

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

---

**Н.М. Задорожная**

# **Основы теории и проектирования систем управления**

**Методология. Математические модели**



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н. Э. Баумана

**2 0 1 6**

УДК 62-52  
ББК 32.965  
3-15

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*  
по адресу: <http://www.ebooks.bmstu.ru/catalog/200/book34.html>

Факультет «Информатика и системы управления»  
Кафедра «Системы автоматического управления»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом  
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

Рецензент *В.В. Строков*

**Задорожная, Н. М.**

3-15 Основы теории и проектирования систем управления. Методология. Математические модели : учебное пособие / Н.М. Задорожная. Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. — 36, [4] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4306-2

Приведены основные понятия и определения теории автоматического управления, дана классификация систем автоматического управления по различным признакам, указаны основные этапы проектирования систем управления, рассмотрена методика разработки математического описания элементов системы управления, включая вывод уравнений статики и динамики.

Для студентов, изучающих дисциплины «Основы теории управления», «Управление в технических системах» и «Технические средства систем автоматического управления».

УДК 62-52  
ББК 32.965

## Предисловие

Вопросы динамики стационарных непрерывных линейных систем могут быть интересны широкому кругу специалистов по автоматическому управлению техническими объектами и технологическими процессами. Для успешного и быстрого решения многих задач, возникающих при проектировании систем управления, необходимы эффективные, удобные в применении и доступные специалистам методы анализа и синтеза систем управления динамическими объектами. Предлагаемое учебное пособие содержит изложение отвечающих перечисленным требованиям теоретических методов и практические рекомендации по проектированию подобных систем.

Основы теории управления изучаются во всех высших технических учебных заведениях в качестве одной из базовых дисциплин. Объекты и устройства систем управления отличаются по своей физической природе и принципам построения, поэтому проектировщику необходимо не только иметь хорошую подготовку в области высшей математики, физики, теоретической механики, электротехники, электроники, вычислительной техники и т. п., но и уметь учитывать специфические особенности объекта.

Трудность выполнения проектных работ в значительной степени определяется сложностью математического аппарата, используемого при описании объектов и систем автоматического управления (САУ). Для непрерывных объектов с сосредоточенными и распределенными параметрами — это обыкновенные дифференциальные и интегральные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных соответственно, а для объектов, информация с которых снимается в дискретные моменты времени, — разностные уравнения. В такой форме описываются, в частности, процессы в цифровых устройствах, получивших к настоящему времени весьма широкое применение в САУ.

Учебное пособие написано в соответствии с программой курсов «Основы теории управления», «Управление в технических си-

стемах», «Технические средства САУ» и предназначено для студентов технических вузов. Оно может быть использовано студентами при выполнении курсовых и дипломных проектов по указанным курсам, а также специалистами, занимающимися вопросами исследования и проектирования систем автоматического регулирования (САР) и управления различного назначения.

## Введение

Теория автоматического управления (ТАУ) охватывает большой круг вопросов, базирующихся на ряде смежных дисциплин. При более обобщенном подходе подобная теория может быть названа технической кибернетикой.

Термин «кибернетика» как наука об общих закономерностях процессов управления и передачи информации в машинах, живых организмах и их объединениях впервые был предложен американским ученым Н. Винером в 1948 г. В современном понимании кибернетика есть наука об управлении, связи и переработке информации, в которой так называемые кибернетические системы (основной объект исследования) рассматриваются абстрактно, вне зависимости от их материальной природы. Современная кибернетика состоит из ряда разделов, представляющих самостоятельные научные направления: техническая кибернетика, биологическая, экономическая и т. п.

При изучении курса «Основы теории управления» студенты ознакомятся с общими принципами построения САУ, методами исследования процессов управления в технических системах. Принципы построения САУ связаны с общими законами управления. При изучении принципов построения и исследования систем управления необходим анализ управления различными техническими устройствами. Теория автоматического управления сформировалась как самостоятельная наука в первую очередь благодаря изучению процессов управления в технических системах.

Основным принципом построения кибернетических систем и соответственно САУ и САУ является *принцип обратной связи*, который широко используется в технических системах управления. Он заключается в том, что желаемое или оптимальное поведение объекта (двигателя, технологического процесса, летательного аппарата и т. д.) сравнивают с его действительным поведением и выявленную при этом ошибку стремятся привести к нулю или сохранить в заданных пределах.

Первые САР, основанные на принципе обратной связи, были предложены И.И. Ползуновым (1765 г.) для регулирования уровня воды в котле и Дж. Уаттом (1784 г.) для регулирования скорости паровых машин с помощью центробежного регулятора. В дальнейшем САР стали широко применяться в различных областях техники.

Теория автоматического управления в качестве основной и наиболее разработанной части включает в себя теорию автоматического регулирования, однако в ней рассматриваются и более сложные задачи управления.

Задача разработки САУ состоит в том, чтобы, располагая некоторыми априорными сведениями об объекте и заданными техническими требованиями к системе в целом (запас устойчивости, качество, точность, надежность и т. д.), выбрать соответствующую элементную базу и составить схему системы, обеспечивающую реализацию заданных требований. Для этого необходимо обладать достаточно полными сведениями об элементах и устройствах, которые предполагается включить в состав САУ. При отсутствии требуемых элементов, выпускаемых промышленностью серийно, разработчик должен сформулировать технические задания на разработку новых средств автоматики. Разработка и проектирование САУ — сложная задача, включающая следующие этапы:

- 1) определение характеристик и параметров объекта регулирования и условий его работы; составление математических моделей; формулирование требований к САР; выбор структуры и первоначальной схемы; выбор элементов схемы регулирования с учетом статических, динамических, энергетических и эксплуатационных требований и т. д.;

- 2) определение законов регулирования и расчет корректирующих устройств, обеспечивающих заданные требования;

- 3) уточнение структурной схемы системы регулирования, выбор и расчет ее элементов и параметров;

- 4) экспериментальное исследование системы регулирования (или отдельных ее частей) в лабораторных условиях и внесение соответствующих исправлений в ее схему и конструкцию.

В учебном пособии рассмотрены основные понятия и определения ТАУ, классификация систем управления, принципы управления, типовые сигналы, этапы и особенности процесса проектирования САУ, математическое описание САУ, линеаризация уравнений динамики объектов управления.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Кибернетика* — наука о целенаправленном управлении. Общей чертой процессов управления вне зависимости от того, к какой категории явлений они относятся (технической, биологической или любой другой), является их информационный характер. Действительно, всякий процесс управления, направленный на достижение поставленной цели, требует сбора, передачи, переработки и использования информации о внешних и внутренних условиях для приспособления к ним.

Основной метод изучения информационных процессов управления, принятый в кибернетике, — метод их *алгоритмизации*. Этот метод заключается в том, что любой информационный процесс управления описывают в виде некоторой последовательности взаимосвязанных и причинно обусловленных математических и логических операций, представляющих собой так называемый алгоритм рассматриваемого процесса.

Кибернетика не делает акцента на физической, биологической, физиологической или какой-либо другой природе процессов управления, но стремится использовать результаты наук, специально посвященных изучению различных классов систем управления, чтобы обобщить эти результаты в области, касающейся вопросов управления, выявить общие принципы и законы управления объектами на основе понятия *информации*.

Такое абстрагирование позволяет на базе точного количественного определения понятия информации применять для исследования информационных процессов управления методы точных наук и современный математический аппарат.

Под *технической кибернетикой* понимают применение идей и методов кибернетики в области техники. Предмет технической кибернетики — анализ информационных процессов управления техническими объектами и технологическими процессами, синтез алгоритмов управления ими и создание систем управления, позволяющих реализовать эти алгоритмы.

Всякий процесс управления требует наличия одного или нескольких *управляемых объектов* и *управляющей* ими *системы*, которые в совокупности образуют *систему управления*.

