

МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

1. Методические указания

Корневым годографом (КГ) называется совокупность траекторий перемещения всех корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении какого-либо параметра этой системы.

Обычно метод КГ позволяет находить полюса и нули ПФ замкнутой системы, располагая полюсами и нулями разомкнутой системы при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы K .

ПФ разомкнутой системы $W_p(s)$ представим в следующем виде:

$$W_p(s) = \frac{KC \prod_{j=1}^m (s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i^*)}, \quad (1)$$

где s_j^0 – нули ПФ $W_p(s)$, ($j = \overline{1, m}$); s_i^* – полюса ПФ $W_p(s)$, ($i = \overline{1, n}$); n и m – порядки знаменателя и числителя; C – коэффициент представления (отношение коэффициентов при старших членах числителя и знаменателя).

При замыкании системы с ПФ $W_p(s)$ единичной отрицательной обратной связью ПФ замкнутой системы $W_3(s)$ принимает вид

$$W_3(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)}. \quad (2)$$

Из выражения (2) следует, что нули ПФ замкнутой системы равны нулям ПФ разомкнутой системы.

Для нахождения полюсов рассмотрим выражение

$$1 + W_p(s) = 0, \quad (3)$$

в соответствии с выражением (1) имеем

$$\frac{KC \prod_{j=1}^m (s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i^*)} + 1 = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^n (s - s_i^*) + KC \prod_{j=1}^m (s - s_j^0). \quad (4)$$

На основании выражения (4) можно сказать, что при $K = 0$ корни характеристического уравнения совпадают с полюсами, а при $K = \infty$ – с нулями. При изменении K от 0 до ∞ траектории корней начинаются в полюсах и заканчиваются в нулях. Обычно полюсов больше, чем нулей. В этом случае $n - m$ ветвей корневого годографа стремятся к ∞ .

Для определения полюсов замкнутой системы с отрицательной обратной связью необходимо решить уравнение (его называют основным уравнением метода КГ):

$$W_p(s) = -1. \quad (5)$$

Так как $W_p(s)$ является функцией комплексного переменного s , то уравнение (5) распадается на два уравнения: уравнение модулей

$$|W_p(s)| = 1 \quad (6)$$

и уравнение аргументов (фаза вектора -1 есть нечетное число π):

$$\arg W_p(s) = \pm(2u+1)\pi, u = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Как известно, при умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а при делении – вычитаются. Поэтому, исходя из выражения (1), уравнение (7) имеет наглядный геометрический смысл.

Пусть точка s – полюс замкнутой системы. Если провести в s вектора из всех нулей $W_p(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_j^0) и вектора из всех полюсов $W_p(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_i^*), то уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i^* = \pm(2v+1)\pi, v = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Углы φ отсчитываются от положительного направления действительной оси. Знак угла «+» соответствует повороту против часовой стрелки, знак угла «-» соответствует повороту по часовой стрелке.

Таким образом, любая точка КГ должна удовлетворять уравнению (8), из которого следует, что конфигурация КГ не зависит от коэффициента усиления K , но каждому конкретному значению K однозначно соответствуют точки на КГ.

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а при делении – делятся. Поэтому на основании уравнения (6) можно записать

$$\frac{KC \prod_{j=1}^m l_j^0}{\prod_{i=1}^n l_i^*} = 1, \quad (9)$$

где l_j^0 – модуль (длина) вектора, проведенного из j -нуля в точку s КГ;
 l_i^* – модуль вектора, проведенного из i -полюса в ту же точку s .

Таким образом, траектории корней строятся только по уравнению фаз, а уравнение модулей используется затем для нахождения K .

Сущность метода КГ заключается в том, чтобы узнать, каким должен быть коэффициент усиления разомкнутой системы, чтобы было обеспечено желаемое положение корней замкнутой системы.

Корневой годограф системы с отрицательной обратной связью обладает следующими основными свойствами [1–5]:

1. Ветви КГ непрерывны и расположены на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси.

