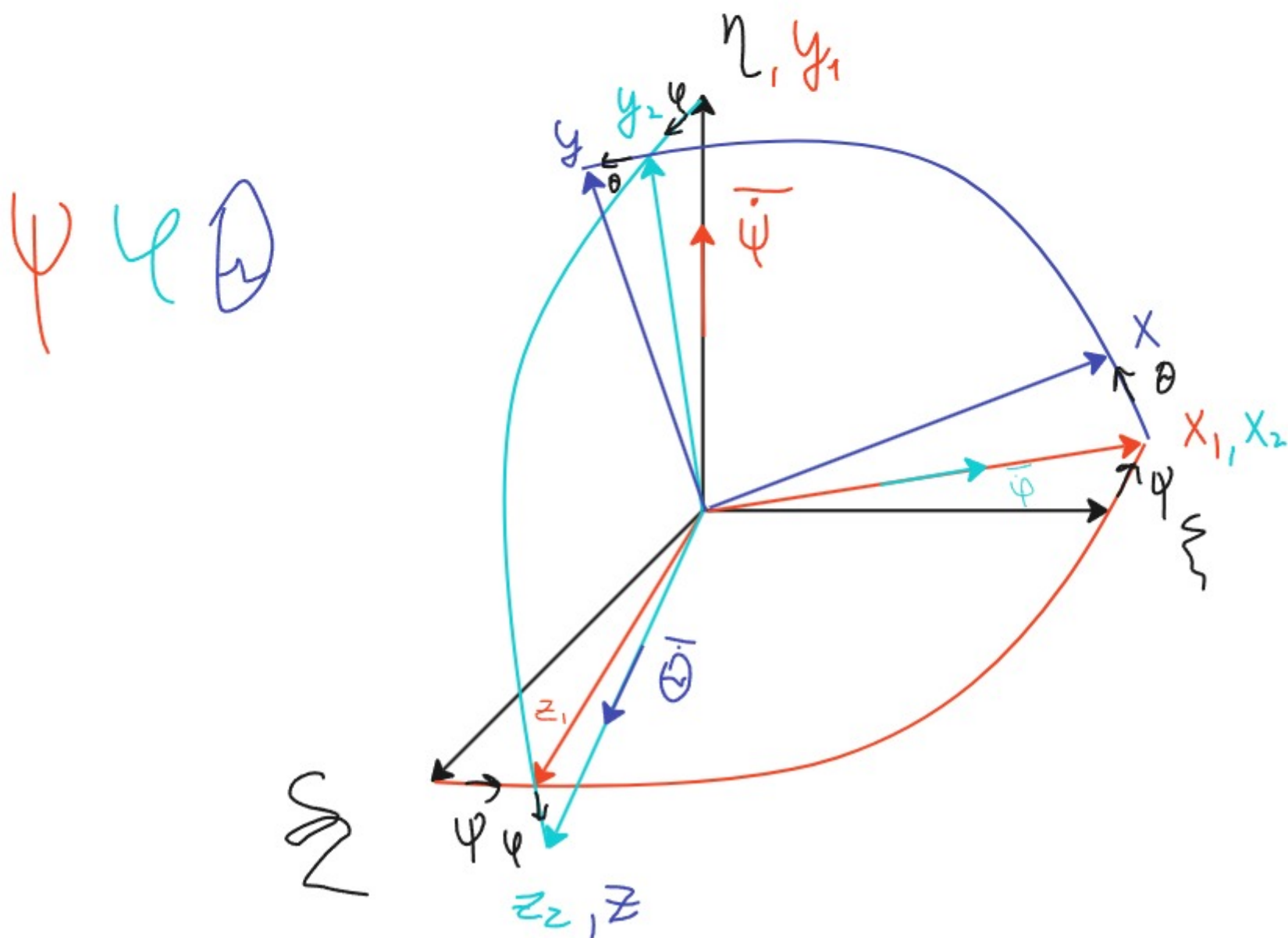


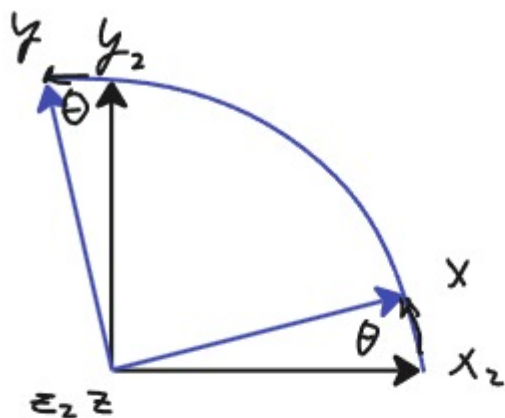
Билет №16

1. Задать положение объекта (как твердого тела) в пространстве с помощью трех углов Эйлера, вводимых в последовательности ψ , φ , θ .
2. Составить матрицу направляющих косинусов для перехода из базовой системы координат к связанной для случая задания углового положения твердого тела тремя углами Эйлера в последовательности, соответствующей задаче 1.
3. Трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе (при нулевых углах отклонения рамы, кожуха и маховика), для случая его отображения на рисунке в изометрической проекции, ориентирован в пространстве следующим образом: ось вращения наружной рамы – влево, вниз; ось вращения кожуха (внутренней рамы) – вправо, вниз; ось вращения маховика – вертикально. Задать положение вектора собственного кинетического момента гироскопа относительно основания, на котором он установлен и определить проекции вектора абсолютной угловой скорости гироскопа на оси, связанные с кожухом, с учетом того, что основание также движется с угловыми скоростями относительно инерциального пространства.



ψ φ θ

1) θ



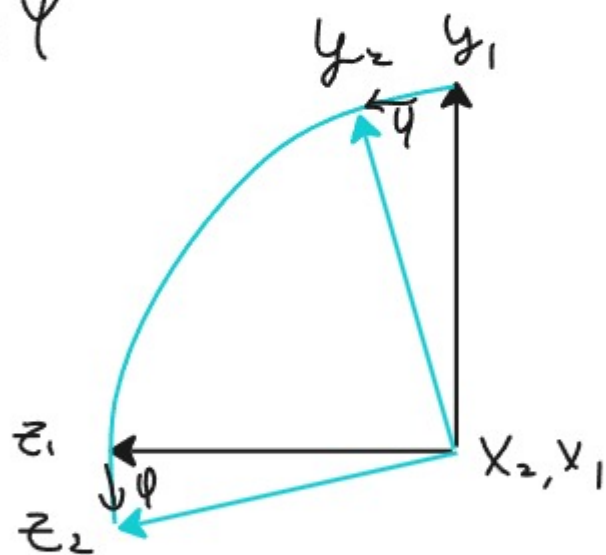
$$x_2 = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta + z \cdot 0$$

