

# Содержание

1	Введение	1
2	Исходные данные и исследуемая передаточная функция	2
3	Анализ результатов при $T_0 = 0,1$ с	3
3.1	Групповые графики	3
3.2	Анализ результатов	4
3.3	Выводы для $T_0 = 0,1$ с	5
4	Анализ результатов при $T_0 = 1,0$ с	5
4.1	Групповые графики	5
4.2	Анализ результатов	6
4.3	Выводы для $T_0 = 1,0$ с	7
5	Анализ результатов при $T_0 = 2,0$ с	7
5.1	Групповые графики	7
5.2	Анализ результатов	8
5.3	Выводы для $T_0 = 2,0$ с	9
	Общие выводы	9
	Приложение А. Листинг программы в MATLAB	10

# 1 Введение

Целью лабораторной работы №1 является изучение свойств дискретных моделей объектов управления и практическое освоение метода синтеза компенсационных регуляторов, обеспечивающих идеальные динамические характеристики как в разомкнутой, так и в замкнутой системах автоматического управления.

В работе исследуется непрерывная передаточная функция объекта, заданная в соответствии с вариантом задания, выполняется её дискретизация при различных периодах квантования, проводится анализ переходных характеристик и взаимного расположения нулей и полюсов в  $z$ -плоскости. Для дискретизированных моделей строятся компенсационные регуляторы, позволяющие сформировать требуемую идеальную передаточную функцию разомкнутой системы  $G_{CT}(z)$ , а также идеальную передаточную функцию замкнутой системы  $G_W(z)$ .

Основная идея метода компенсации заключается в том, что динамические свойства объекта изменяются путём введения корректирующего звена, обладающего передаточной функцией, обратной по отношению к динамике объекта. Такой подход позволяет добиться требуемых переходных процессов при сохранении устойчивости системы и возможности реализации регулятора в дискретной форме.

В отчёте приводятся:

- непрерывная передаточная функция объекта и её дискретные модели, полученные методом удержания нулевого порядка (ЗОН) для различных периодов дискретизации;
- переходные характеристики непрерывной и дискретных моделей;
- расположение полюсов и нулей в  $z$ -плоскости для каждой дискретизации;
- синтезированные компенсационные регуляторы для разомкнутой и замкнутой систем;

- анализ свойств идеальных разомкнутых и замкнутых систем в дискретной форме.

Все вычисления и визуализации выполнены при помощи пакета MATLAB.

## 2 Исходные данные и исследуемая передаточная функция

Согласно техническому заданию (вариант 1) непрерывная передаточная функция объекта имеет вид

$$G_p(s) = \frac{-1,577s^3 - 15,46s^2 - 63,09s - 107,8}{s^3 + 9,435s^2 + 40,36s + 77,27}. \quad (1)$$

Дискретная модель объекта для выбранного периода дискретизации  $T_0$  строится методом удержания нулевого порядка:

$$G_p(z; T_0) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT_0}}{s} G_p(s) \right\}. \quad (2)$$

В работе используются три значения периода дискретизации:

$$T_0 \in \{0,1; 1,0; 2,0\} \text{ с.}$$

В качестве идеальной разомкнутой системы задаётся передаточная функция

$$G_{CT}(z) = 1, \quad (3)$$

а в качестве идеальной замкнутой системы — передаточная функция

$$G_W(z) = \frac{1}{z}. \quad (4)$$

Компенсационный регулятор для разомкнутой системы определяется выражением

$$R_{ol}(z) = \frac{G_{CT}(z)}{G_p(z)} = \frac{1}{G_p(z)}, \quad (5)$$

так что разомкнутая система принимает идеальный вид

$$G_{\text{ol}}(z) = R_{\text{ol}}(z)G_p(z) = G_{\text{CT}}(z) = 1.$$

Компенсационный регулятор для замкнутой системы синтезируется из условия

$$G_W(z) = \frac{R_{\text{cl}}(z)G_p(z)}{1 + R_{\text{cl}}(z)G_p(z)},$$

откуда

$$R_{\text{cl}}(z) = \frac{1}{G_p(z)} \cdot \frac{G_W(z)}{1 - G_W(z)}. \quad (6)$$

При таком выборе регулятора замкнутая система имеет идеальную ПФ (4).