Основными вопросами, входящими в предмет технической кибернетики, являются следующие:

- формулирование и выбор критериев эффективности управления на основе заданной цели управления;
- анализ внешних по отношению к системе управления условий или окружающей ее обстановки;
- анализ внутренних условий, т. е. свойств системы управления (в частности, математическое описание объектов управления, моделирование систем управления и т. д.);
- разработка принципов управления и синтез алгоритмов управления, обеспечивающих требуемую эффективность управления;
- сбор и передача информации, необходимой для управления при наличии помех;
- переработка информации в соответствии с алгоритмом управления с целью выработки управляющих сигналов;
- использование переработанной информации, т. е. отработка управляющих сигналов с целью усиления их мощности до уровня, достаточного для воздействия на объекты;
- анализ динамической точности реализации алгоритмов управления;
- разработка методов обеспечения надежности систем управления;
- исследование взаимодействия в системах управления оператора (человека) и технических средств.

В современных условиях потребность в обработке огромных и все возрастающих массивов разнообразной информации средствами вычислительной техники обусловила появление новой отрасли науки и техники — *информатики*.

Определение информатики как единства «модель — алгоритм — программа», дополненное одной из важнейших категорий кибернетики — «цель» и анализом качества достижения цели, иллюстрирует, насколько тесно связаны понятия «информатика» и «управление». Сопоставляя эти понятия, можно определить управление как единство «цель — модель — алгоритм — программа (включая программу для принятия решения) — анализ результата на основе принципа обратной связи».



Информатика, опираясь на достижения кибернетики, позволяет поднять науку и практику управления на качественно новый уровень.

Фундаментальные понятия теории управления — понятия автоматического регулирования и автоматического управления.

*Автоматическое регулирование* — процесс поддержания на заданном уровне одного или нескольких параметров технического объекта или технологического процесса без непосредственного участия человека с помощью специальных автоматических устройств — регуляторов (или автоматических регуляторов).

*Автоматическое управление* — процесс изменения по некоторому закону одного или нескольких параметров технического объекта или технологического процесса без непосредственного участия человека с помощью специальных автоматических устройств — регуляторов (или автоматических регуляторов).

*Система автоматического управления*, в частном случае — САУ, — совокупность технических устройств (датчик, регулятор, двигатель, усилительное устройство и др.), которые объединены для выполнения определенной задачи. Процесс управления — целенаправленный процесс.

## **КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

В основу классификации САУ положены различные признаки.

*По виду математической модели* выделяют САУ:

- линейные — описываются линейными дифференциальными, интегрально-дифференциальными, разностными уравнениями;
- нелинейные — описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

*По характеру процессов в системе:*

- детерминированные (если приложенные воздействия и параметры являются постоянными или детерминированными функциями переменных состояния и времени);
- стохастические (если приложенные воздействия и параметры являются случайными функциями).

*По характеру сигналов:*

- непрерывные — все сигналы описываются непрерывными функциями времени;

• дискретные — выходной сигнал хотя бы одного элемента носит дискретный характер; в свою очередь дискретные САУ по виду квантования подразделяют на импульсные (системы, в которых сигнал квантуется по времени), релейные (системы, в которых сигнал квантуется по уровню) и цифровые (системы, в которых квантование производится и по времени, и по уровню).

Квантование по времени в импульсных системах можно выполнить с помощью ключа; квантование по уровню в релейных системах — с помощью реле; квантование по времени и по уровню в цифровых системах можно выполнить с помощью цифровых устройств.

*По характеру стабильности параметров системы во времени:*

- с постоянными параметрами (или стационарные, или детерминированные во времени);
- с переменными параметрами (или нестационарные).

*По числу контуров:*

- одноконтурные системы, в которых с выхода на вход можно попасть только одним путем;
- многоконтурные системы, в которых с выхода на вход можно попасть разными путями.

*По принципу управления (регулирования):*

- с разомкнутым циклом, или по возмущению (разомкнутые системы);
- с замкнутым циклом, или по отклонению, или по ошибке (замкнутые системы);
- комбинированные системы.

*По виду управляющего воздействия:*

- системы стабилизации (если управляющее входное воздействие есть величина постоянная);
- системы программного управления (если управляющее входное воздействие есть некоторая известная функция времени);
- следящие системы (если управляющее входное воздействие есть некоторая неизвестная функция времени).

*По связи элементов* (характеризует степень сложности системы):

- прямого регулирования (между чувствительным элементом и регулирующим органом нет других элементов);
- непрямого регулирования (между чувствительным элементом и регулирующим органом стоят другие элементы).

*По ошибке в установившемся режиме:*

- статические (статической системой по управляющему или возмущающему воздействию называют такую систему, при подаче на вход которой управляющего или возмущающего воздействия установившаяся *ошибка стремится к ненулевой постоянной величине*);

- астатические (астатической системой по управляющему или возмущающему воздействию называют такую систему, при подаче на вход которой управляющего или возмущающего воздействия установившаяся *ошибка стремится к нулю*).

*По характеру используемой энергии:*

- электрические;
- электромеханические;
- гидравлические;
- пневматические и др.

*По числу регулируемых параметров:*

- с одним регулируемым параметром;
- с несколькими регулируемыми параметрами; эти системы можно еще подразделить так: а) системы связанного и несвязанного регулирования; б) системы зависимого и независимого регулирования.

*По характеру регулируемых физических величин:*

- по напряжению;
- по давлению;
- по температуре;
- по скорости;
- по углу и т. п.

*По характеру параметров:*

- с сосредоточенными параметрами;
- с распределенными параметрами.

*По характеру управляемых (регулируемых) переменных:*

- одномерные системы;
- многомерные системы.

*По характеру использования текущей информации:*

- циклические (детерминированные) системы; такие системы имеют жесткую программу (рассматриваются в теории конечных автоматов);

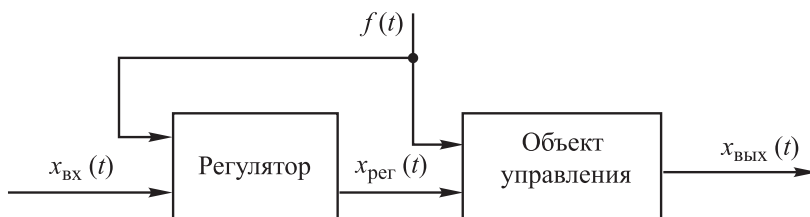
- ациклические (информационные) системы (рассматриваются в ТАУ).

*По свойству приспосабливаться к изменениям внешних условий и улучшать свою работу по мере накопления информации:*

- обыкновенные (имеют полную начальную информацию);
- адаптивные (самонастраивающиеся, самообучающиеся, самоструктурирующиеся и т. п.) (имеют неполную начальную информацию, автоматически восполняемую в процессе работы системы);
- интеллектуальные (способны обучаться, проводить адаптацию, настройку на основе запоминания и анализа информации о поведении объекта управления и внешних воздействий).

## ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ УПРАВЛЕНИЯ

*Разомкнутый принцип управления (по возмущению)* заключается в обеспечении требуемого закона изменения регулируемой величины  $x_{\text{вых}}(t)$  непосредственно путем преобразования управляющего воздействия  $x_{\text{вх}}(t)$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Структурная схема САУ с разомкнутым циклом управления:

$f(t)$  — возмущающее воздействие;  $x_{\text{вх}}(t)$  — управляющее воздействие;  
 $x_{\text{рег}}(t)$  — регулирующее воздействие;  $x_{\text{вых}}(t)$  — регулируемая величина

Внешнее возмущающее воздействие  $f(t)$  измеряется и подается на вход регулятора, где в соответствии с алгоритмом вырабатывается регулирующее воздействие  $x_{\text{рег}}(t)$ , подаваемое на вход объекта управления и компенсирующее возмущающее воздействие.

