





Вязкость - св-во вяз-ва противодействовать действию напряжений, касательных к внешней пов-ти. Или противодействие движению одного слоя относительно другого.

$\eta$  - динамическая вязкость

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$  - кинематич. вязкость

Если рассматриваем влияние вязкости на поток - среда вязкая.

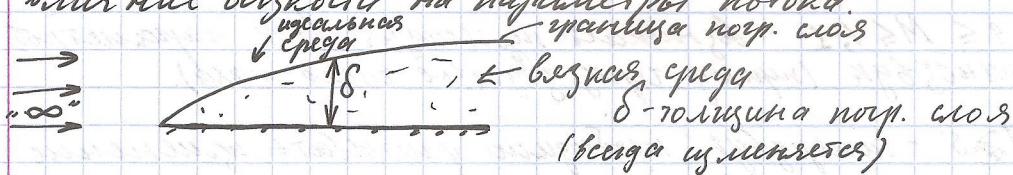
В данном случае возникают силы вязкого трения.

Среда, в кот. не учитывается вязкость - идеальная

Понятия среды идеальной и вязкой, практически, دهند ординарности на 2 области.

В инженерной практике влияние вязкости определяется в рамках так называемого пограничного слоя

Погранич. слой мы хар-им как пристеночный слой жидкости или газа, в котором проявляется влияние вязкости на параметры потока.



Сначала решается вопрос об идеальной модели течения и рассчитанные параметры являются параметрами на границе погр. слоя, т.е. Н.У. для решения вязкой модели потока.

Вязкой модели течения существует 2 типа течения:

- ламинарное
- турбулентное



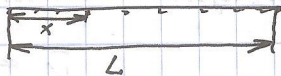
Ламинарный поток - слоистое течение, где отсутствует взаимодействие слоев потока и их преобразование.

Турбулентный поток - слоистое течение с мощными вихреобразованиями, которые постоянно то создаются, то разрушаются с весьма значительным взаимодействием слоев потока, которое выражается в виде переноса кол-ва движения, кинетич. энергии, тепловой энергии. В этом потоке создаются дополнительные турбулентные напряжения, благодаря которым силы вязкого трения существенно возрастают.

В то время, как ламинарное течение описывается либо ур-ми аналитически, расчет турбулентного потока весьма сложен, не поддается аналит. решению, необходимо вводить эмпир. зависимости, кот. выт-ся в виде мод. турбулентности.

Главным критерием вязкой среды является число Рейнольдса -  $Re$ .

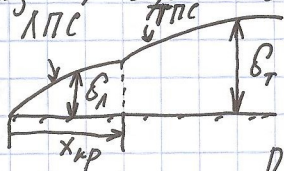
$$Re = \frac{\rho V x}{\mu}$$



$$Re_x = \frac{\rho V x}{\mu} - \text{местное число Рейнольдса.}$$

Ламинарный поток перестраивается в турбулентный мгновенно.

Значение  $X$ , при котором происходит перестройка, наз-ся критическим:  $X = X_{кр}$ .



$$Re_{кр} = \frac{\rho V X_{кр}}{\mu}$$

$$Re_x < Re_{кр} - \text{лам. поток}$$

$$Re_x > Re_{кр} - \text{турб. поток.}$$

$Re_{кр}$  в задачах всегда задается. Оно имеет разные значения при возмущ. и сверхзвуковых течениях.

Существуют различные типы погр. слоев, название кот. определяется их параметрами, значение кот. внутри погр. слоя явл. определяющим при расчете вязкого потока.



Динамический погр. слой - главный фактор - энтропия скорости  $V_x(y)$ . На этой энтропии лежит основная тяжесть расчета потока.

Тепловой пограничный слой - м. фактор - энтропия температур внутри погр. слоя (по его толщине)

Сплошная среда. Гипотеза сплошности.

Плотность лежит в определенных пределах, и для ее учета применим весь мат. аппарат.

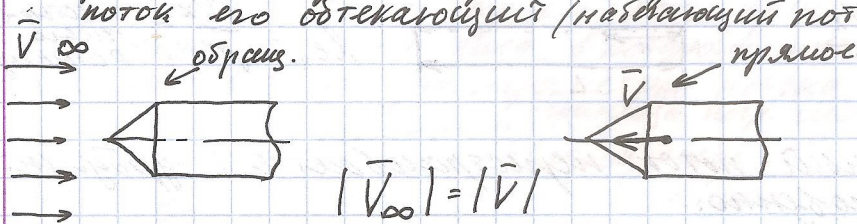
Разреж. среда - большие высоты полета, молек. строение сильно отличается от сплошной среды.

Число Кнудсена -  $Kn$  (длина среды на сплош. и разреж.)

Принцип обратного движения.

Существуют понятия о 2-х движениях:

- прямое, хар-из движ. аппарата и мед. средой; это динамика полета
- обратное, где аппарат неподвижен, и создается поток его обтекающий (набегающий поток)





Прямое движение - по пов. сферы и пов. метат. аппарата.

19.02.15  
Лекция 2.

Идентичность прям. и обратн. движений определяется множеством атродинамич. критериев, кот. характеризуют данную модель течения.

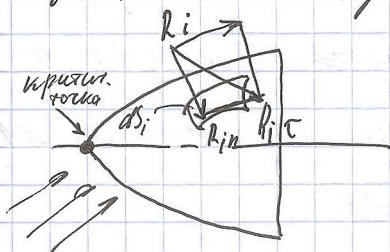
Поверхностные силы.

- силы, кот. характеризуют силовое воздействие среды на поверхность метатемного аппарата. Они характеризуются нормальными и касательными направлениями.

Силы могут быть представлены в виде разложения нормальных и касательных сил, дейст. на данную площадку

$R_i$  - сумм. сила, дейст. на площадку  $dS_i$

$$\vec{R}_i = \vec{R}_{in} + \vec{R}_{it}$$



Сумм. атродинам. силы непрерывно распределены по пов-ти тела

$\vec{R}$  - главный в-р атродинам. сил - результирующая сила. Точка приложения  $\vec{R}$  - центр давления.

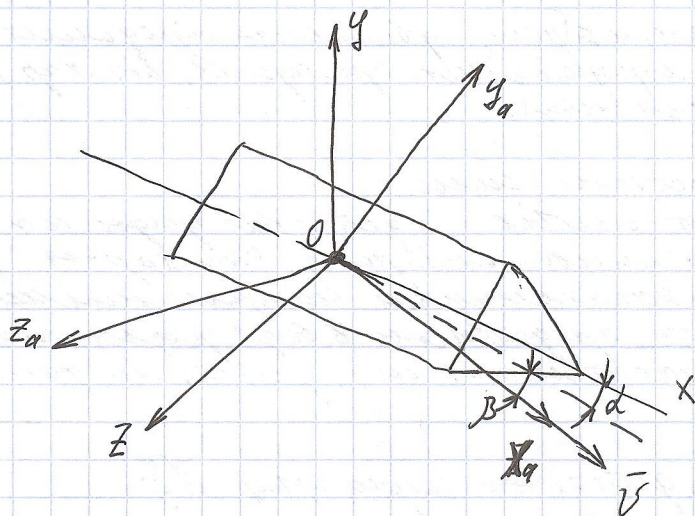
$\vec{M}$  - сумм. в-р атродинамич. давлений (в ц.м.  $= 0$ )  
Моменты обычно берут от центр. критич. точки

Проще искать не результирующую атр. силу и, соотв., сумм. момент, а искать их проекции на координатные оси

Система координат.

Возьмем 2 СК. Они явл. ортогональными: скоростная и связанная системы координат.





Рассм. прямое движение со скоростью  $\vec{V}$  с ц.м. О.

Скоростная СК связана непосред. с движением ЛА или с его обтеканием:  $X_a, Y_a, Z_a$

$Ox_a$  направлена вдоль б-ри  $\vec{V}$  ЛА

$Oy_a$  направлена вверх,  $\perp Ox_a$

$Oz_a$  определяет правую СК

В поточной СК  $Ox_a$  направлена не по скорости движ. ЛА, а по скорости набегающего потока.

Проекции сил имеют след. названия:

$X_a$  - сила лобового сопротивления

$Y_a$  - подъемная сила (считается ТОЛЬКО в скоростной или поточной !!!)

$Z_a$  - боковая сила

$x, y, z$  - связанная СК (связана с ЛА)

$Ox$  - вдоль оси симметрии ЛА

$Oy$  - в м-ти симметрии вертикально вверх,  $\perp Ox$

$Oz$  - правая СК

Проекции сил:

$X$  - продольная сила

$Y$  - нормальная сила

$Z$  - поперечная сила

Моменты:

$M_x$  - момент крена

$M_y$  - момент рысканья

$M_z$  - продольный (или тангама) момент



Для того, чтобы сорентировать ЛА бир-ве раскл.  
множество углов. Главные:  $\alpha$ -угол атаки  
 $\beta$ -угол скольжения

Пунктир-проекция  $\vec{v}$  на  $xOy$  связанной СК.  
 $\alpha$ -угол между проекцией  $\vec{v}$  на  $ml$ -ть  $xOy$  связан-  
ной СК и осью  $Ox$ .