$$y_2 = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta + z \cdot 0$$

$$z_2 = x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1$$

$$A_{C \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) φ

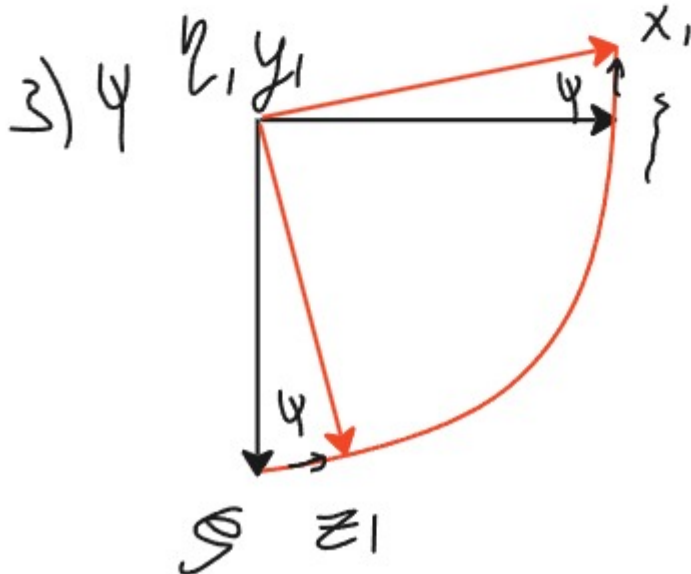


$$x_1 = x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot 0 + z_2 \cdot 0$$

$$y_1 = x_2 \cdot 0 + y_2 \cdot \cos \varphi - z_2 \cdot \sin \varphi$$

$$z_1 = x_2 \cdot 0 + y_2 \cdot \sin \varphi + z_2 \cdot \cos \varphi$$

$$A_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$



$$\xi = x_1 \cdot \cos \psi + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot \sin \psi$$

$$\eta = x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 + z_1 \cdot 0$$

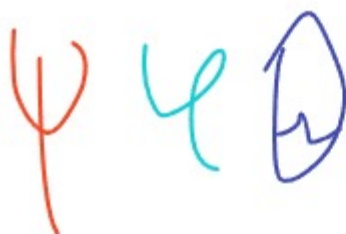
$$\zeta = -x_1 \cdot \sin \psi + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot \cos \psi$$

$$A_{1 \rightarrow \xi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

Из связанной в базовую:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

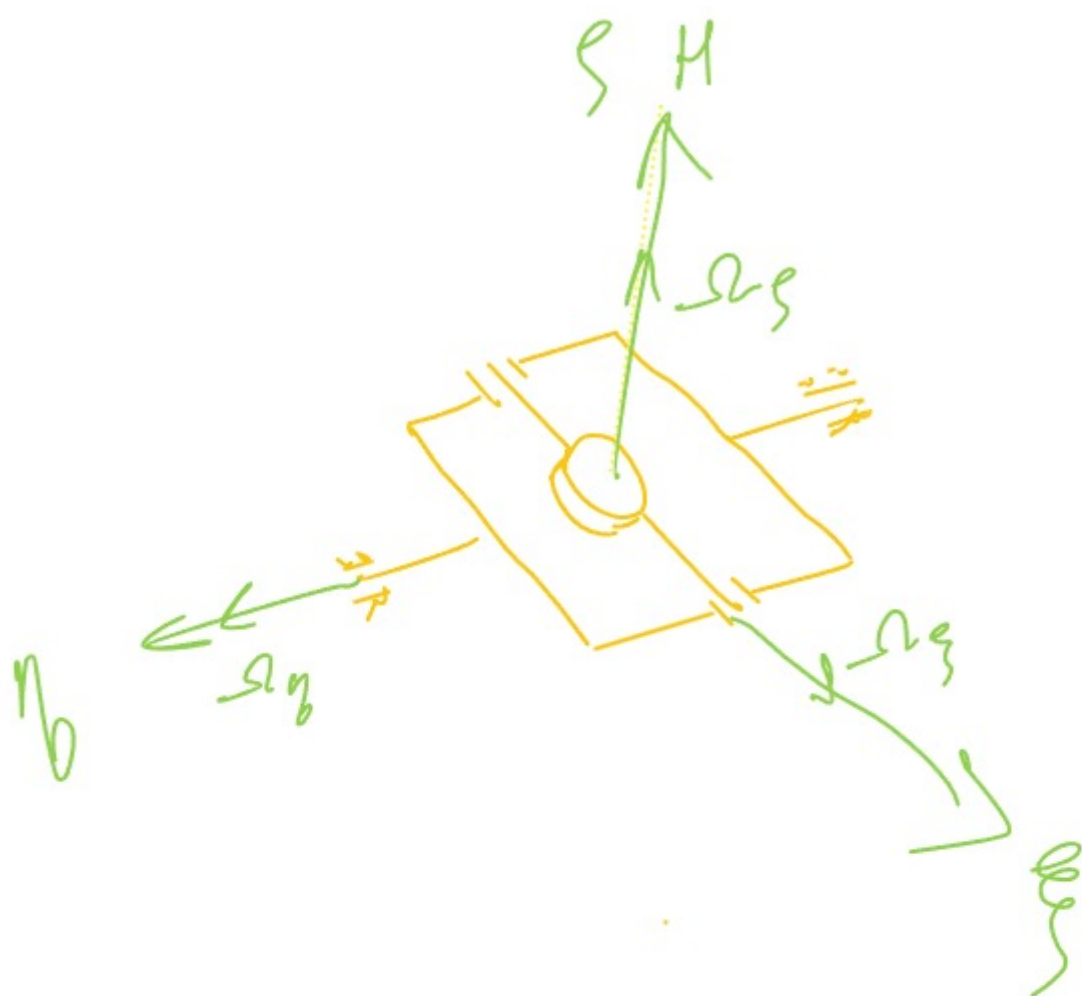
$$A_{c \rightarrow b} = A_{1 \rightarrow b} A_{2 \rightarrow 1} A_{c \rightarrow 2}$$



умножаем слева:

