

# Прикладная гидроаэродинамика

1 лекция

11 февраля

Валерий Осипович см3. Зачёт. 3-4 лабы. Дз. 60 б зачет автоматом  
Литература Голубев А. Г. Под ред Колугина " Аэродинамика" изд 2017 г.  
Краснов " Прикладная аэродинамика" тут установки и лабы. В вопросах и  
ответах. Доп литература Калугин "Аэрогазодинамика органов управления  
полетом ЛА". Мельников "Аэродинамика больших скоростей". Лебедев  
Чернобровкин "Динамика полета беспилотных ЛА" . Захарченко В.Ф.  
"Определение суммарных АДХ различных компоновок ЛА" - метода к дз, там  
расчет ла в целом, его составляющих, затупленный конус, засостренный  
конус". Минусы за пропуски и опоздания, плюсы за посещения.

## Введение

Дисциплина относится к специальным определяющим подготовку инженеров в  
области конструирования приборов, систем управления, также для курса  
автоматы стабилизации системы управления ЛА, а также для инерциальных  
навигационных комплексов систем управления ЛА.

Прикладная гидроаэродинамика является теоретической подготовкой для  
спецкурсов. Цель дисциплины - освоение теоретических основ  
гидроаэродинамики, расчеты АДХ ЛА и гирокопических систем.  
2 цель - выработка практических навыков самостоятельной инженерной  
работы. Объем дисциплины - 2 зачетных единицы.

Наука гидроаэродинамика- это часть науки аэромеханики изучает законы  
движения и равновесия жидкостей, а также силовое взаимодействие  
жидкостей с движущимися в ней телами.

Жидкость - это физическое тело, связь между молекулами которого мала. Под  
это определение подпадают вода, воздух, масло и прочие.

В основе АГД лежит гипотеза сплошности или континуума или неразрывности  
движущейся среды. Ввел эту гипотезу сплошности академик Эйлер в 1753  
году.

Согласно гипотезе принебрегают в жидкости межмолекулярным движением и  
молекулярными промежутками. В этом случае свойства бесконечно малого  
объёма жидкости будут такими же как и у объёма в целом. Это позволяет  
1) рассматривать непрерывное изменение параметров потока в пространстве и  
времени  
2) применять интегральные и дифференциальные исчисления

Но в гидроаэродинамике имеют дело не с реальными жидкостями, а с их упрощенными моделями, которые строятся с учётом реальных физических свойств жидкости

### Некоторые отличительные свойства реальных жидкостей

Заметим, что все жидкости условно подразделяются на капельные и газообразные

Капельные жидкости (Вода)	Газообразные (Воздух)
1. Малая сжимаемость	1 Большая сжимаемость
2 Большая вязкость	2 Малая вязкость
3 Почти не работают на растяжение	3 В принципе на растяжение не работают
4 образуют свободную граничную поверхность	4 занимает весь объём



### Модели жидкости

1. Несжимаемая вязкая
2. Сжимаемая идеальная (невязкая) та в которой отсутствует трение
3. Сжимаемая вязкая - **сложная в расчете**
4. Несжимаемая идеальная **простая в расчете**

**Сжимаемость** - способность жидкости изменять свой объем под действием сжимающих усилий

$$\beta_p - \text{Коэффициент объемного сжатия} \left[ \frac{M^3}{H} \right]$$

**Вязкость** - способность жидкости сопротивляться усилиям сдвига

$$\mu - \text{Коэффициент динамической вязкости} \left[ \frac{H \cdot C}{M^2} \right] \rightarrow \nu = \frac{\mu}{\rho} - \text{плотность}$$

— Коэффициент кинематической вязкости

$$\beta_p, \mu = f(T, P) \quad \begin{matrix} \text{температура} \\ \text{давление} \end{matrix}$$

Касательные напряжения трения

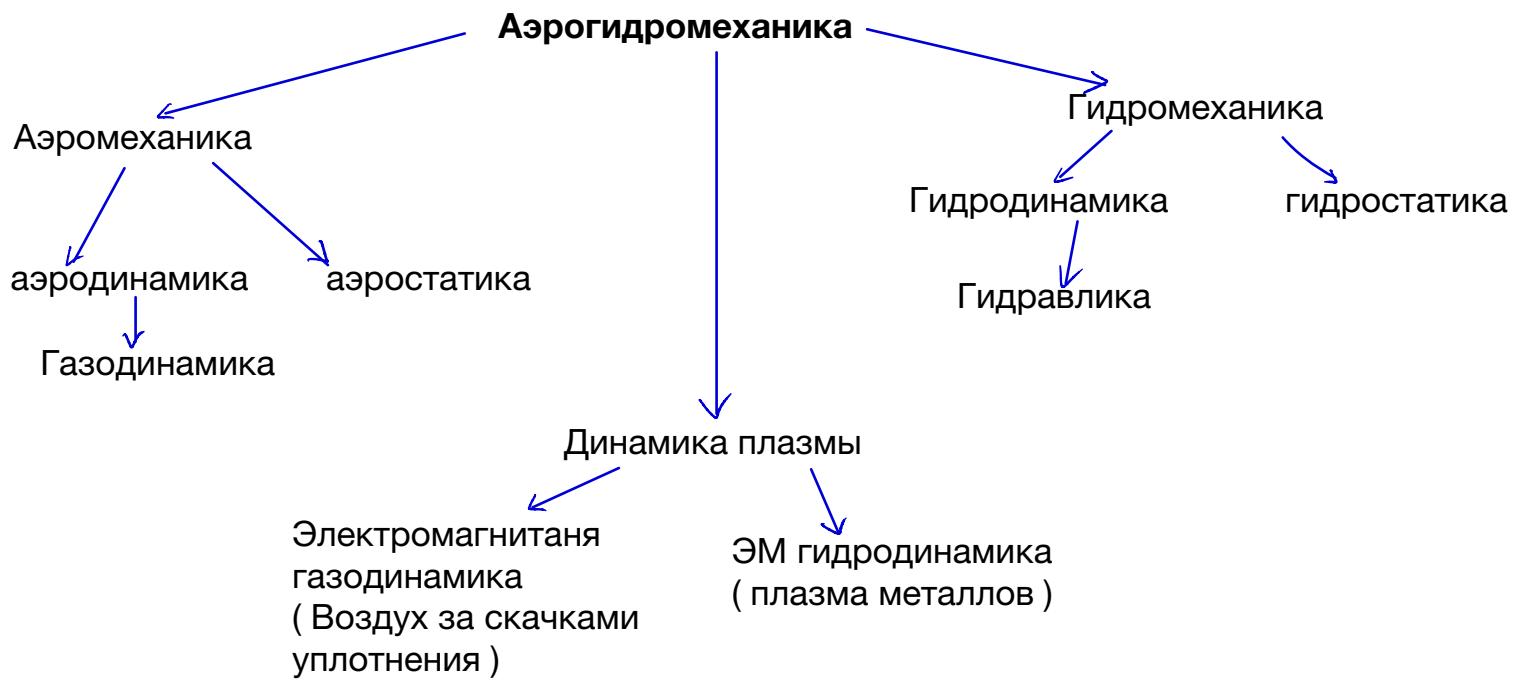
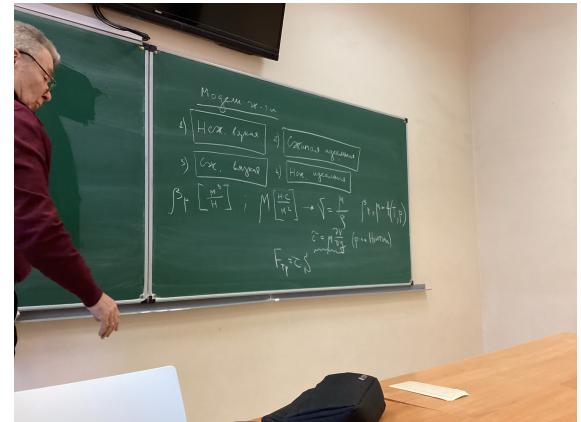
$$\tau = \mu \frac{dy}{dx} \quad \text{-формула Ньютона}$$

40

$$F_{Tp} = \tau \cdot S$$

**Идеальная жидкость** - та в которой отсутствует трение

В гидроаэродинамику составными частями входит ряд самостоятельных наук



**Плазма** - особая жидкость, состоящая из электрически заряженных частиц

**Аэродинамика** изучает законы движения газов, а также силовое взаимодействие газов с движущимися телами

**Аэростатика** изучает законы равновесия и покоя газов

**Газодинамика** - аэродинамика больших скоростей

**Гидродинамика** изучает законы движения капельных жидкостей

**Гидравлика** - прикладная инженерная наука изучает движение жидкостей по каналам, трубам, гидравлическое сопротивление и расходы

**Краткая историческая справка о гидроаэродинамике вклад советских и российских учёных**

Циолковский создал одну из первых аэродинамических труб. Дал формулу для расчета скорости тела с учетом его переменной массы.

Цандер создатель первых ракет.

Серов. Теория размерности и подобия

2 лекция  
18 февраля

## Параграф 1

### Основные задачи решаемые гидроаэродинамикой

1. Определение параметров течения
2. Исследование силового взаимодействия среды на обтекаемые потоком тела, определение подъемной силы, лобового сопротивления, боковой силы, а также моментов тангажа, рыскания, крена
3. Определение безразмерных аэродинамических коэффициентов сил и моментов, необходимых для расчетов
4. Расчет течения жидкости по каналам, определение расхода и гидравлического сопротивления
5. Определение аэродинамической формы движущегося тела (оптимизация)
6. Обеспечение его [тела] устойчивости и управляемости
7. Выбор и расчет органов управления (ОУ) ЛА и сопел его двигателей
8. Расчет температуры обшивки ЛА и обеспечение её теплозащиты

## Параграф 2

### Критерий подобия течения жидкости

#### 1. Число Маха

$$M = \frac{V - \text{скорость потока}}{a - \text{скорость звука}}$$
$$a^2 = \frac{dp - \text{давление газа в потоке}}{ds} = K R T$$

отношение  $K = \frac{C_p}{C_v}$  - удельные теплоемкости

$a$  - характеризует сжимаемость

$$f = \text{const} \text{ для несжимаемой жидкости} \rightarrow dp = 0.$$
$$\rightarrow a = \infty \text{ для несжимаемого потока}$$

сжимаемость  $f$ ,  $a \downarrow$

Число Маха также является критерием сжимаемости. С ростом сжимаемости, число Маха увеличивается. При больших числах Маха сжимаемость потока растет. Если  $M <= 0,3$ , то поток можно считать несжимаемым

$M <= 1$ , то дозвуковое течение

$M = 1$ , это звуковое течение

$M > 1$ , это сверхзвук

$M > 5 = 5$ , это гиперзвук

## 2. Число Рейнольдса

$$Re = \frac{V \cdot d}{\nu} \quad \begin{array}{l} \text{скорость потока} \\ \text{характерный размер (диаметр, длина)} \end{array}$$

$\nu = \frac{M}{\rho}$

С помощью числа Рейнольдса - Определяют характер обтекания тела, служит для определения режима течения (ламинарный или турбулентный).

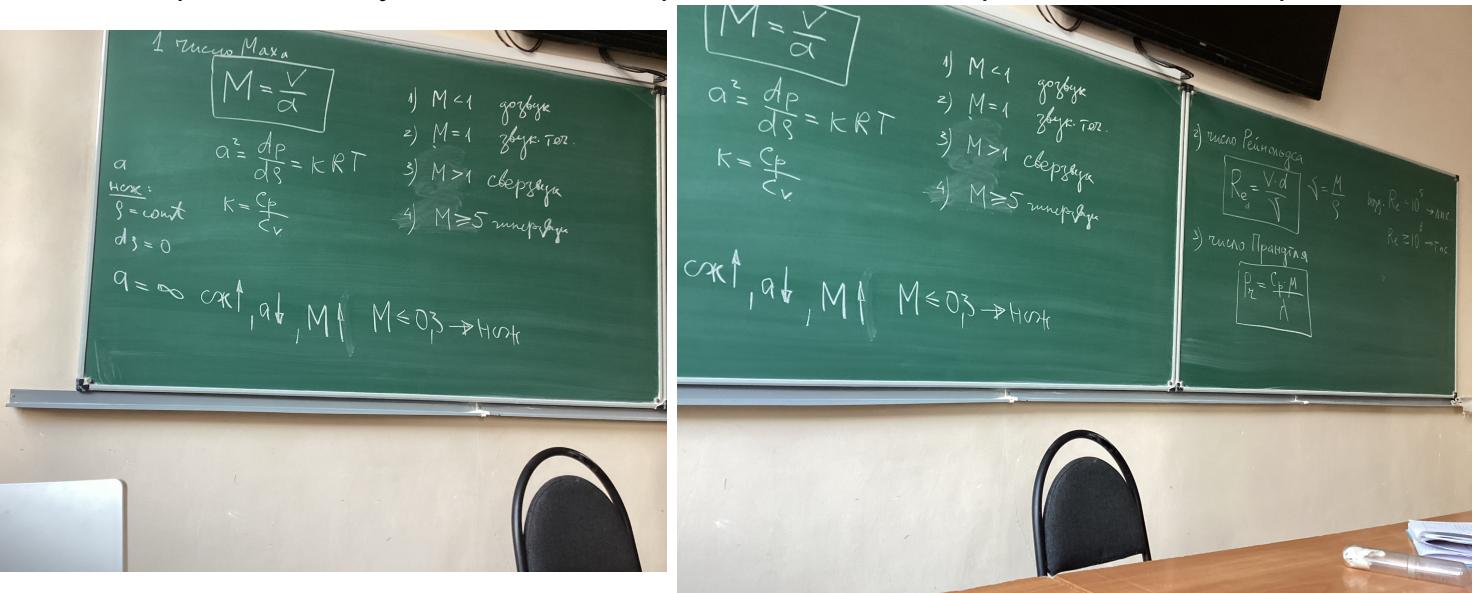
Для воздуха  $Re=10^5$  - Ламинарный приграничный слой

Для воздуха  $Re>10^6$  - Турбулентный приграничный слой

## 3. Число Прандтля

$$Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{\lambda} \quad \begin{array}{l} \text{удельная теплоёмкость} \\ \text{- коэф. дин. вязкости} \\ \text{- коэф. теплопроводности} \end{array}$$

Число Прандтля служит для моделирования и оценки процессов теплопередачи.