$\beta$ -угол между вектором  $\vec{v}$  и плоскостного  $xOy$   
связанной СК.

Общее выражение для аэродинамической  
силы.

$$R = f(d, V, S, \rho, \alpha, \beta)$$

Параметры потока вязкость, плотность, скорость и т.д.  
хар-ют модель течения (совокупность...).

Для быстроты берем, что  $\alpha=0$  и  $\beta=0$

Напишем размерности всех величин:

$$R = \left[ \frac{\text{н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \right], d = [\text{м}], V = \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right], S = \left[ \frac{\text{м}^2}{\text{м}^2} \right], \rho = \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right], \alpha = \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$$

Если мы изменим единицы измерения соотв.  $l, \tau, m$   
то соответствующие величины изменятся в соотв. с  
их размерностью.

Тогда:

$$R' = f(d', V', S', \rho', \alpha')$$

$$R \frac{m \cdot l}{\tau^2} = f(d \cdot l, V \frac{l}{\tau}, S \frac{m}{l^2}, \rho \frac{m}{l^3}, \alpha \frac{m}{\tau})$$

Т.к.  $l, m, \tau$  - произвольные величины, для их опре-  
деления можно принять:

$$d \cdot l = 1; V \frac{l}{\tau} = 1; S \frac{m}{l^2} = 1 \quad \text{отсюда определим } l, \tau, m$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$l = \frac{1}{d} \quad \tau = \frac{V}{d} \quad m = \frac{1}{S \cdot d^3}$$



Теперь найдем, как уменьшатся значительные силы, вязкости и ск. вязкост

$$\frac{m\ell}{\tau^2} = \frac{1}{d^3 \cdot g} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{d^2}{V^2} = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{1}{d^2}$$

$$\frac{m}{\ell\tau} = \frac{1}{d^3 \cdot g} \cdot \frac{d}{1} \cdot \frac{d}{V} = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{1}{d} \quad ; \quad R_c = \frac{gVd}{\eta}$$

$$\frac{\ell}{\tau} = \frac{1}{d} \cdot \frac{d}{V} = \frac{1}{V} \quad ; \quad \left( \frac{g}{V} = \frac{1}{M} \right)$$

Введем величины:  $q = \frac{gV^2}{2}$  — скоростной напор

$S_x = \frac{\pi d^2}{4}$  — характерная площадь

$$R = f_{C_R}(1, 1, 1, R_c, M, \alpha, \beta) \cdot q \cdot S_x$$

Функциональный коэф-т пропорциональности и — зависит от всех величин в скобках

В данном случае  $C_R$  — коэф-т аэродинамической силы и хвл. аэродинам. хар-ой (бездразмерный)

Видно, что коэф-т аэродинам. силы зависит от аэрод. критериев, т.е. от принятой модели течения. Чем более полная модель течения, кот. хар-ет движение летат. ап-та по траектории, т.е., тем больше аэрод. критериев мы будем учитывать, хар-ая идентичность условий движения по траектории и условия расчета, тем точнее будут расчеты.

Тогда, учитывая, что мы имеем дело с проекцией аэродинам. силы на оси координат, можно записать

$$X = C_x q_{\infty} S_x$$

$$X_a = C_{x_a} q_{\infty} S_x$$

$C_{x_a}$  — коэф-т лобового сопротивления

$$Y = C_y q_{\infty} S_x$$

$$Y_a = C_{y_a} q_{\infty} S_x$$

$C_{y_a}$  — коэф-т поперечной силы



То же самое относится и к аэродинамич. моменту

коэф. момента

$$M_x = m_x \cdot q_\infty \cdot S_x \cdot L$$

обычно, длина тела (характерный размер)  
норм. набег. поток.

$$M_y = m_y \cdot q_\infty \cdot S_x \cdot L$$

$$M_z = m_z \cdot q_\infty \cdot S_x \cdot L - \text{момент тангенса (продольный)}$$

Определение аэродинамич. хар-к (силовых и моментных) при известном распределении касательных и нормальных напряжений.

Св-ва давления в идеальной среде.

Среда, в кот. нет влияния <sup>сил</sup> вязкого трения - идеальная.

Среда, где учитывается влияние трения - вязкая.

В аэродинамике не принято рассматривать влияние нормальных напряжений. Вводится величина, кот. наз-ся давлением -  $p = \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)$

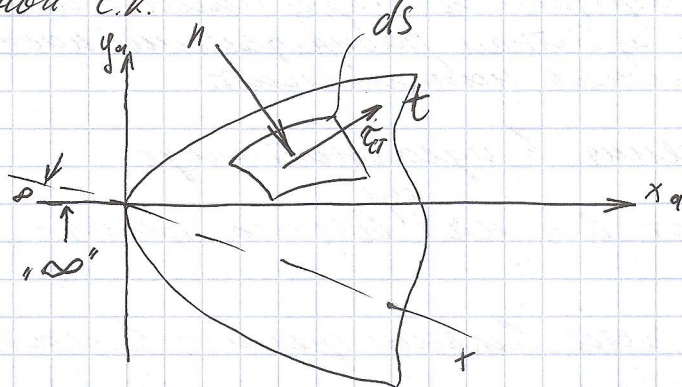
В общем виде давление - векторная величина. Давление всегда и везде направлено по внутренней нормали к поверхности (в любой точке потока) - "определяет то, что норм. напряжения, кот. имеют "+", направлены на растяжение, а давл. всегда нап- по внутренней нормали



26.02.15 В вязкой среде действует не только давление, но и касательное напряжение

Например,  $\tau_{xz}$ , где  $i^{\text{й}}$  индекс определяет нормаль к плоскости, на кот. действует напрет,  $z^{\text{й}}$  опред. ось, на кот. производится напряжение.

Рассмотрим тело произвольной формы в потоковой с.к.



В аэродинамике принято использовать не абс. знач. давления, а значения по отношению к статическ. давлению набегающего потока  $p_\infty$

В потоковой с.к. действует сила лобового сопротивления  $X_a$  и продольная сила  $Y_a$

$$dX_a = [(p - p_\infty) \cos(n^1 x_a) + \tau_{st} \cos(t^1 x_a)] ds$$

$$dY_a = [-(p - p_\infty) \cos(n^1 y_a) + \tau_{st} \cos(t^1 y_a)] ds$$

Введем следующие величины:

$$\bar{p} - \text{коэффициент давления} = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}, \text{ где } q_\infty - \text{величина квадратного потока}$$

$$C_{tx} = \frac{\tau_{st}}{q_\infty} - \text{местный коэф-т трения}$$

$$q_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}$$



$$X_a = \int_S [\bar{p} \cos(n^1 x_a) + C_{fx} \cos(t^1 x_a)] d\bar{S} \cdot q_\infty \cdot S_x, \text{ где } d\bar{S} = \frac{dS}{S_x}$$

$$Y_a = \int_S [-\bar{p} \cos(n^1 y_a) + C_{fx} \cos(t^1 y_a)] d\bar{S} \cdot q_\infty \cdot S_x$$

Выше получили  $X_a = C_{xa} \cdot q_\infty \cdot S_x$ ,  $Y_a = C_{ya} \cdot q_\infty \cdot S_x$ .  
Тогда коэффициент продольного момента будет равен:

$$C_{xa} = \int_S [\bar{p} \cos(n^1 x_a) + C_{fx} \cos(t^1 x_a)] d\bar{S}$$

$$C_{ya} = \int_S [-\bar{p} \cos(n^1 y_a) + C_{fx} \cos(t^1 y_a)] d\bar{S}$$

Найдем выражение для продольного момента (тангажа), действующего на ЛА.

$$dM_z = \{ [(p - p_\infty) \cos(n^1 y_a) - \tau_{cx} \cos(t^1 y_a)] x_a + [(p - p_\infty) \cdot \cos(n^1 x_a) + \tau_{cx} \cos(t^1 x_a)] y_a \} dS$$

$$M_z = \int_S \{ \bar{p} \cos(n^1 y_a) - C_{fx} \cos(t^1 y_a) \} \bar{x}_a + \bar{p} \cos(n^1 x_a) + C_{fx} \cos(t^1 x_a) \} \bar{y}_a \} d\bar{S} \cdot q_\infty \cdot S_x \cdot L, \text{ где } d\bar{S} = \frac{dS}{S_x}$$

Ранее мы получили:  $M_z = m_z \cdot q_\infty \cdot L \cdot S_x$

Тогда:

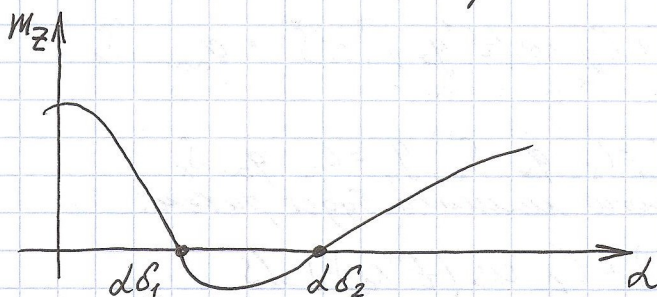
$$m_z = \int_S \{ [\bar{p} \cos(n^1 y_a) - C_{fx} \cos(t^1 y_a)] \bar{x}_a + [\bar{p} \cos(n^1 x_a) + C_{fx} \cos(t^1 x_a)] \bar{y}_a \} d\bar{S} \quad \text{— когда прод. момента.}$$

Как определяется знак продольного момента.