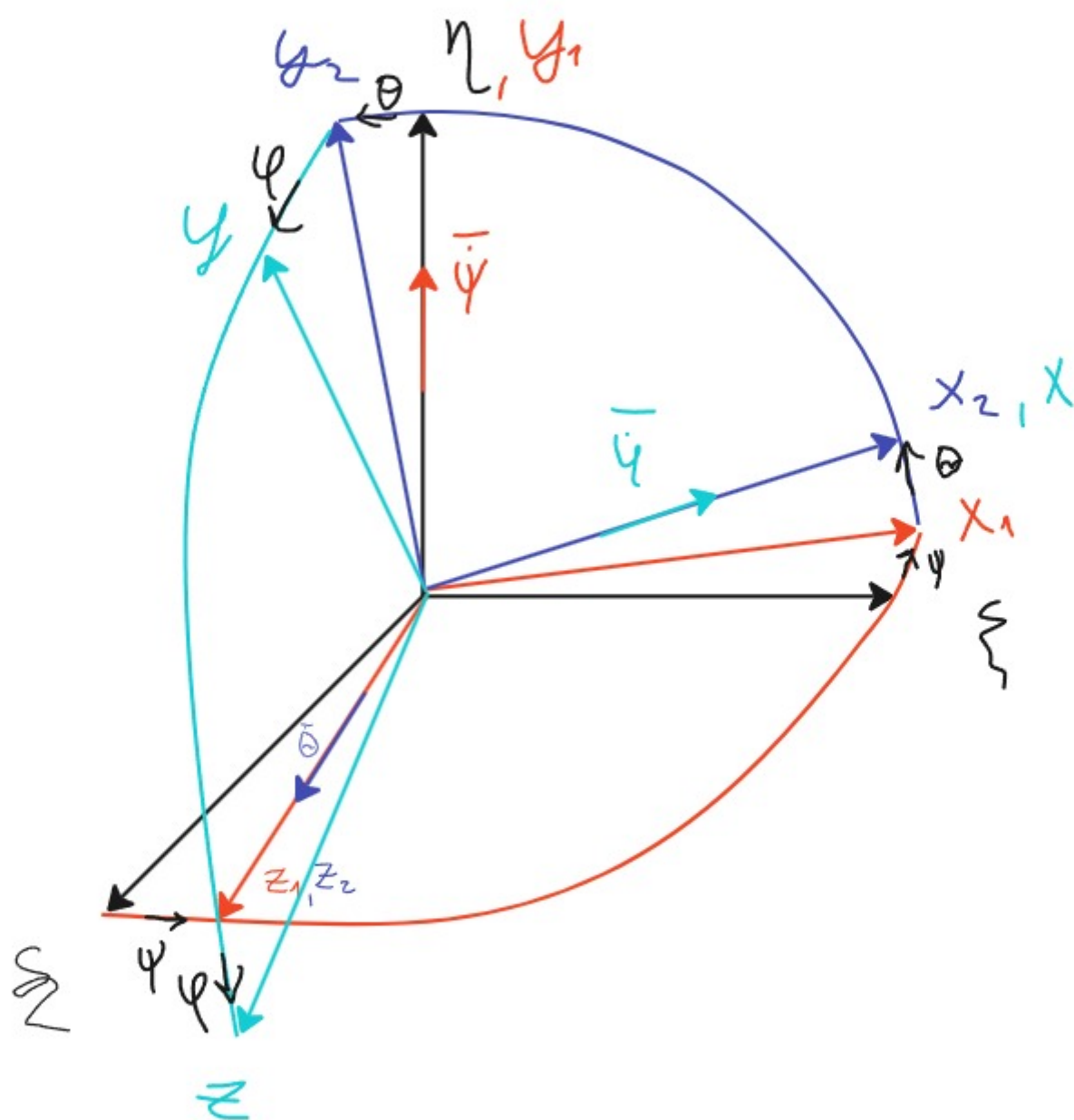
$$A_{c \rightarrow b} = \begin{pmatrix} c\psi & 0 & s\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\psi & 0 & c\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13



ψ Θ ψ

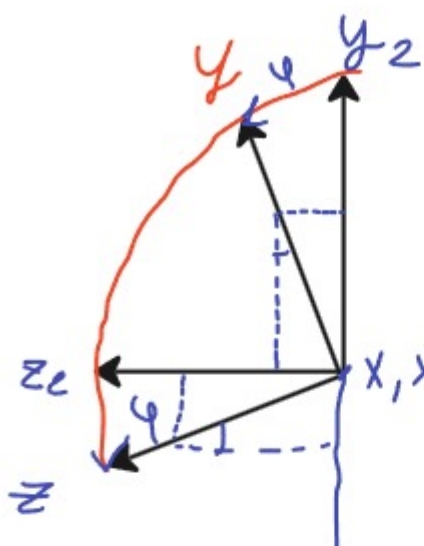
$\zeta \xi$



Построить матрицу направляющих косинусов
Не важно из связанной в базовую или из базовой в
связанную, потому что если их транспонировать, то они
дают матрицу обратной связи

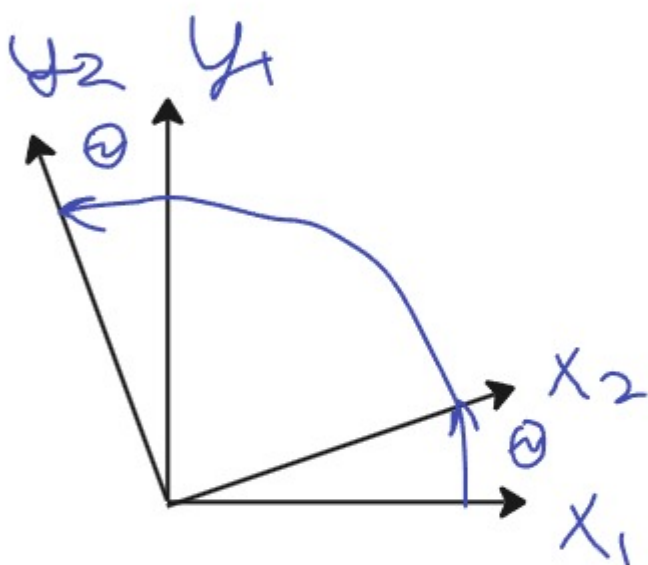
Из связанной в базовую: y_2, y_1, z_1

$\psi \odot \psi$



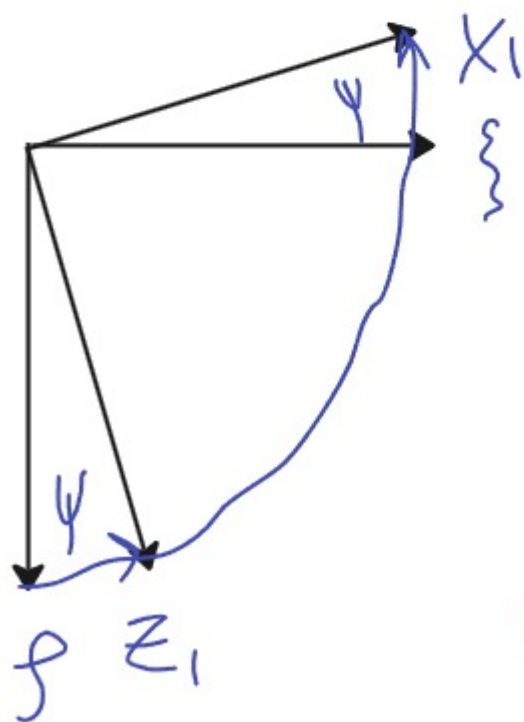
$$\begin{aligned}x_2 &= 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z \\y_2 &= 0 \cdot x + \cos \psi \cdot y - \sin \psi \cdot z \\z_2 &= 0 \cdot x + \sin \psi \cdot y + \cos \psi \cdot z\end{aligned}$$

$$A_{C-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}x_1 &= \cos \theta \cdot x_2 - \sin \theta \cdot y_2 + 0 \cdot z_2 \\y_1 &= \sin \theta \cdot x_2 + \cos \theta \cdot y_2 + 0 \cdot z_2 \\z_1 &= 0 \cdot x_2 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot z_2\end{aligned}$$

$$A_{2-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}\xi &= \cos \psi \cdot x_1 - 0 \cdot y_1 + \sin \psi \cdot z_1 \\ \eta &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 + 0 \cdot z_1 \\ \zeta &= -\sin \psi \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + \cos \psi \cdot z_1\end{aligned}$$

$$A_{1-\zeta} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$A = C^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_{1-5} \underbrace{A_{2-1} A_{C-2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A_{C-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$A_{2-1} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{1-5} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$A_{C-1} = A_{2-1} \cdot A_{C-2} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c(\Theta) & -s(\Theta) & 0 \\ s(\Theta) & c(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\varphi) & -s(\varphi) \\ 0 & s(\varphi) & c(\varphi) \end{pmatrix} =$$