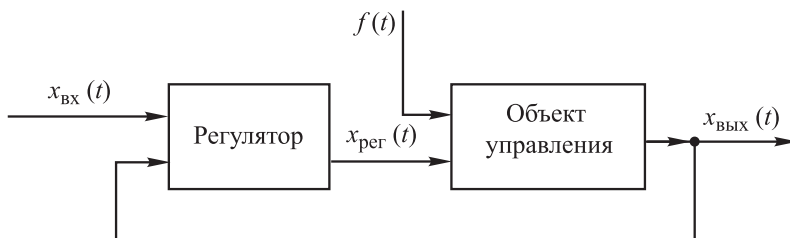
Преимущества разомкнутого принципа управления:

- системы с разомкнутым типом управления, как правило, более устойчивые;
- если возмущающее воздействие  $f(t)$  измерено точно, то система может отработать его с высокой точностью.

Недостатки разомкнутого принципа управления:

- нельзя учесть изменения в самом объекте управления в процессе функционирования и изменения внешнего возмущения;
- разомкнутые системы, как правило, конструктивно более сложные.

*Замкнутый принцип управления (по отклонению, по ошибке)* заключается в сравнении входного сигнала  $x_{\text{вх}}(t)$  с действительным изменением регулируемой величины  $x_{\text{вых}}(t)$  на основе применения обратной связи (рис. 2).



**Рис. 2.** Структурная схема САУ с замкнутым циклом управления (обозначения — см. рис. 1)

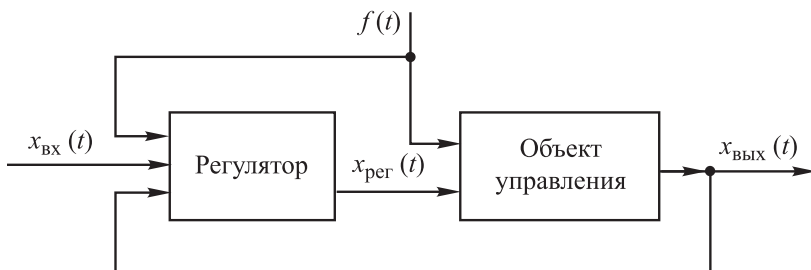
Информация об изменении выходного сигнала поступает по обратной связи на вход регулятора, где в соответствии с алгоритмом вырабатывается регулирующее воздействие, подаваемое на вход объекта управления и компенсирующее влияние возмущающего сигнала.

Преимущества замкнутого принципа управления:

- уменьшается отклонение значения регулируемой величины от требуемого вне зависимости от того, какими факторами оно вызвано: внешним возмущающим воздействием или изменением характеристик самого объекта управления в процессе его функционирования;
- замкнутые системы конструктивно могут быть более простыми;
- замкнутый принцип может быть применен для объектов, точные характеристики и параметры которых определить невозможно (например, в случае «черного ящика»).

Недостаток замкнутого принципа управления состоит в том, что в замкнутых системах чаще возникает проблема устойчивости.

*Комбинированный принцип управления* заключается в сочетании разомкнутого и замкнутого принципов управления (рис. 3).



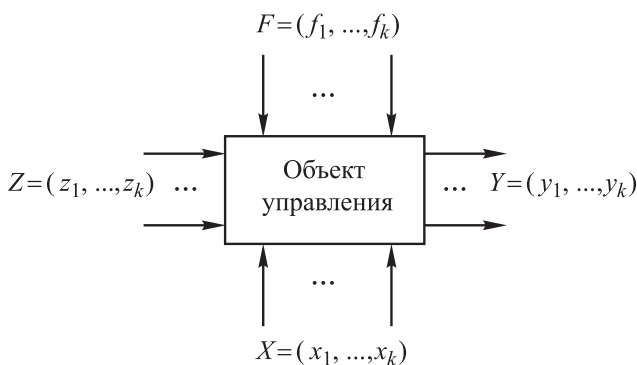
**Рис. 3.** Структурная схема САУ с комбинированным циклом управления (обозначения — см. рис. 1)

Преимущество комбинированного принципа управления состоит в том, что проявляются достоинства сочетаемых принципов управления и при этом компенсируются их недостатки.

Недостатком комбинированного принципа управления является то, что комбинированные системы конструктивно сложнее, чем разомкнутые или замкнутые системы.

## ОБЪЕКТЫ УПРАВЛЕНИЯ

К объектам управления относятся управляемые технические устройства, технологические процессы и более простые САУ. Состояние объекта управления определяется рядом величин, характеризующих как воздействие на объект внешней среды, так и процессы, протекающие внутри самого объекта управления (рис. 4).



**Рис. 4.** Схема объекта управления:

$Z$  — совокупность внешних контролируемых воздействий;  $F$  — совокупность внешних неконтролируемых воздействий;  $Y$  — совокупность управляемых (или выходных) сигналов;  $X$  — совокупность управляющих (или входных) воздействий

*Контролируемые величины* (параметры) непрерывно измеряются в процессе работы, *неконтролируемые величины* (параметры) оказывают влияние на режим работы объекта, но не измеряются. *Воздействия* — величины, выражающие внешнее влияние на объект; управляющее воздействие вырабатывается регулятором, возмущающее воздействие (нагрузка или помеха) от регулятора не зависит. *Управляемые (регулируемые) величины* (параметры) — контролируемые величины, по которым ведется управление (регулирование).

Классификация объектов управления сходна с классификацией САУ. Многие признаки классификации САУ могут быть применены и к объектам управления (например, классификация по виду математического описания, по стабильности параметров и др.).

Ниже приведена классификация объектов управления по ряду признаков.

*По виду математического описания* выделяют объекты управления:

- линейные;
- нелинейные.

*По стабильности параметров во времени:*

- стационарные;
- нестационарные.

*По свойству устойчивости:*

- устойчивые (после окончания воздействия объекты управления со временем возвращаются в равновесное состояние, близкое к исходному);
- неустойчивые (после окончания воздействия управляемая величина продолжает изменяться);
- нейтральные (после окончания воздействия объекты управления переходят в состояние равновесия, отличное от первоначального состояния и зависящее от воздействия).

## **ТИПОВЫЕ СИГНАЛЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Исходя из практики расчета и проектирования САУ выделяют следующие регулярные (управляющие) сигналы.

1. Дельта-функция (функция Дирака)  $\delta(t)$ , имеющая форму импульса бесконечно малой длительности и бесконечно большой по-

ложительной амплитуды, площадь которого равна единице. Дельта-функцию можно рассматривать как производную от единичной ступенчатой функции (воздействия):

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

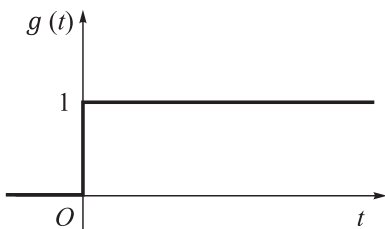
2. Единичное ступенчатое воздействие (рис. 5), наиболее часто используемое при оценке качества процессов управления (регулирования):

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

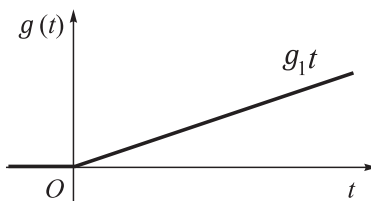
где  $g(t)$  — тестовый сигнал.