Если момент действует г.о., что возмущение, в частности угол атаки, то знак этого момента «+». Если момент уменьшает — «—», то знак «—».



Устойчивое / неустойчивое равновесие.  
Понятие о статич. и динамич. устойчивости



Балансирующие углы атаки — углы, где суммарный момент, дейст. на тело,  $= 0$ .

Если аппарат под дейст. возмущения стремится вернуться к сост. равновесия, то это устойчивое равновесие.

Если ЛА — все дальше отходит от начального равновесия, то это неустойчивое равновесие.

(прямой случай) Если  $m_z^{\alpha} < 0$  ( $\frac{dm_z}{d\alpha} < 0$ ), то аппарат стат. устойчив.

(обратный случай) Если  $m_z^{\alpha} > 0$ , то ЛА статич. неустойчив.

Динамическая устойчивость.

$m_z^{\alpha}$ ,  $m_z^{\omega_z} + m_z^{\dot{\alpha}}$ , где  $\omega_z$  — угловая скорость колебаний

$c_y^{\alpha}$ ,  $c_y^{\omega_z} + c_y^{\dot{\alpha}}$

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Сумма берется из-за особенностей испытаний методом вынужденных колебаний (метод гармонизации)

$$\alpha = \Theta_{\alpha} \sin \omega t$$



$m_z^{\omega z} + m_z^{\dot{\alpha}} > 0$  - тело динамич. неустойчиво, имеет момент самодемпфирования (возникает при малых  $\alpha$  при отрицательных режимирах)

$m_z^{\omega z} + m_z^{\dot{\alpha}} < 0$  - тело динамич. устойчиво, имеет момент демпфирования (полезен)

## Основы теоретической аэродинамики.

Основных параметров потока 4:

$p$  - давление

$\rho$  - плотность

$\vec{V}$  - скорость

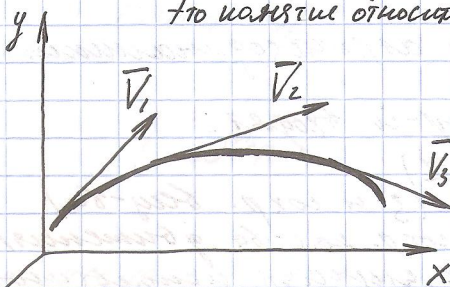
$T$  - температура

$$= f(t, \underbrace{(x, y, z)}_{\text{установившееся пространственное течение}}) - \text{неустановившееся пространственное течение}$$

Линия тока - линия, к каждой точке которой касательная совпадает с  $\vec{V}$ .

Это понятие относится к конкретному времени.

Если с течением времени существует кривая, в каждой точке кот. касат. совпадает с  $\vec{V}$ , то линия называется траекторией. Это понятие вращенное.



Уравнение линии тока:

$$\left\{ \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \right\}$$

$$d\vec{S} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k} ; \vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}$$

$$d\vec{S} \times \vec{V} = 0$$



## Движение жидкой / газовой частицы.

Движение твердой частицы определяется 2-мя составляющими:

- поступательное со скоростью  $\vec{V}$
- вращательное с вектором  $\vec{\omega}$ , отнесенным к мгновенной оси, проходящей через точку, относительно которой тело движ. поступ.

$$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}$$

Жидкая точка движется по 3-м составляющим:

- поступат. движ. со скоростью  $\vec{V}$
- колебат. движ. с  $\vec{\omega}$
- деформационное движение, кот хар-ся линейной деформацией ( $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) и деформацией сжатия ( $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ )

5.03.15

Лекция 4

## Основные уравнения аэрогазодинамики.

В систему основных ур-й входят:

1. Ур-е состояния (законы)
2. Ур-е неразрывности (3-и сохр. велич-ва)
3. Ур-е движения (3-и сохр. кол-ва движения) - в некоторых особо важных случаях используют 3-и сохр. моменты кол-ва движ.
4. Ур-е термич.
5. Различ. деп. соотношения (ЗВ: ур-я, выражающие зависимость турбулентности от данной задачи)

① Ур-е состояния.

Газ, обн. молекулы и-го можно рассматр., по сравн. с жидк.  $V$ , молекулы и-го в атомодиф-вдот упруго, нас-ся в ат-ке совершенн.



Идеальным будем называть газ, когда в модели  $\delta = 0$  мы можем пренебречь силами вязкости. ( $\mu = 0$ ;  $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0$ )

Для задач аэри в большинстве случаев достаточно считать воздух совершенным газом.

Поэтому можем использовать ур-е в форме Менделеева-Клапейрона:

состояние газа:  $p = R_g T$ ;  $R$  - газовая постоянная для конкретного газа.

$$R_{\text{воздуха}} = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

$\kappa_{\text{возд.}} = 1.4$  - показатель адиабаты воздуха

Уравнение Майера:  $R = c_p - c_v$ ;  $c_p = 1002 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  для воздуха  
удельн. теплоемкости  $c_v = \frac{c_p}{\kappa}$

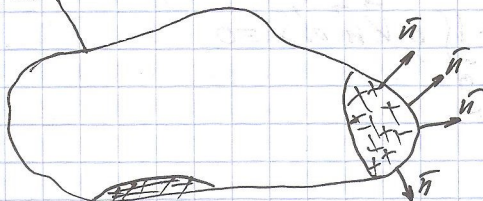
При высоких температурах и началах диссоциации можно использовать другую форму ур-я состояния:

$$p = \frac{R_0}{\mu_{\text{ср}}} \rho T; \quad R_0 = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} - \text{универс. газ. пост.}$$

$\mu_{\text{ср}} \left[ \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right]$

② Будем рассматривать обтекание с постоянной толщиной (контрольный):  $\delta = \text{const}$ .

$\delta = \text{const}$



В обду. аэроэлемент можем рассм. ступенчатую, вязкую, т.е. электропроводящую среду, состоящую из  $n$  различных компонентов.

Доп. упрощения будем оговаривать

Сумма скорости изменения массы газа в контрольном объеме и скорости массового обмена через поверхность  $= 0$



Запишем выражение для  $i$ -й компоненты:

$$\frac{\partial M^i}{\partial t} + \iint_S \rho^i V_n^i dS = 0, \quad \text{где } M^i - \text{масса } i\text{-й компоненты}$$

$$M^i = \iiint_W (\rho^i + \psi^i) dW$$

$\psi^i$  - обобщенная плотность стоков или источников  $i$ -й компоненты

$\psi^i$  описывается соотв. ур-ми диф.-хим. процессов (ур-е испар., хим. реакции...)

$< 0$  - сток,  $0$  - источник

$V_n$  - норм. к пов-ти контр. объема массовых скорости  $i$ -й компоненты

$V_n^i = \vec{V}^i \cdot \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  - в.р. единичной в.н. нормаль к пов-ти

Тогда, считая  $W = \text{const}$

$$M^i = \iiint_W \frac{\partial}{\partial t} (\rho^i + \psi^i) dW + \iint_S \rho^i \vec{V}^i \cdot \vec{n} dS = 0$$

Далее будем рассматривать однородную смесь

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho^i &= \rho \\ \sum_{i=1}^n \psi^i &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \iiint_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW + \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Наиболее требуется ур-е в дифференциальной форме, т.е. для того контр. объема.

Переходим к такой форме.



Для преобр. имепр.-но пов-ти в имепр.-но объему воспользуемся гр-ой Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S (R \cos \alpha + P \cos \beta + Q \cos \gamma) dS = \iiint_W \left( \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dW$$

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \dots + \cos \gamma \vec{j}$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} \iint_S g \vec{V} \vec{n} dS &= \iint_S (g V_x \cos \alpha + g V_y \cos \beta + g V_z \cos \gamma) dS = \\ &= \iiint_W \underbrace{\left( \frac{\partial (g V_x)}{\partial x} + \frac{\partial (g V_y)}{\partial y} + \frac{\partial (g V_z)}{\partial z} \right)}_{\text{дивергенция}} dW = \\ &= \iiint_W \operatorname{div} (g \vec{V}) dW \end{aligned}$$

$$\iiint_W \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div} (g \vec{V}) \right) dW = 0$$

Тогда, в общем случае должно быть нулю подынтегр. выражение.

