_{кр} = 2.469 \frac{EI}{l^3}$

$F_{кр}^{точн} = 2.467 \frac{EI}{l^2}$

Решение с одним конечным элементом может отличается от точного решения в том числе в 1.5-2 раза



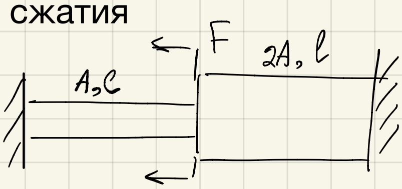


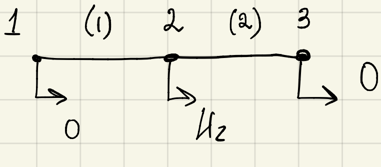
$A_1 = bh \qquad A_2 = 2bh = 2A_1$

$I_1 = \frac{bh^3}{12} \qquad I_2 = \frac{2bh^3}{12} = 2I_1$

Так как компьютеры не пользуются методом сечения, то предварительно решается задача растяжения сжатия

I этап:





$\{q\} = u_2 \qquad \{F\} = -F$

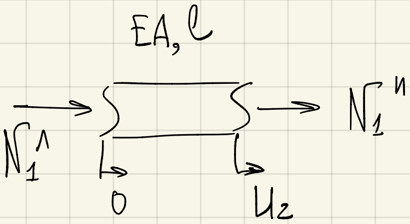
$$[K^{(1)}] = \frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[K^{(2)}] = \frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

N	1	2
1	0	U_2
2	U_2	0

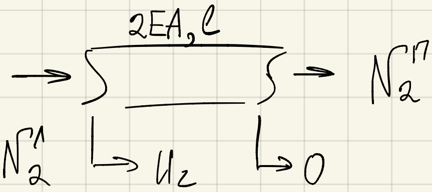
$$[K] = \begin{array}{c} U_2 \\ \begin{vmatrix} \frac{3EA}{\ell} \end{vmatrix} \end{array} U_2$$

$$[K]\{a\} = \{F\} \Rightarrow \frac{3EA}{\ell}\cdot U_2 = -F \qquad U_2 = -\frac{F\ell}{3EA}$$

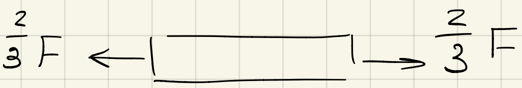


$$\begin{Bmatrix} N_1^{\wedge} \\ N_1^{n} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{3} \\ -\frac{F}{3} \end{Bmatrix}$$

$$N_1^{cm} = \frac{F}{3}$$

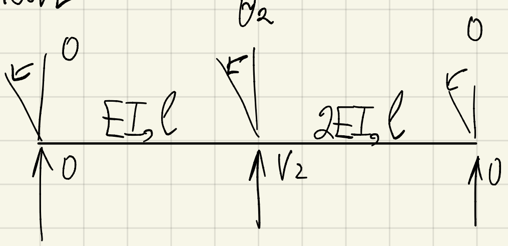


$$\begin{Bmatrix} N_2^{\wedge} \\ N_2^{n} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{3}F \\ \frac{2}{3}F \end{Bmatrix}$$



$$N_2^{cm} = -\frac{2}{3}F$$

II Этап



$$\{a\} = \begin{Bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$N^{(e)}$	1	2	3	4
1	0	0	V_2	θ_2
2	V_2	θ_2	0	0

$$[S^{(1)}] = \frac{F/3}{30\ell}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & V_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 36 & 3\ell & -36 & 3\ell \\ 3\ell & 4\ell^2 & -3\ell & -\ell^2 \\ -36 & -3\ell & 36 & -3\ell \\ 3\ell & -\ell^2 & -3\ell & 4\ell^2 \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

$$[S^{(2)}] = \frac{-2F/3}{30\ell}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_2 & \theta_2 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 36 & 3\ell & -36 & 3\ell \\ 3\ell & 4\ell^2 & -3\ell & -\ell^2 \\ -36 & -3\ell & 36 & -3\ell \\ 3\ell & -\ell^2 & -3\ell & 4\ell^2 \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} V_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$[K^{(1)}] = \frac{EI}{\ell^3}\begin{vmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{vmatrix}$$

$$[K^{(2)}] = \frac{EI}{\ell^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_2 & \theta_2 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 24 & 12\ell & -24 & 12\ell \\ 12\ell & 8\ell^2 & -12\ell & 4\ell^2 \\ -24 & -12\ell & 24 & -12\ell \\ 12\ell & 4\ell^2 & -12\ell & 8\ell^2 \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} V_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