2. Число ветвей КГ равно порядку системы n . Ветви начинаются в n полюсах разомкнутой системы при $K = 0$. При возрастании K от 0 до ∞ полюса замкнутой системы двигаются по ветвям КГ.

3. m ветвей КГ при возрастании K от 0 до ∞ заканчиваются в m нулях $W_p(s)$, а $(n - m)$ ветвей при K , стремящемся к ∞ , удаляются от полюсов вдоль асимптот.

4. При расположении ветвей корневого годографа в левой полуплоскости s САУ устойчива. При пересечении ветвей КГ мнимой оси слева направо САУ становится неустойчивой. Пусть при $K = K^{кр}$ пересечение КГ с мнимой осью произойдет в некоторой точке $i\omega^{кр}$. Назовем это значение коэффициента усиления критическим $K^{кр}$, а величину $\omega^{кр}$ критической угловой частотой, на которой система становится неустойчивой.

2. Использование MatLab

В системе MatLab существует команда `zpk` для преобразования модели, заданной ПФ, в модель, заданную нулями, полюсами и обобщенным коэффициентом передачи (`zpk`-форма).

Пример:

```
>> w=tf([10],[2 2 3 1 0])
```

```
Transfer function:
```

```
10
```

```
-----
```

```
2 s^4 + 2 s^3 + 3 s^2 + s
```

```
>> w1=zpk(w)
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
5
```

```
-----
```

```
s (s+0.3966) (s^2 + 0.6034s + 1.261)
```

Для работы с корневым годографом удобно использовать графический интерфейс «SISO-Design Tool», предназначенный для анализа и синтеза одномерных линейных систем автоматического управления (SISO – Single Input/Single Output).

Запуск SISO-Design Tool осуществляется командой

>> sisotool

В появившемся окне графического интерфейса необходимо использовать команду «File/Import» для загрузки данных из рабочего пространства MatLab, в результате которой появляется диалоговое окно Import System Data (рис. 1).

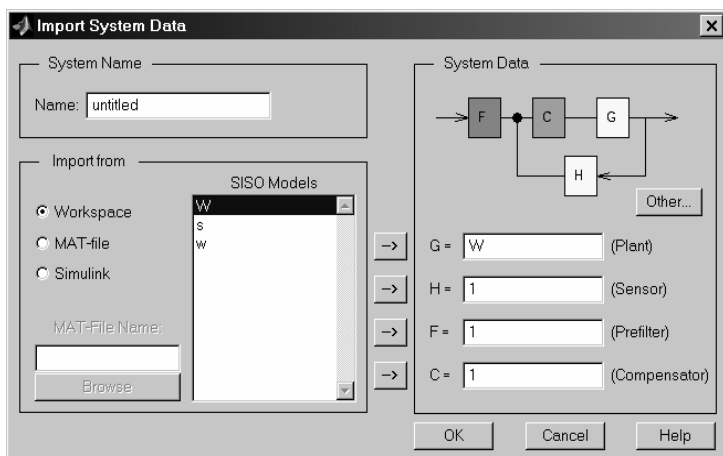


Рис. 1. Диалог для ввода параметров модели

После импортирования данных можно исследовать изменение временных и частотных характеристик замкнутой системы при изменении K . Обычно при этом требуется определить условия неустойчивости замкнутой САУ. Определить $K^{кр}$ и $\omega^{кр}$.

На рис. 2 показано окно sisotool для описанной выше модели $w1$. Двигая красным курсором по КГ до пересечения ветвей с мнимой осью, можно определить значение $K^{кр}$. В данном случае $K^{кр} \approx 0,1$. Значение $\omega^{кр}$ соответствует мнимой координате пересечения КГ мнимой оси. Просмотреть это значение можно в нижней части интерфейса или выбрав меню «View/Closed-Loop Poles».