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div} (g \vec{V}) = 0}$$

В этой форме ур-е справедливо для любых скалярных величинных сред

Используя теорему Гаусса получим:

$$\boxed{\frac{dg}{dt} + g \operatorname{div} (\vec{V}) = 0}$$



## Частные случаи.

1. Установившийся (стационарный) т-е

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0}$$

2.  $M \lesssim 0,3$  (для воздуха) :  $\rho = \text{const}$  (принимается) (максимальная ошибка)

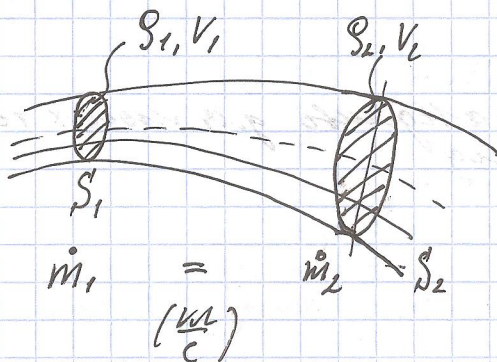
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ; \rho \operatorname{div}(\vec{V}) = 0, \text{ на } \rho \text{ сокращаем} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\vec{V}) = 0} \quad \begin{array}{l} \text{— скорость относительной} \\ \text{— деформации объема жидк-} \\ \text{ной частицы} \end{array}$$

В случае потенциального (безвихревого дви-  
жения) компоненты скорости выраж-ся через  
гр-ю потенциала так:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; \dots ; V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

3. Квазистационарное установившееся течение в  
сужающемся газе



Через поверхность сечения  
нет массообмена

$$\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2 = \text{const}$$

$$\boxed{\rho V S = \text{const}} \quad \text{—}$$

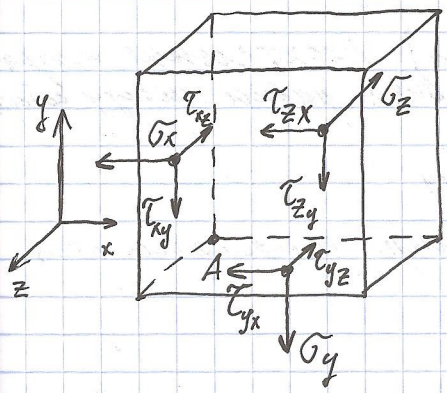
— т-е неравномерности в  
формуле гр-я расхода  
(гр-е расхода)

если  $\rho = \text{const}$ , то  $\boxed{VS = \text{const}}$



Уравнение движения. - мат. выражение 5-го закона сохранения кол-ва движения.

Модель течения: сплошная невязановибивающаяся вязкая среда



$dx, dy, dz$  - грани параллель.

$dW = dx \cdot dy \cdot dz$  - объем элемента

$x \rho dW, y \rho dW, z \rho dW$  - проекции массовых сил на оси координат.

$P_x, P_y, P_z$  - поск. поверхностных атродин. сил.

Тогда движение ниткой /газобранной частицы может быть выражено ур-ми:

$$\frac{dV_x}{dt} \rho dW = x \rho dW + P_x;$$

$$\frac{dV_y}{dt} \rho dW = y \rho dW + P_y;$$

$$\frac{dV_z}{dt} \rho dW = z \rho dW + P_z$$

Поверхностные силы определяются касат. и нормал. напряжениями

На трех гранях с обдесей точкой А знак норм. напряжений + определяется работой на

растяжение, а касат. напр. в сторону, т.е. соотв. осей координат. На остальных гранях норм. напр. направлены также, а касат. в противоп. сторону.

Рассм. 3 грани с т. А. Представим поверхностные силы через норм. и касат. напрям.

$$-\sigma_x dy dz + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz$$

$$-\tau_{yx} dz dx + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dz dx = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

$$-\tau_{zx} dy dx + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dy dx = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$



$$\text{Тогда, } P_x = \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial z} \right) \cdot dx \, dy \, dz$$

$$P_y = \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zy}}{\partial z} \right) \cdot dx \, dy \, dz$$

$$P_z = \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial y} \right) \cdot dx \, dy \, dz$$

Как известно, (это т-на Стокса) касательные напряжения на ортогональных гранях равны между собой:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

По той же т-ме: касат. напр. представляются в виде зависимости:

$$\tau_{xy} = 2 \mu E_z = \underbrace{\mu}_{\text{деформ. сдвигания}} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xz} = 2 \mu E_y = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{yz} = 2 \mu E_x = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$$

Как известно, в идеальной среде норм. напряжения связаны только с давлением:

$$p = -\frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_z)$$

В вязкой среде норм. напр. зависят от сил вязкого трения.

$$\tilde{\sigma}_x = -p + \tilde{\tau}_{xx}$$

$$\tilde{\sigma}_y = -p + \tilde{\tau}_{yy}$$

$$\tilde{\sigma}_z = -p + \tilde{\tau}_{zz}$$

вычитаются, кот. хар-т влияние вязкого трения на норм. напряжения.



$$\sigma_x = -p + \mu \left( 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right)$$

$$\sigma_y = -p + \mu \left( 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right)$$

$$\sigma_z = -p + \mu \left( 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right)$$

Напишем в общем виде ур-е движения в кр-х координат  $x, y, z$ .

(=0) отбрасывает за установ. течен. Потенци

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{\rho}{dt} \frac{dv_x}{dt} = \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta v_x \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) \right] , \quad \Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \left[ \frac{\rho}{dt} \frac{dv_y}{dt} = \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v_y + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{v}) \right] \\ \left[ \frac{\rho}{dt} \frac{dv_z}{dt} = \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{v}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Перед нами - ур-я дви. в форме Навье - Стокса для наиб. полной моф. течения - неуст. поток, пространственный, стисчивый и вязкий.

Если  $\mu = 0$ , то получим ур-я Эйлера для идеал. среды:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{— Модель течения может быть:} \\ &\text{стисч./нестисч. среда, установ./неуст.} \\ &\text{течение, НО всегда модель} \\ &\text{идеальной среды} \end{aligned}$$



Как правило, массовыми силами пренебрегают;  
т.к. они малы по сравн. с по-  
верхностными силами

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Уравнение энергии - масс. выражение  
з-на сохр. энергии.

Для простоты примем, что среда идеальная.  
Изменение энергии системы равно работе  
действующих сил.

$$d\left[\left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho u\right)W\right] = \underbrace{dR'}_{\text{работа массовых сил}} + \underbrace{dR''}_{\text{работа поверхностных сил}} + \underbrace{dR'''}_{\text{работа за счет притока тепла извне}}$$

Получаем:

$$d\left[\rho W \left(\frac{V^2}{2} + u + \frac{p}{\rho}\right)\right] = 0$$

$$d\rho W \left(\frac{V^2}{2} + u + \frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{V^2}{2} + u + \frac{p}{\rho}\right) \rho W = 0$$

$$d\left(\frac{V^2}{2} + u + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{V^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} = \text{const}}$$

$u = C_v T$  - внутр энергия

$p = R \rho T$ ,  $R = C_p - C_v$  - газовая постоянная



$$\frac{V^2}{2} + i = \text{const}$$

где  $i = C_p T$  - избыточный параметр, который характеризует теплоемкость системы

Интеграл ур-я движения.

Установившееся течение идеальной среды

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = x - \frac{\partial p}{\partial x}; \dots$$

Выведем в левой части ур-я безразмерные составляющие за счет допущения  $\pm \omega_x, \omega_y, \omega_z$

Первое ур-е получаем в виде:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} - 2V_y \omega_z + V_z 2\omega_y = x - \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Подобный вид приобретает каждое из 3-х ур-ий

Долножаем на  $\partial x, \partial y, \partial z$  соотв, и почленно складывая ур-я, получаем:

$$d\frac{V^2}{2} + \frac{1}{g} dp - \underbrace{[x dx + y dy + z dz]}_{dV - \text{полн. дифф-л массовых сил}} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ V_x & V_y & V_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}}_{=0}$$

Кривоизог. составляющую, умноженную на соотв. величины  $V_x, V_y, V_z$ , переносим в правую часть и составляем из них матрицу.

$$\text{И тогда: } d\frac{V^2}{2} + \frac{1}{g} dp - dV = 0 \quad (*)$$

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{g} = \text{const} \cdot \text{если } g = \text{const} \Rightarrow \frac{g_{\infty} V_{\infty}^2}{2} + p_{\infty} = \text{const}$$

$$dV = 0$$

динамич. давл.  $\rightarrow$

$$(1) \frac{g_{\infty} V_{\infty}^2}{2} + p_{\infty} = p_0 - \text{давление торможения (скорость = 0)}$$



26.03.15

Лекция 6

Если среда идеальная, то параметры течения являются постоянными величинами для конвективного потока.

Из этого вытекает выражение (1) - выражения для расчета скорости потока.

Выводя уравнение движения, мы принимаем, что главный определяющий параметр системы  $= 0$ . Это условие существования, в частности, уравнения Бернулли.

В каждом из этих отдельных случаев выполняется уравнение Бернулли:

1.  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$  - условие потенциальности потока.