Это основные критерии подобия, которые используются для моделирования процессов при обтекании тела

### Параграф 3

#### Параметры характеризующие состояние жидкости

##### 1. Гидростатическое давление [ Па] или [ Н/м<sup>2</sup> ]

Свойства давления: 1) оно действует снаружи и по нормали к поверхности  
2) давление - величина скалярная



Давление - сила проходящаяся на единицу поверхности

##### 2. Массовая плотность

плотность - это масса в единице объема

$$\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

### 3. Абсолютная термодинамическая температура

$T$  [K]

Температура - это мера нагретости тела

4. Вектор скорости  $\vec{V}$   $\left[\frac{m}{s}\right]$  характеризует модуль и направление скорости

$\vec{V}$  или  $V_x, V_y, V_z$



В общем случае эти четыре параметра зависят от  $t$  (времени)

**Вывод:** таким образом движение жидкости будет определено если в каждой её точке будут известны во времени значения этих четырёх параметров. Для определения этих параметров необходимо составить и решить систему из четырех уравнений.

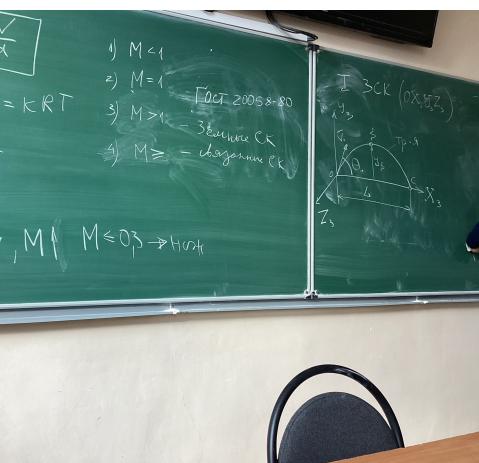
### Параграф 4

#### Системы координат и углов, определяющих положение тела в пространстве

ГОСТ МЕХАНИКА ПОЛЁТОВ В АТМОСФЕРЕ ГОСТ 20058-80

- Земные ск используют для определения траектории ЛА, их иногда называют базовыми ск
- Связанные ск служат для определения сил и моментов, действующих на ЛА

Земная система координат ЗСК  $(0x_3y_3z_3)$



$z_3$

взаимно перпендикулярно и образуют прямую тройку

## Связанная система координат $(Oxyz)$

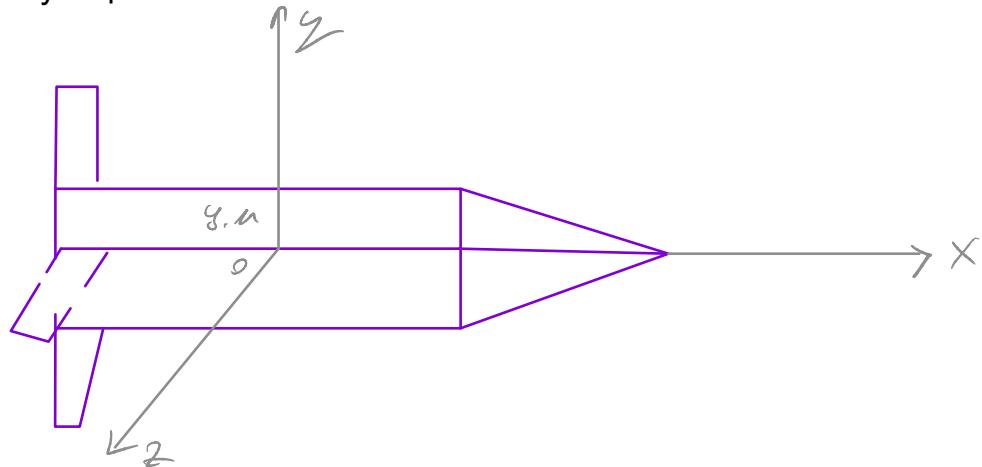
Ох по продольной оси ла

О - цм ЛА

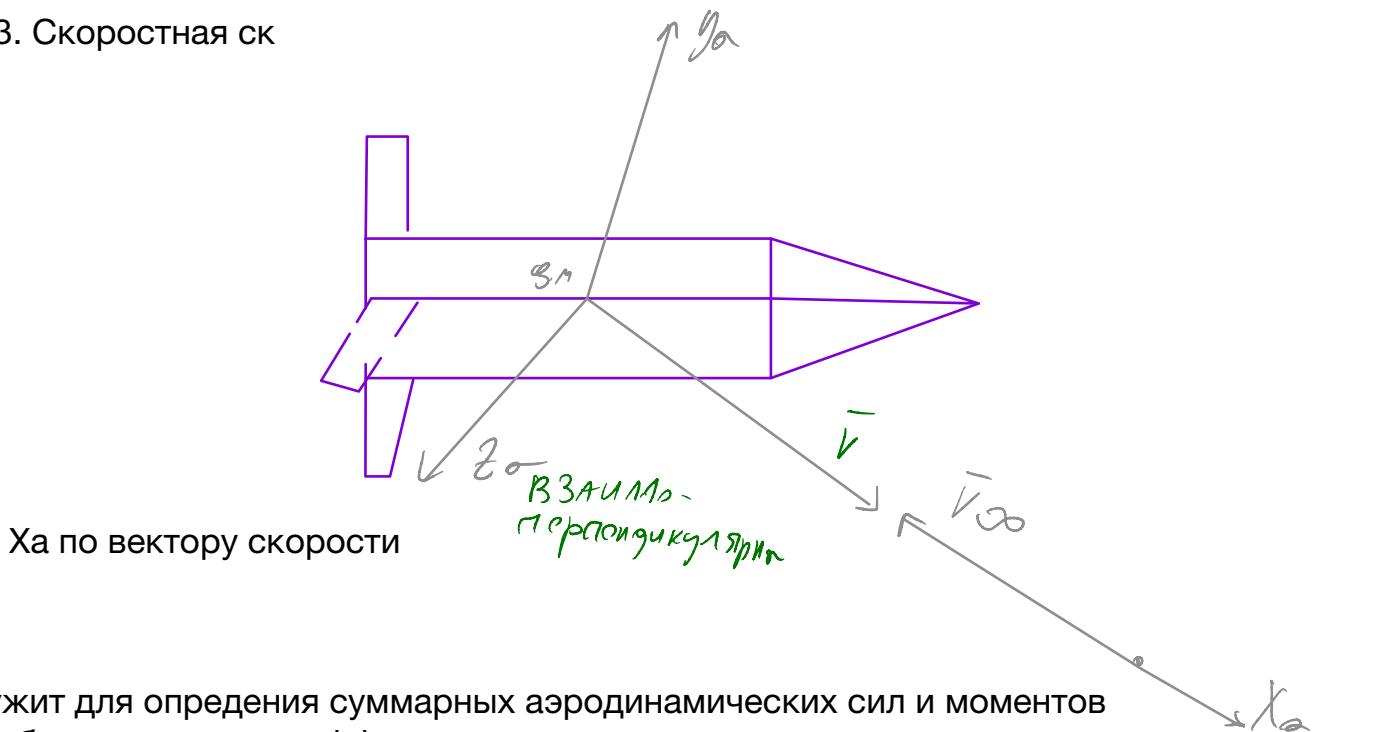
У перпендикулярна ОХ (по нормали к продольной оси в вертикальной плоскости симметрии)

З взаимно перпендикулярна первым двум по правому борту ЛА

Эта ск движется вместе с ЛА по траектории движения. Служит для определения нагрузок, действующих на Ла



### 3. Скоростная ск



Служит для определения суммарных аэродинамических сил и моментов и их безразмерных коэффициентов

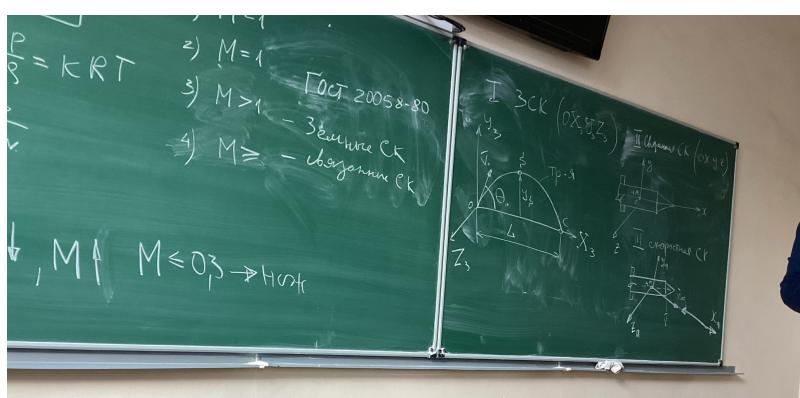
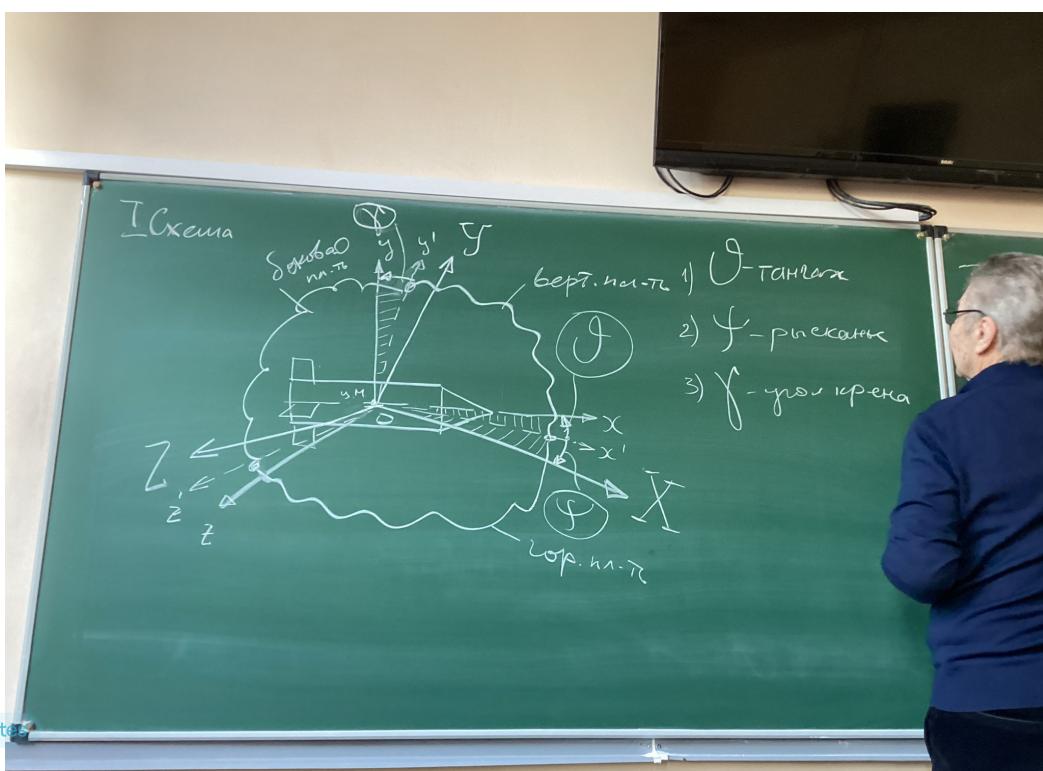
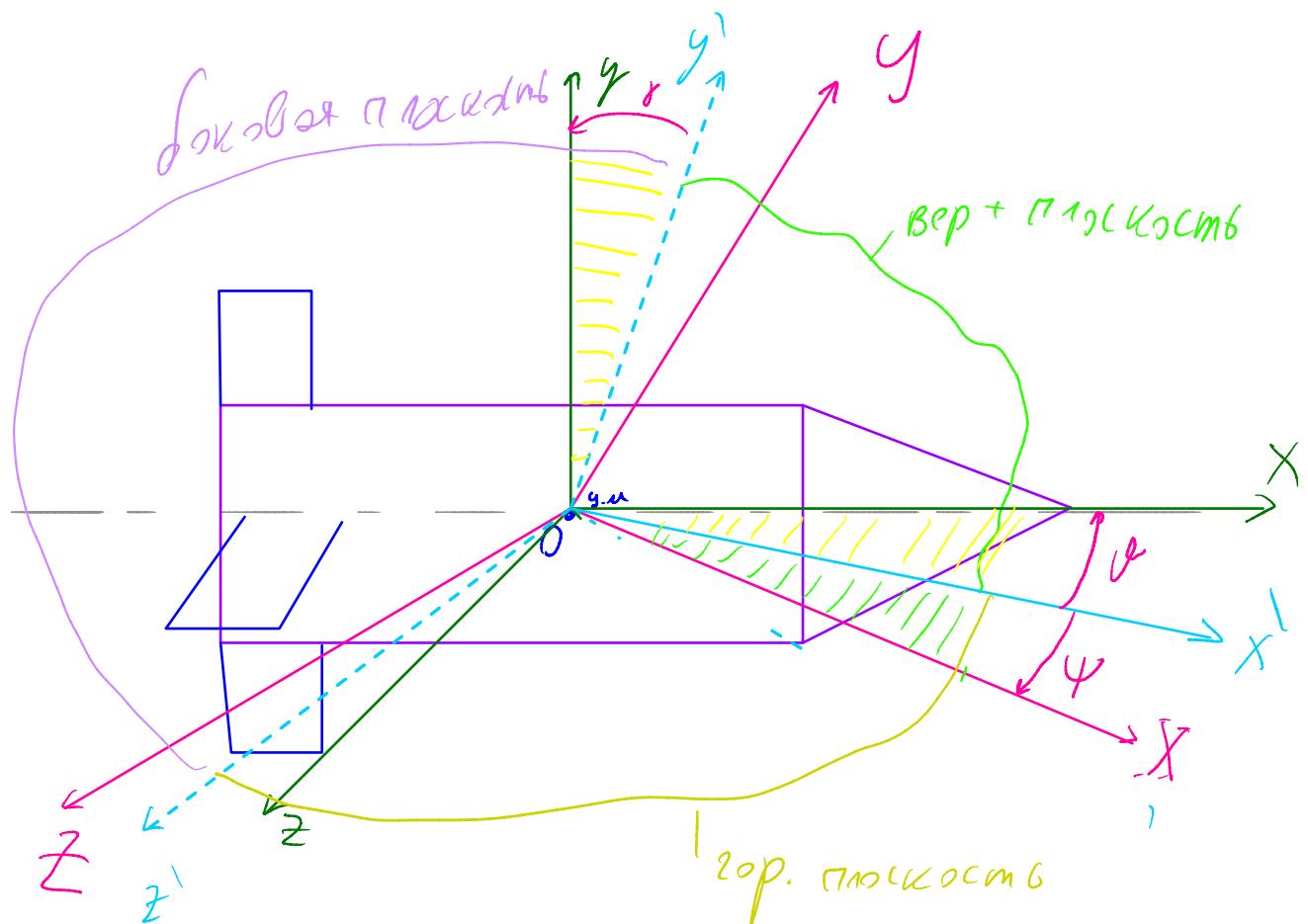