3. Управляющее воздействие, изменяющееся по линейному закону (рис. 6):

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ g_1 t, & t \geq 0. \end{cases}$$



**Рис. 5.** Единичное ступенчатое воздействие



**Рис. 6.** Воздействие, изменяющееся по линейному закону

4. Управляющее воздействие, изменяющееся по степенному закону (рис. 7):

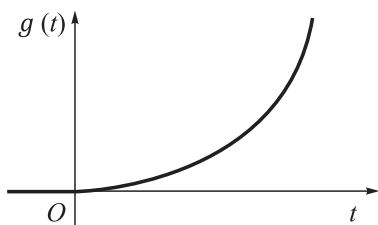
$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sum_{i=0}^n g_i t_i^n, & t \geq 0. \end{cases}$$



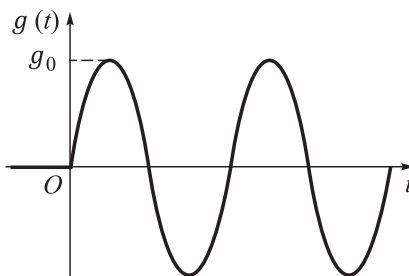
5. Управляющее воздействие, изменяющееся по синусоидальному закону (рис. 8):  $\Pi$

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ g_0 \sin \omega_0 t, & t \geq 0, \end{cases}$$

где  $g_0$  — максимальная амплитуда входного воздействия;  $\omega_0$  — частота входного воздействия.



**Рис. 7.** Воздействие, изменяющееся по степенному закону



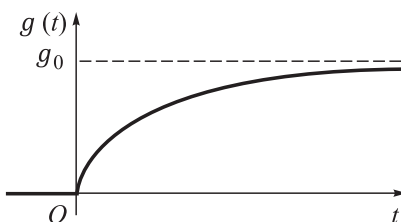
**Рис. 8.** Воздействие, изменяющееся по синусоидальному закону

Управляющие воздействия 1–5 используют при оценке точности систем управления. Иногда при оценке качества и точности системы управления применяют экспоненциальный сигнал управления.

6. Управляющее воздействие, изменяющееся по экспоненциальному закону (рис. 9):

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ g_0 (1 - e^{-rt}), & t \geq 0, \end{cases}$$

где  $r$  — показатель экспоненты.



**Рис. 9.** Воздействие, изменяющееся по экспоненциальному закону

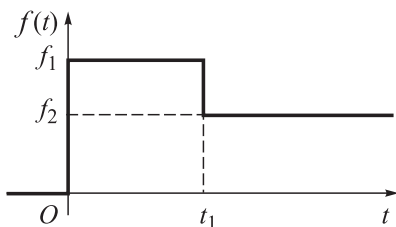
Управляющие сигналы 1–6 относятся к так называемым регулярным воздействиям. Далее рассмотрим наиболее часто применяемые сигналы возмущающих воздействий.

Выделяют следующие возмущающие воздействия.

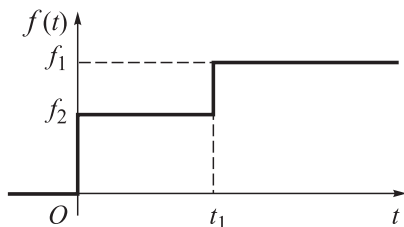
1. Сигнал сброса нагрузки (рис. 10):

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f_1, & 0 \leq t < t_1; \\ f_2, & t \geq t_1, \end{cases}$$

где  $f_1 > f_2$ .



**Рис. 10.** Сигнал сброса нагрузки  
амплитуды сигнала:  
 $f_1, f_2$  — импульсы



**Рис. 11.** Сигнал наброса нагрузки  
(обозначения — см. рис. 10)

2. Сигнал наброса нагрузки (рис. 11):

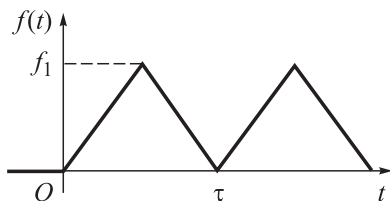
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f_2, & 0 \leq t < t_1; \\ f_1, & t \geq t_1, \end{cases}$$

где  $f_1 > f_2$ .

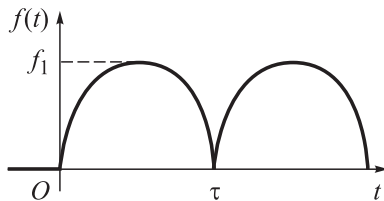
На многие объекты регулирования действуют различные периодические сигналы.

3. Периодически повторяющиеся треугольные импульсы (рис. 12).

4. Периодически повторяющиеся параболы (рис. 13).



**Рис. 12.** Периодически повторяющиеся треугольные импульсы:  
 $f_1$  — амплитуда импульсов;  $\tau$  — длительность импульсов

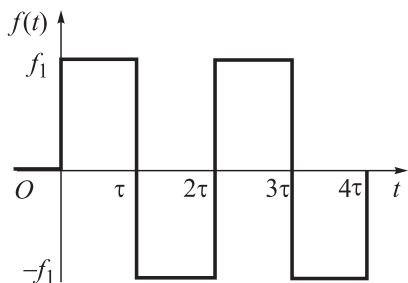


**Рис. 13.** Периодически повторяющиеся параболы (обозначения — см. рис. 12)

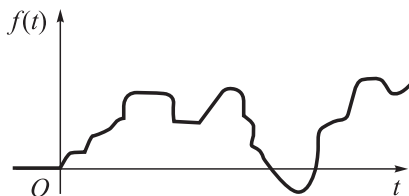
5. В ряде случаев в качестве типового возмущающего сигнала используют периодически повторяющуюся ступенчатую функцию с максимальным (или минимальным) значением  $\pm f_1$  (рис. 14).

6. В качестве возмущающего воздействия может также использоваться синусоидальный сигнал (см. рис. 8).

7. Существуют САР, на вход которых наряду с регулярным воздействием поступает сигнал в виде флуктуаций, задаваемых как случайная функция времени (рис. 15).



**Рис. 14.** Периодически повторяющиеся ступенчатые функции (обозначения — см. рис. 12)



**Рис. 15.** Случайные воздействия

Кроме того, в зависимости от вида САР сигналы в них могут быть непрерывными и дискретными. Различают следующие виды дискретных сигналов:

- импульсные (модуляция по времени);
- релейные (модуляция по уровню);
- цифровые (модуляция по времени и по уровню).

## ЭТАПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Проектирование САУ может выполняться двумя способами:

- 1) традиционным ручным;
- 2) автоматизированным с использованием современных информационных технологий (ЭВМ с соответствующим специализированным программным обеспечением).

Независимо от способа проектирования весь процесс делится на несколько характерных этапов:

- 1) разработка математической модели объекта управления (регулирования);
- 2) разработка математической модели системы управления (выбор устройств неизменяемой и изменяемой частей системы);
- 3) решение задачи анализа (и синтеза системы);
- 4) моделирование системы.

Рассмотрим подробнее каждый этап проектирования САУ.

Следует отметить, что, прежде чем приступить к первому этапу, необходимо тщательно обследовать объект управления для выяснения принципа его действия, условий работы, параметров и характеристик и т. п.

1. *Разработка математической модели объекта управления (регулирования).* Зная физические процессы, происходящие в объекте управления, можно при определенных допущениях описать его поведение аналитически, обычно с помощью дифференциальных, интегрально-дифференциальных или разностных уравнений. Проектировщик выясняет диапазоны изменения входных и выходных переменных и составляет структурную схему объекта управления. Структурные схемы с передаточными функциями элементов достаточно громоздки, но по ним можно не только выявить все внутренние связи, но и определить возможные места включения различных технических устройств.

Полученные математические модели являются математической формализацией процессов в реальных объектах, причем один и тот же объект в зависимости от принятых допущений может быть описан в различной форме. В этой связи возникло направление, в рамках которого разрабатываются методы определения математической модели, имеющей характеристики (по данным наблюдения за входными и выходными переменными нормально функционирующего объекта), наилучшим образом приближенные к аналогичным характеристикам реального объекта. Это направление было названо идентификацией. Таким образом, *идентификацией* динамической системы (процесса) называют получение или уточнение по экспериментальным данным математической модели этой системы (процесса), выраженной посредством того или иного математического аппарата. Наиболее детально разработаны методы идентификации линейных систем.