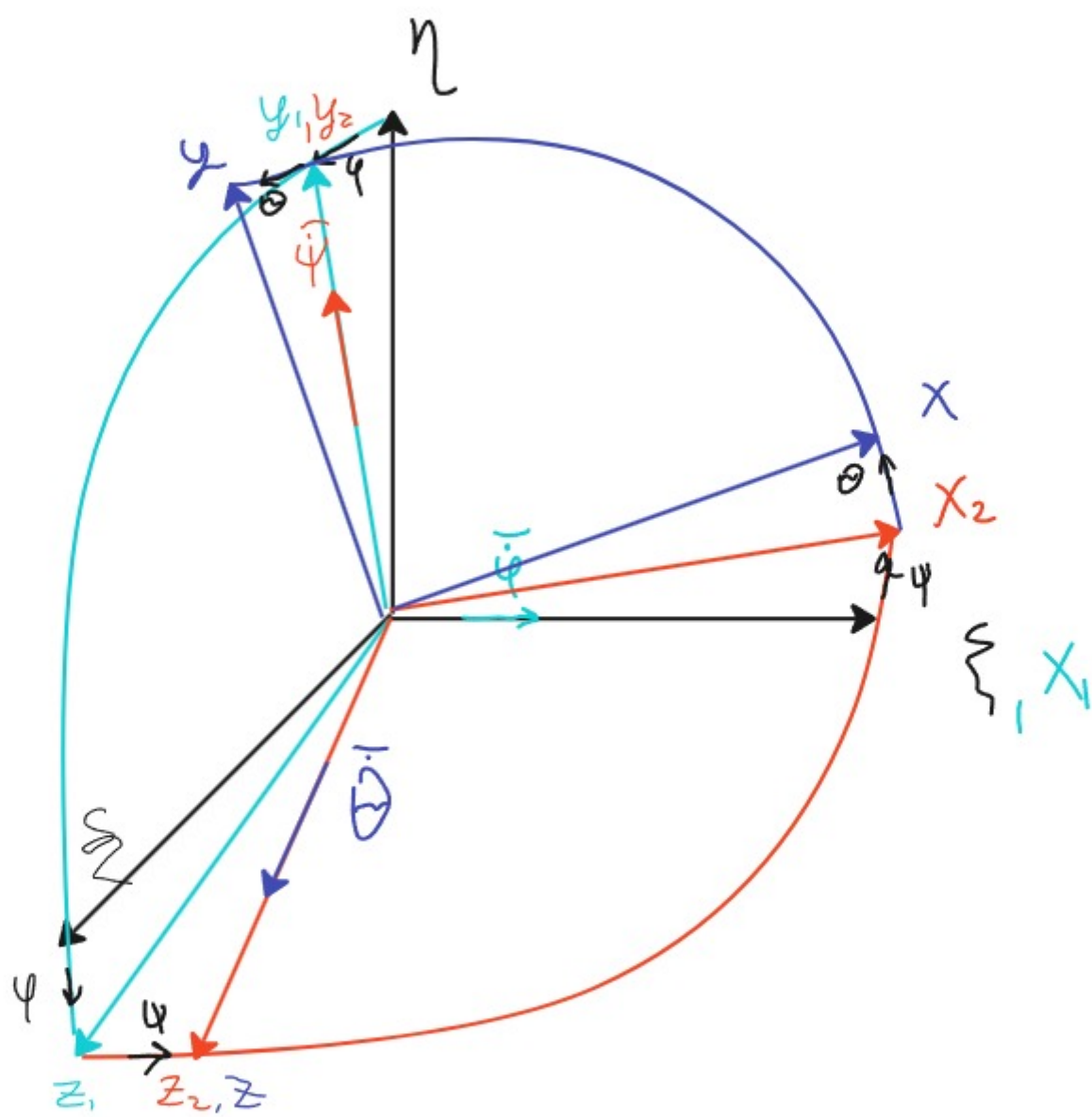
$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum a_{1i} \cdot b_{i1} & c_{12} &= \sum a_{1i} \cdot b_{i2} & c_{13} &= \sum a_{1i} \cdot b_{i3} \\ &= c_{21} = \sum a_{2i} \cdot b_{i1} & c_{22} &= \sum a_{2i} \cdot b_{i2} & c_{23} &= \sum a_{2i} \cdot b_{i3} = \\ c_{31} &= \sum a_{3i} \cdot b_{i1} & c_{32} &= \sum a_{3i} \cdot b_{i2} & c_{33} &= \sum a_{3i} \cdot b_{i3} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} c(\Theta) & -s(\Theta)c(\varphi) & s(\Theta)s(\varphi) \\ s(\Theta) & c(\Theta)c(\varphi) & -c(\Theta)s(\varphi) \\ 0 & s(\varphi) & c(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$A_{c-1} = \begin{pmatrix} c(\theta) & -s(\theta)c(\varphi) & s(\theta)s(\varphi) \\ s(\theta) & c(\theta)c(\varphi) & -c(\theta)s(\varphi) \\ 0 & s(\varphi) & c(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$A_{c-5} = A_{1-5} A_{c-1} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\theta) & -s(\theta)c(\varphi) & s(\theta)s(\varphi) \\ s(\theta) & c(\theta)c(\varphi) & -c(\theta)s(\varphi) \\ 0 & s(\varphi) & c(\varphi) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c(\psi)c(\theta) & -c(\psi)s(\theta)c(\varphi) + s(\psi)s(\varphi) & c(\psi)s(\theta)s(\varphi) + s(\psi)c(\varphi) \\ s(\theta) & c(\theta)c(\varphi) & -c(\theta)s(\varphi) \\ -s(\psi)c(\theta) & s(\psi)s(\theta)c(\varphi) + c(\psi)s(\varphi) & -s(\psi)s(\theta)s(\varphi) + c(\psi)c(\varphi) \end{pmatrix}$$



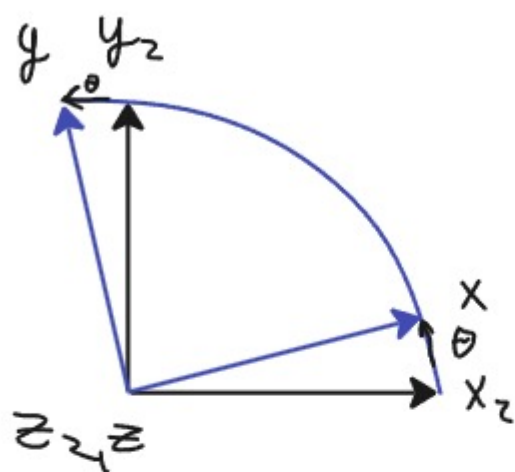
ψ ψ θ

$$x_2 = x \cdot c\theta - y \cdot s\theta + z \cdot 0$$

$$y_2 = x \cdot s\theta + y \cdot c\theta + z \cdot 0$$

$$z_2 = x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1$$

1) θ



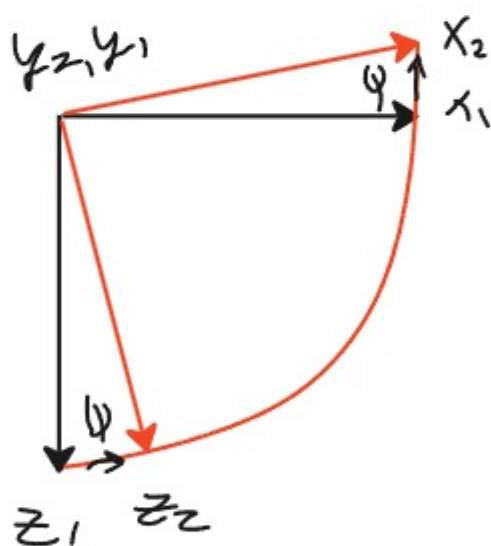
$$A_{c \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2 c\psi + y_2 \cdot 0 + z_2 s\psi$$