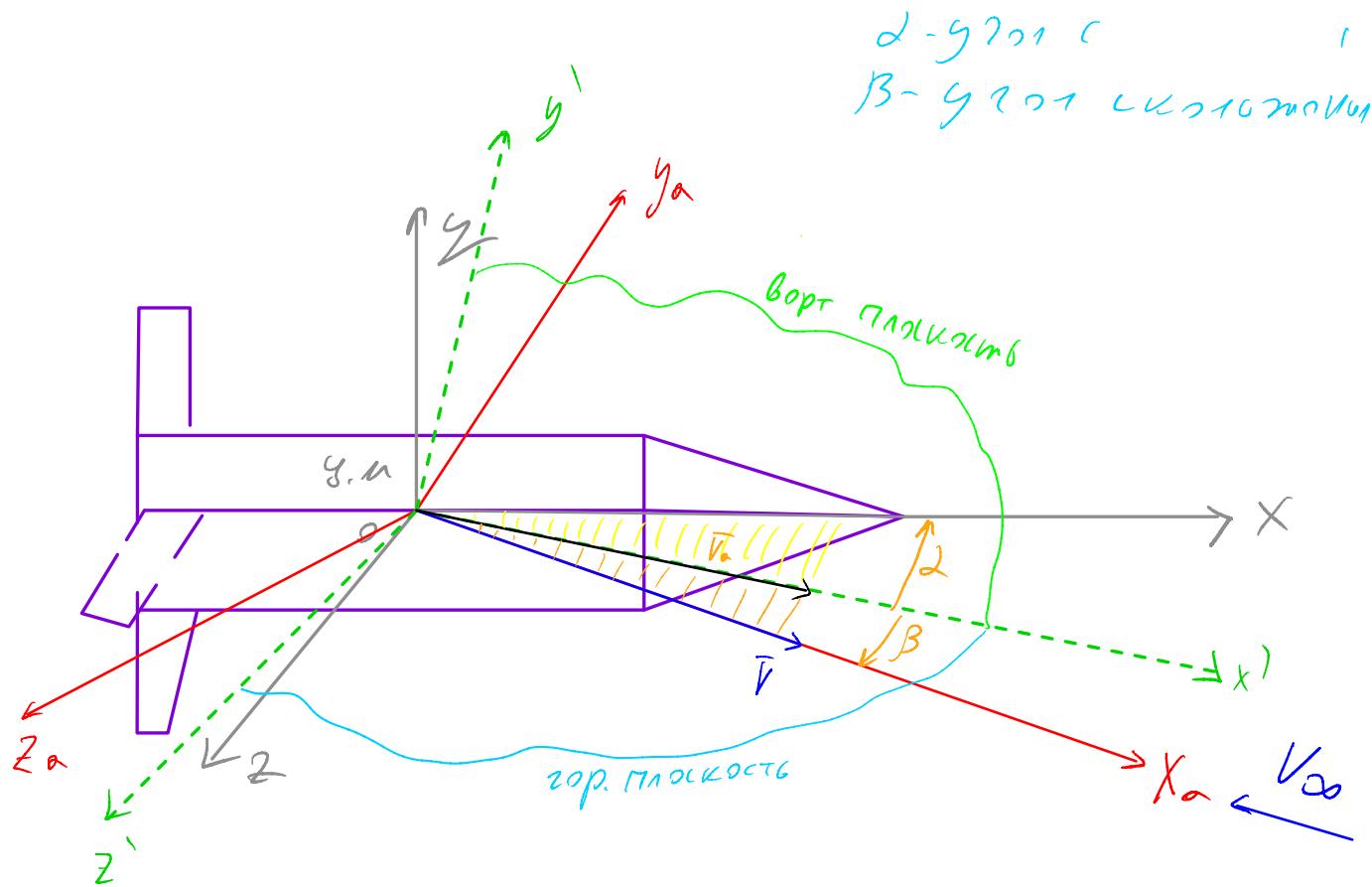
Схема взаимного расположения связанный и неподвижной систем координат при совмещении их центров

1 схема

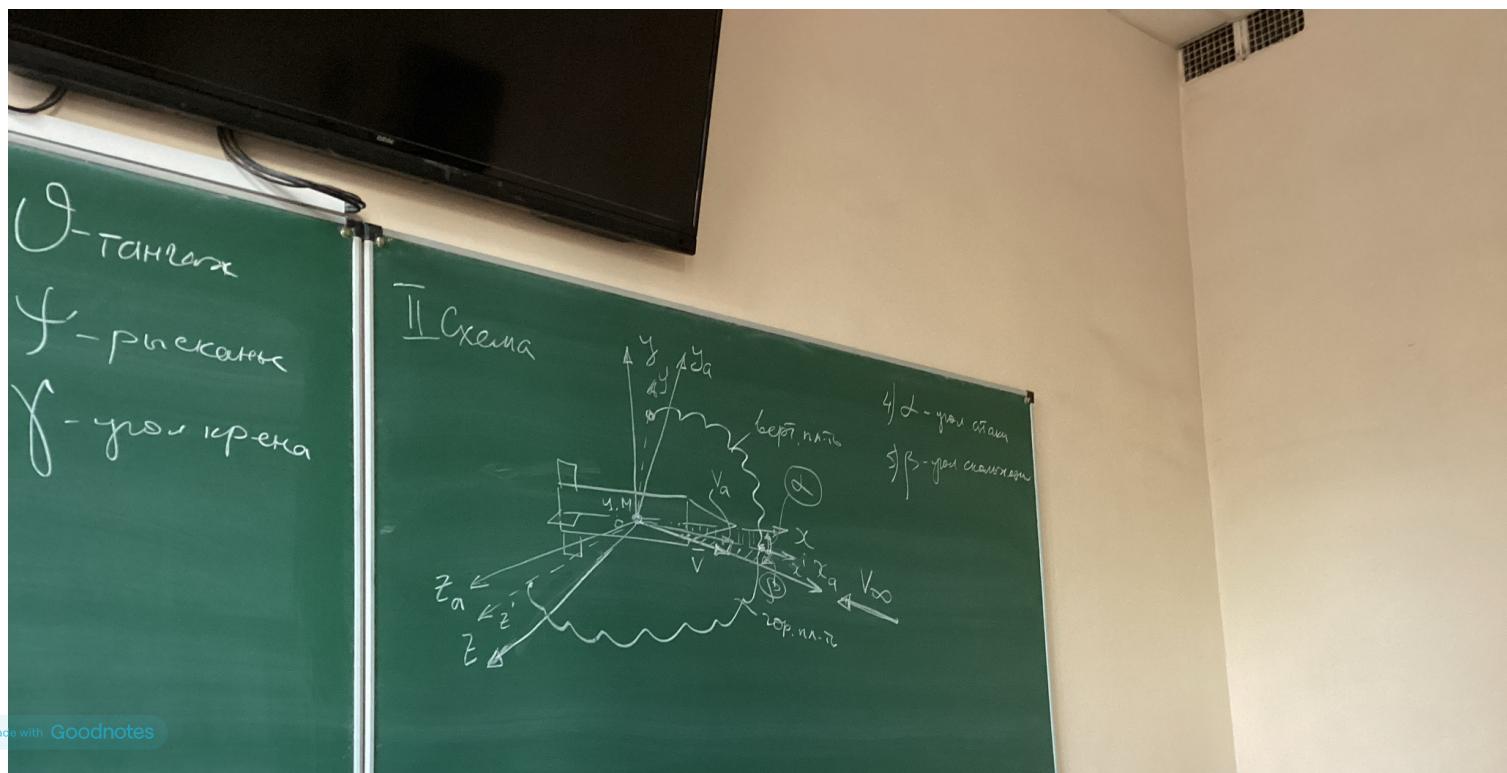


## Схема взаимного расположения связанный и скоростной систем координат

14



Эти 5 углов определяют положение ЛА



Основные уравнения гидроаэродинамики:

## Параграф 1

Уравнение состояния (уравнение совершенного газа),  $R$  - газовая постоянная зависит от рода газа или жидкости

$$P = \rho \cdot R \cdot T \quad (1)$$

$$R = \frac{R_0}{\mu \cdot \rho}$$

$R_0$  - универсальная газовая постоянная, не зависит от рода газа  $R_0 = 8,314 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]$  - СИ

$$R_{\text{возд}} = 287 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$$

$\mu_{\text{ср}}$  - средний молекулярный вес газа

Если  $T \uparrow \uparrow$ ,  $T \uparrow P \downarrow$ , то ур-ие (1) не выполняется

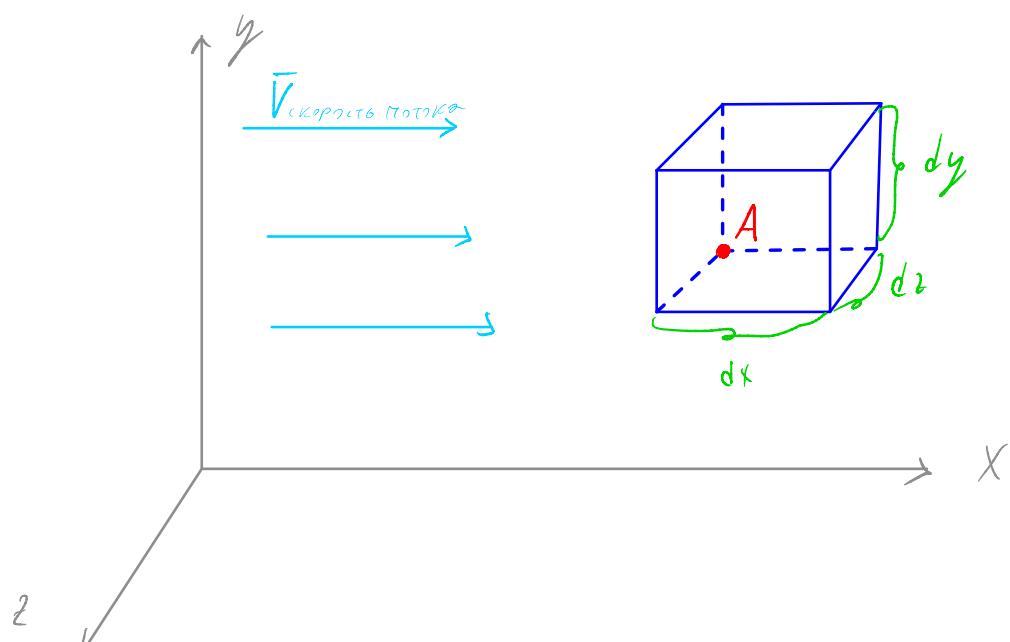
Газовая постоянна  $R$  - это работа совершаемая одним килограммом газа при изобарическом нагревании его на один градус

Лабы Калугина дз к лабнице

Последующие 3 уравнения будем выводить на базе основных законов сохранения массы, энергии, импульса

38

## Параграф 2 Уравнение неразрывности (закон сохранения массы)



Выделим бесконечно малый элементарный объём пространства

$$dW = dx dy dz \quad dt = 1$$

Баланс жидкости: ( все что втекает = тому что вытекает )