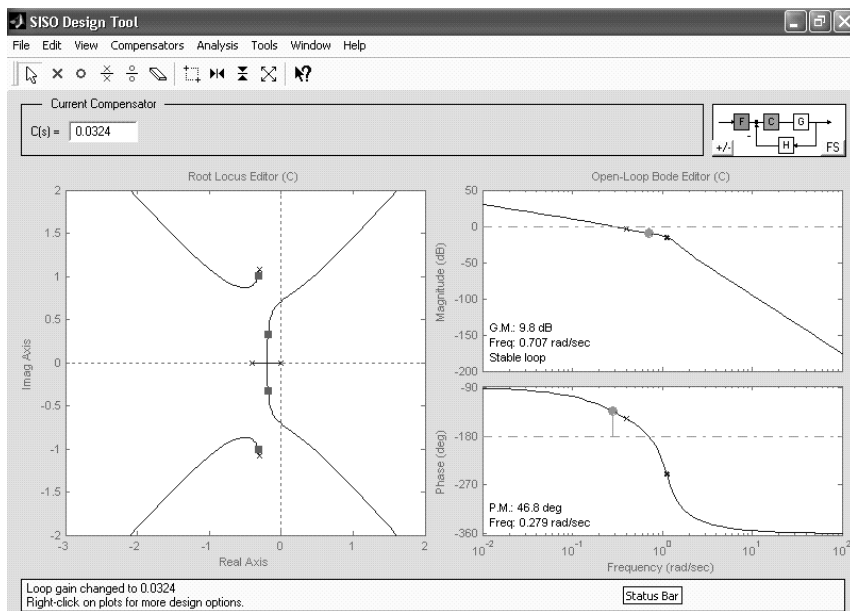


Рис. 2. Основное окно SISO Design tool

3. Задание на лабораторную работу

Построить КГ в соответствии с вариантом из таблицы при помощи графического интерфейса sisotool.

Исследовать динамику замкнутой системы при различных значениях коэффициента усиления разомкнутой системы K , в том числе:
– запасы устойчивости в частотной области;

Таблица

Варианты передаточных функций

1 п/п	Значения параметров	Передаточная функция разомкнутой системы
1	$T = 0,1, \zeta = 1$	$\frac{K}{s(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1)}$
2	$T = 0,05, \zeta = 0,707$	
3	$T = 0,03, \zeta = 0,1$	
4	$T = 0,08, \zeta = 0,5$	
5	$T = 0,01, \zeta = 0,15$	

Окончание табл.

$\begin{smallmatrix} 1 \\ \Pi/\Pi \end{smallmatrix}$	Значения параметров	Передаточная функция разомкнутой системы
6	$T_1 = 0,03, T_2 = 0,5, T_3 = 0,1, T_4 = 0,05$	$\frac{K(T_1s+1)}{s(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$
7	$T_1 = 0,05, T_2 = 0,4, T_3 = 0,08, T_4 = 0,033$	
8	$T_1 = 0,2, T_2 = 0,45, T_3 = 0,1, T_4 = 0,05$	
9	$T_1 = 0,5, T_2 = 0,25, T_3 = 0,1, T_4 = 0,02$	
10	$T_1 = 0,1, T_2 = 0,25, T_3 = 0,1, T_4 = 0,05$	
11	$T_1 = 0,2, T_2 = 0,1, T_3 = 0,05, T_4 = 0,07, \quad = 0,5$	$\frac{K(T_1s+1)}{s(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4^2s^2+2T_4\zeta s+1)}$
12	$T_1 = 0,07, T_2 = 0,1, T_3 = 0,05, T_4 = 0,07, \quad = 0,5$	
13	$T_1 = 0,3, T_2 = 0,1, T_3 = 0,05, T_4 = 0,07, \quad = 0,5$	
14	$T_1 = 0,01, T_2 = 0,1, T_3 = 0,1, T_4 = 0,07, \quad = 0,5$	
15	$T_1 = 0, T_2 = 0,1, T_3 = 0,1, T_4 = 0,07, \quad = 0,5$	

– параметры переходного процесса во временной области.

Отчет должен содержать:

- краткие теоретические сведения;
- анализ результатов построения КГ;
- выводы.