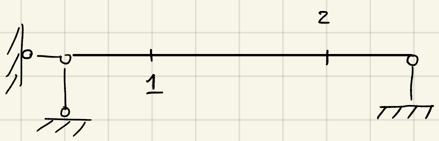
$$
[S]=\frac{F/3}{30l}\begin{array}{cc|c} \begin{vmatrix} 36-2\cdot 36 & -3l-2\cdot 3l \\ -3l-2\cdot 3l & 4l^2-2\cdot 4l^2 \end{vmatrix} & & \begin{matrix} V_2 \\ \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_2 & \qquad \theta_2 \end{matrix} & & \end{array}
\qquad
\begin{matrix} 24 & 12l & -24 & 12l \\ \cancel{4}\,12 & 8l^2 & -12l & 4l^2 \\ -24 & -12l & 24 & -12 \end{matrix}
$$

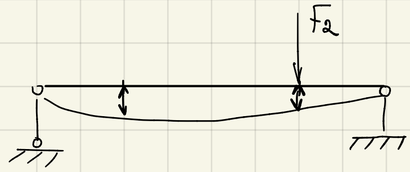
$$
[K]=\frac{EI}{l^3}\begin{vmatrix} 24+12 & -6l+12l \\ -6l+12l & 8l^2+4l^2 \end{vmatrix}
\qquad \det\left([K]-[S]\right)=0
$$

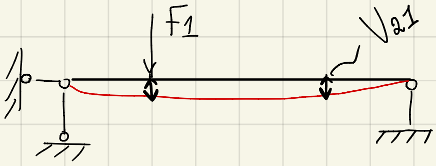
Особенности матриц в МКЭ

1. Матрицы жесткости симметричны

$$[A]^T=[A]$$







$$F_1 V_{12} = F_2 V_2$$

2. Матрицы жескости положительны $\{x\}^T[A]\{x\}\geq 0$

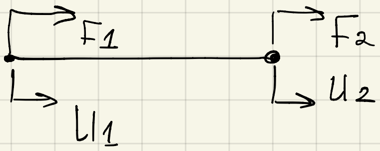
Следствие на главной диагонали только положительные элементы

3. Дефект матрицы показывает количество перемещений в конструкции как жесткое целое

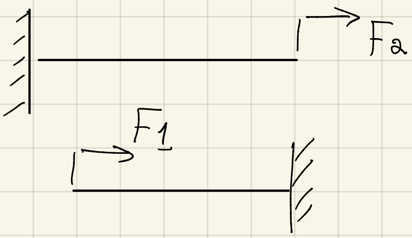
$$\mathcal{D} = \underset{\text{порядок}}{n} - P \;\text{- ранг} \qquad \underset{n\times n}{[A]} \qquad n=n$$

Ранг - количество линейнонезависимых строк или столбцов матрицы

$$[K]=\frac{EA}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad n=2 \qquad P=1$$