Втекает вдоль оси x:

$$\rho \cdot V_x \cdot dt \cdot \underbrace{dz \cdot dy}_S$$

Вытекает:

$$\left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dt \cdot dz \cdot dy$$

$$(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx) (v + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx) dt dy dz - \rho v_x dt dy dz =$$

$$= \left( \rho \frac{dV_x}{dx} + \frac{\partial \rho}{\partial x} V_x \right) dt dy dz dx = \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} dx dy dz dt$$

тогда

$$\left[ \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

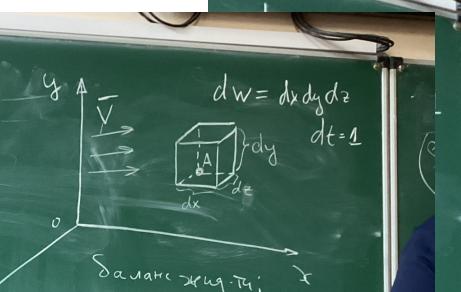
1) схема

$$P = \rho R T$$

$$R = \frac{R_0}{M_{cp}}$$

$$R_0 = 8,314 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]$$

$$R_{\text{сог}} = 287 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$$

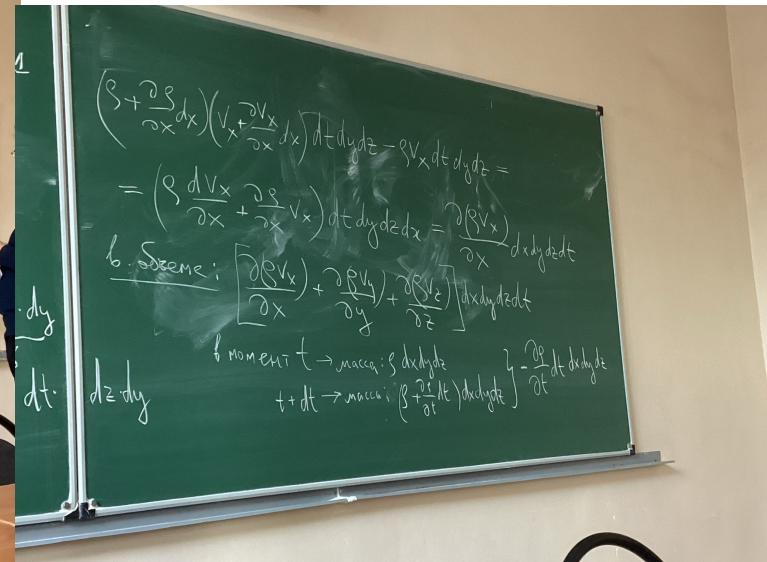
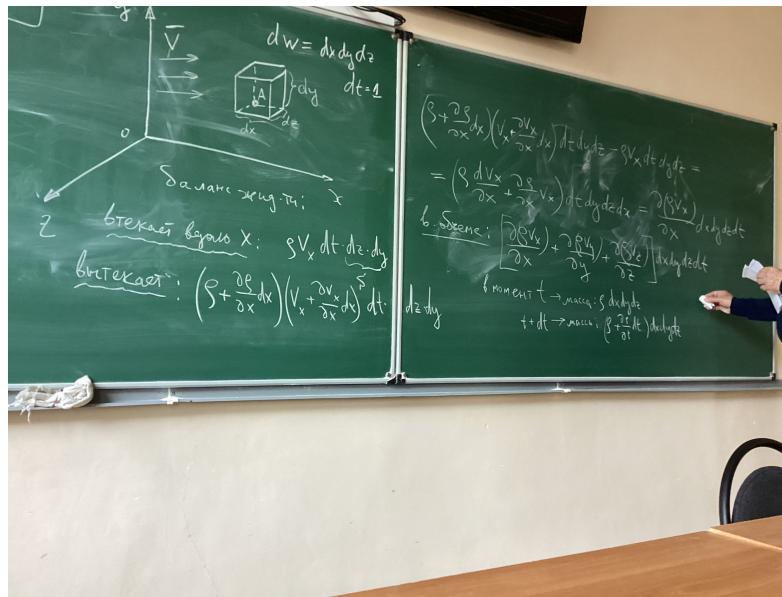


втекает вдоль x:  $\rho V_x dt dz dx$   
вытекает:  $\left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dt dz dx$

$$\begin{aligned} & \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dt dz dx - \rho V_x dt dz dx = \\ & = \left( \rho \frac{dV_x}{dx} + \frac{\partial \rho}{\partial x} V_x \right) dt dy dz dx = \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} dx dy dz dt \end{aligned}$$

Согласно закону сохранения массы это выражение должно быть приравнено изменению массы в объеме за единицу времени  $dt$

$$\begin{aligned} \text{в момент } t \rightarrow \text{масса: } & \rho dx dy dz \\ t + dt \rightarrow \text{масса: } & \left( \rho - \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \rho - \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz \end{aligned} \right\}$$



В результате получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{это и есть} \\ \text{уравнение} \\ \text{непрерывности} \end{array}$$

- это не тацстанарное трехмерное течение

$$\text{или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0$$

Частные случаи:

- a) установившийся поток

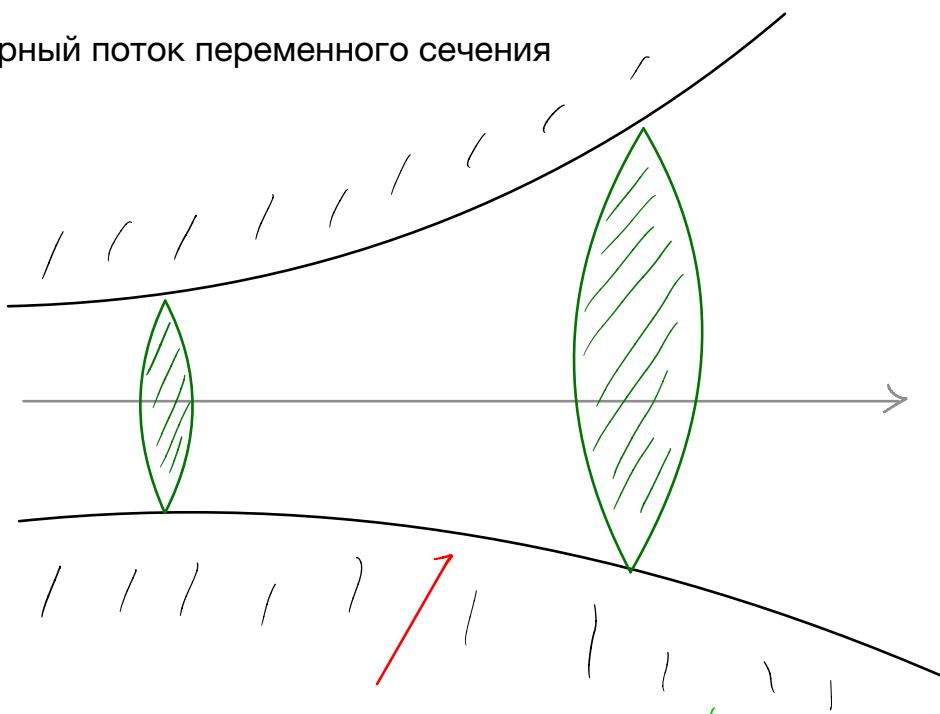
$$\operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0$$

б) поток несжимаемый

$$\operatorname{div}(\bar{v}) = 0$$

$$\rho = \text{const}$$

в) одномерный поток переменного сечения



Может быть "струйка"  $S(x, t)$

918 20столько смотрят

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v \cdot S)}{\partial x} = 0$$

г) для установившегося потока Уравнение расхода

$$\rho v S = \text{const}$$

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \dots = m.$$

$m$  - мгновенный расход (расход массы в единицу времени)

1)  $\text{I}_{\text{хемия}}$

$$P = \rho R T$$

$$2) \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = 0$$

Част. струи

а) поток устан

$$\operatorname{div}(\bar{v}) = 0$$

б)  $\operatorname{const}$

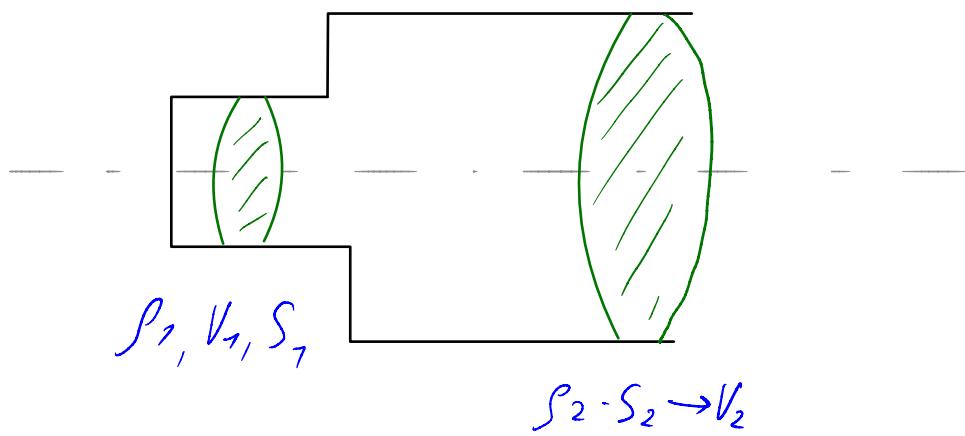
$$\operatorname{div} \bar{v} = 0$$

д) жидкость не сжимаемая

$$V \cdot S = \text{const}$$

$$V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 = \dots = Q$$

$Q$  — объемный расход расход в единице объема за единицу времени

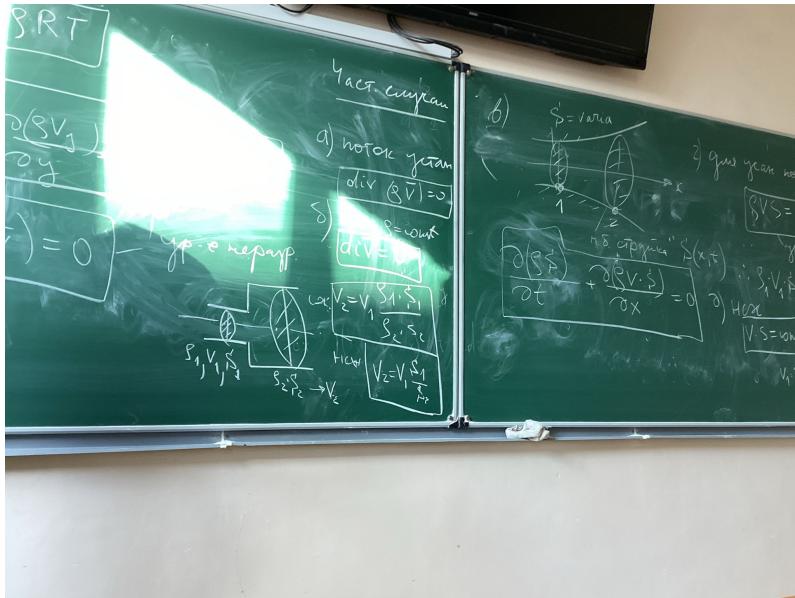


$$\text{cm: } V_2 = V_1 \cdot \frac{S_1 \cdot S_1}{S_2 - S_2}$$

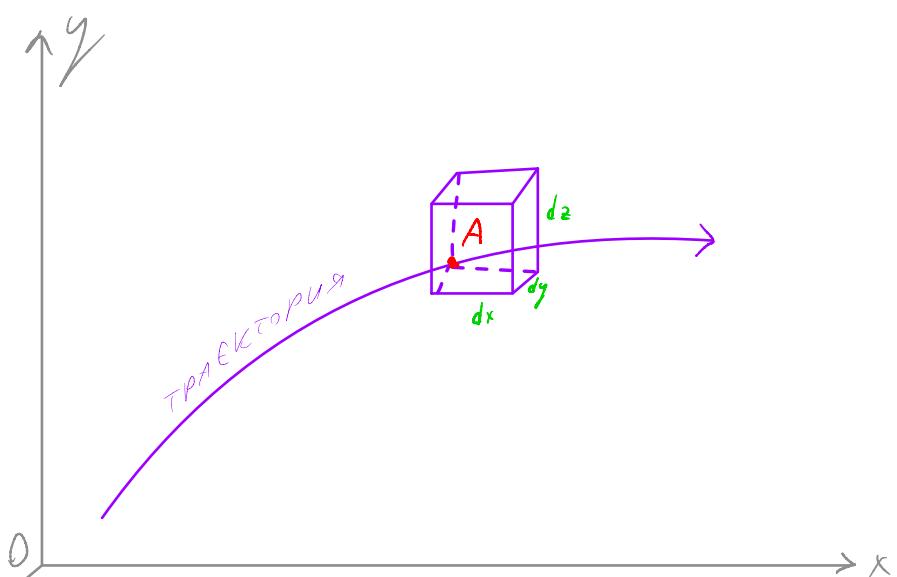
$$\text{fc: } V_2 = V_1 \cdot \frac{S_1}{S_2}$$

## Замечания

1. Уравнение неразрывности мы получили используя метод Эйлера: фиксируется точка пространства или объём и исследуется в нем (ней) изменение параметров во времени
2. Метод Лагранжа: фиксируется частица жидкости или бесконечно малый объём и двигаются вместе с ней по траектории её движения при этом определяются параметры потока этих частиц



## Параграф 3 Уравнение движения



3. c. P

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} \cdot dt$$

$m = \text{const} \Rightarrow \text{II 3. H}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{v} = f(x, y, z, t)$$