2.  $V_x = V_y = V_z = 0$  - загроможденность потока

3.  $\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$  - уравнение линии тока

4.  $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$  - уравнение вихревой линии (аналогично линии тока)

5. Линия тока совпадает с линией вихревой:

$$\frac{V_x}{\omega_x} = \frac{V_y}{\omega_y} = \frac{V_z}{\omega_z}$$

Коэффициентное течение -

- течение при постоянном титровании.

Форма струи от скорости ее истечения. Струя - поток, ограниченный т.в. стенками.

$S = \text{const}$

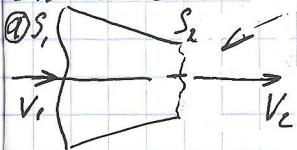
$\rho V S = \text{const}$  - уравнение расхода. - вид уравнения неразрывности для установив. течения  
площадь рассматриваемого сечения струи

Бернулли базируется на интеграле уравнения Бернулли  $\frac{V^2}{2} + \frac{dp}{\rho} = 0$  и на том, что  $\mu = \frac{V}{a}$



$\frac{dS}{dV} = -\frac{S}{V} (1-M^2)$  - гр-е, определяющее форму струи  
от ее скорости при числах маха  
как дозвуковых, так и сверхзвуковых.

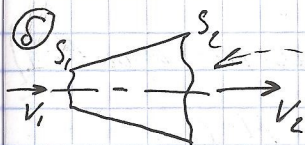
I.  $M < 1$



$$dS = S_2 - S_1 < 0$$

$$V_2 > V_1$$

Дозвуковой поток, сужаясь, ускоряется. Элемент конструкции, в котором поток ускоряется за счет уменьшения площади поперечного сечения, называется соплом.

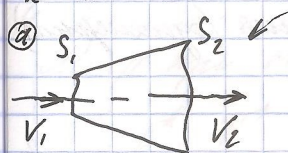


$$dS = S_2 - S_1 > 0$$

$$dV = V_2 - V_1 > 0$$

Расширяясь, дозвуковой поток тормозится. Элемент конструкции, в кот. поток тормозится за счет увеличения площади поперечного сечения, называется диффузором.

2.  $M > 1$



Расширяясь, сверхзвуковой поток ускоряется

$$dS = S_2 - S_1 > 0$$

$$dV = V_2 - V_1 > 0$$

$$V_2 > V_1$$



Сужаясь, сверхзвуковой поток тормозится

$$dS = S_2 - S_1 < 0$$

$$dV = V_2 - V_1 < 0$$

$$V_2 < V_1$$



Принцип зависимости изменения скорости истечения потока в остову сверхзв. труб

Соединение двух сопел - дозвукового и сверхзвукового - это сопло Лавалля



критическое сечение. (критические параметры при  $M=1$ )

$a_{кр}$  - скорость при  $M=1$

- ① если в крит. сечении достигнута крит. скорость, далее сверхзвук
- ② если в крит. сечении не достигнута крит. скорость, то перехода на сверхзвук не произойдет

Уравнение изотропического течения (одномерное)

$$dS = \frac{dq}{T} \quad \text{температура}$$

$$dq = du + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = d\left(u + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho} dp =$$

$$= di - \frac{1}{\rho} dp \rightarrow S = C_v \ln \frac{T^k}{\rho^{k-1}} = \text{const}$$

$$i = u + \frac{p}{\rho}$$

$$i = C_p \cdot T$$

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const} \quad k = \frac{C_p}{C_v}$$



## Параметры изотермического потока

1. Скорость звука  $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ ,  $a = \sqrt{kRT}$

2. Скорость течения  $\frac{V^2}{2} + i = i_0$ ,  $\frac{V^2}{2} = i_0 - i \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = a_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{k-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

$a_0 =$

3. Максимальная скорость - теоретическое значение максимально возможной скорости течения

$$V_{\max}^2 = 2i_0, \left[T_0 = \frac{a_0^2}{kR}; \frac{C_p}{R} = \frac{k}{k-1}\right] \rightarrow V_{\max} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}$$

Из последней зависимости очевидно, что для конкретного потока макс. значение скорости постоянно. ( $a_0$  - параметр торможения, для данного сечения для данного потока постоянный).

4. Критическая скорость. Критич. параметр - параметр при  $M=1$  (обозначаются со \*, \*\*).

$a^*, p^*, T^*, \rho^*$ .  $a^* = \frac{k-1}{k+1} V_{\max}^2$  - величина постоянная

5. Местная скорость звука.  $V_{\max}^2 = 2C_p \cdot T_0$ ;  $V^2 = 2C_p(T_0 - T) =$

$$= 2C_p T_0 - 2C_p \cdot T = \left[T = \frac{a^2}{kR}; \frac{C_p}{R} = \frac{k}{k-1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{k-1}{2} (V_{\max}^2 - V^2)$$

С увеличением скорости потока, скорости звука уменьшается при данном конкретном течении.

6. Относительная скорость.  $\lambda = \frac{V}{a^*}$ ,  $\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$



## Газодинамические ф-ии.

Для газодинамич. ср-ми мы будем полагать совершенная, кот. наиболее часто встречается в расчетах, и кот. стандартизованы.

1. Отношение текущих значений давления, плотности, температуры

$$p(M_\infty) = \frac{p_\infty}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^{-\frac{k-1}{k}}$$

$$\rho(M_\infty) = \frac{\rho_\infty}{\rho_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^{-\frac{1}{k-1}}$$

$$T(M_\infty) = \frac{T_\infty}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^{-1}$$

$$p(\lambda) = \frac{p_\infty}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\rho(\lambda) = \frac{\rho_\infty}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$T(\lambda) = \frac{T_\infty}{T_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)$$



Критич. п-ри, число Маха  $M = 1$   
критич. расход - расход, где  $M = 1$ .

$$\rho V S = \rho^* a^* S^*$$

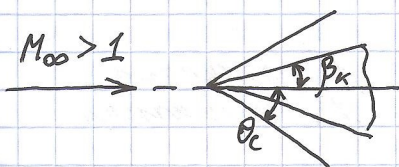
$$q(n) = \frac{S^*}{S} = \frac{\rho V}{\rho^* a^*} = \frac{\rho_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\rho_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}} =$$

### Теория скачков уплотнения.

В сверхзвуковом потоке. При торможении его при обтекании тел различной конфигурации, перед телом возникает в общем виде п-сть, при переходе через которую абсолютно все параметры потока меняются скачкообразно.

Если эта п-сть меняет свое положение относительно тела, то она называется ударной волной, если не меняет - головным скачком уплотнения (головн. уд. волна) при  $M > 1$ .

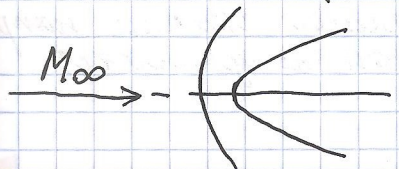
Бывают случаи, когда на п-сти тела при разном потоке возникают местные области сверхзвукового течения. Там также возникают скачки уплотнения при общем дозвуковом обтекании тела.



$\theta_c$  - угол между направ. эк-ти наб. потока и фронтом скачка уплотнения

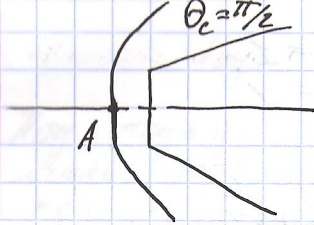
$\theta_c = \frac{\pi}{2}$  - прямой скачок уплотн.

$\theta_c < \frac{\pi}{2}$  - косой скачок уплотн.



скачок уплотнения искривленный и отсоединенный



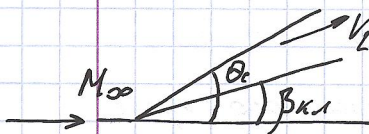


Прямой скачок уплотнения в т. А.

Пространств. обтекание тел вращения.

$$\beta_{k \max}(M_{\infty}) < \beta_k$$

Если  $\beta_k > \beta_{\max} \Rightarrow$  скачок искривляется



Клин - плоское обтекание

$\beta_{kl}$  - угол отклонения потока.

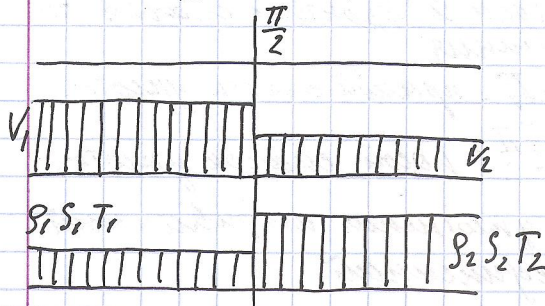
Принимаем, что переход через скачок уплотнения сопровождается мгновенным изменением параметров течения.

За скачком уплотнения течения изотропическое - можно применять газодинамические др-и.