### 3 Анализ результатов при $T_0 = 0,1$ с

#### 3.1 Групповые графики

На рис. 1 представлены основные результаты моделирования для периода дискретизации  $T_0 = 0,1$  с: переходные характеристики непрерывной и дискретной моделей, а также идеальные OL/CL-системы и их расположение полюсов и нулей на  $z$ -плоскости.

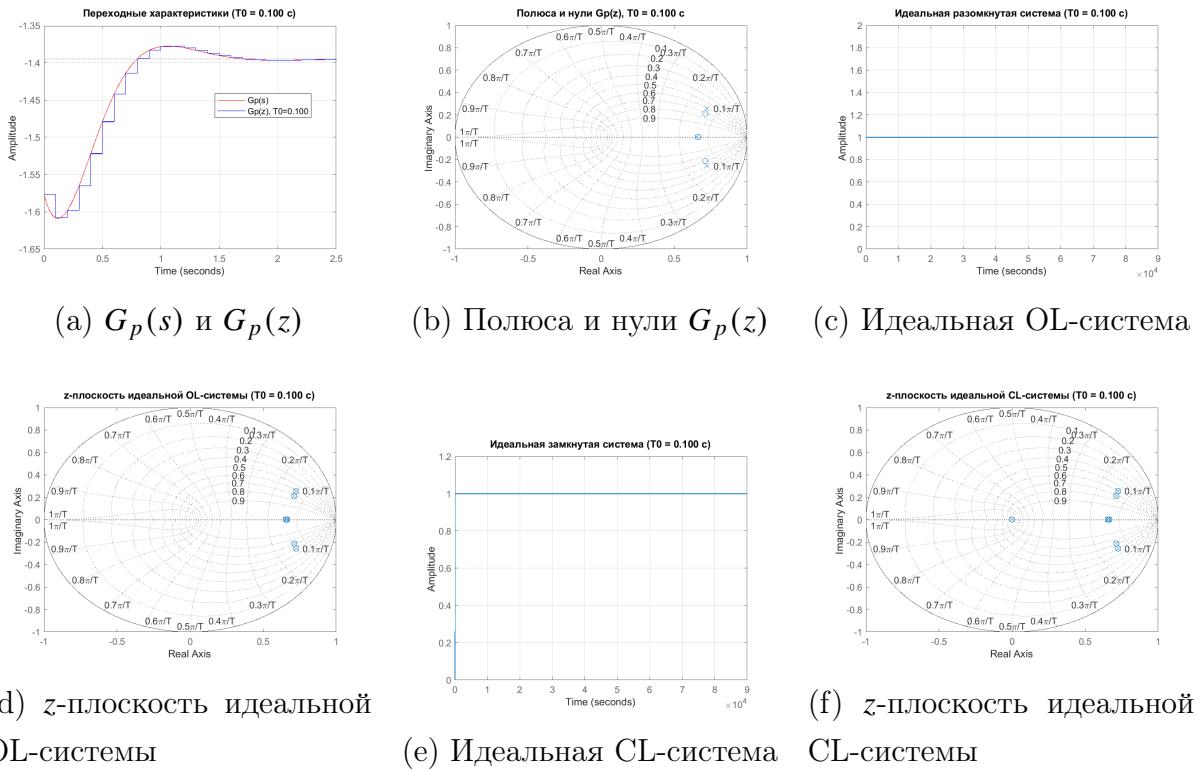


Рис. 1: Результаты моделирования для  $T_0 = 0,1$  с.