2. *Разработка (построение) математической модели САУ.* На этом этапе выбирают устройства изменяемой и неизменяемой частей. К неизменяемой части системы принято относить исполнительные элементы, усилительные элементы (мощности), измерительные элементы (датчики) и, кроме того, объект управления. Элементы системы выбирают с учетом требований к точности и качеству процессов управления, надежности действия, массогабаритным характеристикам, стоимости, стойкости к влиянию агрессивной среды и т. д.

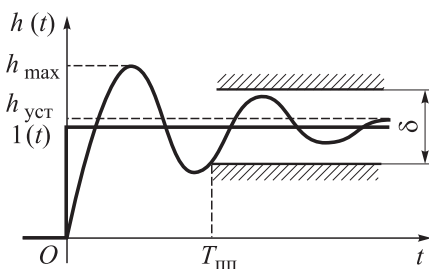
К изменяемой части системы относят электронные усилители, преобразователи, микропроцессорные устройства, элементы коррекции динамических характеристик. На втором этапе проектировщик составляет математические модели всех элементов системы и в результате формирует функциональную и структурную схемы системы.

3. *Решение задачи анализа системы и, в случае необходимости, решение задачи синтеза САУ.* Задача анализа включает три подзадачи: 1) анализ устойчивости системы; 2) анализ качества системы и 3) анализ точности системы.

Анализ устойчивости САУ. Под устойчивостью системы понимают способность САУ возвращаться к первоначальному состоянию равновесия после исчезновения возмущения. Для исследования устойчивости используют аналитические (или алгебраические) методы (критерий Гурвица, критерий Раунса) и частотные (или графоаналитические) методы (критерий Михайлова, критерий Найквиста — Михайлова, метод логарифмических частотных характеристик (ЛЧХ) (или распространение критерия Найквиста — Михайлова на ЛЧХ) и др.

Следует отметить, что в основе любого метода исследования устойчивости лежит положение об устойчивости по Ляпунову, согласно которому все корни характеристического уравнения устойчивой системы должны лежать в левой полуплоскости комплексной плоскости корней.

Анализ качества САУ. Реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях называют *переходной функцией системы*. Анализ качества выполняют с помощью прямых или косвенных методов. При использовании прямых методов качество анализируют непосредственно по кривой переходного процесса системы (переходной функции), которую оценивают с помощью совокупности характеристик, называемых *показателями качества*. Обычно различают следующие показатели качества переходного процесса (рис. 16).



**Рис. 16.** Характеристика типового переходного процесса  $h(t)$  САУ

*Время регулирования, или время переходного процесса  $T_{\text{пп}}$ , — время, в течение которого кривая переходного процесса входит в «трубку» точности  $\delta$ .*

*Перерегулирование  $\sigma$  — максимальное отклонение от заданного установившегося значения переходного процесса  $h_{\text{уст}}$ , выраженное в процентах:*

$$\sigma = \frac{h_{\text{max}} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100 \, \% .$$

Количество полных колебаний за время переходного процесса  $\alpha$ .

*Время разгона  $t_p$  — время установления первого максимума.*

*Статическая (установившаяся) ошибка  $\varepsilon(t)$  — разность между входным воздействием и установившимся значением переходного процесса:*

$$\varepsilon(t) = |h_{\text{уст}} - 1(t)|.$$

Показатели  $T_{\text{пп}}$  и  $\sigma$  называют *первичными показателями качества*.

Для анализа качества используют также косвенные методы: частотный метод оценки качества, метод интегральных оценок, метод корневого годографа, метод логарифмического корневого годографа.

Анализ точности САУ. Различают статическую и динамическую точность САУ. Статическую точность рассматривают при подаче на вход детерминированных сигналов, динамическую — при подаче на вход случайных сигналов.

4. *Моделирование системы.* Различают математическое, имитационное, полунатурное и другие виды моделирования, применяемые для проверки того, удовлетворяет ли система предъявляемым к ней техническим требованиям.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Реальные характеристики физических систем при их детальном изучении настолько сложны, что не поддаются точному описанию. Даже достаточно точное описание отдельных элементов системы

управления обычно приводит к сложному описанию всей системы, вследствие чего ее анализ может стать невозможным.

Аналитические трудности, возникающие в связи с более или менее точным описанием САУ, можно преодолеть, применив упрощенное описание отдельных физических элементов, составляющих систему. Это упрощенное описание называют *математической моделью*. Именно при выборе математических моделей, представляющих реальные элементы САУ, разработчик имеет наибольшую возможность как проявить свое мастерство, так и ошибиться.

Математические модели физических элементов САУ выводят на основе различных упрощающих предположений. Подобного рода идеализация значительно упрощает методику анализа и синтеза САУ. В частности, линейаризация дифференциальных и разностных уравнений приводит к линейным динамическим элементам и системам, математический аппарат которых разработан наиболее полно.

Математические модели САУ (как объекта управления, так и всей системы) составляют в виде алгебраических, дифференциальных, интегрально-дифференциальных или конечно-разностных уравнений.

Различают два рода уравнений: уравнения установившихся режимов (уравнения статики) и уравнения динамических режимов переходных процессов (уравнения динамики).

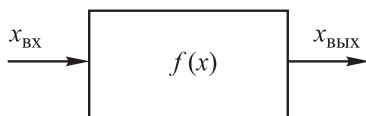
## УРАВНЕНИЯ СТАТИКИ

Уравнения установившихся режимов, при которых возмущающее воздействие и нагрузку принимают постоянными, обычно являются алгебраическими, чаще всего — линейными.

Уравнение  $x_{\text{ВЫХ}} = k f(x_{\text{ВХ}})$  называют уравнением статики элемента (рис. 17). Для линейных статических характеристик справедливо уравнение

$$x_{\text{ВЫХ}} = k x_{\text{ВХ}}.$$

Коэффициент  $k$  называют *коэффициентом усиления*, если величины  $x_{\text{ВХ}}$  и  $x_{\text{ВЫХ}}$  имеют одну физическую единицу измерения (например, в электронном



**Рис. 17.** Элемент со статической характеристикой:

$x_{\text{ВХ}}$ ,  $x_{\text{ВЫХ}}$  — входное и выходное воздействия;  $f(x)$  — нагрузка

усилителе), и *коэффициентом передачи* при различной физической природе входной и выходной переменных (например, в двигателе на входе имеем напряжение, на выходе — угол поворота).

Если статическая характеристика элемента нелинейная, то рассматривают зависимость коэффициента  $k$  от входной величины:

$$x_{\text{ВЫХ}} = k(x_{\text{ВХ}}) x_{\text{ВХ}},$$

или

$$x_{\text{ВЫХ}} / x_{\text{ВХ}} = k(x_{\text{ВХ}}).$$

В этом случае может быть применена линеаризация, т. е. замена нелинейной статической характеристики отрезками прямых линий.

При сложной структуре системы (соединение статических элементов) определяют эквивалентные характеристики для отдельных участков схемы в зависимости от способа соединения элементов. Если все элементы линейны, применим аналитический метод расчета статических характеристик, при этом могут быть получены аналитические выражения (общие для ряда систем), которые позволят вычислить общий коэффициент усиления (передачи) всей системы.