$$y_1 = x_2 \cdot 0 + y_2 \cdot 1 + z_2 \cdot 0$$

$$z_1 = -x_2 s\psi + y_2 \cdot 0 + z_2 c\psi$$

2) ψ



$$A_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} c\psi & 0 & s\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\psi & 0 & c\psi \end{pmatrix}$$

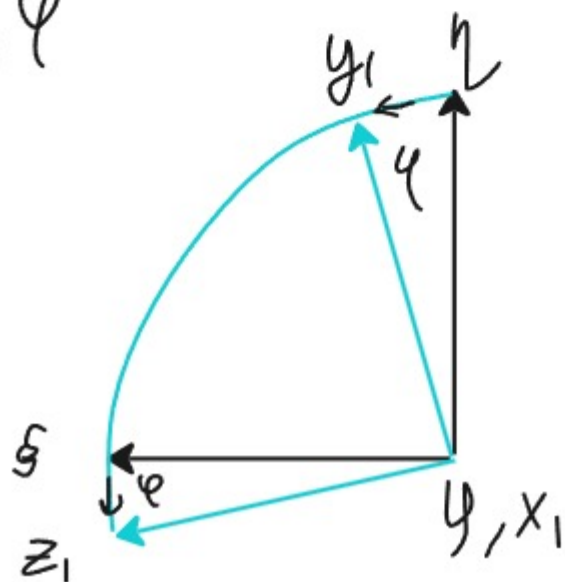
$$\xi = x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 0$$

$$\eta = x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot c\psi - z_1 s\psi$$

$$\xi = x_1 \cdot 0 + y_1 s\psi + z_1 c\psi$$

$$A_{1 \rightarrow \delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{pmatrix}$$

3) ψ



Из связанной в базовую:

$\vec{x} \rightarrow \vec{y}$

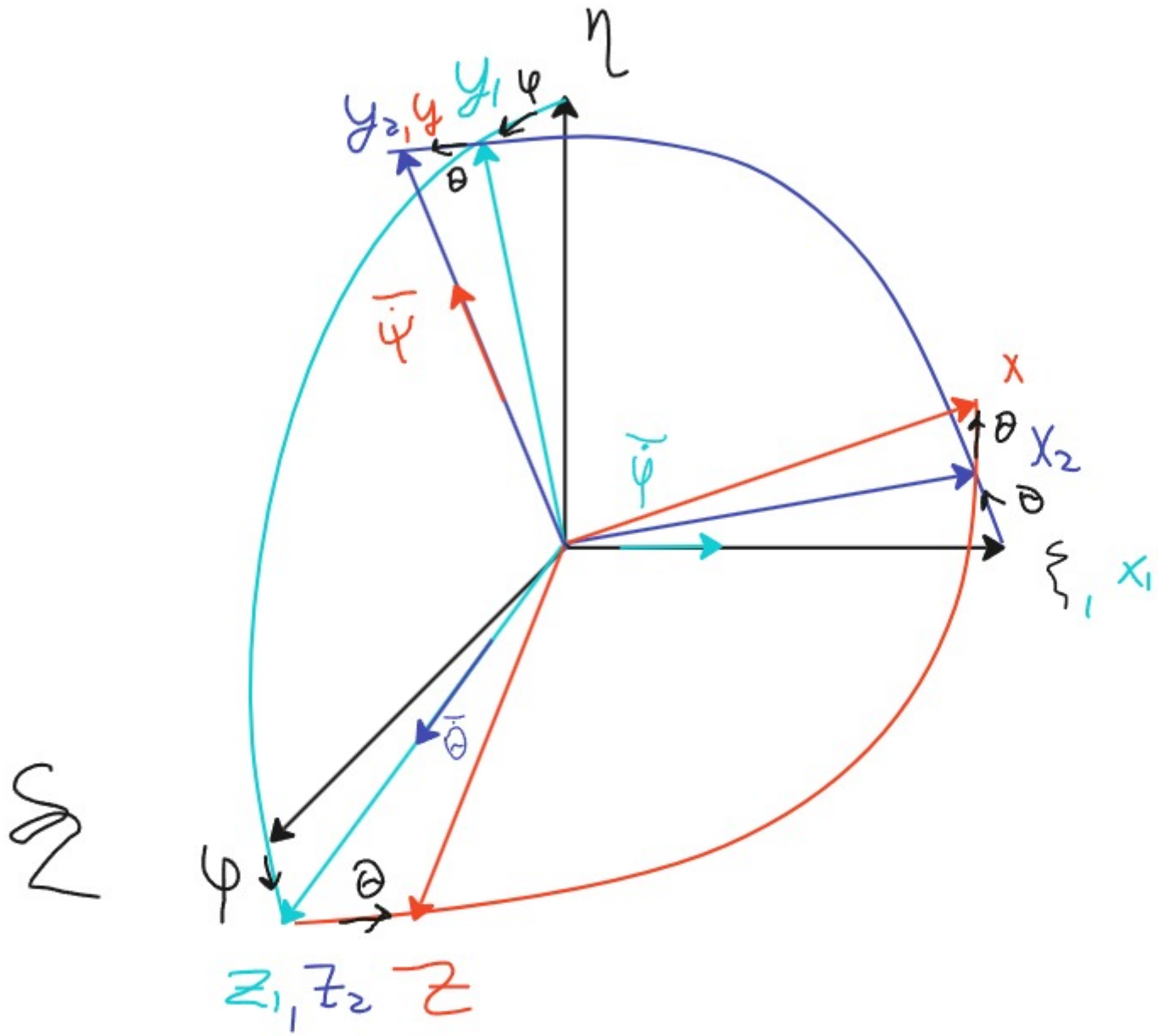
$A_{C \rightarrow B} = A_{1 \rightarrow B} A_{2 \rightarrow 1} A_{C \rightarrow 2}$