Если процесс перехода через скачок уплотнения - процесс ударного сжатия. Возможно существование скачков уплотнения при наличии диссоциации и без

Прямой скачок уплотнения.

$$\theta_c = \frac{\pi}{2}; \quad C_p, C_v, R - \text{const}$$



индекс "1" - до скачка;  
"2" - за скачком

за прямым скачком напр. скорости не изменяется



Основное ур-е газовой динамики для прямого скачка укл.

1. Неразрывности в форме ур-я расхода

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

2. Уравнение движ. в форме сохр. к-ва движения

$$\rho_1 V_1 (V_1 - V_2) = p_2 - p_1$$

3. Уравнение энергии

$$i_1 + \frac{V_1^2}{2} = i_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

4. Уравнение состояния

$$p_1 = R \rho_1 T_1, \quad p_2 = R \rho_2 T_2$$

Рассмотрим более подробно уравнение энергии:

$$i_1 + \frac{V_1^2}{2} = i_{01}, \quad i_2 + \frac{V_2^2}{2} = i_{02} = i_0 = c_p T_0 = c_p T_{01} = c_p T_{02} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_0 = \text{const}$$

При переходе через О скачка укл. температура торможения не меняется

$$\alpha^* = k R T^* = k R T_0 \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{-1} = k R T_0 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{-1}$$

Критич. скорость звука и темп-ра. не меняется

$$i = c_p T = c_p \frac{p}{R \rho} = \frac{p}{\rho} \frac{k}{k-1} = \frac{\alpha^2}{k-1}$$

$V$  не меняется  $\Rightarrow$  уравнение энергии будет



1) Параметры потока за прямым скачком уплотнения

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{a_2^2}{\kappa V_2} - \frac{a_1^2}{\kappa V_1} \quad (1)$$

2) Уравнение энергии наплывом для и-ров до скачка и за скачком

3) Уравнение энергии для до ск. и за ск.

$$\frac{a_1^2}{\kappa - 1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\kappa - 1} + \frac{a^{*2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{a^{*2}}{\kappa - 1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{a_2^2}{\kappa - 1} + \frac{V_2^2}{2} \quad (3) \Rightarrow [a_1^2 a_2^2] = f(a^*) \text{ и подст. в (1)}$$

$$\left[ \begin{array}{l} V_1, V_2 = a^{*2} \text{ - ур-е Прангтля} \\ M_1, M_2 = 1 \quad M = \frac{V}{a^*} \end{array} \right]$$

Выводы: 1)  $M_1 > 1$  (скачки возникают в сверхзвуковом потоке)

2)  $M_2 < 1$  (за прямым скачком уплотнения ск-ть всегда



$$g_1 V_1 (V_1 - V_2) = p_2 - p_1 ; \frac{p_2}{p_1} = \frac{g_1 V_1}{p_1} (V_1 - V_2) + 1 \rightarrow$$

имая в виду зав-ть для  
теплого, упр-е и упр-дте  
 $\rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}$

тройное соотношение

$$g_1 V_1 = g_2 V_2 \rightarrow \frac{g_2}{g_1} = \lambda_1^2$$

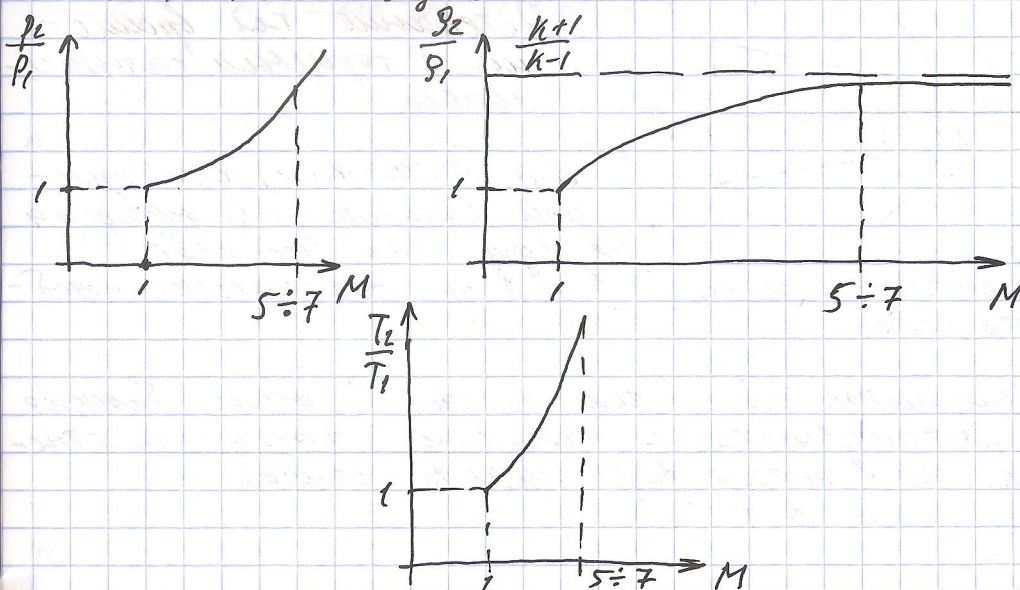
$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{\frac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}$$

Получили не абсолют. знач.  $g$   
в скачком напав. потока,  $g$   
по отношению к параметрам  
до скачка.

$$p_1 = k g_1 T_1 ; p_2 = k g_2 T_2 ;$$

$$T_2 = \frac{p_2}{k g_2} ; T_1 = \frac{p_1}{k g_1} ; \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{g_1}{g_2}$$

Представим графические завис-ти отношения  
давлений, плотностей, температур в зависимости  
от  $M$  набегающего потока.

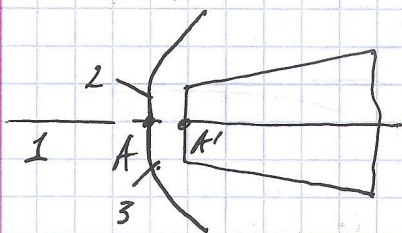


При увеличении  $M$  набег. потока отношения  $P$  и  $T$  бесконеч. возрастают, а отношение  $\frac{S_1}{S_2}$  стремится к значению  $\frac{k+1}{k-1}$ , т.е. в зависимости от  $k$  имеется асимптота.

Эти кривые реально представляют зависимость  $q_{0H-S \div F}$ . За  $M > 5 \div F$  эти кривые представляют из себя гипотетические - они не корректны, т.к. мы изначально определили, что не рассматривали явление диссоциации.

Известно всем, что с  $T$  давления плотность  $\uparrow$ , а с  $T$  температуры плотность  $\downarrow$ . При некотором  $M$  эти тенденции уравновешивают друг друга, и отношение  $P$  стремится к нек. величине -  $\frac{k+1}{k-1}$  (асимптота). Напомним, что рассматривали газ в отсутствии диссоциации (если она есть - кривые ведут себя по-другому).

Давление торможения за прямым скачком уплотнения



Обтекание тел вращением с торцевым затуплением

Мы отмечали, что прямой скачок угл. никогда не случ. сам по себе.

В основном, он случ. в т. А при обтекании подобного тела.

Центральная часть гол. скачка 2 очень близка по интенсивности к прямому скачку угл. уплотнения. Но в чистом виде прямой скачок угл. случ. только в т. А.



Если провести линию тока из т. А, мы попадем в т. А' на пов-ти тела - т. полного торможения.

Схема обтекания тела:

1-я область - область свободн. потока, т.е. течения изэнтропического, парам. потока опред. с помощью газодинам. ф-ий

2-я - область головного скачка уплотнения

3-я - область изэнтропического вращательного течения. Это от. сжатый вид течения.

В этой обл-ти мы знаем только одно напр. тока в т. А

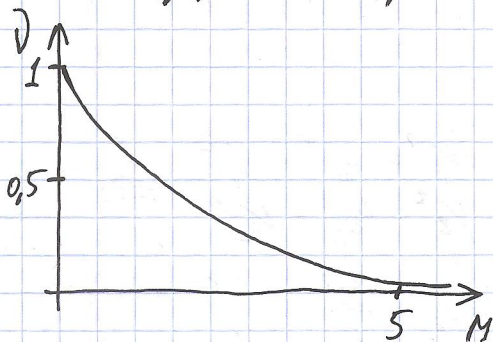
АА' - обл-ть <sup>вращ.</sup> вращ. в-ва. Параметры торможения не меняются.

Очень важным является в аэродинам. расчетах отношение давлений уплотнения за и перед ним.

Формула Рэнки или потр. потерь.

$$\bar{p} = \frac{p_0'}{p_{01}} = \frac{k-1}{k+1} \left[ \frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \right]^{\frac{k}{k-1}} M_1^2 \cdot \left( \frac{2k}{k-1} M_1^2 - \frac{1}{M_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Ф-ла Рэнки показывает, что с  $M_1$  нарастающе потока  $\bar{p}$ , т.е. потери возрастают.