### 3.2 Анализ результатов

По верхнему левому графику на рис. 1 видно, что при малом периоде дискретизации  $T_0 = 0,1$  с дискретная модель  $G_p(z)$  хорошо аппроксимирует переходную характеристику непрерывного объекта  $G_p(s)$ : форма кривой, время установления и установившееся значение практически совпадают. Наблюдающаяся ступенчатость обусловлена работой устройства удержания нулевого порядка.

На диаграмме полюсов (верхний центральный график рис. 1) все полюса  $G_p(z)$  лежат внутри единичного круга, что соответствует устойчивой дискретной системе. Расположение полюсов вблизи действительной оси говорит об апериодическом характере переходного процесса.

После введения компенсатора  $R_{ol}(z)$  по формуле (5) разомкнутая система принимает идеальный вид  $G_{ol}(z) = 1$ , что подтверждается верхним правым графиком рис. 1: отклик на ступенчатое воздействие является постоянной функцией  $y(k) \equiv 1$ . На соответствующей диаграмме

$z$ -плоскости (нижний левый график рис. 1) полюса объекта перекрыты нулями регулятора.

Аналогично, компенсатор  $R_{\text{cl}}(z)$ , заданный соотношением (6), обеспечивает идеальную замкнутую  $\Pi\Phi$   $G_W(z) = 1/z$ . Это проявляется в нижнем центральном графике рис. 1: установка на единичное значение происходит без колебаний и статической ошибки. На нижнем правом графике видно, что в замкнутой системе остаётся характерный полюс в точке  $z = 1$ , соответствующий идеальной модели (4).

### 3.3 Выводы для $T_0 = 0,1$ с

- При  $T_0 = 0,1$  с дискретная передаточная функция  $G_p(z; T_0)$ , построенная по формуле (2), практически полностью воспроизводит динамику непрерывного объекта (1).
- Полюса  $G_p(z)$  расположены внутри единичного круга, что обеспечивает устойчивость системы.
- Компенсатор  $R_{\text{ol}}(z)$ , определяемый формулой (5), формирует идеальную разомкнутую передаточную функцию  $G_{\text{CT}}(z) = 1$ .
- Компенсатор  $R_{\text{cl}}(z)$  по формуле (6) обеспечивает идеальную замкнутую передаточную функцию  $G_W(z) = 1/z$ .

## 4 Анализ результатов при $T_0 = 1,0$ с

### 4.1 Групповые графики

На рис. 2 приведены соответствующие результаты для периода дискретизации  $T_0 = 1,0$  с.