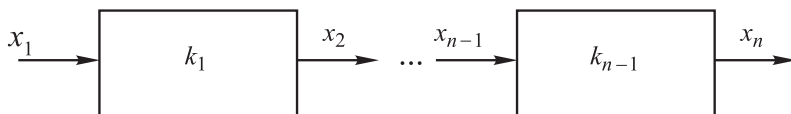
В случае последовательного соединения элементов (рис. 18) справедливы соотношения

$$x_2 = k_1 x_1; \quad x_3 = k_2 x_2, \dots, \quad x_n = k_{n-1} x_{n-1},$$

или

$$x_3 = (k_2 k_1) x_1 \dots$$

и т. д.



**Рис. 18.** Последовательно соединенные звенья:

$x_1, \dots, x_n$  — воздействия;  $k_1, \dots, k_{n-1}$  — коэффициент усиления

Тогда  $x_n = (k_1 k_2 \dots k_{n-1}) x_1$ , т. е. эквивалентный коэффициент усиления (передачи) последовательного соединения  $n - 1$  линейных звеньев

$$K = \prod_{i=1}^n k_i.$$



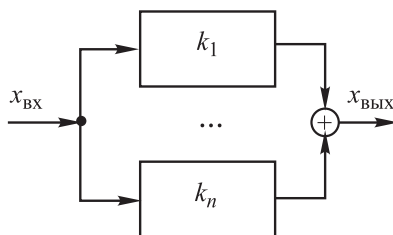
В случае параллельного соединения элементов (рис. 19) справедливы соотношения

$$x_1 = k_1 x_{\text{BX}}; \quad x_2 = k_2 x_{\text{BX}} \dots x_{n-1} = k_{n-1} x_{\text{BX}}$$

или  $x_{\text{ВЫХ}} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$ .

Подставляя  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), получаем

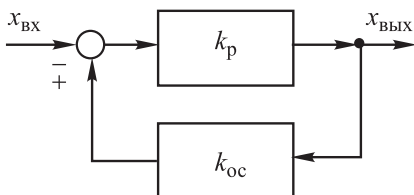
$$\begin{aligned} x_{\text{ВЫХ}} &= k_1 x_{\text{BX}} + k_2 x_{\text{BX}} + \dots + k_{n-1} x_{\text{BX}} = \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}) x_{\text{BX}}, \end{aligned}$$



**Рис. 19.** Параллельно соединенные звенья (обозначения — см. рис. 18)

т. е. при параллельном соединении эквивалентный коэффициент усиления (передачи)

$$K = \sum_{i=1}^n k_i.$$



**Рис. 20.** Участок САУ с обратной связью

В случае замкнутого участка системы с обратной связью (рис. 20)

$$k = \frac{k_p}{1 \pm k_{\text{oc}} k_p},$$

где  $k_p$  — коэффициент усиления (передачи) разомкнутого участка системы;  $k_{\text{oc}}$  — коэффициент обратной связи (знак плюс соответствует отрицательной обратной связи, знак минус — положительной).

Для замкнутого участка системы зависимость между входной и выходной переменными определяют с учетом обратной связи:

$$x_{\text{ВЫХ}} = \frac{k_p}{1 \pm k_{\text{oc}} k_p} x_{\text{ВХ}}.$$

Таким образом, получены уравнения статики для последовательного, параллельного соединения элементов, а также соединения элементов с обратной связью.

Следует отметить, что при расчете САУ в статическом режиме основным вопросом анализа САУ является определение установившейся ошибки (статической точности) системы.

## УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

Для математического описания динамики систем управления используют два метода: метод переменных «вход-выход» и метод пространства состояний. Первый метод основан на разбиении системы на элементы, для каждого из которых составляют соответствующее уравнение на основании того физического закона, который определяет процесс, протекающий в данном элементе. Совокупность уравнений динамики, составленных для всех элементов системы, определяет процесс автоматического управления.

Второй метод связан с формализованными методами анализа динамики механических систем, основанными на известном из курса теоретической механики принципе Лагранжа — Гамильтона, т. е. при составлении дифференциальных уравнений используют уравнения Лагранжа второго рода, составленные для обобщенных координат (состояний) системы. Этот метод известен как метод пространства состояний и основан на подходе, при котором применяется векторно-матричная форма описания динамики САУ.

В качестве примера рассмотрим составление уравнений динамики электродвигателя, являющегося наиболее распространенным объектом в самых различных системах, от рулевой машинки самолета до следящих систем, используемых в радиолокации, робототехнике и т. д.

Для вывода уравнений необходимо выбрать какой-либо физический закон, который определяет процессы в конкретном элементе системы, причем в любые моменты времени. В данном случае используем первый закон Ньютона: сумма моментов, приложенных к валу двигателя, равна нулю, если он неподвижен или вращается с постоянной угловой скоростью.

Рассмотрим моменты, действующие на вал двигателя:

$M_{\text{дв}}$  — движущий момент, производимый двигателем при подаче на него напряжения  $U$ ;

$M_{\text{сопр}}$  — момент сопротивления, включающий:  $M_{\text{ин}}$  — момент инерции двигателя и нагрузки;  $M_{\text{вт}}$  — момент вязкого трения;  $M_{\text{ст}}$  — момент сухого трения.

Запишем первый закон Ньютона с учетом введенных обозначений:

$$M_{\text{ин}} + M_{\text{вт}} + M_{\text{ст}} = M_{\text{дв}}.$$

Движущий момент зависит от напряжения  $U$  и скорости вращения вала двигателя  $\omega$ , т. е.  $M_{\text{дв}} = M_{\text{дв}}(U, \omega)$ . Как известно из динамики, момент инерции двигателя  $M_{\text{ин}} = J \frac{d\omega}{dt}$ . Момент вязкого трения зависит от скорости вращения вала двигателя:  $M_{\text{вт}} = M_{\text{вт}}(\omega)$ . Момент сухого трения  $M_{\text{ст}}$  не учитывается, так как он сказывается только в момент начала вращения вала двигателя, а мы рассматриваем двигатель в движении.

Подставив выражения для моментов с соответствующими знаками, получим уравнение

$$J \frac{d\omega}{dt} + M_{\text{вт}}(\omega) = M_{\text{дв}}(U, \omega). \quad (1)$$

В уравнении (1) связаны обобщенные координаты  $U$  и  $\omega$ . Учитывая то, что угол поворота вала двигателя  $\varphi$  обусловлен угловой скоростью вращения вала

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

и переписав уравнение (1), получим дифференциальное уравнение, отражающее динамику двигателя в переменных «вход-выход»:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M_{\text{вт}}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = M_{\text{дв}}\left(U, \frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Таким образом, мы получим уравнение, где вход —  $U$ , выход —  $\varphi$ . Отсюда следует вывод, что необходимо выяснить принцип действия элемента, прежде чем определять уравнение его динамики.

Полученное уравнение двигателя нелинейно, его практически невозможно использовать при решении задач анализа динамики систем управления. В связи с этим следующим этапом математического описания системы (ее элементов) является линеаризация уравнений динамики.

## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Прежде всего отметим, что линеаризовать можно лишь те нелинейности, которые имеют непрерывные производные. Линеаризация основана на применении разложения функции в ряд Тейлора.

Пусть функция  $z(x, y)$  — нелинейная. Рассмотрим разложение этой функции в ряд Тейлора относительно некоторой точки с координатами  $(x_0, y_0)$ , которую называют *опорной точкой*. Текущие координаты  $x$  и  $y$  определим через малые отклонения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  от опорной точки:

$$\begin{cases} x = x_0 + \Delta x; \\ y = y_0 + \Delta y. \end{cases}$$

Тогда, как известно из курса высшей математики, можно разложить функцию  $z(x, y)$  в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \\ &= [z(x, y)]_{y=y_0}^{x=x_0} + \left[ \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right]_{y=y_0}^{x=x_0} \Delta x + \left[ \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_0}^{x=x_0} \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} \right]_{y=y_0}^{x=x_0} \Delta x^2 + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} \right]_{y=y_0}^{x=x_0} \Delta y^2 + \\ &+ \left[ \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{y=y_0}^{x=x_0} \Delta x \Delta y + \dots + R(n), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R(n)$  — остаточный член при значениях высших частных производных.