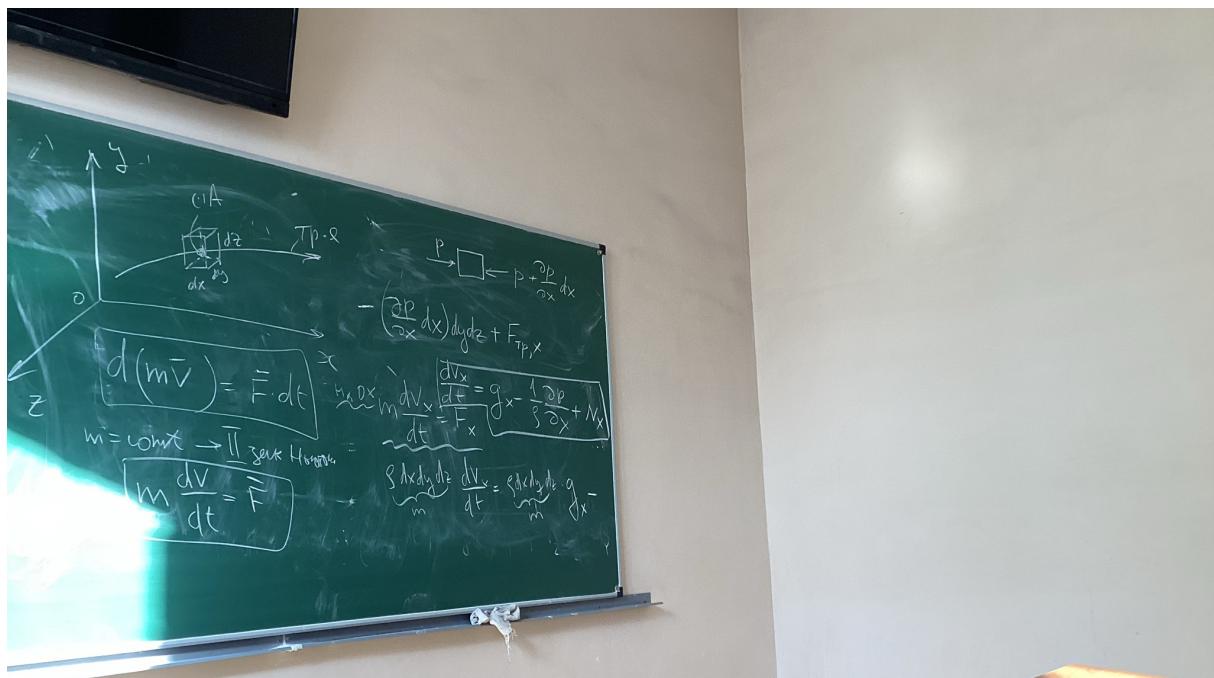
$$x, y, z = f_i(t)$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x$$

$$\cancel{m \frac{d\vec{v} \cdot dy dz}{dt} \frac{\partial V_x}{\partial t}} = \cancel{m} \frac{d\vec{v} \cdot dy dz}{dt} \cdot g_x$$

$$- \left( \frac{\partial p}{\partial x} \partial x \right) dy dz + F_{mp, x}$$

$$\text{Ho } \text{ erg } x: m \frac{dV_x}{dt} = g_x - \frac{1}{S} \frac{\partial p}{\partial x} + N_x$$



$$\frac{dV_x}{dt} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + N_x \text{ - гидрорежим}$$

В направлении оси x:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{V_x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{V_y} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = g_x \cdot \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + N_x \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = g_y + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} + N_y \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + \dots = \dots + N_z \end{array} \right.$$

Это уравнения Навье-Стокса для вязкой жидкости в случае трёхмерного течения и не установившегося потока

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + N_x \\ \frac{dV_x}{dt} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + N_x \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = g_y + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} + N_y \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + \dots = \dots + N_z \end{array} \right. \end{aligned}$$

Навье-Стокса

Частные случаи:

а) идеальная жидкость (это невязкая жидкость трение=0 Nx=Ny=Nz=0 )

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dV_y}{dt} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dV_z}{dt} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad \text{Уравнения Эйлера}$$

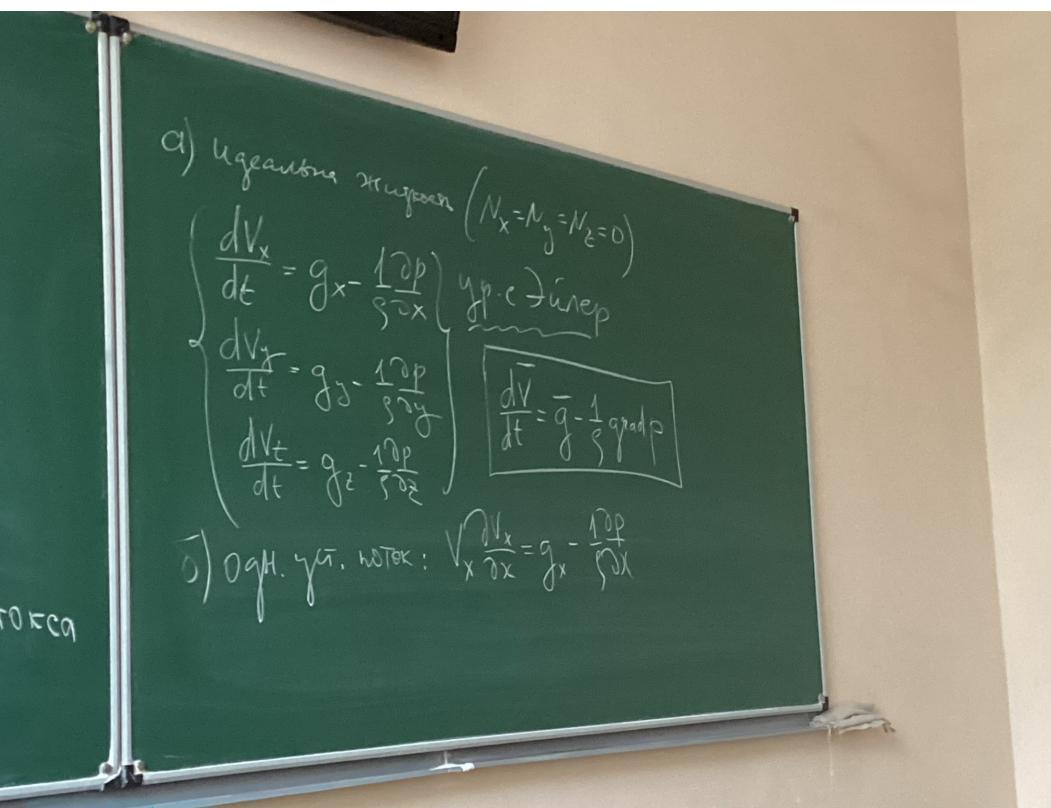
или

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

б) Одномерный установившийся поток

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Замечание: Ввиду сложности решения системы в частных производных. На практике часто переходят к интегралам уравнения движения.



## Уравнения Бернулли (интегральная запись уравнения движения)

- Поступательное движение вместе с центром масс
- Вращательное относительно центра массы
- Деформирование в процессе движения

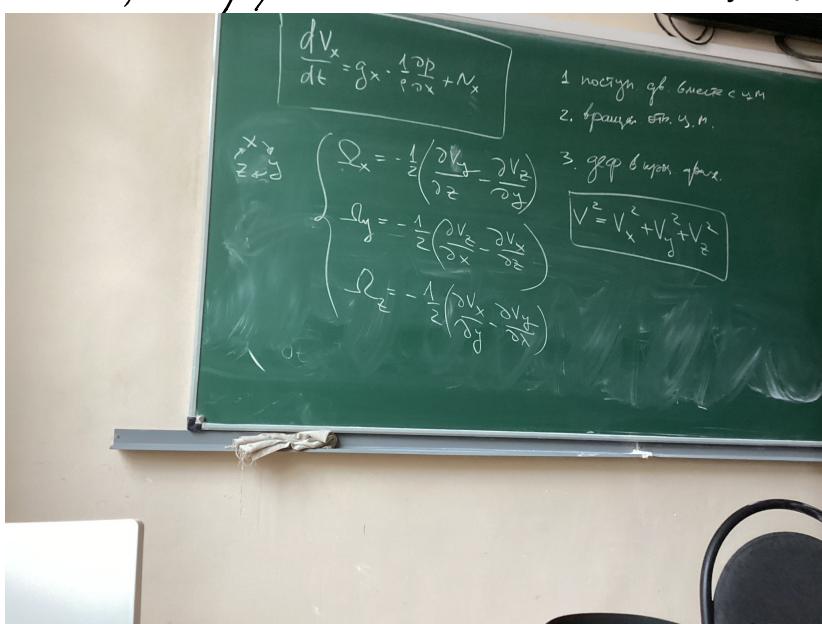
Формы связи вращательного и поступательного движения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_x = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\ \Omega_y = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \Omega_z = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

Связь вращательной скорости с поступательной

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  —

Угловые скорости вращения жидкости вокруг соответствующих осей



$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \leftarrow$$

Дифференцируем это уравнение по x:

Преобразуем уравнение Эйлера (без трения) заменяя скорость поступательного движения через вращательное, умножаем построчно на dx, dy, dz. И сложим уравнения Эйлера заменив частные производные полными дифференциалами. Тогда получим уравнение  $\textcircled{1}$

$$\textcircled{*} \quad \frac{1}{2} dV^2 - 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \mathcal{L}_x & \mathcal{L}_y & \mathcal{L}_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = g_x dx + g_y dy + g_z dz -$$

$$- \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} dt$$

Заменили полным дифференциалом поступательное через вращательное

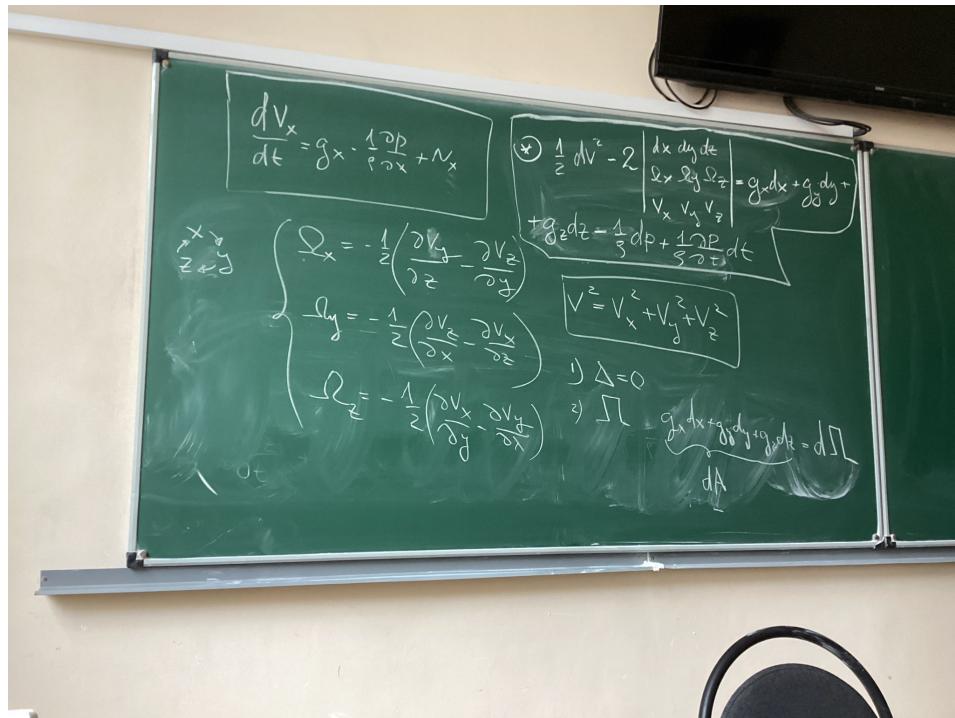
Введём некоторые допущения чтобы проинтегрировать:

1) определитель = 0

2) положим что массовые силы потенциальны, то есть имеют потенциальную функцию  $\rho$ .