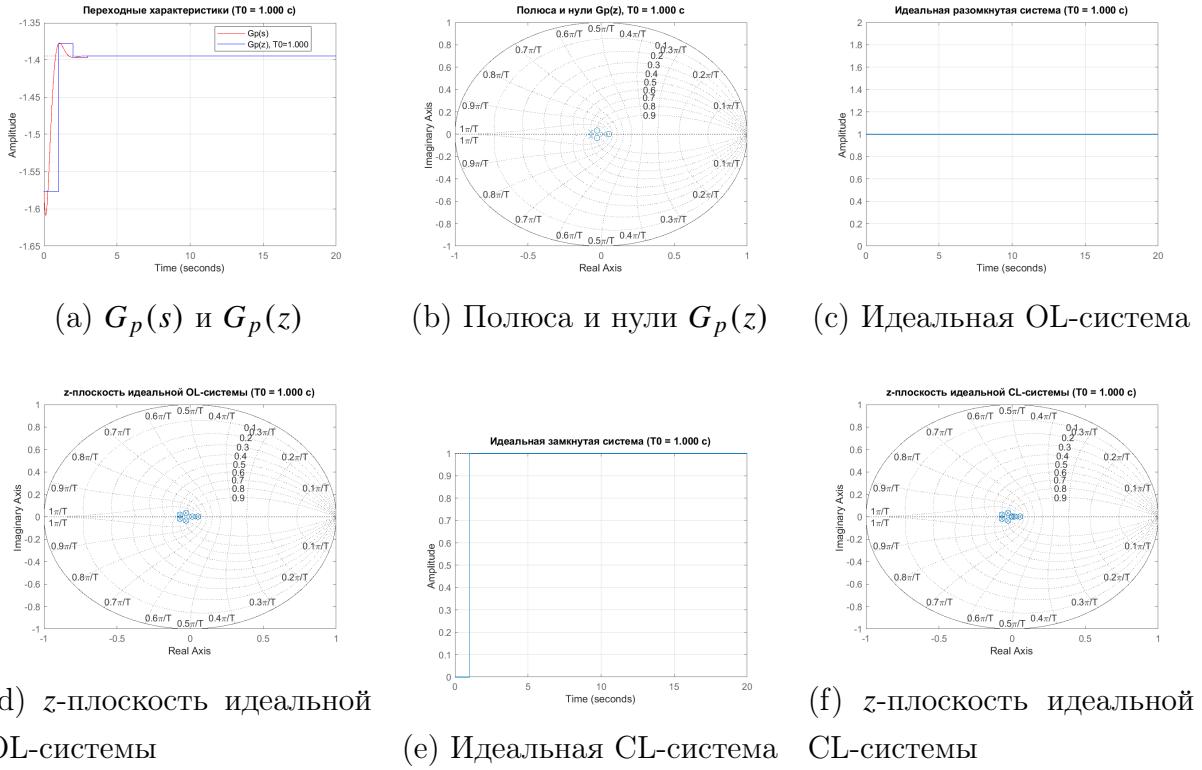


Рис. 2: Результаты моделирования для  $T_0 = 1,0$  с.

## 4.2 Анализ результатов

При увеличении периода дискретизации до  $T_0 = 1,0$  с (верхний левый график рис. 2) дискретная модель по-прежнему воспроизводит общий характер переходного процесса, однако заметно искажение начального участка: из-за редкого квантования фронт ступенчатого воздействия описывается всего несколькими отсчётами.

На диаграмме полюсов  $G_p(z)$  (верхний центральный график рис. 2) по сравнению со случаем  $T_0 = 0,1$  с полюса смещаются ближе к началу координат, что согласуется с экспоненциальным отображением  $z = e^{sT_0}$ . Устойчивость дискретной системы сохраняется, так как все полюса остаются внутри единичной окружности.

Идеальные разомкнутая и замкнутая системы, синтезированные по формулам (5)–(6), демонстрируют те же свойства, что и при малом шаге дискретизации: переходные характеристики (верхний правый и нижний центральный графики) совпадают с теоретическими (идеальная ступень-

ка и модель  $1/z$ ), а диаграммы  $z$ -плоскости (нижний ряд рис. 2) подтверждают полную компенсацию динамики объекта.

### 4.3 Выводы для $T_0 = 1,0$ с

- При  $T_0 = 1,0$  с дискретная модель  $G_p(z; T_0)$  остаётся устойчивой, но точность описания быстродействия по сравнению с  $T_0 = 0,1$  с заметно снижается.
- Полюса  $G_p(z)$  смещаются к центру единичного круга, что отражает влияние увеличенного периода квантования.
- Компенсаторы, построенные по формулам (5) и (6), продолжают обеспечивать идеальные передаточные функции  $G_{\text{CT}}(z)$  и  $G_W(z)$ .

## 5 Анализ результатов при $T_0 = 2,0$ с

### 5.1 Групповые графики

Результаты моделирования для  $T_0 = 2,0$  с сведены на рис. 3.