φ ψ ω

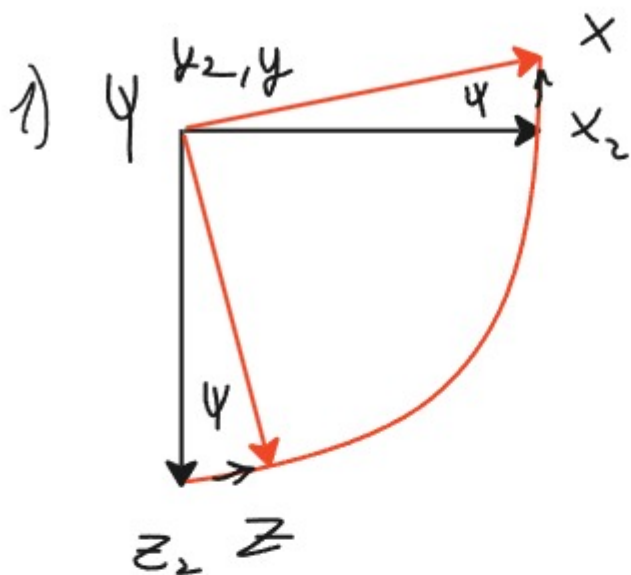
умножаем слева:

$$A_{C \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

φ θ ψ



ψ θ φ



$$x_2 = x \cdot c\psi + y \cdot 0 + z \cdot s\psi$$

$$y_2 = x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 0$$

$$z_2 = -x \cdot s\psi + y \cdot 0 + z \cdot c\psi$$

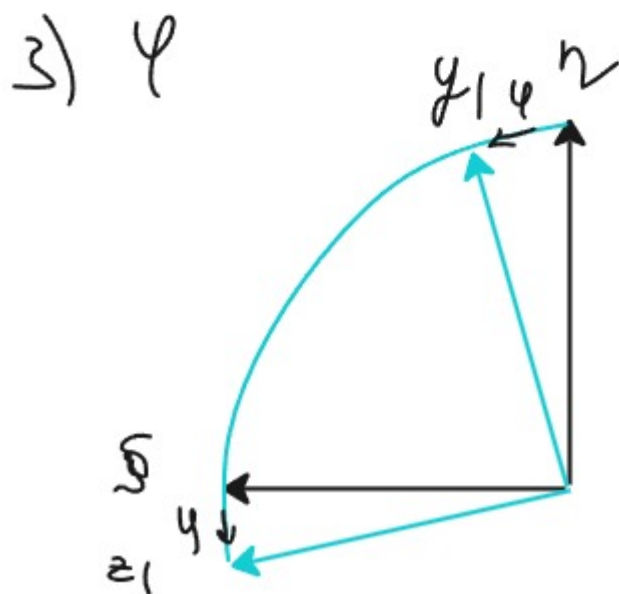
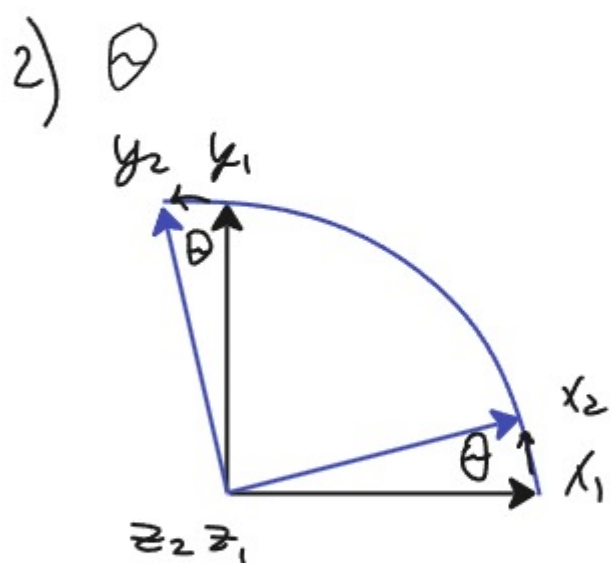
$$A_{c \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} c\psi & 0 & s\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\psi & 0 & c\psi \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2 c\theta - y_2 s\theta + z_2 \cdot 0$$

$$y_1 = x_2 s\theta + y_2 c\theta + z_2 \cdot 0$$

$$z_1 = x_2 \cdot 0 + y_2 \cdot 0 + z_2 \cdot 1$$

$$A_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$z = x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 0$$

$$y = x_1 \cdot 0 + y_1 c\varphi - z_1 s\varphi$$

$$x = x_1 \cdot 0 + y_1 s\varphi + z_1 c\varphi$$

$$A_{1 \rightarrow 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}$$

Из связанной в базовую:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

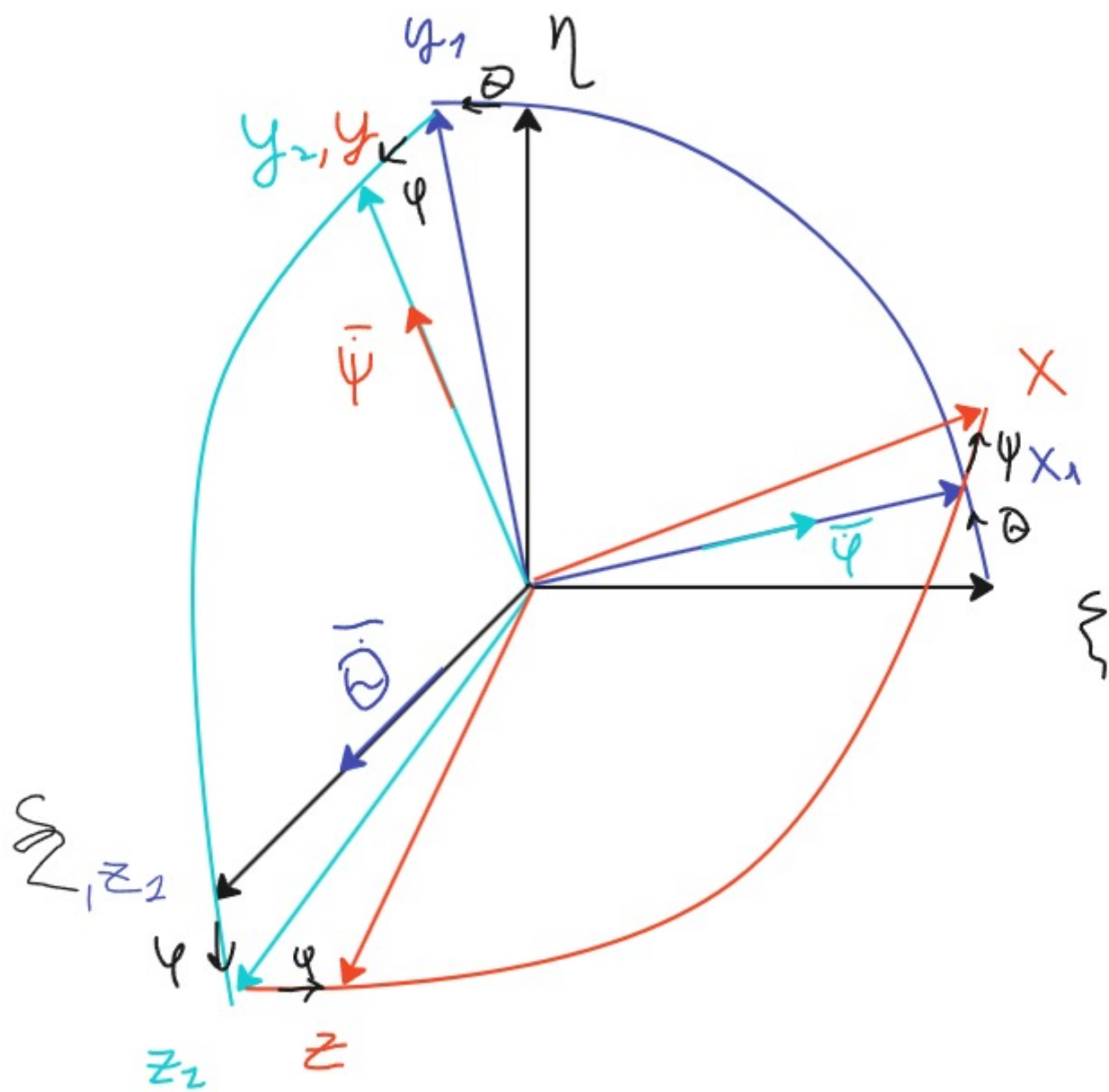
$$A_{c \rightarrow b} = A_{1 \rightarrow 2} A_{2 \rightarrow 1} A_{c \rightarrow 2}$$