Линеаризация состоит в разложении нелинейных функций в ряд Тейлора (2) и отбрасывании членов с производными второго порядка и выше, т. е.

$$\begin{aligned} z(x, y) &\approx [z(x, y)]_{y=y_0}^{x=x_0} + \left[ \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right]_{y=y_0}^{x=x_0} \Delta x + \left[ \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_0}^{x=x_0} \Delta y + \\ &+ \left[ \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{y=y_0}^{x=x_0} \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (3)$$

Графически линейризацию функции  $z(x, y)$  при малых отклонениях  $\Delta x$  и  $\Delta y$  от опорной точки  $(x_0, y_0)$  можно представить как замену кривой функции  $z(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  отрезком касательной к этой кривой в данной точке. Полученное с помощью ряда Тейлора представление функции  $z(x, y)$  по формуле (3) будет тем точнее, чем меньше отклонения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

Из практики эксплуатации САУ известно, что отклонения от установившегося режима работы малы, т. е. ошибка  $\varepsilon(t) = y(t) - x(t)$  в течение большей части времени работы САУ мала. Следовательно, представленный метод линейризации имеет практическое значение для анализа динамики систем.

При линейризации уравнения двигателя (1) выбираем опорную точку с координатами  $(\omega_0, U_0)$ . Текущие координаты  $U$  и  $\omega$  можно описать системой уравнений

$$\begin{cases} U = U_0 + \Delta U; \\ \omega = \omega_0 + \Delta \omega. \end{cases}$$

Тогда с учетом формулы (3), отбросив члены с производными второго порядка и выше, получим уравнение

$$J \frac{d(\omega_0 + \Delta \omega)}{dt} = J \frac{d\omega_0}{dt} + J \frac{d\Delta \omega}{dt}.$$

Аналогично получаем уравнение для момента вязкого трения

$$M_{\text{вт}}(\omega) \approx M_{\text{вт}}(\omega_0) + \left[ \frac{\partial M_{\text{вт}}(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} \Delta \omega$$

и уравнение для движущего момента

$$\begin{aligned} M_{\text{дв}}(U, \omega) \approx M_{\text{дв}}(U_0, \omega_0) + \left[ \frac{\partial M_{\text{дв}}(U, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta \omega + \\ + \left[ \frac{\partial M_{\text{дв}}(U, \omega)}{\partial U} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta U. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для моментов  $M_{\text{ин}}$ ,  $M_{\text{вт}}$ ,  $M_{\text{дв}}$  в уравнение (1), получаем линеаризованное уравнение динамики:

$$\begin{aligned}
 J \frac{d\Delta\omega}{dt} + M_{\text{вт}}(\omega_0) + \left[ \frac{\partial M_{\text{вт}}(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} \Delta\omega = \\
 = M_{\text{дв}}(U_0, \omega_0) + \left[ \frac{\partial M_{\text{дв}}(U, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta\omega + \\
 + \left[ \frac{\partial M_{\text{дв}}(U, \omega)}{\partial U} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta U.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Далее, положив в (4)  $\Delta\omega = 0$ , получим уравнение статики

$$M_{\text{вт}}(\omega_0) = M_{\text{дв}}(U_0, \omega_0).$$

Вычтем из уравнения динамики (4) уравнение статики:

$$\begin{aligned}
 J \frac{d\Delta\omega}{dt} + \left[ \frac{\partial M_{\text{вт}}(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} \Delta\omega - \left[ \frac{\partial M_{\text{дв}}(U, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta\omega = \\
 = \left[ \frac{\partial M_{\text{дв}}(U, \omega)}{\partial U} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta U.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (5) — это уравнение отклонения системы от опорного режима, или линеаризованное уравнение в отклонениях.

Проведя эквивалентные преобразования уравнения (5), получим

$$\begin{aligned}
 J \frac{d\Delta\omega}{dt} + \left( \left[ \frac{\partial M_{\text{вт}}(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} - \left[ \frac{\partial M_{\text{дв}}(U, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}} \right) \Delta\omega = \\
 = \left[ \frac{\partial M_{\text{дв}}(U, \omega)}{\partial U} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta U.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Далее поделим обе части уравнения (6) на ненулевой множитель

$$\left[ \frac{\partial M_{\text{вТ}}(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} - \left[ \frac{\partial M_{\text{дВ}}(U, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}}$$

и получим тождество

$$\begin{aligned} & \frac{d\Delta\omega}{dt} \frac{J}{\left[ \frac{\partial M_{\text{вТ}}(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} - \left[ \frac{\partial M_{\text{дВ}}(U, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}}} + \Delta\omega = \\ & = \frac{\left[ \frac{\partial M_{\text{дВ}}(U, \omega)}{\partial U} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}}}{\left[ \frac{\partial M_{\text{вТ}}(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} - \left[ \frac{\partial M_{\text{дВ}}(U, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}}} . \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} T &= \frac{J}{\left[ \frac{\partial M_{\text{вТ}}(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} - \left[ \frac{\partial M_{\text{дВ}}(U, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}}} ; \\ k &= \frac{\left[ \frac{\partial M_{\text{дВ}}(U, \omega)}{\partial U} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}}}{\left[ \frac{\partial M_{\text{вТ}}(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} - \left[ \frac{\partial M_{\text{дВ}}(U, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\substack{U=U_0 \\ \omega=\omega_0}}} . \end{aligned}$$

В результате получим следующее уравнение вращения вала двигателя:

$$T \frac{d\Delta\omega}{dt} + \Delta\omega = k \Delta U ,$$

где  $T$  — постоянная времени двигателя;  $k$  — коэффициент передачи в статике.

Для упрощения записи принимают  $\Delta\omega = \omega$  и  $\Delta U = U$ , тогда уравнение двигателя приобретает вид

$$T \frac{d\omega}{dt} + \omega = kU. \quad (7)$$

Это уравнение описывает движение около опорной траектории. Благодаря процедуре линеаризации уравнений полученное нелинейное уравнение двигателя можно рассматривать как линейное. Следует отметить, что уравнение (7) описывает систему (объект) в любых точках, но лишь при малых отклонениях. Решив это уравнение, можно получить описание динамических процессов в системе. Найдем решение этого неоднородного дифференциального уравнения второго порядка в общем виде:

$$a_0 \frac{dx}{dt} + a_1 x = b_0 y. \quad (8)$$

Решение уравнения следует искать в виде

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{вын}}(t),$$

где  $x_{\text{св}}(t)$  — свободная составляющая решения однородного дифференциального уравнения,  $x_{\text{св}}(t) = Ae^{\lambda t}$ ;  $x_{\text{вын}}(t)$  — вынужденная составляющая решения неоднородного дифференциального уравнения. Следовательно,

$$a_0 \frac{dx_{\text{св}}(t)}{dt} + a_1 x_{\text{св}}(t) = 0. \quad (9)$$

Дифференцируя  $x_{\text{св}}(t)$  и преобразуя уравнение (9), получаем

$$Ae^{\lambda t} (a_0 \lambda + a_1) = 0,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{a_1}{a_0},$$