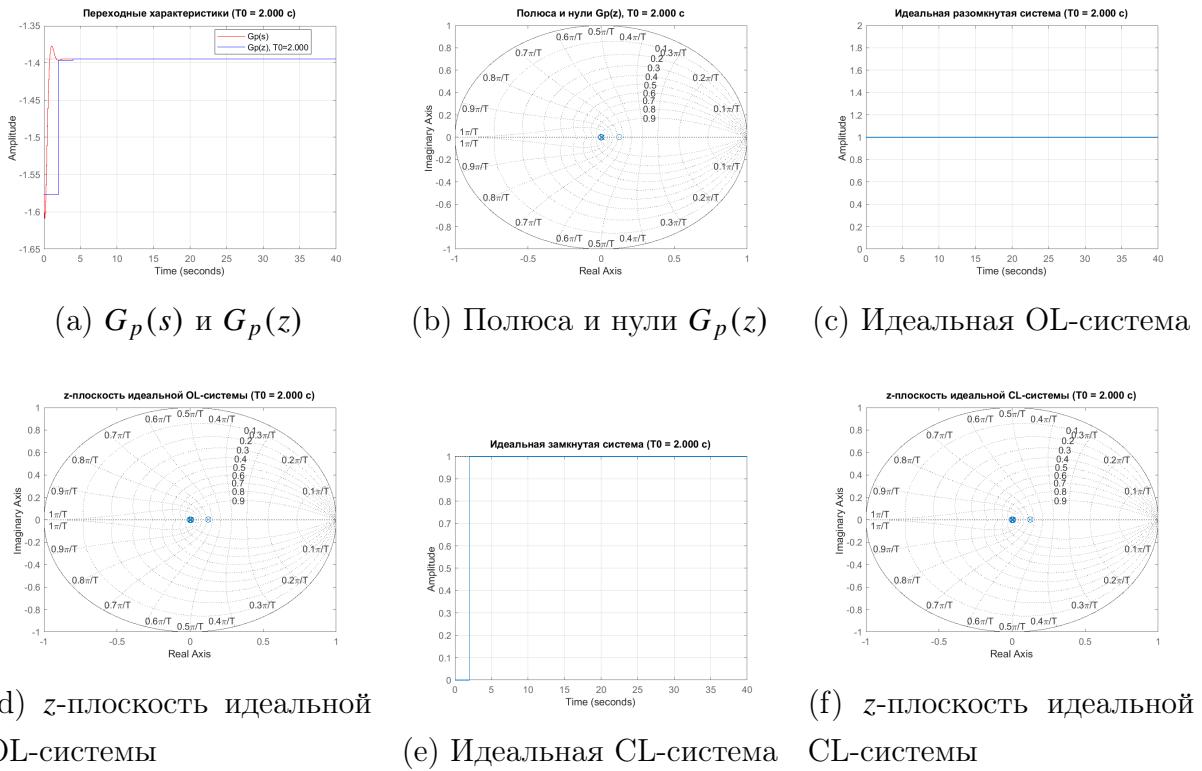


Рис. 3: Результаты моделирования для  $T_0 = 2,0$  с.

## 5.2 Анализ результатов

При дальнейшем увеличении периода дискретизации до  $T_0 = 2,0$  с дискретная модель объекта (верхний левый график рис. 3) становится заметно менее информативной: переходный процесс содержит очень небольшое число отсчётов, форма кривой грубо приближает непрерывную характеристику. Тем не менее установившееся значение сохраняется на уровне непрерывной модели.

На диаграмме полюсов  $G_p(z)$  (верхний центральный график рис. 3) видно, что все полюса сосредоточены в окрестности начала координат. Это соответствует экспоненциальному отображению  $z = e^{sT_0}$  при большом  $T_0$  и фактически «сжимает» спектр системы к нулю. Устойчивость сохраняется, однако качество дискретной модели для анализа динамики оказывается неудовлетворительным.

Идеальные OL/CL-системы, определяемые формулами (5)–(6), и в этом случае демонстрируют требуемые свойства: ступенчатый отклик и

модель  $1/z$  полностью соответствуют теории, а диаграммы на нижнем ряду рис. 3 показывают компенсацию динамики объекта.

### 5.3 Выводы для $T_0 = 2,0$ с

- Период дискретизации  $T_0 = 2,0$  с является избыточно большим для рассматриваемого объекта: переходный процесс дискретной модели слабо отражает реальную динамику.
- Полюса  $G_p(z)$  концентрируются вблизи  $z = 0$ , что является следствием большого шага дискретизации и приводит к «сжатию» спектра.
- Несмотря на ухудшение качества модели, компенсаторы по-прежнему формируют идеальные передаточные функции (3) и (4), что подтверждает корректность метода компенсации.