умножаем слева:

$$A_{c \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$\psi \quad \theta \quad \psi$$

θ φ ψ

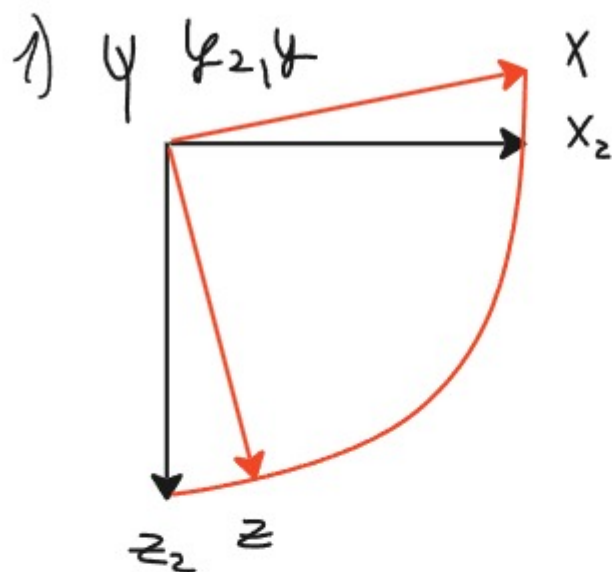


θ φ ψ

$$x_2 = x \cdot c\psi + y \cdot 0 + z \cdot s\psi$$

$$y_2 = x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 0$$

$$z_2 = -x \cdot s\psi + y \cdot 0 + z \cdot c\psi$$

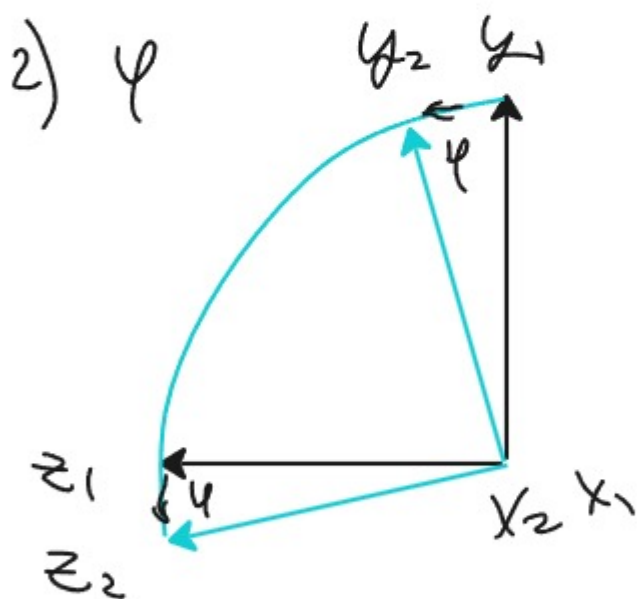


$$A_{c \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} c\psi & 0 & s\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\psi & 0 & c\psi \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot 0 + z_2 \cdot 0$$

$$y_1 = x_2 \cdot 0 + y_2 \cdot c\psi - z_2 \cdot s\psi$$

$$z_1 = x_2 \cdot 0 + y_2 \cdot s\psi + z_2 \cdot c\psi$$

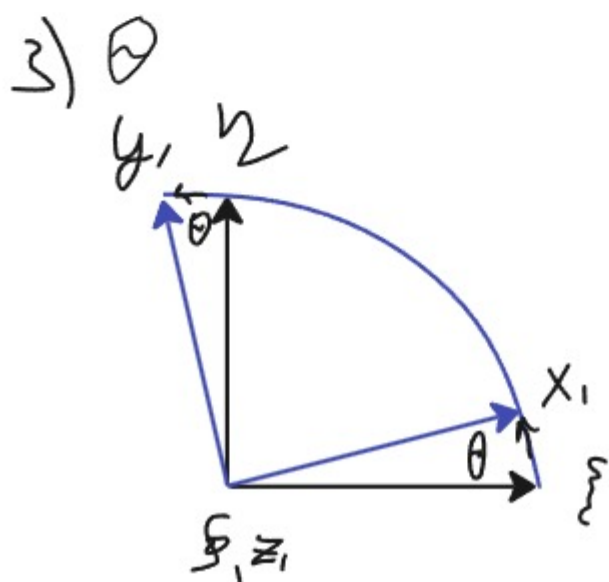


$$A_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{pmatrix}$$

$$\xi = x_1 \cdot c\theta - y_1 \cdot s\theta + z_1 \cdot 0$$

$$\eta = x_1 \cdot s\theta + y_1 \cdot c\theta + z_1 \cdot 0$$

$$\xi = x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 1$$



$$A_{1 \rightarrow \xi} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из связанной в базовую:

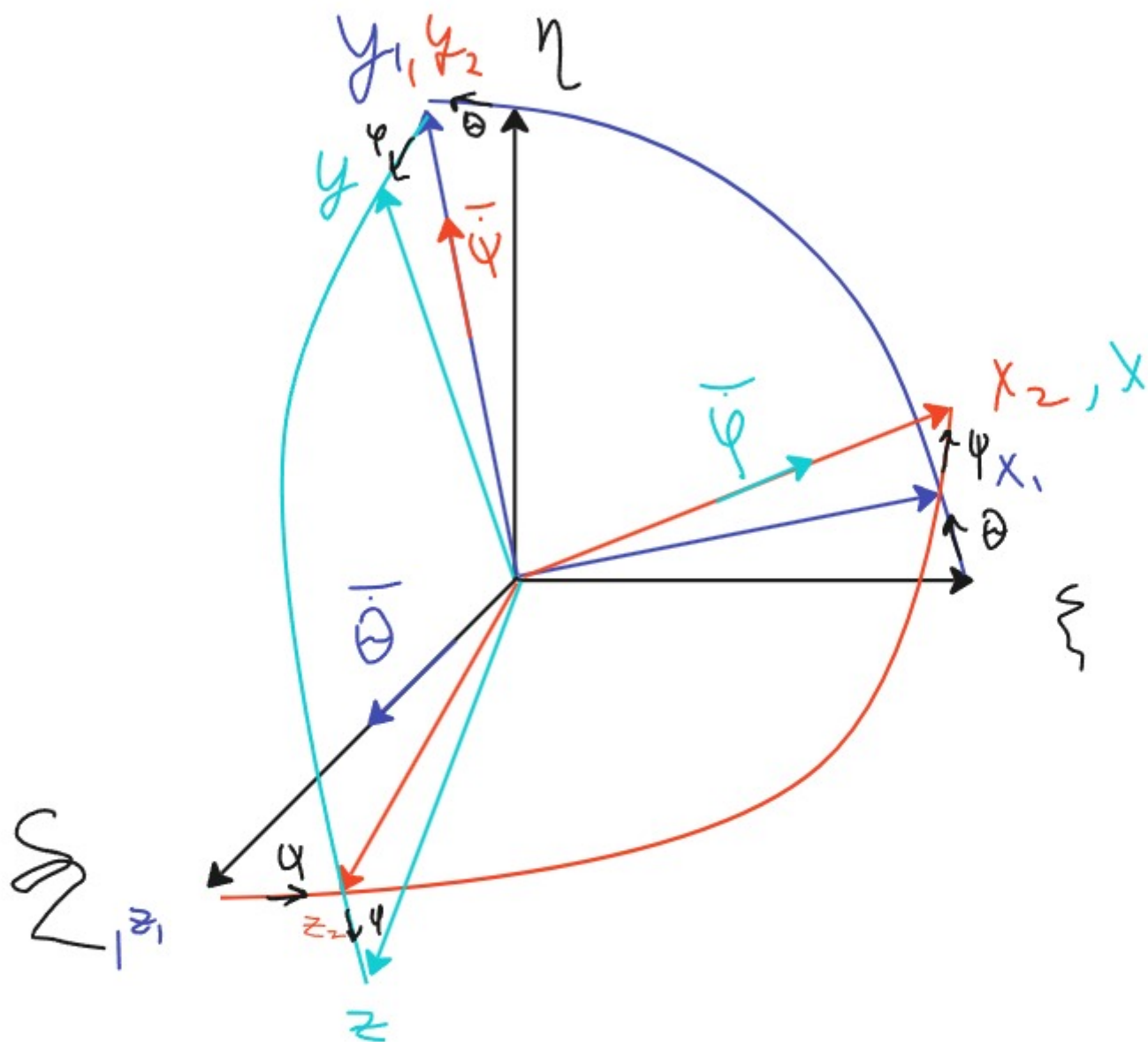
$$\begin{matrix} x \\ \text{проект} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} z \\ \text{матрица} \end{matrix}$$

$$A_{c \rightarrow b} = A_{1 \rightarrow b} A_{2 \rightarrow 1} A_{c \rightarrow 2}$$

умножаем слева:

$$A_{c \rightarrow b} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\psi & 0 & s\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\psi & 0 & c\psi \end{pmatrix}$$

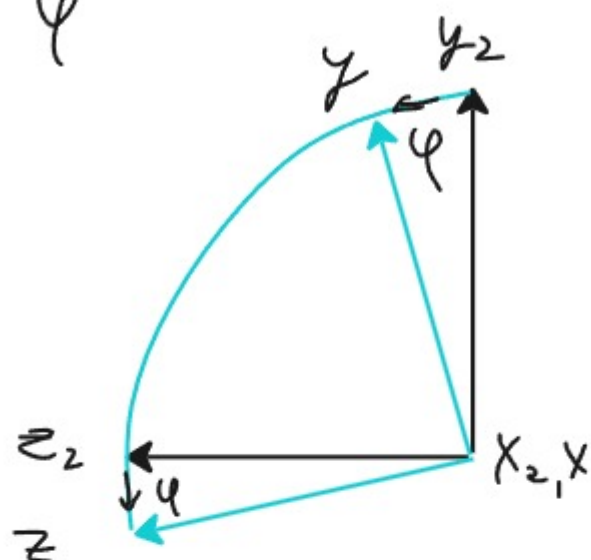






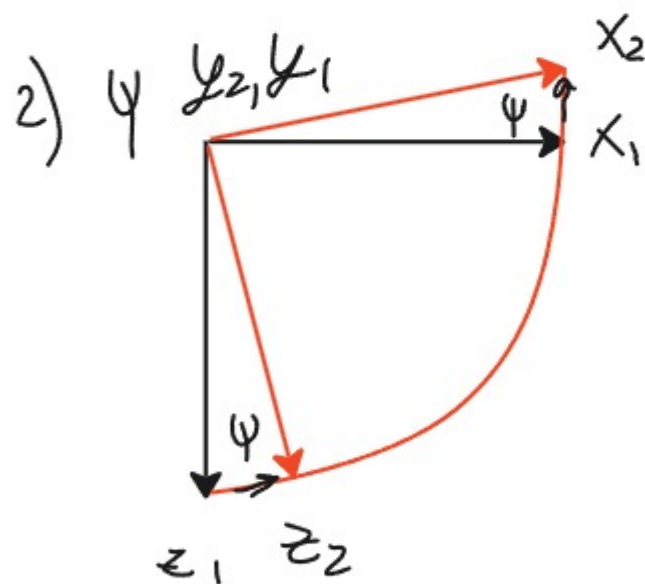
$$\begin{aligned}x_2 &= x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0 \\y_2 &= x \cdot 0 + y \cdot c\psi - z \cdot s\psi \\z_2 &= x \cdot 0 + y \cdot s\psi + z \cdot c\psi\end{aligned}$$

1) ψ



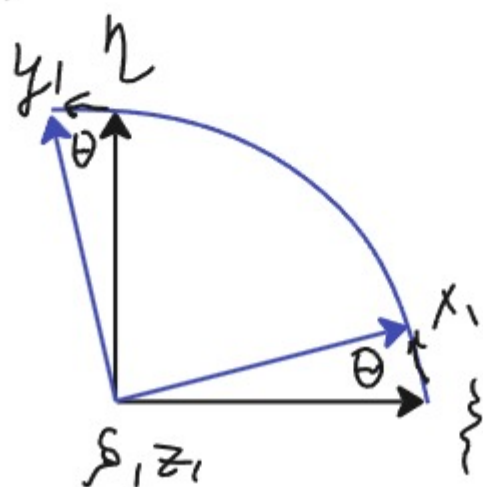
$$A_{c \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 \cdot c\psi + y_2 \cdot 0 + z_2 \cdot s\psi \\y_1 &= x_2 \cdot 0 + y_2 \cdot 1 + z_2 \cdot 0 \\z_1 &= -x_2 \cdot s\psi + y_2 \cdot 0 + z_2 \cdot c\psi\end{aligned}$$



$$A_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} c\psi & 0 & s\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\psi & 0 & c\psi \end{pmatrix}$$

3) θ



$$\begin{aligned}\xi &= x_1 \cdot c\theta - y_1 \cdot s\theta + z_1 \cdot 0 \\ \eta &= x_1 \cdot s\theta + y_1 \cdot c\theta + z_1 \cdot 0 \\ \xi &= x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 1\end{aligned}$$

$$A_{1 \rightarrow \delta} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из связанной в базовую:

$$\begin{matrix} x \\ \text{pos} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} m \\ \text{sum} \end{matrix}$$

$$A_{c \rightarrow b} = A_{1 \rightarrow b} A_{2 \rightarrow 1} A_{c \rightarrow 2}$$

умножаем слева:

$$A_{c \rightarrow b} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\psi & 0 & s\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\psi & 0 & c\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}$$



1