Давление тормож.  $p_0'$  уменьшается по убав. с  $p_0$  набл. потока

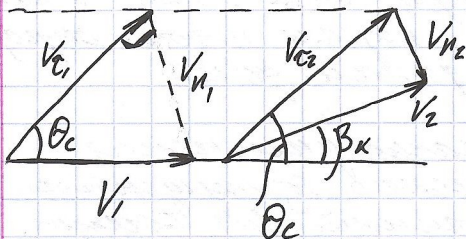
При ударном течении тепло, полученное в результате части мех. энергии, уже не может быть полностью преобразовано в кинетич. энергию.

или без доп. затрат мех. работы.



Косой скачок уплотнения.

$$\theta_c < \frac{\pi}{2}$$



Модель течения: установившийся плоский поток идеальной сжимаемой среды.

Рассматриваем обтекание клина:  $\beta_k$  - угол клина или угол отклонения потока.

Примем, что градиент давления вдоль фронта скачка укл. = 0.

При написании осн. ур-й газ. динам. мы должны помнить о 2х направлениях: вдоль фронта скачка уплотнения и по нормали к нему.

1. Уравнение неразрывности.

Расход всегда определяем через нормальные сост. скорости.

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

2. Ур-е движения в виде ур-я расхода

$$\rho_1 V_{n1} (V_{t1} - V_{t2}) = 0$$

$$\textcircled{2'} \rho_1 V_{n1} (V_{n1} - V_{n2}) = p_2 - p_1$$

$$V_{t1} = V_{t2} = V_t$$

3. Ур-е энергии

$$i_1 + \frac{V_1^2}{2} = i_2 + \frac{V_2^2}{2} = i_0$$

$$V_1^2 = V_t^2 + V_{n1}^2$$

$$V_2^2 = V_t^2 + V_{n2}^2$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \textcircled{3'} i_1 + \frac{V_{n1}^2}{2} = i_2 + \frac{V_{n2}^2}{2} = i_0' < i_0 - \frac{V_t^2}{2}$$



(4) Основное ур-е газовой динамики.

$$p_1 = R S_1 T_1, \quad p_2 = R S_2 T_2$$

Из  $[1, 2', 3', 4]$  получим систему ур-й, идентичную основным ур-ям при прям. ск. ум. Только вместо  $V_1$  и  $V_2$  будут  $V_{1z}$  и  $V_{2z}$ .

Это позволяет нам принять косой скачок ум. как прямой для нормальной составляющей  $V_{1z}$  и  $V_{2z}$ .

Тогда, обтекание крыла будет происходить при

$$M_{1z} = M_1 \sin \Theta_c$$

Все найденные ранее зависимости для отношений  $\frac{T_2}{T_1}$ ,  $\frac{p_2}{p_1}$ ,  $\frac{S_2}{S_1}$  также могут рассматриваться в том же виде, как для прямого скачка, только вместо  $M_1$  подставим  $M_{1z}$ . Тогда:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k-1} M_{1z}^2 \sin^2 \Theta_c - \frac{k-1}{k+1}$$

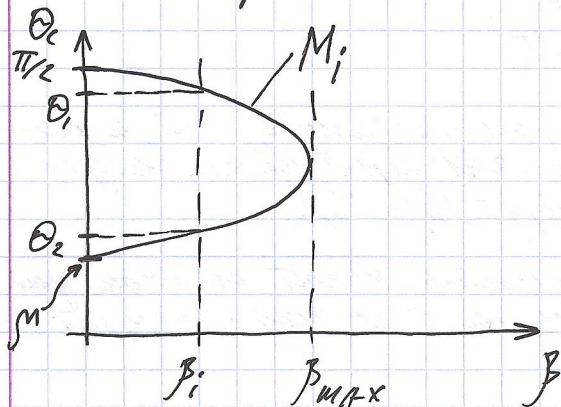
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{k+1}{2} M_{1z}^2 \sin^2 \Theta_c}{1 + \frac{k-1}{2} M_{1z}^2 \sin^2 \Theta_c}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \dots \dots \dots$$

Определим скорость за косым скачком уплотнения.

$$\left. \begin{aligned} V_z &= V_1 \cos \Theta_c \\ V_z &= V_2 \cos (\Theta_c - \beta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_2 = \frac{V_1 \cos \Theta_c}{\cos (\Theta_c - \beta)}$$

Для конкретного  $M$  наблюдению потока



$\beta_{\max}$  — касат. к кривой, представляет из себя МАХ угол клина, при кот. есть скачок уплотнения параллельн. и перпендикулярно.

Т.е. при  $\beta_k < \beta_{\max}$  мы можем построить  $\Delta$ -ки скоростей и вся теория плоского косого скачка углы-я имеет смысл.

Угол  $\beta$  — угол наклона линии малых возмущений. Если мы проведем линию, соотв.  $\beta_i$ , то мы получим по уравнению 2 решения:  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Определение реального угла наклона скачка уплотнения определяется принципом Притомкина:

“Должно существовать минимум производя энтропии”.

Как известно, при переходе через скачок уплотнения энтропия возрастает. В действительности из  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , для которого при переходе через скачок уплот. уменьшение энтропии минимально. По данному графику это  $\theta_2$  — меньший угол скачка.



$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{v_{n1}}{v_{n2}}$$

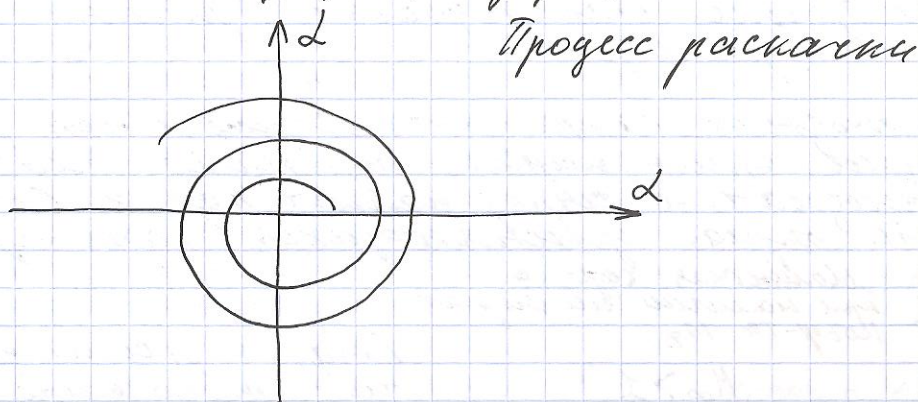
$$v_{n1} = v_c \operatorname{tg} \theta_c$$

$$v_{n2} = v_c \operatorname{tg} (\theta_c - \beta_k)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_c}{\operatorname{tg} (\theta_c - \beta_k)} = \frac{\frac{k+1}{2} M_1^2 \sin^2 \theta_c}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2 \theta_c}$$

яют из себя замкнутую линию, кото-  
рая из-за предельной чистоты.

Исследовать влияние областей интереса  
начали в Америке (Мерфи).



Р/К:  
Метод  
линеариза-  
ции;  
теория  
погран.  
слоя  
14.05.15  
Минус 13

Аэродинамика корпусов.

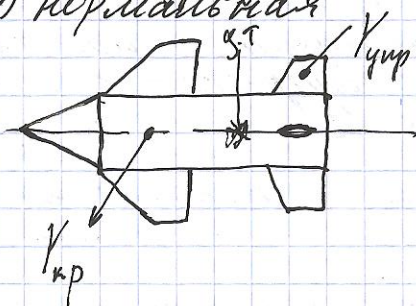
Аэродинамические схемы ЛА.

Компьютеризация ЛА - это рационал. выбор размеров,  
внеш. форм, взаимн. располож. горючего, кра-  
ла и оперения.

Аэродинам. схемы: неоперенные (управляемые,  
неуправляемые) и оперенные (вместо в себя  
несущие и стабилизирующие по-ти).

Оперенные: безкрылые (чир. и нечир.) и кры-  
латые (подразделяются по аэродинам. схемам):

1) нормальная



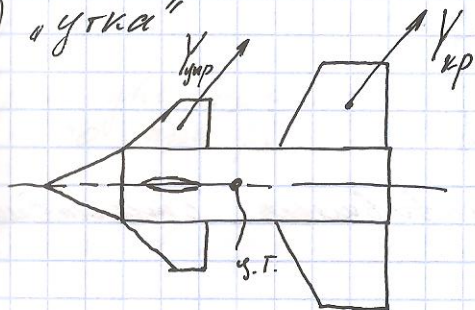


Положит. и отриц. моменты определяются задатками, кот. перед ними ставятся.

В норм. схеме Ц.Т. между крылом и оперением. В схеме широко применяется угол балансировки (область балансировки).

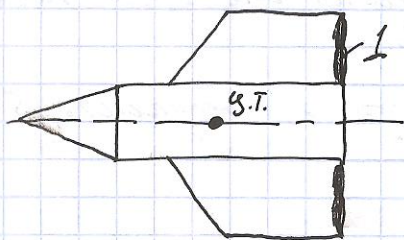
Отсутствует влияние оперения на крыло (схем потяга), т.к. центр. пов-ти находятся сразу крыла.

2) "чутка"



"-" - наличие схода потока от центр. пов-ти на крыло.