Тогда их сумма

$$\underbrace{g_x dx + g_y dy + g_z dz}_{\text{d } A \text{ (элементарных} \atop \text{работ)}} = d\Pi$$



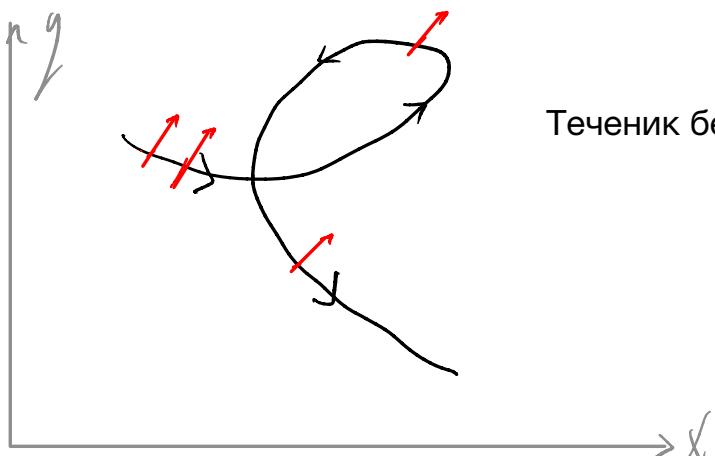
Интегрируем \*

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dp - \int \frac{dp}{dt} dt - \Pi = C(t)$$

<sup>константа</sup>  
-уравнение Бернулли  
для неустановившегося  
течения идеальной  
сжимаемой жидкости

Когда определитель =0, то есть когда мы можем применять этот интеграл:

a)  $\mathcal{R}_x = \mathcal{R}_y = \mathcal{R}_z = 0 \quad (\bar{\mathcal{R}} = 0)$  Это случай безвихревого потока

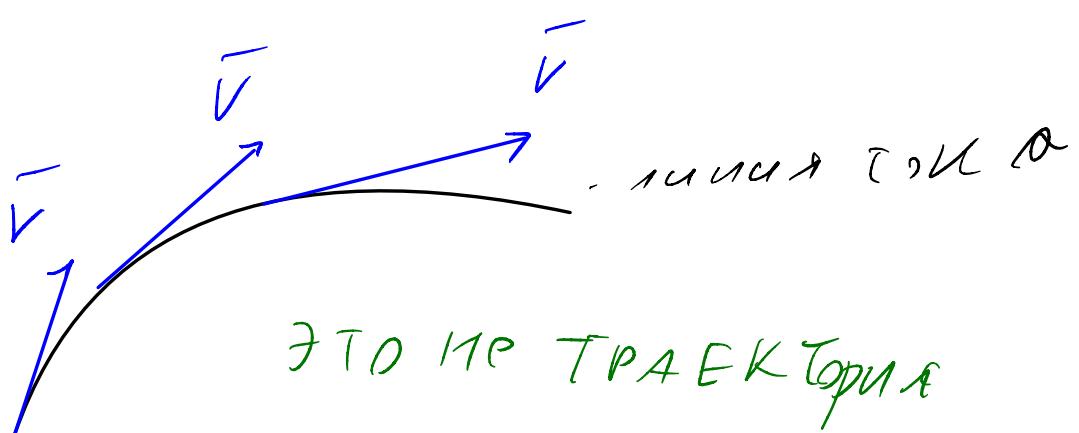


Теченик безвихревое, а складываются 2 движения

б) Определитель равен 0 когда строки пропорциональны

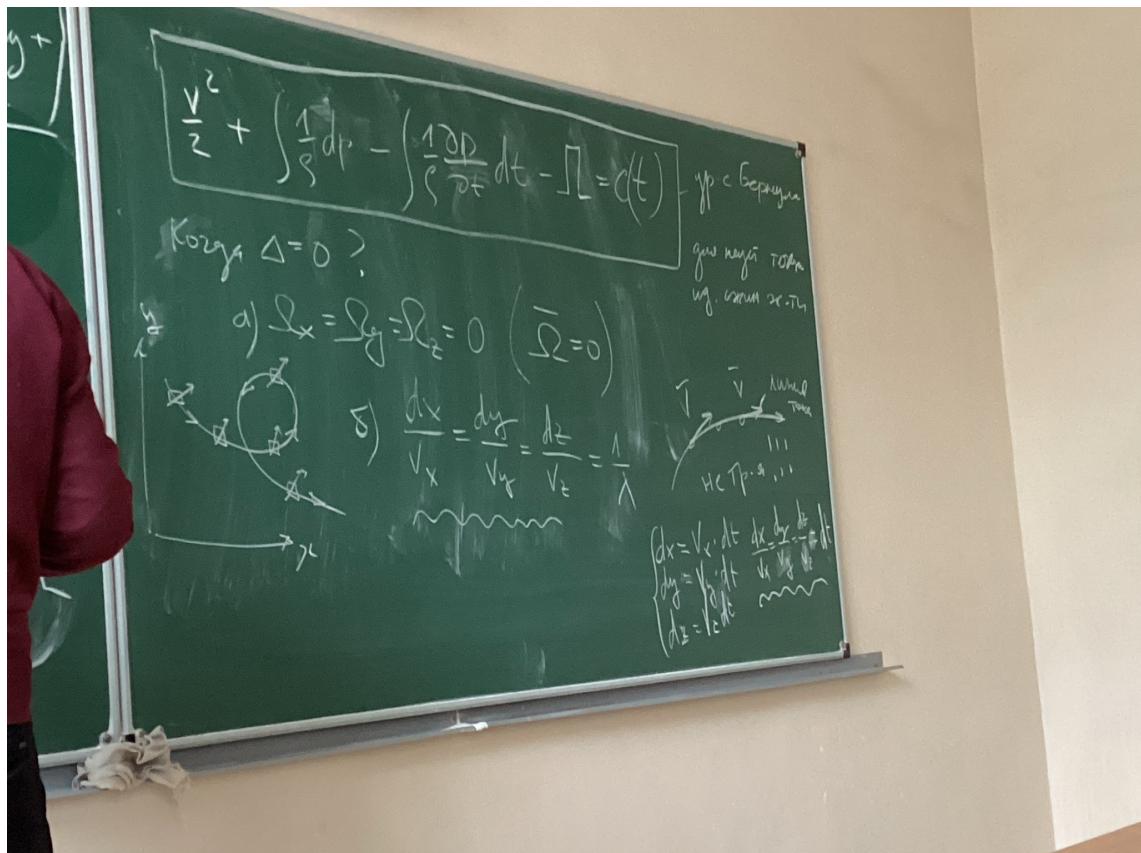
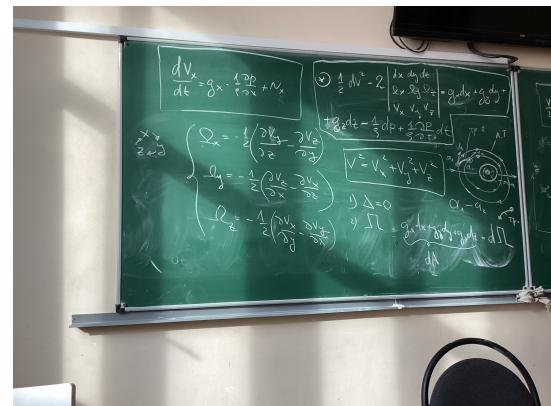
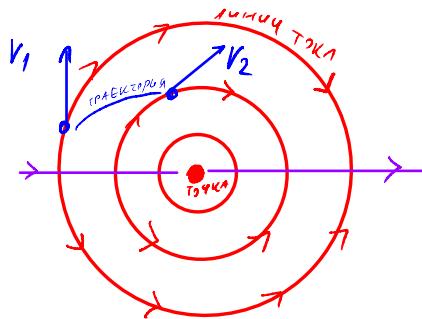
$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \frac{1}{x} \text{ - независим от } t$$

Условие б выполняется на линии тока. Линия тока - это гмт (геометрическое место точек) потока жидкости в данный момент времени, для которого справедливо следующее условие: вектор скорости потока в любой точке касателен к данной линии тока.



$$\begin{cases} dx = V_x dt \\ dy = V_y dt \\ dz = V_z dt \end{cases} \quad \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = dt \quad \text{значит от } t$$

Отличие траектории от линии тока. В траекторию в явной виде входит время и в разные моменты времени будут другие линии



Это в случае неустановившегося течения. В случае установившегося линия тока и траектории совпадают

в) Вихревая линия

Вектор  $\rho$  - касательный в каждой точке  $\frac{dx}{\rho_x} = \frac{dy}{\rho_y} = \frac{dz}{\rho_z}$

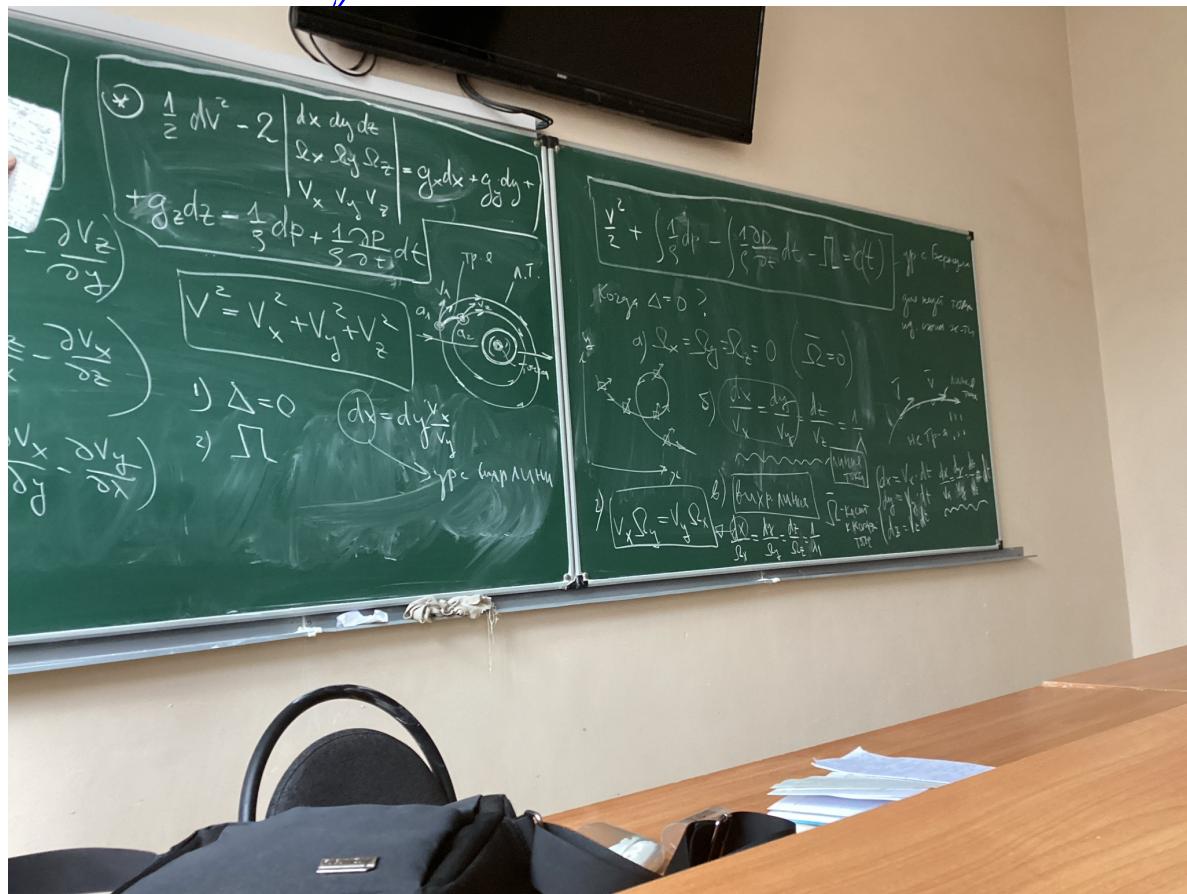
г) уравнение справедливо когда вихревая линия и линия тока совпадают:  
Условия:

$$V_x \rho_y = V_y \rho_x$$

$$\frac{dx}{\rho_x} = \frac{dy}{\rho_y} = \frac{dz}{\rho_z} = \frac{1}{\rho_1}$$

-уравнение для вихревой линии

$$dx = dy \frac{V_x}{V_y}$$



Частные случаи уравнения Бернулли:

1. Установившийся поток

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - \Pi = \text{const}$$

2. Массовыми силами можно пренебречь  $\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - \Pi = \text{const} \quad \Pi = 0$

Если:  $\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}$

- Воздух в рабочей части аэродинамической трубы.
- движение газа по сверхзвуковой части сопла, а также в реактивной струе газа и стекающей из сопла
- Движение газа в канале ствола.

3. баротропный поток - это поток в котором давление и плотность связаны одной функцией и от температуры не зависят и тогда уравнение примет вид:

$$\frac{V^2}{2} + f(p) = \text{const}$$

4. Поток несжимаемый  $\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{const}$

Это уравнение можно использовать для измерения скорости трубками Пито.



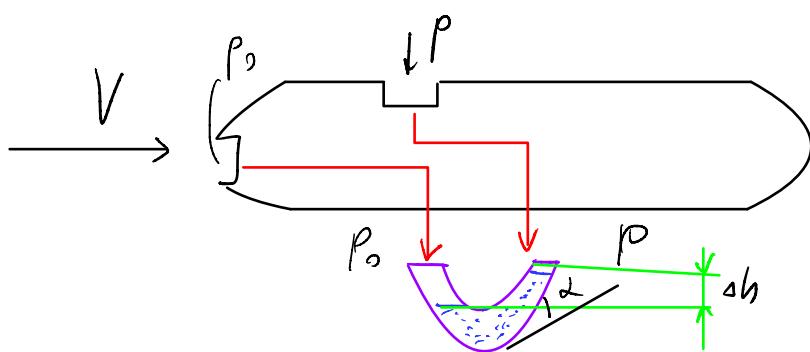
11 марта  
Лекция 5

На след лекции на 2 половине рк. 3 вопроса например "основные уравнения вывод", письменно. Система координат и углов. Конспектами пользоваться нельзя.

$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho}$  - г1я несжимаемой жидкости  
 $P_0$  - давление торнотомии.