тогда свободная составляющая

$$x_{\text{св}}(t) = Ae^{-\frac{a_1}{a_0}t}.$$

Вынужденную составляющую — частное решение уравнения (8) — будем искать в виде



$$x_{\text{вын}}(t) = By_0. \quad (10)$$

Подставив (10) в исходное дифференциальное уравнение (8), получим

$$a_0 \frac{dx_{\text{вын}}(t)}{dt} + a_1 x_{\text{вын}}(t) = b_0 y;$$

$$a_1 By_0 = b_0 y_0;$$

$$B = \frac{b_0}{a_1} \text{ при } y_0 \neq 0.$$

Используя граничные условия (при  $t_0 = 0$   $x(t_0) = 0$ ), получаем

$$x(t_0) = x_{\text{св}}(t_0) + x_{\text{вын}}(t_0) = 0;$$

$$A + By_0 = 0; \quad A = -By_0 = -\frac{b_0}{a_1} y_0.$$

Тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения (8)

$$x(t) = -\frac{b_0}{a_1} y_0 e^{-\frac{a_1}{a_0} t} + \frac{b_0}{a_1} y_0 = \frac{b_0}{a_1} y_0 \left( 1 - e^{-\frac{a_1}{a_0} t} \right).$$

Для нашего случая  $a_0 = T$ ;  $a_1 = 1$ ;  $b_0 = k$ ;  $y_0 = U_0$ ;  $x = \omega$  и решение исходного уравнения (8) для двигателя принимает вид

$$\omega(t) = kU \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Следует отметить, что если бы система двигалась с первоначальной скоростью, то она достигла установившейся скорости через время  $T$ . Считается, что переходный процесс устанавливается через интервал времени  $3T < t < 4T$ , где  $T$  — постоянная времени, которая характеризует инерционность системы.

Таким образом, на примере были показаны этапы разработки математической модели объекта управления (электродвигателя), выведены уравнения динамики и статики, выполнена линеаризация уравнений динамики, получено решение исходного линеаризованного уравнения.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое информация? В чем состоит информационная сущность процесса управления?
2. Что такое информатика и информационная система? Что такое общая и техническая кибернетика?
3. Какая связь существует между кибернетикой и теорией управления?
4. Какие задачи стоят перед теорией автоматического управления?
5. Что представляют собой автоматическое регулирование и автоматическое управление?
6. Что такое САР и САУ?
7. Каковы основные признаки классификации САУ?
8. Каковы основные этапы разработки САУ?
9. Каковы принципы управления, применяемые в САУ?
10. Какими свойствами обладают САР (САУ), функционирующие по замкнутому циклу?
11. В чем сущность прямого и непрямого автоматического регулирования?
12. Каковы отличительные особенности следующих типов САР: систем автоматической стабилизации, систем программного регулирования, следящих систем?
13. Какие существуют принципы и особенности статического и астатического регулирования (по отношению к управляющему и возмущающему воздействиям)?
14. Каковы основные технические требования, предъявляемые к САР?
15. Что такое параметры и обобщенные координаты (переменные) САУ?
16. Что называют объектом регулирования? Каковы его параметры?
17. Что такое регулируемая (или управляемая) переменная, возмущающее (или задающее) воздействие?
18. Каковы основные виды воздействий на САР?
19. Перечислите основные функциональные элементы и нарисуйте функциональные схемы при прямом и непрямом регулировании.
20. Что такое математическая модель САР?

21. Каковы основные формы представления математической модели динамической системы?

22. Какие основные вопросы рассматриваются при исследовании динамики систем?

23. Как рассчитать статические характеристики САУ (САР)?

24. Как зависит статическая ошибка от коэффициента усиления разомкнутой системы?

25. В чем состоит задача линеаризации уравнения САР? Какова математическая основа линеаризации?

## Литература

### Основная

*Баландин Д.В., Городецкий С.Ю.* Классические и современные методы построения регуляторов в примерах. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2012. 122 с. URL: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/Controls.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/Controls.pdf) (дата обращения 28.09.2015).

*Власов К.П.* Теория автоматического управления: учеб. пособие. Харьков: Гуманитарный центр, 2007. 526 с.

*Деменков Н.В., Васильев Г.Н.* Управление техническими системами: учебник. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 399 с.

*Федотов А.В.* Основы теории автоматического управления: учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2012. 279 с.

### Дополнительная

*Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. 4-е изд., перераб. и доп. СПб.: Профессия, 2004. 752 с.

*Васильев Д.В., Чуич В.Г.* Системы автоматического управления (примеры расчета). М.: Высш. шк., 1967. 419 с.

*Востриков А.С., Французова Г.А.* Теория автоматического регулирования: учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. 364 с.

*Григорьев В.В., Лукьянова Г.В., Сергеев К.А.* Анализ систем автоматического управления: учеб. пособие. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 105 с.

*Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления / пер. с англ. Б.И. Копылова. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.

*Егунов Н.Д., Пупков К.А.* Методы классической и современной теории автоматического управления: в 5 т. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 744 с.

*Ким Д.П., Дмитриева Н.Д.* Сборник задач по теории автоматического управления. Линейные системы. URL: <http://www.studentlibrary.ru> (дата обращения 28.09.2015).

*Куропаткин П.В.* Теория автоматического управления: учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1973. 528 с.

*Лурье Б.Я., Энрайт П.Дж.* Классические методы автоматического управления / под ред. А.А. Ланнэ. СПб.: БХВ–Петербург, 2004. 640 с.

*Макаров И.М., Менский Б.М.* Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1982. 504 с.

Методические указания к курсовому проектированию по дисциплине «Теория автоматического управления». URL: <http://leg.co.ua/knigi/ucheba/teoriya-avtomaticheskogo-upravleniya-k-kurovomu-proektirovaniyu.html> (дата обращения 28.09.2015).

Пакет MBTU. URL: <http://www.mbtu.com.ru> (дата обращения 28.09.2015).

*Подлипенский В.С., Сабинин Ю.А., Юрчук Л.Ю.* Элементы и устройства автоматики: учебник для вузов. СПб.: Политехника, 1995. 472 с.

*Подчукаев В.А.* Теория автоматического управления (аналитические методы). М.: Физмалит, 2004. 392 с.

*Пошехонов Л.Б.* Основы теории управления: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ ЛЭТИ, 2006. 92 с.

Следящие приводы: в 2 т. / под ред. Б.К. Чемоданова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 640 с.

*Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В.* Теория автоматического управления техническими системами: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 492 с.

*Топчиев Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов. М.: Машиностроение, 1989. 52 с.

*Couffignal L.* La cybernétique. Paris: PUF, 1963. Coll. «Que sais-je?». No. 638. 128 p.

*Guilbaud G.T.* La cybernétique. Paris: Presses Universitaires de France. 1954. No. 638. 115 p.

## Оглавление

Предисловие .....	3
Введение .....	5
Основные понятия и определения.....	7
Классификация систем автоматического управления .....	9
Основные принципы управления .....	12
Объекты управления.....	14
Типовые сигналы в системах автоматического управления .....	15
Этапы проектирования систем автоматического управления .....	19
Математическое описание систем автоматического управления.....	22
Уравнения статики.....	23
Уравнения динамики .....	26
Линеаризация уравнений динамики.....	28
Вопросы для самопроверки .....	34
Литература.....	36

*Учебное издание*

**Задорожная** Наталья Михайловна

**Основы теории  
и проектирования систем управления**

**Методология. Математические модели**

Редактор *Е.К. Кошелева*

Корректор *Р.В. Царева*

Компьютерная графика *В.А. Филатовой*

Художник *А.С. Ключева*

Компьютерная верстка *О.В. Беляевой*

В оформлении использованы шрифты  
Студии Артемия Лебедева.

Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Подписано в печать 26.01.2016. Формат 60 × 90/16.  
Усл. печ. л. 2,5. Тираж 50 экз. Изд. № 232-2015. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
[press@bmstu.ru](mailto:press@bmstu.ru)  
[www.baumanpress.ru](http://www.baumanpress.ru)

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
[baumanprint@gmail.com](mailto:baumanprint@gmail.com)



## Издательство

МГТУ им. Н. Э.

Баумана

Каталог

Периодика

Конференции

Авторам

Услуги