3) "бесхвостка"



1- центр. поверхности

"+" - нет схода потока  
 "-" - Ц.Т. очень близко от рулей; центр. момент рулей мал

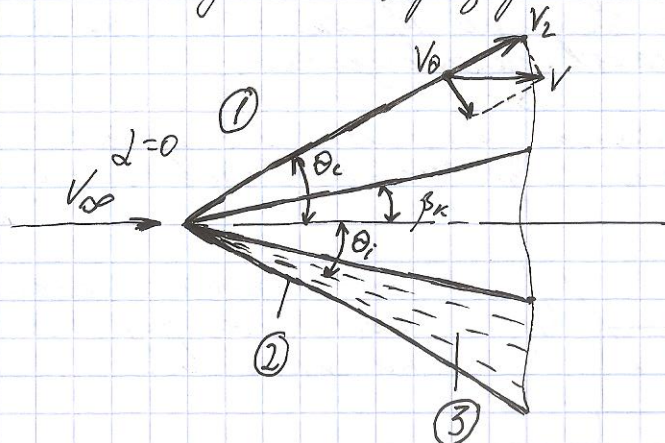
Аэродинамика корпусов ЛА.

Корпус ЛА - наиболее протяженная часть ЛА. Она делится на: переднюю, среднюю, заднюю.

Головная часть - либо конус (затупленная или острая).

Один из самых распространенных видов ракетных стартовых конусов.

Конус в сверхзвуковом потоке.



Модель течения: установившееся, стиснутая, идеальная среда.

Поток без диссоциации. Задача об обтекании острого конуса рассматривается методом последовательных приближений.

При обтекании конуса можно выделить 5 основных областей течения:

- 1) невозмущенное течение
- 2) ударное сматие
- 3) возмущенное течение

В этих трех областях решается задача методом послед. приближений

При решении испол. граничных конит. условий

$$\frac{\partial A}{\partial r} = 0$$



Конич. поверхностями, вдоль кот. проводная  
многого параметра равна 0, могут явиться  
поверхности между головным скачком уп-  
лотнения и пов-но самого корпуса.

Исчисляем пространство между ② и пов-  
корпуса на ряд пов-ей, вдоль кот. будем  
определять параметры потока.

Если будем идти от пов-ти скачка уплотнения,  
то мы должны прийти к пов-ти, у кот.  
 $\Theta_i = \beta_k$ .

Гранич. укл., при кот. мы пришли к конич. пов-ти:  
 $\beta_0 = 0$  при  $\beta_k = \Theta_i$ .

Если  $\beta_k$  дано, тогда расчет направлен на  
 $\Theta_i$ , кот. в первом приближении задается.

Уравнения - см. книгу "Аэродинамика" 2010г. под  
ред. В.Т. Кадырина.

Конус при  $\Delta \neq 0$

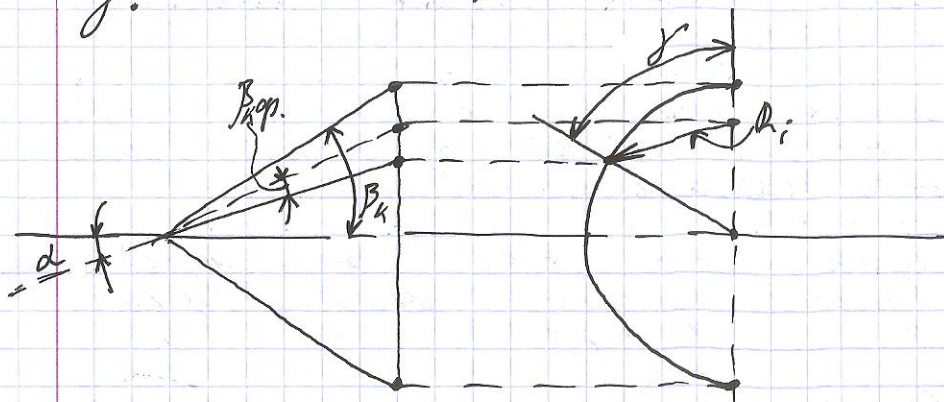
Метод местных конусов. - метод расчета аэро- 28.05.15  
то конуса под  $\Delta \neq 0$ . Июнь 19

Этот метод основывается на расчете пере- R.  
метров при  $\Delta = 0$  конуса. 5

В методе м.к. мы строим конусы, ось  
которых является направлением скорости набе- АВТОМАТ  
гающего потока, а образующая конуса -  
одна из образующих рассматриваемого конуса.

Необх. отметить, что когда у конуса  $\Delta = 0$ ,  
в каждой из образующ. конуса является  
начальн. на кот. параметры потока оди-  
наковы.

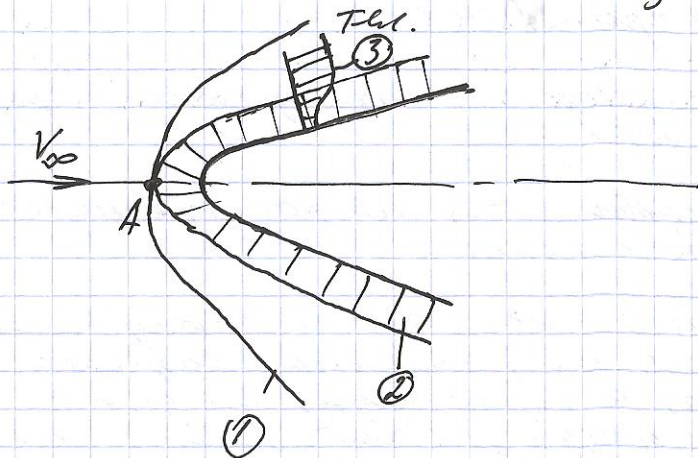
Когда нар. конус находится под  $\alpha \neq 0$ , выходящая обр. конуса определяется углом  $\gamma$ .



Надо постр. конус, обр. кот. будет любая обр. конуса, а ось-напр. падет. потока. Радиус мест. конуса под  $\alpha=0$  -  $R_k$ .

$$R_{kp} = R_k - \alpha \cos \gamma + 0.5 \alpha^2 \operatorname{ctg} \beta_k \sin^2 \gamma$$

Особенности обтекания затупленных



При обтекании затупл. тел тепловые потоки на пов-ти тела гораздо меньше, чем на остром конусе.



Это является одной из главных причин применения затум. т.к. при движении аппарата в шотн. слоях атмосферы.

Перед ап-м возникает отходящая ударная волна (1).

Наиболее интенсивной она явл. в узай-рс (т.к.) - границе, принятой шотн. затумнения.

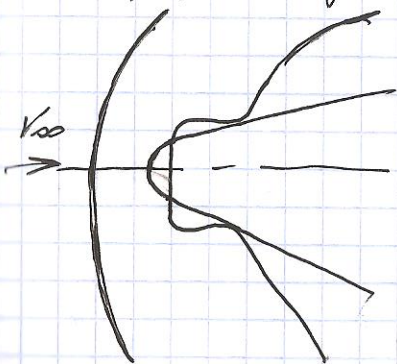
Главной оседл. обтекания таких т.к. явл. высоко тнтрон. шотн (2), кот. расположено по всей пов-ти т.к. Скорости в нем значат. уменьшаются. (3-прогр. шотн.).

Весь аппарат затум. в том, что имеет. высоко тнтрон. слой ламинаризи. ПС.

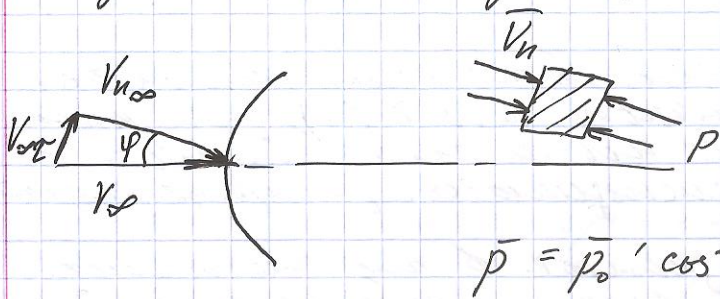
Точка перехода ЛПС в ТПС происходит гораздо ниже по течению. Тем же потоки ниже, и задается волн-е.

Необходимо отметить, что сопротивление затум. т.к. больше, чем острок, пот. их применение выд-ет из учета кнжнх / темовых потоков.

Сверхзв. затумнение.



Метод Ньютона - приближенный метод опред. коэф. дейст-ва при откачки ан-га свзв. потоком. Метод основан на кинеск. теории Ньютона, кот. гласит, что при взаимодействии потока и пов-ти происх. только за счет норм. сост. столк-ти или пот-ва срыв. Если ее нет, то нет взаимодействия, т.е. невозм. найти коэф-т давления.



$\bar{p}_0'$  - коэф. давл. точки торможения

Угол  $\varphi$  опред. положение  $V_{\infty}$ .

В областях, где невозм. по Ньютону опред.  $\bar{p}$ , нас сд. аэродинам. тенью. Это означает, что нет взаимодействия.