Часто используется для измерения скорости потока в несжимаемом дозвуковом потоке

**Трубка Пито-Прандля** используется для измерения скорости потока



$$P - P_0 = K \cdot f \cdot \sin \beta \cdot \Delta h$$

$$P - P_0 \sim K \cdot \Delta h$$

*К - постоянная  
вспомогательная*

$$V = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{S}}$$

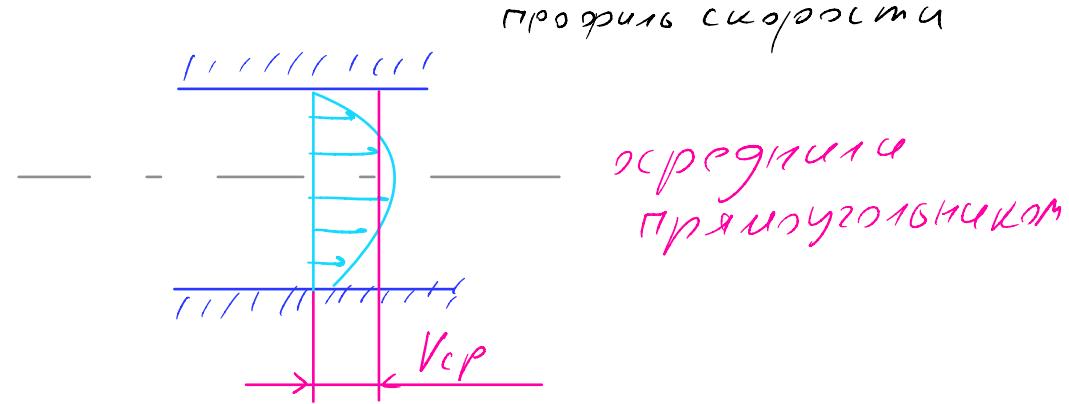
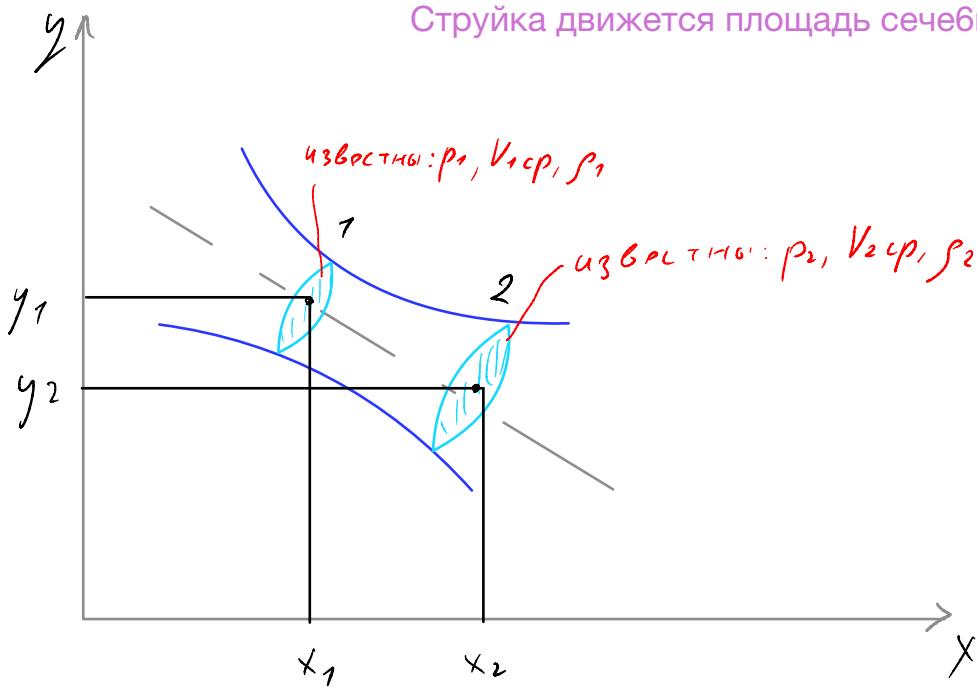
*"2" в K*

$$V = \sqrt{\frac{K \cdot \Delta h}{S}}$$

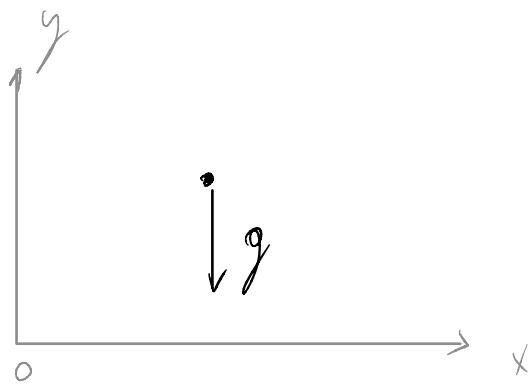
13

Уравнение движения для вязких несжимаемых жидкостях (основное уравнение гидроаэродинамики)

Струйка движется площадь сечения меняется



$$V_{cp} = \frac{Q}{S}$$



$$d\Pi = g_x dx + g_y dy + g_z dz - \text{однозначный член}$$

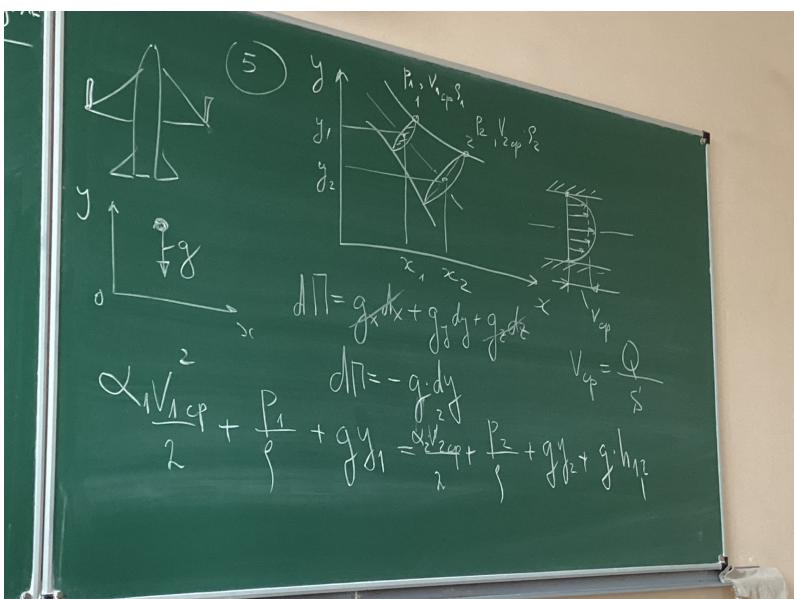
$$\text{Если учитываемо } g: d\Pi = -g dy$$

В результате получим:

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gy_1 = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gy_2 + gh_{12}$$

$h_{12}$  – Потери при движении жидкости от сечения 1 до сечения 2

$\alpha_1 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$  – Учитывают режим течения в сечениях 1 и 2



тут симметрия

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho} + y_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho} + y_2 + h_{12}$$

Основное уравнение гидроаэродинамики

$$\alpha_{\Lambda M} = 2$$

$$\alpha_{TYP} = 1,045$$

$h_{1,2}$  — потери на трение

$$h_{1,2} = \lambda \frac{L}{d} \frac{V_{cp}^2}{2g}$$

$\lambda$  — Безразмерный коэффициент потерь

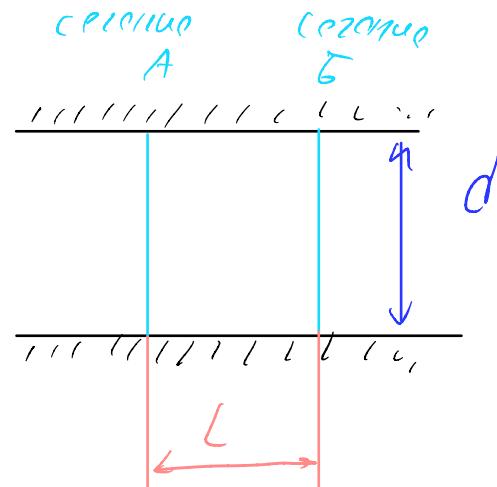
$h_{1,2}$  — Потери на сопротивление прямых и фасонных участков трубопровода

$$h_{1,2} = \xi_m \frac{V_{cp}^2}{2g}$$

$\xi_m$  — коэффициент потерь на сопротивления

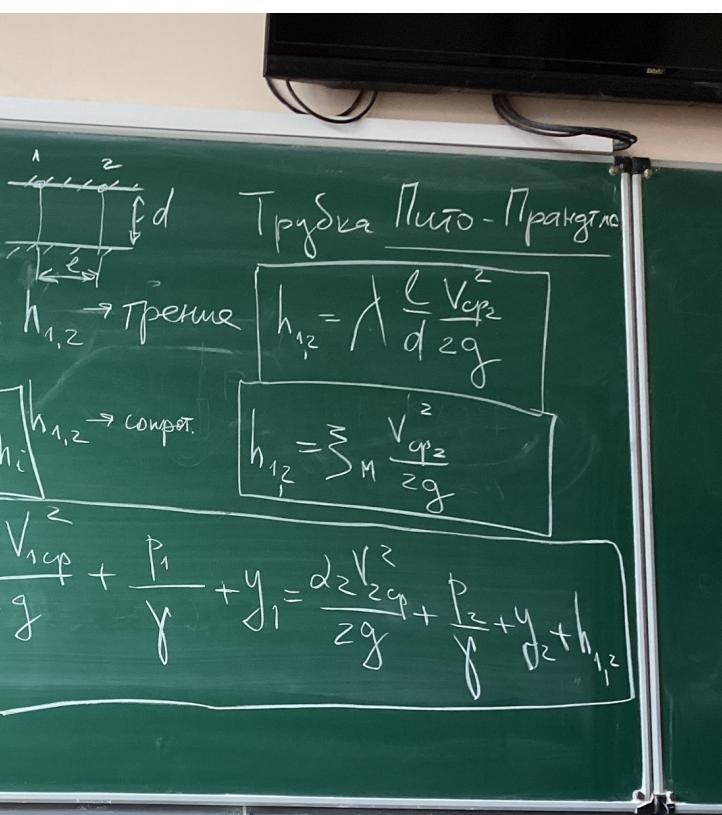
И Дельчик справочник по гидросопротивлениям прямых и фасонных участков трубопроводов ( $\xi_m$ ,  $h$ )

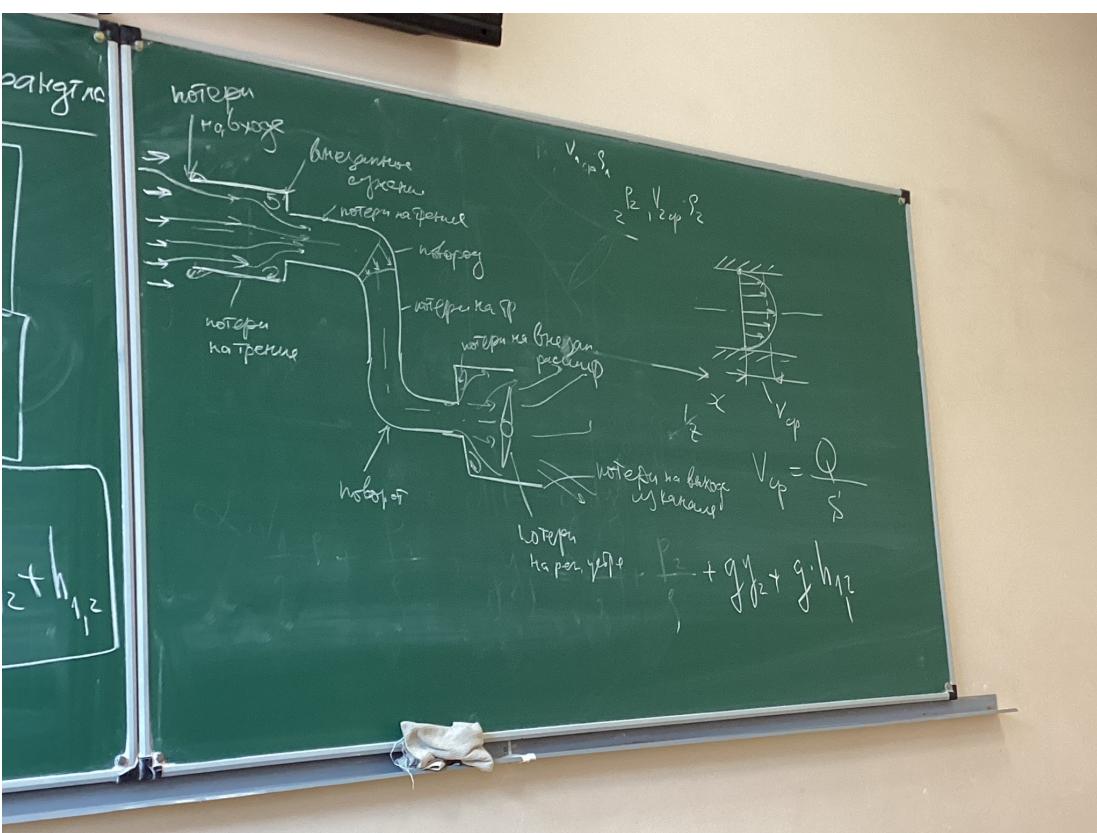
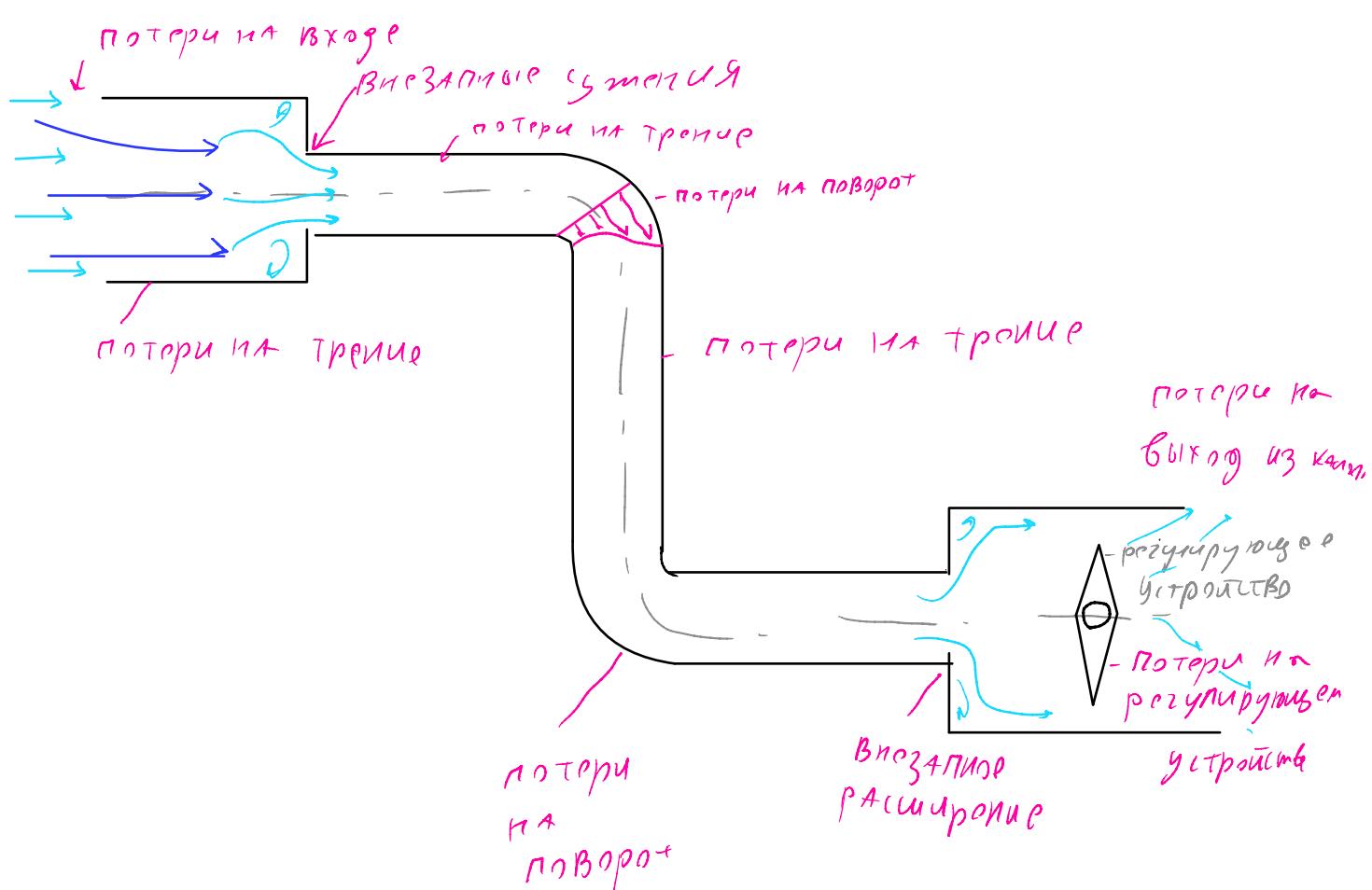
$$h_{1,2} = \sum_{i=1}^n h_i$$