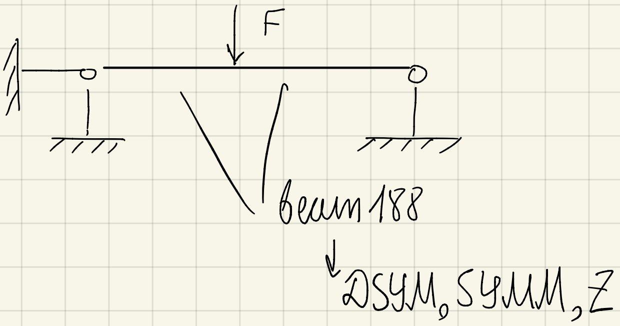


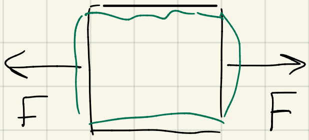
$$\mathcal{D}=2-1=1$$

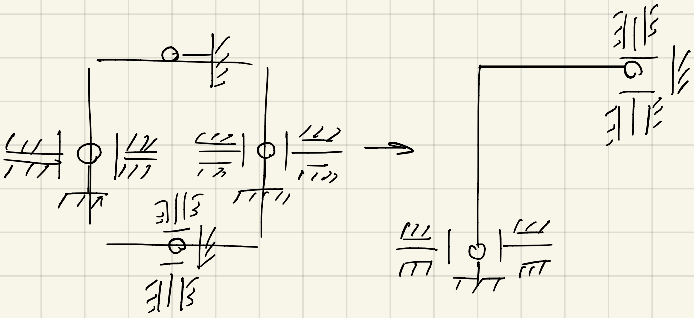


$$\underset{1\times 1}{[K]}=\frac{EA}{l}\cdot 1 \qquad \mathcal{D}=0$$

Следствием данного факта является обязательная необходимость закреплять конструкцию







Число обусловленности матрицы

$$cond[A] = \|[A]^{-1}\| \cdot \|[A]\|$$

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$ – евклидова норма

Помогает оценить размерность объекта в векторно-матричном пространстве

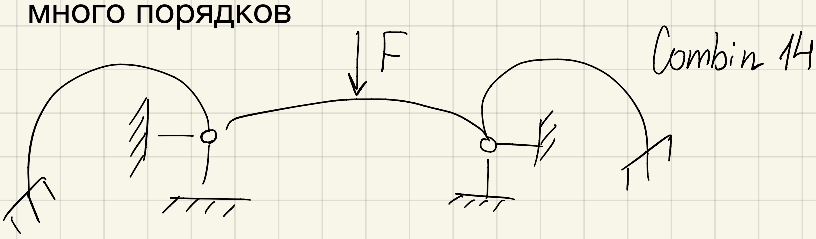
Число обусловленности показывает насколько неточность входных данных влияет на выходные данные

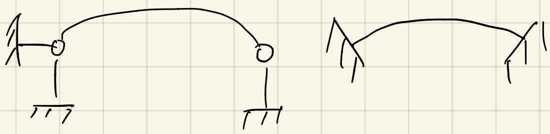
$cond[A] \geq 10^3$ – матрица плохо обусловлена

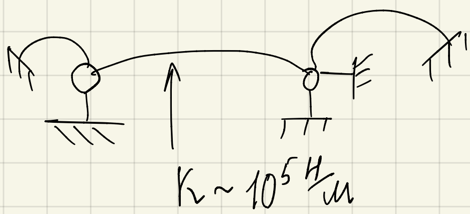
$$\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 111 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 111 \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 111 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.1 \\ 111 \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} x = 11.1 \\ y = 0 \end{matrix}$$

Такое возможно в МКЭ если присутствуют элементы, жестокость которых отличается на много порядков







$$K = 10^{-20} \frac{Н}{м}$$

Численные методы решения СЛАУ, порожденных МКЭ

I Прямые методы состоят из 2х этапов:

- на 1 (прямой ход)(факторизац.) матрица жесткости преобр. удобную диагональную;
- на 2 (обратный ход) вектор перемещений вычисл. для удобной системы уравнений;