## Общие выводы

1. Для заданного объекта с передаточной функцией (1) дискретные модели, построенные по формуле (2), при  $T_0 = 0,1$  с обеспечивают наилучшее совпадение переходных характеристик с непрерывной системой.
2. Увеличение периода дискретизации до  $T_0 = 1,0$  и тем более до  $T_0 = 2,0$  с приводит к ухудшению качества описания быстродействия, хотя устойчивость дискретных моделей сохраняется (полюса остаются внутри единичного круга).
3. Компенсационные регуляторы, синтезированные по формулам (5) и (6), позволяют получить идеальные разомкнутую  $G_{\text{СТ}}(z) = 1$  и замкнутую  $G_W(z) = 1/z$  системы для всех рассмотренных значений  $T_0$ .

4. Метод компенсации, реализованный в дискретной форме, подтверждает свою эффективность и может быть использован для синтеза регуляторов в реальных цифровых системах управления при условии корректного выбора периода дискретизации.

## Приложение А. Листинг программы в MATLAB

Ниже приведён скрипт MATLAB, используемый для дискретизации объекта и синтеза компенсационных регуляторов для трёх значений периода дискретизации.

```

1 % 1. , 1
2
3 clc; clear; close all;
4
5 s = tf('s');           % s
6 T0 = [0.1 1.0 2.0];    % ,
7
8 %
9 Gp = (-1.577*s^3 - 15.46*s^2 - 63.09*s - 107.8)/ ...
10   (s^3 + 9.435*s^2 + 40.36*s + 77.27);
11
12 for i = 1:numel(T0)
13   T = T0(i);
14
15   % --- 1. ---
16   Gp_d = c2d(Gp, T, 'zoh');
17
18   % Gp(s) Gp(z)
19   figure;
20   step(Gp, 'r', Gp_d, 'b');
21   grid on;
22   legend('Gp(s)', sprintf('Gp(z), T0=%1f c', T), 'Location', 'Best');
```

```

23 title(sprintf(' (T0=%1f c)', T));
24 xlabel('Time, s'); ylabel('Amplitude');
25 saveas(gcf, sprintf('step_Gp_T%.3f.png', T));
26
27 % Gp(z)
28 figure;
29 pzmap(Gp_d); grid on;
30 title(sprintf(' Gp(z), T0=%1f c', T));
31 saveas(gcf, sprintf('pz_Gp_T%.3f.png', T));
32
33 % --- 2. ---
34 Rol = 1 / Gp_d;
35 Gol = Rol * Gp_d; % Gol(z) = 1
36
37 figure;
38 step(Gol); grid on;
39 title(sprintf(' OL-, T0=%1f c', T));
40 ylim([0 2]);
41 saveas(gcf, sprintf('step_ideal_DL_T%.3f.png', T));
42
43 figure;
44 pzmap(Gol); grid on;
45 title(sprintf('z- OL, T0=%1f c', T));
46 saveas(gcf, sprintf('pz_ideal_DL_T%.3f.png', T));
47
48 % --- 3. ---
49 z = tf('z', T);
50 Gw = 1 / z;
51 Rcl = (1 / Gp_d) * Gw / (1 - Gw);
52 Gcl = feedback(Rcl * Gp_d, 1);
53
54 figure;

```

```
55 step(Gcl); grid on;
56 title(sprintf(' CL-, T0=%1f c', T));
57 ylim([0 1.2]);
58 saveas(gcf, sprintf('step_ideal_CL_T%.3f.png', T));
59
60 figure;
61 pzmap(Gcl); grid on;
62 title(sprintf('z- CL, T0=%1f c', T));
63 saveas(gcf, sprintf('pz_ideal_CL_T%.3f.png', T));
64 end
```

Листинг 1: Скрипт моделирования и синтеза компенсаторов