$d$

$h$



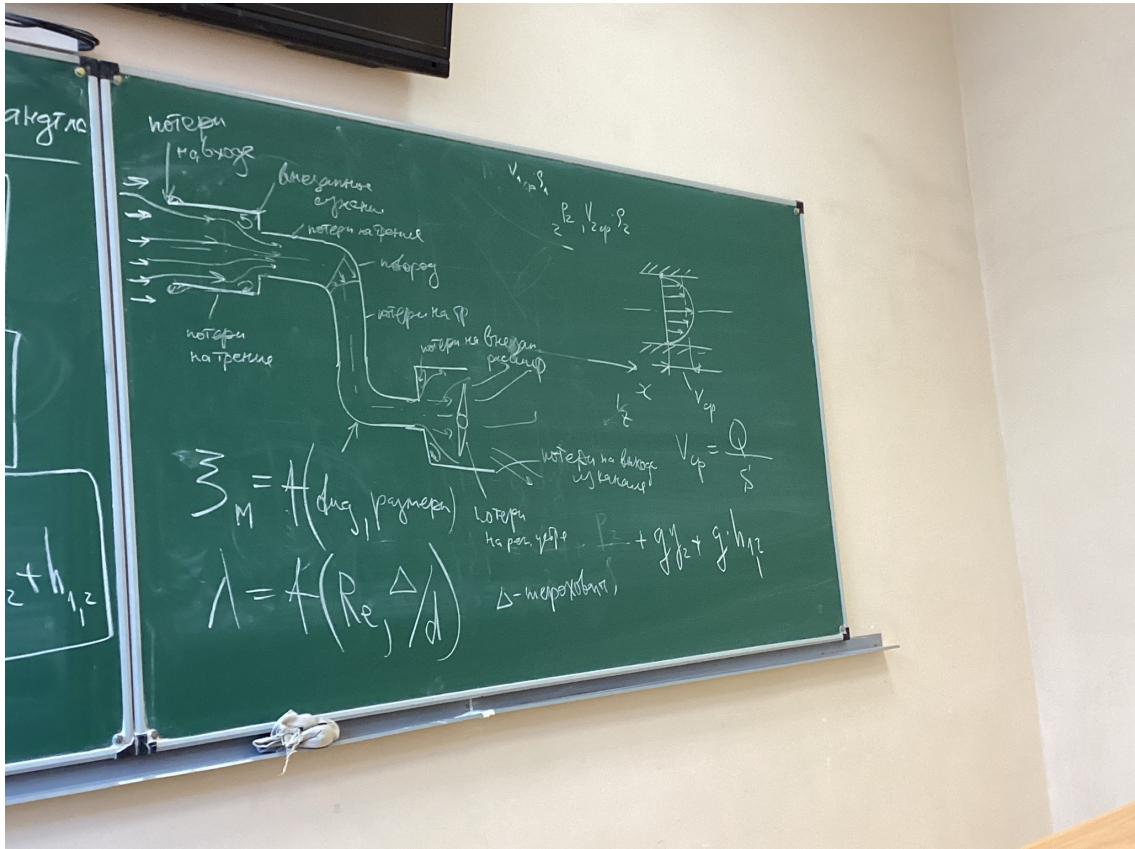


Принцип суперпозиции может применяться если расстояние между ближайшими сопротивлениями  $5-6 \text{ L/d}$  калибр. Если Это расстояние меньше, то потери на поворот начинаются влиять.

$$y_M = f(v_{\text{air}}, \text{разм})$$

реж. устройства, визуальное расширение и т.д.

$$\lambda = f(R_e, \Delta/d) \quad \Delta - \text{шероховатость}$$



## 52 Уравнение энергии

В изолированной системе полный запас энергии не изменяется. При этом один вид энергии может переходить в другой.

Частный случай уравнения. Первый закон термодинамики.

$$dq = dU + dL$$

q - количество подводимого извне тепла

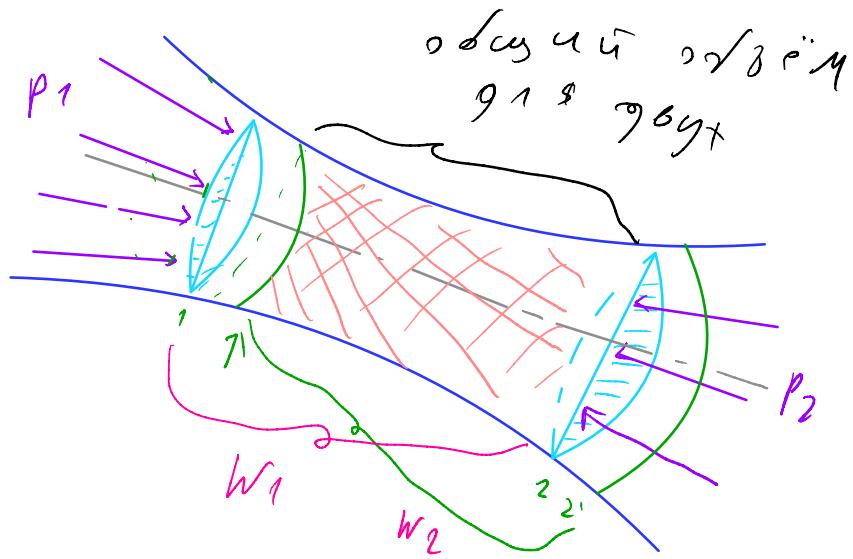
U - внутренняя энергия

L - вся работа совершающаяся телом

$$dL = dL_{\text{технология}} + dL_{\text{трения}}$$

Правило знаков dq положительны, если тепло подводится  
положительны dL если газ расширяется

Рассмотрим Баланс энергии



Изменение энергии в общем объеме не учитываем, тогда изменение энергии определяется разностью энергии в двух бесконечно малых объемах

1. Для единичной массы за единичное время  $dt$  изменение кинетической энергии будет равняться

$$dE_k = d\left(\frac{V^2}{2}\right) \text{ если единица массы}$$

$m \cdot \frac{dV}{dt} = m$

2. Внутренняя энергия  $dU = C_v \cdot dT$

$C_v$  - это теплоемкость при  $V = \text{const}$

$$R = C_p - C_v$$

уравнение Майера

3. Потенциальная энергия (без учета знака)  $d\Pi = g \cdot \Delta y$

4. Работа сил давления  $dL_{\text{грун}} = d(p \cdot W) = d(RT)$

здесь  $W$  - объем

5. Во время движения к стройке может подводится или отводиться внешнее тепло

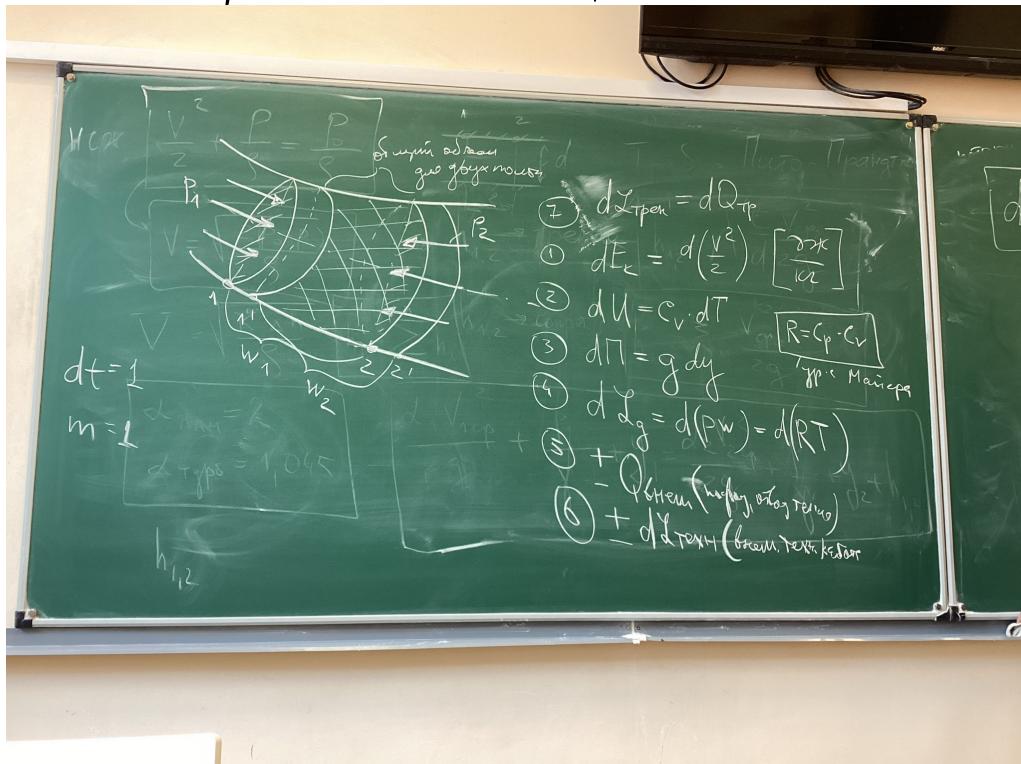
$\pm Q_{\text{внеш}}$  - это внешнее тепло

6. Может совершаться положительная и отрицательная внешняя техническая работа

$$\pm dL_{\text{техн}}$$

7. Внутренняя работа - работа сил трения

$$dL_{\text{трех}} = dQ_{\text{тр}}$$



Баланс: расход энергии должен быть равен её приходу

1.20

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) + d(C_v T) + dPi + d(RT) + dQ_{\text{внешн}} + dL_{\text{техн}} + dL_{\text{тр}} = dQ_{\text{внешн}} + \text{пог. вог. приход}$$

расход внешн техн тр

$$+ dL_{\text{техн}} + dQ_{\text{тр}} \text{ приход}$$

интегрируем

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + C_v(T_2 - T_1) + g(y_2 - y_1) + R(T_2 - T_1) + Q_{\text{внешн}} + L_{\text{техн}} + L_{\text{тр}} = \text{расход} + \text{т. техн}$$

$$+ L_{\text{тр}} = Q_{\text{внешн}} + L_{\text{техн}} + Q_{\text{тр}}$$

расход техн тр

$$\frac{V^2}{2} + C_p T \pm L_{\text{техн}} + Q_{\text{внешн}} = \text{const}$$

Сумма полной энергии, работы и тепла, подведенных или отведенных от газа величина постоянная.

Частные случаи:

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + C_V(T_2 - T_1) + \dot{Q}(V_2 - V_1) + \dot{R}(T_2 - T_1) + \dot{Q}_{внешн} + \dot{Q}_{техн} + \dot{Q}_{изл} = 0$$
$$\dot{Q}_{внешн} + \dot{Q}_{техн} + \dot{Q}_{изл} = C_p(T_2 - T_1)$$
$$\boxed{\frac{V_2^2}{2} + C_p T_2 + \dot{Q}_{техн} = \dot{Q}_{внешн} = const}$$

работа тепло