а) метод Гаусса

$$[A]\{x\}=\{b\} \to |\diagdown|\{x\}=\{\tilde{b}\}$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ -x_1+4x_2=1 \end{cases}$$

$$x_1=-\frac{3}{2}x_2-\frac{5}{2}$$

$$-1\cdot\left(-\frac{3}{2}x_2\right)+4x_2=1-\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(-1)$$

$$\begin{array}{c|cccccc|} & & & K & & j & \\ & \tilde{a} & \tilde{a} & \tilde{a} & \tilde{a} & \tilde{a} & \tilde{a} \\ & 0 & \tilde{a} & \tilde{a} & \tilde{a} & \tilde{a} & \tilde{a} \\ K & 0 & 0 & \tilde{a}_{kk} & \cdot & \tilde{a}_{kj} & \cdot \\ & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i & 0 & 0 & a_{ik} & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$K\in[1;n-1]$$

$$i\in[k+1;n]$$

$$j\in[k+1;n]$$

$$\tilde{b}_i=b_i-\frac{\tilde{a}_{ik}\tilde{b}_k}{\tilde{a}_{kk}}$$

$$\tilde{a}_{ij}=a_{ij}-\frac{\tilde{a}_{ik}\tilde{a}_{kj}}{\tilde{a}_{kk}}$$

$$i\in[k+1;n]$$

$$\tilde{a}_{ik}=0$$

Элементы из нижних строк преобразуются многократно (Ann , преобразуется n раз) из-за этого накапливается ошибки численного счета

б) метод Холецкого

$$[A]=[L][L]^T \qquad [L]=|\diagdown^0| \Rightarrow [A]\{x\}=\{b\}$$

$$[L][L^T]\{x\}=\{b\}$$

$$\begin{cases} [L]^T\{x\}=\{c\} \\ [L]\{c\}=\{b\} \Rightarrow \{c\} \Rightarrow \{x\} \end{cases}$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & & \dots \\ \dots & & & & \dots \\ \dots & & & & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccc} & & j & & \\ \end{array}
\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \vdots & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \vdots & l_{ij} & \cdot & 0 \\ l_{n1} & \cdot & & \cdot & l_{nn} \end{vmatrix}
\qquad
\begin{array}{l} j \in [1; n] \\ \downarrow \\ i \in [1; n] \end{array}
$$

$i < j$ $\qquad$ $i = j$

$$l_{ij} = 0 \qquad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}^2} \qquad \left(l_{11} = \sqrt{a_{11}}\right)$$

$i > j$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}\right) \qquad \left(l_{i1} = \frac{1}{l_{11}} \cdot a_{i1}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 22 \end{vmatrix} \qquad j = 1 \qquad l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 4 \qquad l_{31} = \frac{1}{l_{11}} \cdot a_{31} = 2$$

$$l_{21} = \frac{1}{l_{11}} \cdot a_{21} = 1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} \qquad j = 2 \qquad l_{12} = 0 \qquad l_{32} = \frac{1}{l_{22}} \left(a_{32} - l_{31} l_{21}\right) = -3$$

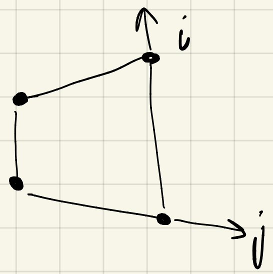
$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}} = 2$$

$$j = 3 \qquad l_{13} = l_{23} = 0$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 l_{32}^2} = 3$$

Итерационные методы

Работают быстрее прямых методов, это связана с тем, что матрица жесткости сильно разреженная (много нулей)



$$X_{ij} \neq 0$$

A. Метод простой итерации

$$f(x) = x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{x^2 - 5}{4} \qquad x^{(k+1)} = \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - 5}{4}$$

$$x^{(0)} = 0 \rightarrow -1{,}25 \rightarrow -0{,}859 \rightarrow -1{,}065 \rightarrow -0{,}966 \rightarrow -1{,}017$$

$$\rightarrow -0{,}992 \rightarrow -1{,}004 \rightarrow -0{,}998 \rightarrow -1{,}001$$

$$[K]\{a\} = \{F\} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \dots \\ a_2 = \dots \\ \dots \\ a_n = \dots \end{cases}$$

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

$i \in [1; n]$

$k \in [1; K_{max}]$

$$\|[A]\{x\}^{(k+1)} - \{b\}\| < \varepsilon$$

$$\|\{x\}^{(k+1)} - \{x\}^{(k)}\| < \tilde{\varepsilon}$$

Сходимость можно ускорить, если найденные $x_i^{(k+1)}$ пускать в дело

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$ – Гаусса - Зейделя